

IV. Raumgitterzahlen.

Tafel der Raumgitterzahlen von 0—100.

0	$38 = 6^2 + 1 + 1 = 5^2 + 3^2 + 2^2$
$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$	[39]
$2 = 1 + 1$	$40 = 6^2 + 2^2$
$3 = 1 + 1 + 1$	$41 = 6^2 + 2^2 + 1 = 4^2 + 4^2 + 3^2 = 5^2 + 4^2$
$4 = 2^2$	$42 = 5^2 + 4^2 + 1$
$5 = 2^2 + 1$	$43 = 5^2 + 3^2 + 3^2$
$6 = 2^2 + 1 + 1$	$44 = 6^2 + 2^2 + 2^2$
[7]	$45 = 5^2 + 4^2 + 2^2 = 6^2 + 3^2$
$8 = 2^2 + 2^2$	$46 = 6^2 + 3^2 + 1$
$9 = 2^2 + 2^2 + 1 = 3^2$	[47]
$10 = 3^2 + 1$	$48 = 4^2 + 4^2 + 4^2$
$11 = 3^2 + 1 + 1$	$49 = 6^2 + 3^2 + 2^2 = 7^2$
$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$	$50 = 5^2 + 5^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2 = 7^2 + 1$
$13 = 3^2 + 2^2$	$51 = 5^2 + 5^2 + 1 = 7^2 + 1 + 1$
$14 = 3^2 + 2^2 + 1$	$52 = 6^2 + 4^2$
[15]	$53 = 6^2 + 4^2 + 1 = 7^2 + 2^2$
$16 = 4^2$	$54 = 5^2 + 5^2 + 2^2 = 6^2 + 3^2 + 3^2 = 7^2 + 2^2 + 1$
$17 = 4^2 + 1 = 3^2 + 2^2 + 2^2$	[55]
$18 = 3^2 + 3^2 = 4^2 + 1 + 1$	$56 = 6^2 + 4^2 + 2^2$
$19 = 3^2 + 3^2 + 1$	$57 = 5^2 + 4^2 + 4^2 = 7^2 + 2^2 + 2^2$
$20 = 4^2 + 2^2$	$58 = 7^2 + 3^2$
$21 = 4^2 + 2^2 + 1$	$59 = 5^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 3^2 + 1$
$22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$	[60]
[23]	$61 = 6^2 + 4^2 + 3^2 = 6^2 + 5^2$
$24 = 4^2 + 2^2 + 2^2$	$62 = 6^2 + 5^2 + 1 = 7^2 + 3^2 + 2^2$
$25 = 4^2 + 3^2 = 5^2$	[63]
$26 = 5^2 + 1 = 4^2 + 3^2 + 1$	$64 = 8^2$
$27 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 1 + 1$	$65 = 6^2 + 5^2 + 2^2 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1$
[28]	$66 = 5^2 + 5^2 + 4^2 = 7^2 + 4^2 + 1 = 8^2 + 1 + 1$
$29 = 5^2 + 2^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$	$67 = 7^2 + 3^2 + 3^2$
$30 = 5^2 + 2^2 + 1$	$68 = 6^2 + 4^2 + 4^2 = 8^2 + 2^2$
[31]	$69 = 7^2 + 4^2 + 2^2 = 8^2 + 2^2 + 1$
$32 = 4^2 + 4^2$	$70 = 6^2 + 5^2 + 3^2$
$33 = 4^2 + 4^2 + 1 = 5^2 + 2^2 + 2^2$	[71]
$34 = 4^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 3^2$	$72 = 6^2 + 6^2 = 8^2 + 2^2 + 2^2$
$35 = 5^2 + 3^2 + 1$	$73 = 8^2 + 3^2 = 6^2 + 6^2 + 1$
$36 = 4^2 + 4^2 + 2^2 = 6^2$	$74 = 7^2 + 4^2 + 3^2 = 7^2 + 5^2 = 8^2 + 3^2 + 1$
$37 = 6^2 + 1$	

$$75 = 5^2 + 5^2 + 5^2 = 7^2 + 5^2 + 1$$

$$76 = 6^2 + 6^2 + 2^2$$

$$77 = 6^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2$$

$$78 = 7^2 + 5^2 + 2^2$$

79

$$80 = 8^2 + 4^2$$

$$81 = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 7^2 + 4^2 + 4^2 = 8^2 + 4^2 + 1 = 9^2$$

$$82 = 8^2 + 3^2 + 3^2 = 9^2 + 1$$

$$83 = 7^2 + 5^2 + 3^2 = 9^2 + 1 + 1$$

$$84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$$

$$85 = 7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2$$

$$86 = 9^2 + 2^2 + 1 = 6^2 + 5^2 + 5^2$$

87

$$88 = 6^2 + 6^2 + 4^2$$

$$89 = 7^2 + 6^2 + 2^2 = 8^2 + 5^2 = 9^2 + 2^2 + 2^2$$

$$90 = 7^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 5^2 + 1 = 9^2 + 3^2$$

$$91 = 9^2 + 3^2 + 1$$

92

$$93 = 8^2 + 5^2 + 2^2$$

$$94 = 7^2 + 6^2 + 3^2 = 9^2 + 3^2 + 2^2$$

95

$$96 = 8^2 + 4^2 + 4^2$$

$$97 = 6^2 + 6^2 + 5^2 = 9^2 + 4^2$$

$$98 = 8^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 7^2 = 9^2 + 4^2 + 1$$

$$99 = 7^2 + 5^2 + 5^2 = 7^2 + 7^2 + 1 = 9^2 + 3^2 + 3^2$$

$$100 = 8^2 + 6^2 = 10^2$$

In vorstehender Tafel der Raumgitterzahlen (GZ) sind diejenigen Zahlen (NGZ), die sich nicht in die Summe dreier QZ zerlegen lassen, besonders hervorgehoben.

Ist $GZ = a^2 + b^2 + c^2$ und p eine beliebige ganze Zahl, so ist

$$p^2 GZ = (ap)^2 + (bp)^2 + (cp)^2$$

woraus sich sofort der Satz ergibt:

1. Satz. Eine GZ mit p^2 multipliziert ist wieder eine GZ.

2. Satz. Eine NGZ mit p^2 multipliziert ist wieder eine NGZ, z. B. $7 \cdot 2^2 = 28$.

3. Satz. Die NGZ sind Zahlen von der Form $(8n - 1)p^2$, wo n und p beliebige ganze Zahlen sind.*)

*) Legendre, Theorie des nombres, S. 321 beweist, dass $(8n + 7)2^{2k}$ keine „trinäre“ Form sein kann. Er geht davon aus, dass jede gerade Quadratzahl durch $4m$, jede ungerade durch $8n + 1$ dargestellt werden kann. Ist die Summe dreier Quadratzahlen ungerade, so kann sie nur durch eine der Formen

$$8p + 1 + 8q + 1 + 8r + 1 = 8k + 3$$

$$4p + 4q + 8r + 1 = 8k + 1$$

dargestellt werden, welche die Form $(8n + 7)$ nicht einschliessen u. s. f. Eine wenig geänderte Beweisführung ist die folgende:

Daraus folgt sofort der bekannte Satz, dass alle ganzen Zahlen sich in die Summe von 4 Quadratzahlen zerlegen lassen; denn betrachtet man die einer NGZ vorausgehende Zahl der Tabelle, so braucht man nur 1 zu addieren, um die Richtigkeit des Satzes einzusehen.**)

4. Satz. Zahlen, die auf mindestens 2 verschiedene Arten in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden können, stellen sich dar a) in der Form q^n , wo q eine beliebige ganze Zahl, ausgenommen die Potenzen von 2, da 2^n stets eine einfache GZ; b) in der Form $(8n+1)r$, wo r jede beliebige Zahl sein kann, ausgenommen die NGZ.

5. Satz. $NGZ(8n+1) = NGZ$

Die durch Probieren gefundenen Sätze 4 u. 5 könnten nur dann bewiesen werden, wenn es gelänge, das Problem der Streckenmultiplikation in die räumliche Geometrie zu übertragen. Dass dieses Problem aber im dreidimensionalen Raum nicht allgemein gelöst werden kann, folgt aus dem Beispiel 3.5, wo die einzelnen Faktoren als Vektorenquadrate dargestellt werden können, nicht aber ihr Produkt. Lipschitz hat gezeigt, dass dieses Produkt ein Quaternion ist.***)

Die Regel für die Multiplikation von Quaternionen kann dem folgenden Schema†) entnommen werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -1 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -1 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -1 \end{vmatrix}$$

Der Wert des Produktes $e_i e_k$ ist in der Horizontalreihe enthalten, die links e_i und in der Vertikelreihe, die oben e_k enthält. Danach ergibt sich

$$(1 + 2e_1)(1 + e_1 + e_2) = -1 + 3e_1 + e_2 + 2e_3$$

d. h. $(1 + 2^2)(1 + 1 + 1) = 1 + 3^2 + 1 + 2^2$

Alle Zahlen lassen sich in einer der folgenden Formen darstellen

$$8n, 8n+1, 8n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6, 8n+7$$

Ihre Quadrate sind daher von der Form

$$8n_1, 8n_1+1, 8n_1+4$$

Bildet man die Summe von 3 Quadratzahlen, so sind nur die Formen $8n, 8n+1, 8n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6$ möglich und nur wenn man die Summe von 4 Quadratzahlen bildet, kann auch die Form $8n+7$ auftreten. Alle Zahlen von der Form $8n+7$ können als Summen von 4 Quadratzahlen hergestellt werden, von denen 3 ungerade Zahlen sind, während die vierte von der Form $4n+2$ ist.

**) Aus der von Schering in Crelles Journal, Bd 115, S. 301 angegebenen Formel

$$(m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2 = (m^2 + n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2mp + 2nq)^2 + (2mp - 2nq)^2$$

folgt der Satz, dass das Quadrat jeder Zahl, ausgenommen die Potenzen von 2 (bei denen p und q gleich 0), sich in die Summe dreier Quadrate zerlegen lässt.

**) Lipschitz, Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn. 1886. S. 53.

†) E. Study, Theorie der komplexen Grössen. S. 167. Encyclopaedie der meth. Wiss. I. A.4. Auf diese Arbeit bin ich in dankenswerter Weise von H. Prof. Dr. Mehmke aufmerksam gemacht worden.

Die Zahlentheorie hat die Aufgabe gelöst, ein ganzzahliges Quaternion, dessen Norm (hier 15) gegeben ist, in Primquaternionen zu zerlegen. Den dreigliedrigen Quaternionen (sagen wir Ternionen), die für die Zwecke unserer Aufgabe allein in Betracht kommen, hat diese Theorie noch keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Insbesondere ist die Frage zu lösen: Unter welchen Umständen ist das Produkt zweier Ternionen wieder ein Ternion?

Da es gleichgültig ist, welche der 3 Einheiten e_1 , e_2 oder e_3 verschwindet, so setzen wir

$$e_3 = 0$$

Das Produkt zweier Ternionen ist

$$(x_1 + e_1 y_1 + e_2 z_1) (x_2 + e_1 y_2 + e_2 z_2) \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + e_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + e_2 (x_1 z_2 + z_1 x_2) + e_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

Das Produkt zweier Ternionen ist also wieder ein Ternion, wenn

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0$$

Das Multiplikationsschema ist

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$(1 + e_1 + 2 e_2) (1 + 2 e_1 + 4 e_2) = -9 + 3 e_1 + 6 e_2$$

d. h.

$$[1.1.2] \cdot [1.2.4] = [9.3.6]$$

oder

$$(1 + 1 + 2^2) (1 + 2^2 + 4^2) = (9^2 + 3^2 + 6^2)$$

Dass das hier gewonnene Resultat nicht genügt, zeigt schon die Multiplikation mit $2 = [1.1.0]$. Sie kann mit der gefundenen Regel nur durchgeführt werden für $z_1 = 0$, oder $x_1 = y_1$. Es widerstrebt z. B.

$$[1.1.0] \cdot [4.2.1]$$

und doch wissen wir, dass ein Ternion der Form $[5.4.1]$ herauskommen muss. Am Schluss der folgenden geometrischen Betrachtung wird gezeigt werden, wie das letzte Ternion aus den beiden ersten abgeleitet werden kann.

Streckenmultiplikation im Raum.

Sind $[x_1 y_1 z_1]$ und $[x_2 y_2 z_2]$ zwei Vektoren, $[x y z]$ ein dritter Vektor, dessen Tensor gleich dem Produkt der Tensoren der beiden ersten sein soll, so ist

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

Vorerst möge angenommen werden, dass die 3 Vektoren mit dem Einheitsvektor $[1.0.0]$ in einer Ebene liegen, deren Gleichung

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y z_1 - y_1 z = 0$$

dann ist $\cos [x_1 \cdot y_1 \cdot z_1] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

der $\sin [x_1 \cdot y_1 \cdot z_1] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{\sqrt{y_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

$\cos [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$\sin [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{\sqrt{y_2^2 + z_2^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$\cos [x \cdot y \cdot z] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Und da bei der Streckenmultiplikation in der Ebene der letzte Winkel gleich der Summe der beiden ersten ist, so folgt

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x_1 x_2 + \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2)}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

oder mit Hilfe von Gleichung (1)

$$(3) \quad x = x_1 x_2 + \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2)}$$

Die Wurzel wird rational, wenn

$$(4) \quad y_2 = p y_1 \text{ und } z_2 = p z_1$$

Aus (2) folgt (5) $z = \frac{z_1}{y_1} y$

und somit $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \frac{y_1^2 + z_1^2}{y_1^2} y^2$

oder nach (1) $y^2 \frac{y_1^2 + z_1^2}{y_1^2} = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + p^2 y_1^2 + p^2 z_1^2) - x^2$

und mit Hilfe von (3)

$$\begin{aligned} &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 p^2 (y_1^2 + z_1^2) + x_2^2 (y_1^2 + z_1^2) \\ &\quad + p^2 (y_1^2 + z_1^2)^2 - x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2 p (y_1^2 + z_1^2) \\ &\quad - (y_1^2 + z_1^2)^2 p^2 \\ &= (y_1^2 + z_1^2) (p^2 x_1^2 + 2 p x_1 x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

woraus der Wert für y folgt. Wir haben

$$(6) \quad \begin{cases} x = x_1 x_2 \pm p (y_1^2 + z_1^2) = x_1 x_2 \pm y_1 y_2 \pm z_1 z_2 \\ y = \pm y_1 (p x_1 \mp x_2) = \pm (x_1 y_2 \mp x_2 y_1) \\ z = \pm z_1 (p x_1 \mp x_2) = \pm (x_1 z_2 \mp z_1 x_2) \end{cases}$$

wo entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gelten, und sind jetzt in der Lage, die folgende Multiplikation auszuführen:

$$[112] [124] = \begin{Bmatrix} [11 \cdot \underline{+1} \cdot \underline{+2}] \\ [-9 \cdot \underline{+3} \cdot \underline{+6}]^* \end{Bmatrix}$$

das nämliche Resultat, das wir durch Multiplikation der beiden Ternionen

$$(\pm x_1 \pm e_1 y_1 \pm e_2 z_1) (\pm x_2 \pm e_1 y_2 \pm e_2 z_2)$$

erhalten.

Vermittelst der Streckenmultiplikation kann jeder Vektor quadriert werden. Mit Berücksichtigung der verschiedenen Vorzeichen erhält man nur die beiden wesentlich verschiedenen Resultate:

$$\begin{aligned} (x + e_1 y + e_2 z)^2 &= x^2 - y^2 - z^2 + 2 e_1 x y + 2 e_2 x z \\ (x + e_1 y + e_2 z) (x - e_1 y - e_2 z) &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\text{Es ist somit} \quad [a \cdot b \cdot c]^2 = \begin{Bmatrix} [a^2 - b^2 - c^2 \cdot 2 a b \cdot 2 a c] \\ [a^2 + b^2 + c^2 \cdot 0 \cdot 0] \end{Bmatrix}$$

Man sieht auch unmittelbar, dass

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4 a^2 b^2 + 4 a c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Beispiel:

$$[2 \cdot 2 \cdot 1]^2 = [-1 \cdot 8 \cdot 4] = 9^2 \text{ und } [1 \cdot 2 \cdot 2]^2 = [7 \cdot 4 \cdot 4] = 9^2$$

Eine zweite Zerlegung für 81 liefert der Vektor $3 [2 \cdot 2 \cdot 1] = [6 \cdot 6 \cdot 3]$.

Die erhaltenen Formeln bieten die Möglichkeit, aus einem Vektor die Quadratwurzel zu ziehen. Ist $[a \cdot b \cdot c]$ der gegebene Vektor, $[x \cdot y \cdot z]$ die gesuchte Quadratwurzel, so hat man

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 &= a \\ 2 x y &= b \\ 2 x z &= c \\ \hline (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Besonders einfach wird die Lösung, wenn $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \pm d \\ y^2 + z^2 &= \frac{1}{2} (-a \pm d) \\ x^2 &= \frac{1}{2} (a \pm d) \\ y^2 &= \frac{b^2}{2 (a \pm d)} \\ z^2 &= \frac{c^2}{2 (a \pm d)} \end{aligned}$$

*) Es ist sehr einfach die mechanische Regel abzuleiten, vermittelt welcher die beiden verschiedenen Multiplikationsresultate erhalten werden, wenn man die beiden Vektoren untereinander schreibt:

$$\begin{array}{r} 11 \cdot 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 \cdot 4 \\ \hline 9 \cdot 3 \cdot 6 \end{array}$$

Beispiel. $[6.3.2] = [7.0.0]$ gibt

$$\left[\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{26}} \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} \right]^2 = \begin{Bmatrix} [7.0.0] \\ [6.3.2] \end{Bmatrix}$$

Versucht man die Streckenmultiplikation in der Weise zu verallgemeinern,

dass $\angle [x.y.z] [x_1.y_1.z_1] = [x_2.y_2.z_2] [1.0.0]$

und $\angle [x.y.z] [y_2.x_2.z_2] = [x_1.y_1.z_1] [1.0.0]$

so erhält man das folgende System von Gleichungen

$$\text{I. } x^2 + y^2 + z^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

$$\text{II. } xx_1 + yy_1 + zz_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) x_2$$

$$\text{III. } xx_2 + yy_2 + zz_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) x_1$$

das nur für den Fall rationale Werte zu ergeben scheint, wenn, wie bisher, angenommen worden, die beiden zu multiplizierenden Vektoren mit dem Einheitsvektor in einer Ebene liegen.

Beispiel. $[1.2.1] [4.2.1] = [\bar{1}.10.5]$

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 126 \\ x + 2y + z & = & 24 \quad -1 \\ 4x + 2y + z & = & 21 \quad +1 \\ \hline 3x & = & -3 \\ x & = & -1 \quad \text{u. s. f.} \end{array}$$

Multiplikation durch Koordinatentransformation.*)

Jedem Punkt mit ganzzahligen Koordinaten entspricht ein Punkt des kubischen Raumgitters mit einer Würfelkante gleich der Einheit. Andere kubische Raumgitter findet man durch Aufsuchen dreier Vektoren derselben Form, die aufeinander senkrecht stehen:

$$[a.b.c] [b.c.a] [c.a.b]$$

also durch Auflösung der Gleichung

$$ab + bc + ac = 0$$

eines Kegels. Die Axen des Koordinatensystems sind Mantellinien. Die Schnitte mit Ebenen parallel einer Axenebene sind Hyperbeln, deren reelle Axe in die Halbierungslinie des Winkels zweier Koordinatenachsen fällt; auf dieser liegen die ersten Gitter-

*) Soll ein Gitter in ein anderes verwandelt werden, dessen Grundspat durch die Vektoren $[a_1 b_1 c_1]$, $[a_2 b_2 c_2]$, $[a_3 b_3 c_3]$ bestimmt ist und sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes im neuen System x, y, z , so ist der zu ihm gehörige Vektor

$$x [a_1 b_1 c_1] + y [a_2 b_2 c_2] + z [a_3 b_3 c_3]$$

und wenn X, Y, Z die Koordinaten des nämlichen Punktes im alten Gitter, so folgt

$$\begin{cases} X = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{cases}$$

punkte; es sind aber noch weitere vorhanden, wie die nähere Untersuchung zeigt. Man erhält für

$$\begin{aligned} c &= -1 : [2.2.1] \\ c &= -2 : [4.4.2], [6.3.2] \\ &= -3 : [6.6.3], [12.4.3] \\ &\quad [8.4.4], [12.6.4], [20.5.4] \\ &\quad [10.10.5], [30.6.5] \\ &\quad [12.12.6], [15.10.6], [24.8.6], [42.7.6] \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Die absoluten Multiplikatoren sind demnach

$$[2.2.1], [6.3.2], [12.4.3], [20.5.4], [15.10.6], [42.7.6] \dots$$

und deren Vielfache. Allgemein

$$[m \ n \ (n+p) \cdot m \ p \ (n+p) \cdot m \ n \ p]$$

Jeder beliebige Vektor kann mit einem absoluten Multiplikator $[a \cdot b \cdot c]$ nach folgendem Schema multipliziert werden:

$$[x \cdot y \cdot z] \cdot [a \cdot b \cdot c] = x [a \cdot b \cdot c] + y [b \cdot c \cdot a] + z [c \cdot a \cdot b]$$

Der Punkt $[x \cdot y \cdot z]$ im neuen Gitter hat die Koordinaten

$$X = a x + b y + c z$$

$$Y = b x + c y + a z$$

$$Z = c x + a y + b z$$

Der Spat des neuen Gitters hat den Inhalt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}$$

wo

$$a b + b c + a c = 0$$

Unter der nämlichen Bedingung ist also

$$**) (x^2 + y^2 + z^2) (a^2 + b^2 + c^2) = (a x + b y + c z)^2 + (b x + c y + a z)^2 + (c x + a y + b z)^2$$

Betrachtet man nochmals die allgemeine Form des absoluten Multiplikators und bemerkt, dass

$$n^2 (n+p)^2 + p^2 (n+p)^2 + n^2 p^2 = (n^2 + n p + p^2)^2$$

woraus

$$x = \frac{\begin{vmatrix} X & a_2 & a_3 \\ Y & b_2 & b_3 \\ Z & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & X & a_3 \\ b_1 & Y & b_3 \\ c_1 & Z & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & X \\ b_1 & b_2 & Y \\ c_1 & c_2 & Z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ist die Nennerdeterminante gleich 1, so hat der Spat des neuen Gitters den nämlichen Inhalt wie der des alten und die Anzahl der Gitterpunkte ist in beiden Gittern gleich gross.

E. Sommerfeld. Geometrische Kristallographie. Leipzig 1906. S. 84 und 85.

**) Diese Formel wurde zuerst von Catalan auf anderem Wege gefunden. Atti Nuovi Lincei 35. S. 103; auf die Arbeiten von Catalan bin ich in dankenswerter Weise von H. Prof. Dr. Wölfling aufmerksam gemacht worden.

so findet man den Satz:

Zahlen von der Form $m^2(n^2 + np + p^2)$ lassen sich in die Summe dreier Quadrate

$$a^2 = m^2 n^2 (n + p)^2$$

$$b^2 = m^2 p^2 (n + p)^2$$

$$c^2 = n^2 p^2$$

zerlegen, die mit jeder beliebigen Summe dreier Quadrate $(x^2 + y^2 + z^2)$ nach dem Schema (**) multipliziert werden können. Solche Zahlen sind

$$3^2, 6^2, 7^2, 9^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 18^2, 19^2, 21^2 \text{ u. s. f.}$$

$$\text{Es ist z. B. } 7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2 \text{ aber } a = 6, b = 3, c = -2$$

$$(3^2 + 2^2 + 1)(6^2 + 3^2 + 2^2) = 22^2 + 11^2 + 9^2$$

Die Multiplikation der Vektoren ist entschieden vorzuziehen; dabei erhält man 8 verschiedene Resultate:

$$[3 \cdot 2 \cdot 1] \cdot [6 \cdot 3 \cdot 2] = 3 [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [3 \cdot 2 \cdot 6] + [2 \cdot 6 \cdot 3] = [22 \cdot 11 \cdot 9]$$

$$+ \quad + \quad - \quad [26 \cdot 1 \cdot 3]$$

$$+ \quad - \quad + \quad [10 \cdot 19 \cdot 15]$$

$$+ \quad - \quad - \quad [14 \cdot 7 \cdot 21]$$

$$\text{und} \quad 1 \cdot [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [3 \cdot 2 \cdot 6] + 3 [2 \cdot 6 \cdot 3] = [6 \cdot 17 \cdot 19]$$

$$+ \quad + \quad - \quad [18 \cdot 19 \cdot 1]$$

$$+ \quad - \quad + \quad [6 \cdot 25 \cdot 5]$$

$$+ \quad - \quad - \quad [6 \cdot 11 \cdot 23]$$

Setzt man

$$(x e_1 + y e_2 + z e_3)(a e_1 + b e_2 + c e_3) = a x e_1^2 + b x e_1 e_2 + c x e_1 e_3 + a y e_2 e_1 + b y e_2^2 + c y e_2 e_3 + a z e_3 e_1 + b z e_3 e_2 + c z e_3^2$$

so heisst das Multiplikationsthema

$$X = (a x + b y - c z) e_1$$

$$Y = (b x - c y + a z) e_2$$

$$Z = (-c x + a y + b z) e_3$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & e_2 & -e_3 \\ e_2 & e_3 & e_1 & -e_2 \\ e_3 & e_2 & e_3 & -e_1 \end{vmatrix}$$

Anstatt die Glieder des Multiplikanden zu verändern, könnte man sich anderer Multiplikatoren bedienen:

$$3 [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [3 \cdot 2 \cdot 6] + [2 \cdot 6 \cdot 3] = [14 \cdot 7 \cdot 21]$$

Man erhält dabei aber keine neuen Resultate; ebensowenig bei der Vertauschung:

$$3 [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [2 \cdot 6 \cdot 3] + [3 \cdot 2 \cdot 6] = [19 \cdot 1 \cdot 18]$$

Das Schema ist jetzt

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & -e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & e_3 & -e_1 \\ e_3 & e_3 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}$$

Es gibt 48 verschiedene Vektoren derselben Form $[a.b.c]$, welche den Flächen eines Hexakisoktaeders entsprechen. Sucht man die Anzahl der wesentlich verschiedenen Vektorentripel (dreier aufeinander senkrechten Vektoren), so ist zunächst zu bemerken, dass ein diametral entgegengesetztes kein neues Multiplikationsresultat liefert. Die 24 übrig bleibenden werden zu je dreien zusammengefasst. Der dualistisch entsprechende Satz heisst: Einem Hexakisoktaeder lassen sich 8 verschiedene Rhomboeder umschreiben. Die Flächen der Formen $(6.3.2)$, $(12.4.3)$, $(15.10.6)$ u. s. f.

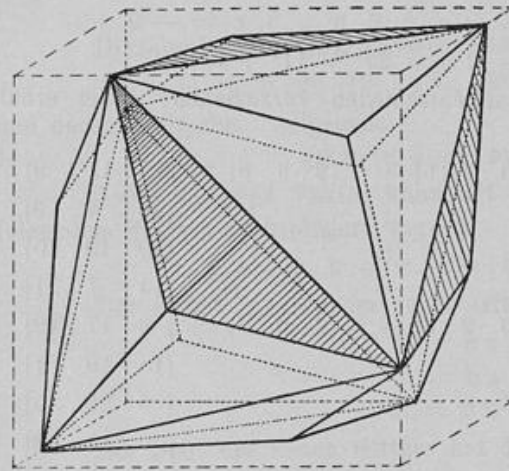


Fig. 30.

lassen sich zu je 6 als Würfel zusammenfassen; man könnte sie Oktakishexaeder nennen. Der Pyramidenwürfel $(2.2.1)$ ist ein Tetrakishexaeder (Fig. 30). (Die parallel ihrer Symmetrieaxe schraffierten Flächen liegen in den Würfelflächen. Man darf sie sich nur nach dieser Axe gebrochen denken, um eine Vorstellung vom Oktakishexaeder zu bekommen.)

Entgegen der Multiplikation mit absoluten Multiplikatoren ist eine solche mit anderen Vektoren, die Koordinatentransformation oder das Multiplikationsschema, vom Multiplikanden abhängig (relative Multiplikation). Als Beispiel diene die Multiplikation mit 2. Hier scheint die Transformation mit

dem Spat $[1.1.0]$, $[\bar{1}.1.0]$, $[1.0.1]$ durchgeführt werden zu können, denn es ist

$$[1.1.0] \cdot [1.1.1] = [1.1.0] + [\bar{1}.1.0] + [1.0.1] = [\bar{1}.2.1]$$

$$[1.1.0] \cdot [2.1.0] = 2[1.1.0] + [\bar{1}.1.0] = [1.3.0]$$

$$[1.1.0] \cdot [2.2.1] = 2[1.1.0] + 2[\bar{1}.1.0] + [1.0.1] = [1.4.1]$$

aber für die folgenden Multiplikationen mit $[2.1.1]$ und $[3.1.0]$ muss ein anderer Spat gewählt, oder es müssen die Multiplikanden verändert werden:

$$[1.1.0] \cdot [1.1.2] = [1.1.0] + [\bar{1}.1.0] + 2[1.0.1] = [2.2.2]$$

$$[1.1.0] \cdot [1.3.0] = [1.1.0] + 3[\bar{1}.1.0] = [2.4.0]$$

Die Multiplikation mit $[3.2.1]$ ist auf keine Weise durchführbar, was mit der Tatsache in Einklang steht, dass 28 nicht in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden kann. Dagegen erhält man

$$[1.1.0] \cdot [4.2.1] = 4[1.1.0] + 2[1.0.1] + [\bar{1}.0.1] = [5.4.1]$$

Diese Multiplikation ist in der Ebene der Vektoren $[1.1.0]$ und $[1.0.1]$ ausgeführt; denn $4[1.1.0] + [1.0.1] = [5.4.1]$; der Spat ist auf einen Rhombus reduziert, bei dem eine Seite doppelt zu nehmen ist.

Bei der Streckenmultiplikation

$$[x \cdot y \cdot z] = [x_1 \cdot y_1 \cdot z_1] \cdot [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2]$$

wurde S. 67 gefunden

$$(3) \ x = x_1 x_2 \pm \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2)}$$

S. 69

$$7 = \left[\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{26}} \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} \right]$$

gibt mit

$$[0.1.1] \quad \text{multipliziert nach Gleichung (3)}$$

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{9}{26} + \frac{2}{13}\right)(1+1)} = \pm 1$$

Zur Berechnung von y und z hat man

$$(1) \ x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$(2) \ y z_1 - y_1 z = 0 \text{ d. h. } y \sqrt{\frac{13}{2}} = z \sqrt{\frac{9}{26}}$$

$$y = \frac{3}{2} z$$

Somit

$$y = \pm 3, z = \pm 2$$

Zur Verallgemeinerung der Methode setzen wir

$$a = \left[\sqrt{\frac{a+b}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2-b^2-c^2}{2(a+b)}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right]$$

Bei der Multiplikation mit [0.1.1] wird

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}} \cdot 2 = \pm \sqrt{a-b} = \pm p$$

$$a = \left[\sqrt{\frac{2a-p^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p^2(2a-p^2)-2c}{2(2a-p^2)}} \cdot \sqrt{\frac{c}{2a-p^2}} \right]$$

mit [0.1.1] multipliziert gibt

$$y = \pm \frac{1}{p} \sqrt{p^2(2a-p^2)-2c}$$

$$z = \frac{1}{p} \sqrt{2c}$$

Beispiel: $a = 15, c = 2, p = 1$ gibt

$$\left[\sqrt{\frac{29}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25}{58}} \cdot \sqrt{\frac{2}{29}} \right] \cdot [0.1.1] = \left[\pm 1, \pm 5, \pm 2 \right]$$

Als ein Beispiel relativer Multiplikation kann auch noch die Streckenmultiplikation aufgefasst werden. Aus den Formeln (6) S. 67 folgt

$$[x \cdot y \cdot z] = x_1 [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2] + y_1 [y_2 \cdot x_2 \cdot 0] + z_1 [z_2 \cdot 0 \cdot x_2]$$

Da der Vektor $[x_2 \cdot y_2 \cdot z_2]$ sowohl senkrecht steht auf $[y_2 \cdot x_2 \cdot 0]$ als auf $[z_2 \cdot 0 \cdot x_2]$

so wird hier das kubische Raumgitter in ein Gitter von monokliner Struktur mit einem senkrechten Prisma als Grundspat verwandelt, dessen Grundflächen Parallelogramme sind.

Ein eigenartiges Beispiel absoluter Multiplikation bietet die Multiplikation mit einem Vektor der Form

$$[a \cdot b \cdot 0] \text{ wo } a^2 + b^2 = c^2$$

Es ist

$$[x \cdot y \cdot z] \cdot [a \cdot b \cdot 0] = x [a \cdot b \cdot 0] + y [b \cdot a \cdot 0] + z [0 \cdot 0 \cdot c]$$

$$\text{d. h. } (x^2 + y^2 + z^2) (a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 + (a^2 + b^2) z^2$$

Hier wird das kubische Zahlengitter in ein anderes mit der Kante $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ verwandelt. Die Stellung der neuen Würfel kann keine andere sein, als die eben angenommene, bei welcher die Grundflächen in einer der Koordinatenebenen liegen und deren Seitenkanten parallel einer Axe laufen.

Bei einer schiefen Stellung der Grundfläche

$$[a \cdot b \cdot c], [b \cdot c \cdot a]$$

wo

$$ab + bc + ac = 0$$

ist der auf ihr senkrechte Vektor $[c \cdot a \cdot b]$; dieser bestimmt mit den beiden vorigen den Würfel, der bei der absoluten Multiplikation erster Art in Frage kommt. Wir haben gesehen, dass auch die absolute Multiplikation zweiter Art eine kubische ist, haben also zwei verschiedene Arten der kubischen Multiplikation zu unterscheiden. Die Streckenmultiplikation bietet ein Beispiel einer monoklinen (orthorhomboidischen) Multiplikation, die für $y_2 = z_2$, d. h. für den Fall, dass der eine Vektor in einer Medianebene des Axensystems liegt, zur rhombischen wird.

Bei der Multiplikation mit $(1 \cdot 1 \cdot 0)$ handelt es sich um den Spat $[1 \cdot 1 \cdot 0]$, $[1 \cdot 1 \cdot 0]$, $[1 \cdot 0 \cdot 1]$, bei welchem die beiden ersten Vektoren ein Quadrat bestimmen, auf welchem der 3. schief steht; wie man leicht einsieht, ist aber eine einzige Symmetrieebene vorhanden, so dass ein monoklines Prisma mit quadratischer Schiefendfläche vorliegt; jedoch ist ausserdem noch die Gleichheit sämtlicher Kanten im Gegensatz zum monoklinen Typus hervorzuheben. Bei der Multiplikation mit $[2 \cdot 1 \cdot 0]$ handelt es sich ebenfalls um ein Prisma mit quadratischer Schiefendfläche, dem jedoch die Symmetrieebene fehlt:

$$[2 \cdot 1 \cdot 0] \cdot [2 \cdot 1 \cdot 2] = 2 [2 \cdot 1 \cdot 0] + [1 \cdot 2 \cdot 0] + 2 [0 \cdot 1 \cdot 2] = [5 \cdot 2 \cdot 4]$$

Diese Art der Multiplikation möge die klinequadratische heissen.

Zusammenfassung der Resultate dieses Abschnitts.

Die algebraische Multiplikation zweier Vektoren ist gleichbedeutend mit einer Verwandlung des kubischen Zahlengitters in ein anderes, dessen Grundspat entweder nur von einem oder von beiden Vektoren abhängig ist. Im ersten Fall kann die (absolute) Multiplikation mit jedem beliebigen anderen Vektor ausgeführt werden, im zweiten (relative M.) nicht. Genügen die Koordinaten eines Vektors $[a \cdot b \cdot c]$ der Bedingung $ab + bc + ac = 0$, so kann er mit jedem beliebigen anderen multipliziert

werden durch Verwandlung des kubischen Zahlengitters in ein anderes mit würfelförmigem Grundspat, dessen Kante $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ist für einen Vektor $[a, b, 0]$ die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt, so kann er mit jedem beliebigen anderen durch Verwandlung des kubischen Zahlengitters in ein kubisches mit der Kante $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ multipliziert werden. Die Streckenmultiplikation im Raum ist ausführbar, wenn die zu multiplizierenden Vektoren mit einer Axe in einer Ebene liegen; sie ist gleichbedeutend mit einer Transformation in ein Gitter von orthorhombischem oder orthorhomboidischem Grundspat. Andere Beispiele der relativen Multiplikation führen auf einen klinoquadratischen Grundspat von monosymmetrischem oder asymmetrischem Typus.

Näherungsvektoren. (I Anhang.)

Durch die Untersuchungen von Jakobi (Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus 3 vorhergehenden abgeleitet wird. Borchardt's Journ. für reine und angew. Math. 69. p. 29 — 64) und Fürstenau (Über Kettenbrüche höherer Ordnung. Programm Wiesbaden 1874) ist es möglich geworden, für jeden beliebig komplizierten Vektor eine kürzeste Reihe von ihm sich immer mehr nähernden Vektoren anzugeben. E. Sommerfeld (Kettenbruchähnliche Entwicklungen zur Beurteilung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Flächenkombinationen an Krystallen. Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie. 1903. S. 537) hat die Methode dualistisch auf die kristallographischen Formen angewendet.

Die Form solcher Kettenbrüche ist die folgende:

$$\frac{m}{p} = a_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{b_4 + \dots}}}}}}}$$

$$\frac{n}{p} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{b_4 + \dots}}}}}}}$$

Die Näherungswerte $\frac{m_k}{p_i}$ und $\frac{n_i}{p_i}$ erhält man durch Vernachlässigung aller derjenigen Koeffizienten a_k und b_k (Teilnenner), deren Index $k > i$, d. h. wenn man alles

das vernachlässigt, was hinter der die Grössen a_i und b_i verbindenden Vertikalen steht. Die Näherungswerte lauten somit

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{p_0} &= a_0 & \frac{n_0}{p_0} &= b_0 \\ \frac{m_1}{p_1} &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1} & \frac{n_1}{p_1} &= b_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 b_0 + 1}{a_1} \\ \frac{m_2}{p_2} &= \frac{(a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2 + 1}{a_1 a_2 + b_2} & \frac{n_2}{p_2} &= \frac{(a_1 b_0 + 1) a_2 + b_0 b_2}{a_1 a_2 + b_2} \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Und es gelten die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} m_i = a_i m_{i-1} + b_i m_{i-2} + m_{i-3} \\ n_i = a_i n_{i-1} + b_i n_{i-2} + n_{i-3} \\ p_i = a_i p_{i-1} + b_i p_{i-2} + p_{i-3} \end{cases}$$

Der Algorithmus, nach welchem die Koeffizienten a_i und b_i berechnet werden, soll an dem Beispiel des kleinsten Hexakisoktaeders bei gegebenem Inhalt gezeigt werden. Es wurden (Programm des K. Gymn. Rottweil 1887) von mir als Näherungswerte für die Indizes gefunden

$$1553 : 848 : 392$$

$$\begin{aligned} \frac{1553}{392} &= 3 + \frac{377}{392} = 3 + \frac{377 : 64}{392 : 64} & \frac{292}{64} &= 6 + \frac{8 : 57}{64 : 57} & \frac{64}{57} &= 1 + \frac{7 : 8}{57 : 8} \quad \text{u. s. f.} \\ \frac{848}{392} &= 2 + \frac{64}{392} = 2 + \frac{1}{392 : 64} & \frac{377}{64} &= 5 + \frac{1}{64 : 57} & \frac{8}{57} &= 0 + \frac{1}{57 : 8} \end{aligned}$$

Die Rechnung kann nach dem folgenden Schema ausgeführt werden:

3	1553	392	848	2	(Der neue Divisor wird
6	392	64	377	5	in die Mitte gestellt; er
1	64	57	8	0	ist der Rest mit der Zahl
7	57	8	7	0	rechts; der Rest mit der
1	8	7	1	0	Zahl links kommt rechts,
7	7	1	1	1	links der alte Divisor.)

Man erhält die Näherungswerte

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{p_0} &= \frac{3}{1} & \frac{n_0}{p_0} &= \frac{2}{1} \\ \frac{m_1}{p_1} &= \frac{23}{6} & \frac{n_1}{p_1} &= \frac{13}{6} \\ \frac{m_2}{p_2} &= \frac{24}{6} & \frac{n_2}{p_2} &= \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Die weiteren Näherungswerte werden durch die Rekursionsformeln bestimmt:

$$\begin{aligned} m_3 &= 7 \cdot 24 + 0 \cdot 23 + 3 = 171 \\ n_3 &= 7 \cdot 13 + 0 \cdot 13 + 2 = 93 \\ p_3 &= 7 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + 1 = 43 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Wie man sieht, passen an den Anfang die Näherungswerte

$$\begin{aligned} \frac{m_{-1}}{p_{-1}} &= \frac{1}{0} & \frac{n_{-1}}{p_{-1}} &= \frac{0}{0} \\ \frac{m_{-2}}{p_{-2}} &= \frac{0}{0} & \frac{n_{-2}}{p_{-2}} &= \frac{1}{0} \\ \frac{m_{-3}}{p_{-3}} &= \frac{0}{1} & \frac{n_{-3}}{p_{-3}} &= \frac{0}{1} \end{aligned}$$

Denn es ist $m_2 = a_2 m_1 + b_2 m_0 + m_{-1}$

$(a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2 + 1 = a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0 + m_{-1}, m_{-1} = 1$ u. s. f.
so dass die Rekursionsformeln gleich von vornherein benützt werden können.

Es ist

$$\begin{aligned} m_0 &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3 \\ n_0 &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 \\ p_0 &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Betrachtet man m, n und p (wo $m > n > p$) als die Koordinaten der Endpunkte eines Vektors, so stellen die Grössen m_i, n_i und p_i die Koordinaten von Näherungsvektoren dar. Die Rekursionsformeln können aufgefasst werden als Formeln für die Transformation des kubischen Zahlengitters in ein Gitter mit den Vektoren

$$[m_{i-1} \cdot n_{i-1} \cdot p_{i-1}], [m_{i-2} \cdot n_{i-2} \cdot p_{i-2}], [m_{i-3} \cdot n_{i-3} \cdot p_{i-3}]$$

oder $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-3}$ und diese Formeln können geschrieben werden

$$v_i = a_i v_{i-1} + b_i v_{i-2} + v_{i-3}$$

a_i, b_i und 1 sind die Koordinaten des Punktes $[m_i \cdot n_i \cdot p_i]$ im System $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-3}$. Vermittelst dieser Formeln kann bewiesen werden, dass

$$\begin{vmatrix} m_i & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} = 1$$

d. h. dass der durch 3 aufeinanderfolgende Näherungsvektoren gebildete Trivector (Spät) = 1 ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m_i & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m_i - a_i m_{i-1} - b_i m_{i-2} & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i - a_i n_{i-1} - b_i n_{i-2} & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i - a_i p_{i-1} - b_i p_{i-2} & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} m_{i-3} & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_{i-3} & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_{i-3} & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{i-1} & m_{i-2} & m_{i-3} \\ n_{i-1} & n_{i-2} & n_{i-3} \\ p_{i-1} & p_{i-2} & p_{i-3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser letzteren Beziehung erhält man schliesslich die Determinante

$$\begin{vmatrix} m_{-1} & m_{-2} & m_{-3} \\ n_{-1} & n_{-2} & n_{-3} \\ p_{-1} & p_{-2} & p_{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Die letzte Determinante stellt den Grundspat des kubischen Zahlengitters dar. Von ihm ausgehend, kann die Transformation in ein Gitter mit einem durch den Endvektor, den letzten und vorletzten Näherungsvektor bestimmten Grundspat durch eine Anzahl besonders einfacher Schritte ausgeführt werden. Diese Schritte lassen sich als geometrische Summierungen der Vektoren darstellen. Für das angeführte Beispiel sind es die folgenden:

$$\begin{aligned}[3.2.1] &= 3 \cdot [1.0.0] + 2 \cdot [0.1.0] + [0.0.1] \\ [23.13.6] &= 6 \cdot [3.2.1] + 5 \cdot [1.0.0] + [0.1.0] \\ [24.13.6] &= 1 \cdot [23.13.6] + 0 \cdot [3.2.1] + [1.0.0] \\ [171.93.43] &= 7 \cdot [24.13.6] + 0 \cdot [23.13.6] + [3.2.1] \\ [194.106.49] &= 1 \cdot [171.93.43] + 0 \cdot [24.13.6] + [23.13.6] \\ [1553.848.392] &= 7 \cdot [194.106.49] + 1 \cdot [171.93.43] + [24.13.6]\end{aligned}$$

Bei diesen Transformationen ändert sich das Volumen des Grundspats, also auch das zu Grund gelegte Punktgitter nicht. (Umgekehrt kann ähnlich wie auf S. 28 bewiesen werden, dass alle Ebenengitter, welche aus ein und demselben Punktgitter durch verschiedenartige Eintragung von Ebenen erzeugt werden können, gleich grosse Grundspate besitzen).

Die Anwendbarkeit der Kettenbruchmethode auf die Transformation eines ebenen Gitters ist von F. Klein dargelegt worden (Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896/97). Sommerfeld hat a. a. O. die für den Fall eines räumlichen Gitters notwendig werdenden Verallgemeinerungen vorgenommen.

Ein sehr bemerkenswertes Beispiel ist noch das folgende: „Gesucht wird dasjenige Hexakisoktaeder, dessen Ecken auf der Oberfläche einer Kugel liegen.“

Setzen wir den Radius der umbeschriebenen Kugel, also die Hälfte der vierzähligen Axe = 1, so ist auch die dreizählige

$$\frac{h \sqrt{3}}{h + k + 1} = 1$$

und ebenso die zweizählige

$$\frac{h \sqrt{2}}{h + k} = 1$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort

$$\frac{k}{h} = -1 + \sqrt{2}$$

und aus der ersten

$$\frac{l}{h} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Somit

$$h : k : l = 1 : (-1 + \sqrt{2}) : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

durch Verwandlung der Wurzeln in Kettenbrüche erhält man

$$\frac{k}{h} = (1 : 2, 2, 2 \dots) \quad \text{mit den Näherungswerten} \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{k}{h} + \frac{l}{h} = (1 : 1, 2, 1, 2, 1, 2 \dots) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15} \text{ u. s. f.}$$

Die Werte $\frac{k}{h} = \frac{6}{15}$ und $\frac{l}{h} = \frac{5}{15}$ liefern die ausgezeichnete Näherungsform
(15 . 6 . 5)

Nach der Methode von Jakobi-Fürstenau erhält man die folgende Reihe von Näherungsformen

(3 . 1 . 1)
(9 . 4 . 3)
(19 . 8 . 6)
(22 . 9 . 7)
(280 . 116 . 89)
(3146 . 1303 . 1000)

Der letzten Form steht (9 . 4 . 3) schon näher als (15 . 6 . 5), da 15:5 zwar gleich 3, aber 6:5 = 1,2, hingegen 4:3 = 1,333. Noch näher steht (19 . 8 . 6); vergleichen wir mit dieser die Form (15 . 6 . 5) bezüglich ihrer Lösung der gestellten Aufgabe, so ist für die erstere

$$\frac{h \sqrt{3}}{h + k + l} = 0,997 \text{ für die letzte } 0,9993$$

dagegen $\frac{h \sqrt{2}}{h + k} = 0,995 \text{ bzw. } 1,0101.$

Erheblich schlechter ist in dieser Beziehung (9 . 4 . 3), für welche man die Zahlen 0,974 und 0,977 erhält.

Harmonische Vektoren. (II. Anhang.)

Sind 3 Gittervektoren $[a_1 \ b_1]$, $[a_2 \ b_2]$, $[a_3 \ b_3]$ in einer Ebene gegeben, zu denen der vierte harmonische gefunden werden soll, so ist die Lösung sehr einfach, wenn, wie in Fig. 31, einer der Vektoren v_3 durch vektorielle Addition aus den beiden anderen v_1 und v_2 abgeleitet werden kann. Ist

$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$,
so ist v_3 die eine Diagonale des Parallelogramms mit den Seiten $\lambda_1 v_1$ und $\lambda_2 v_2$; die

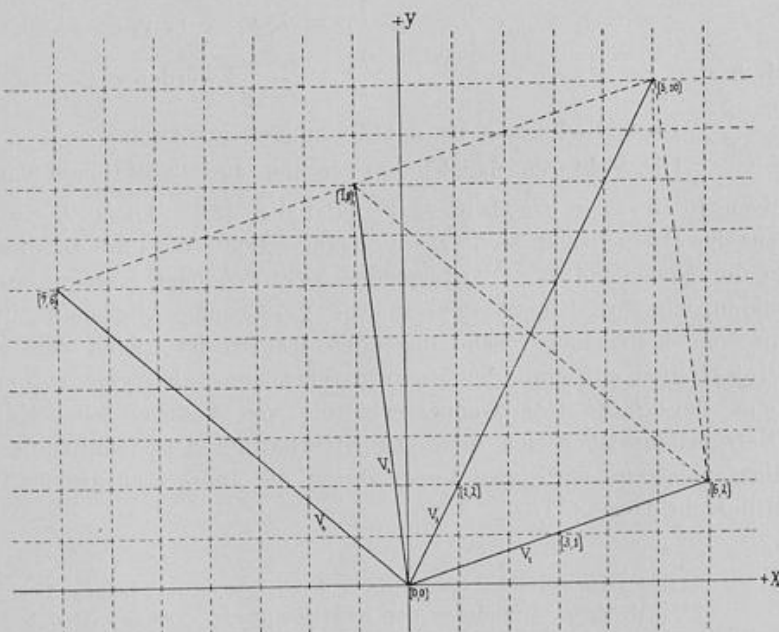


Fig. 31.

andere Diagonale gibt die Richtung des gesuchten Vektors an:

$$v_4 = \lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_2^*)$$

Die Entfernung des Punktes $[a_3 \ b_3]$ vom Vektor v_1 ist

$$\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

Und
$$\sin(v_1 v_3) = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

das Doppelverhältnis von 4 Vektoren

$$(v_1 v_2 v_3 v_4) = \frac{\sin(v_1 v_3)}{\sin(v_2 v_3)} : \frac{\sin(v_1 v_4)}{\sin(v_2 v_4)} = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} : \frac{a_1 b_4 - a_4 b_1}{a_2 b_4 - a_4 b_2}$$

Ist dieses gleich -1 , so bilden die 4 Vektoren ein harmonisches Büschel. Die nämliche Bedingung lässt sich für jedes schiefwinklige System auf folgende Art ableiten: Ist $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, so hat man

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ b_3 &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \\ \lambda_2 &= \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{aligned}$$

Ist ferner $v_4 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ so ergeben sich für μ_1 und μ_2 ähnliche Ausdrücke. Nun soll aber ein harmonisches Büschel entstehen, oder es soll

$$v_4 = \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$$

d. h.

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{\mu_2}{\mu_1} \text{ werden.}$$

Diese Bedingung ist mit der obigen identisch.

Die Vektoren der Fig. 31 stellen die Projektionen von 4 Punkten der Netzebene (5.3.1) in Fig. 14 dar. Es sind dies $[2.3.1]$, $[1.1.8]$, $[1.1.2]$ und $[3.7.6]$. Aus der Betrachtung der letzteren Figur erhellt, dass die zu diesen Punkten gehörigen, in der Netzebene (5.3.1) liegenden Vektoren oder Kanten ein harmonisches Büschel bilden, wie ihre Projektionen auf die YZ-Ebene. Allgemein gilt: Das Doppelverhältnis von 4 in einer Ebene liegenden Kanten ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Projektionen auf eine der Koordinatenebenen, also eine rationale Zahl. Dualistisch folgt der Satz: Das Doppelverhältnis von 4 durch eine Kante gehenden Flächen (Netzebenen) ist gleich dem Doppelverhältnis der Schnittlinien mit einer der Koordinatenebenen, wird also linear durch die Indizes ausgedrückt. Dies ist das Gauss-Millersche Gesetz.**)

*) E. Sommerfeldt, Geometrische Kristallographie. Leipzig 1906. S. 101.

**) M. Viola, Grundzüge der Kristallographie. Leipzig 1904. S. 65. Liebisch, Geometrische Kristallographie. Leipzig 1881. S. 37 u. f.

andere Diagonale gi

Die Entfer

Und

das Doppelverhältn

$(v_1 v_2 v_3 v_4)$

Ist dieses
Die nämliche Be
ableiten: Ist v_3 :

woraus

Ist ferner v_4 =
soll aber ein ha

d. h.

Diese

Die Ve

ebene (5 . 3 . 1)

Aus der Betrac

in der Netzebe

bilden, wie ih

nis von 4 in

Projektionen

folgt der Sa

(Netzebenen)

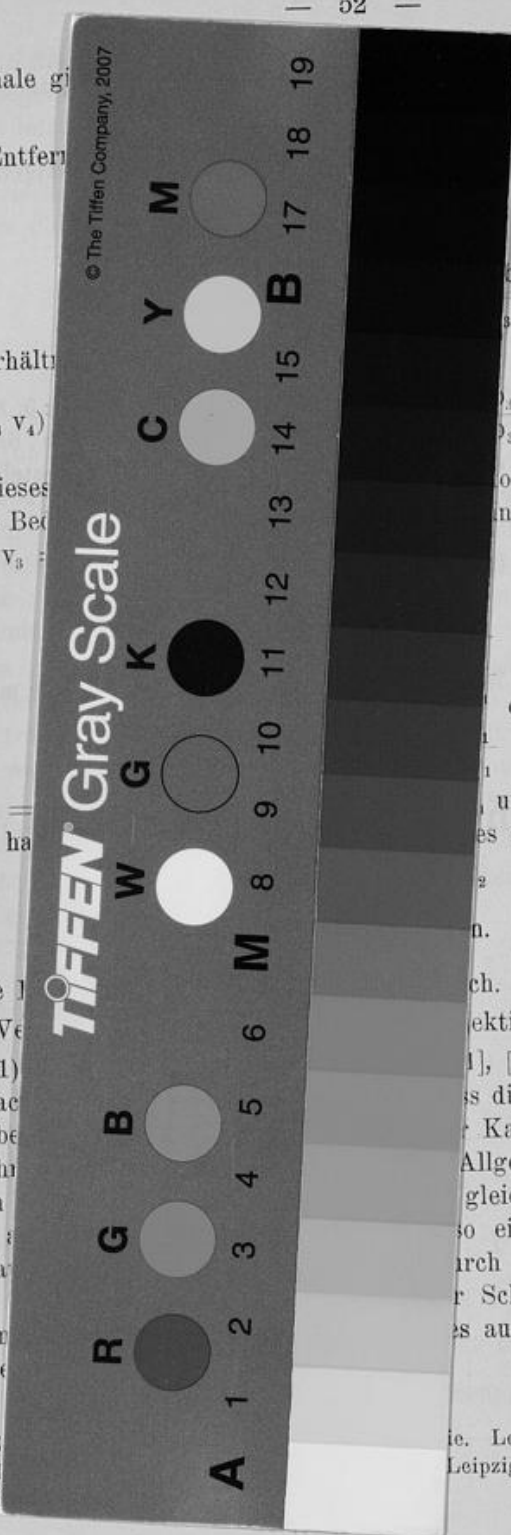
dinatenebenen

Millersche Ge

*) E

**) M

Krystallographi



ors an:

v_1 ist

$$\frac{b_1}{b_3^2 + b_3^2}$$

$$\frac{b_3 - a_3 b_1}{b_3 - a_3 b_2} : \frac{a_1 b_4 - a_4 b_1}{a_2 b_4 - a_4 b_2}$$

oren ein harmonisches Büschel.
anklige System auf folgende Art

$$\text{oder } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

und μ_2 ähnliche Ausdrücke. Nun
es soll

ch.
ektionen von 4 Punkten der Netz-
[1], [1 . 1 . 8], [1 . 1 . 2] und [3 . 7 . 6].
ss die zu diesen Punkten gehörigen,
Kanten ein harmonisches Büschel
Allgemein gilt: Das Doppelverhält-
gleich dem Doppeltverhältnis ihrer
so eine rationale Zahl. Dualistisch
urch eine Kante gehenden Flächen
r Schnittlinien mit einer der Koor-
es ausgedrückt. Dies ist das Gauss-

ie. Leipzig 1906. S. 101.

Leipzig 1904. S. 65. Liebisch, Geometrische

