

Für den zweiten hat man

$$3 = 2^2 - 1$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

$$9 = 5^2 - 4^2$$

$$11 = 6^2 - 5^2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$n = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$$

$$n+2 = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$$

In Fig. 7 ist die Masche eines Gitters mit dem Inhalt $n = 7$ gezeichnet. Die nämliche Figur soll zeigen, dass n auch ein Bruch sein kann ($n = \frac{1}{7}$). Denn im folgenden Abschnitt wird bewiesen werden, dass eine Masche von der Grösse n in n^2 kleine Maschen zerlegt wird, wenn man durch die innerhalb und auf dem Umfang gelegenen Gitterpunkte Parallelen mit den Seiten zieht; jedes der so entstehenden kleinen Parallelogramme ist also $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

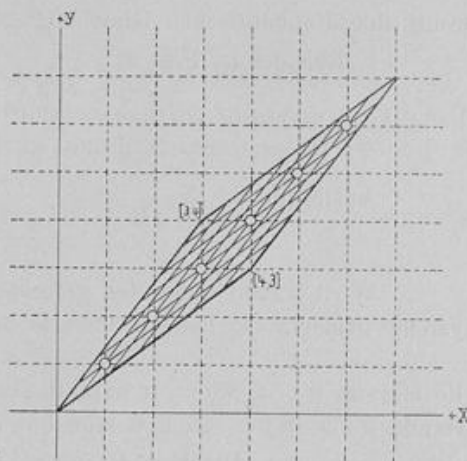


Fig. 7.

II. Graphische Lösung der diophantischen Gleichungen 1. Grades.*)

Vorübung.

Eine Gerade, deren Gleichung

$$m x + n y = c$$

ist in ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf quadriertem Papier (in ein quadratisches Gitter) einzuzichnen, wobei zuerst die Achsenabschnitte berechnet werden. Sind m , n und c ganze Zahlen, so zeigt sich, wenn m und n relativ prim (S. 12), dass die Gerade Gitterpunkte enthält, deren Koordinaten die bei Auf-

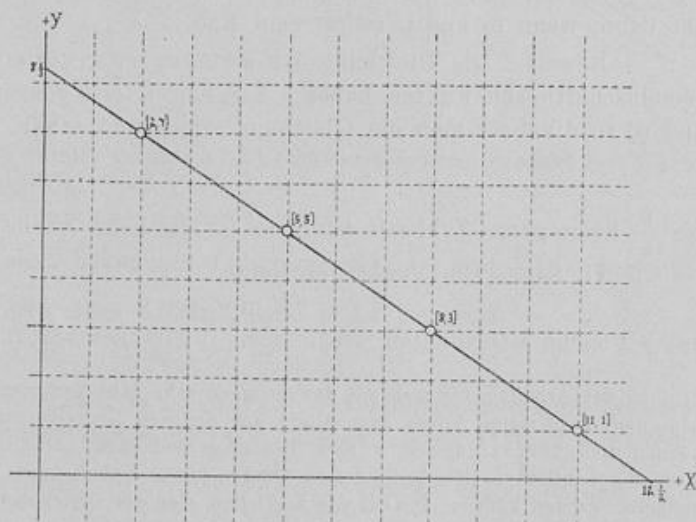


Fig. 8.

*) Im Jahrgang XXIII (1892) der Zeitschrift für math. und nat. Unterricht habe ich unter dieser Überschrift eine Studie veröffentlicht, die hier in neuer und verbesserter Form erscheint. Mein Aufsatz ist von der Redaktion (S. Günter) mit einer umfangreichen Nachschrift versehen worden. Nach

lösung der diophantischen Gleichung gesuchten Wertpaare darstellen.

1. Beispiel (s. Fig. 8):

$$2x + 3y = 25 \text{ (Heis, No. 3)}$$

Die Achsenabschnitte sind

$$x_0 = 12\frac{1}{2}, y_0 = 8\frac{1}{3}$$

Auflösung:

$$\begin{array}{l} x = 2 \mid 5 \mid 8 \mid 11 \mid \\ y = 7 \mid 5 \mid 3 \mid 1 \mid \end{array}$$

Wird irgend einer der gefundenen Punkte zum Anfangspunkt des Koordinatensystems gemacht, so hat die Gerade die Gleichung

$$2x + 3y = 0$$

Die Gerade $2x + 3y = 0$ enthält also Gitterpunkte in denselben Abständen wie die Gerade $2x + 3y = 25$ und man hat allgemein:

Die Gerade $mx + ny = 0$ enthält Gitterpunkte

$$[0 \cdot 0], [n \cdot m], [2n \cdot 2m] \text{ u. s. f.}$$

in den nämlichen Abständen wie $mx + ny = c$. Durch eine Verschiebung gleich und parallel dem Abstand zweier dieser Punkte kommt die Punktreihe mit sich selbst zur Deckung. Dieser Abstand ($\sqrt{m^2 + n^2}$) heisst Vektor oder Parameter der Reihe. Je kleiner er ist, desto dichter ist die Gerade mit Punkten besetzt.

Daraus ergibt sich der

I. Satz: Die Dichtigkeit der Punktreihe $mx + ny = c$ ist umgekehrt proportional ihrem Vektor ($\sqrt{m^2 + n^2}$).

Zusatz. Die Gleichung $mx + ny = c$ liefert ganzzahlige Werte für x und y nur dann, wenn m und n teilerfremd sind.

Beweis. Die Gleichung ist stets so zu reduzieren, dass m , n und c keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Sei nun a ein gemeinschaftlicher Divisor von m und n , so dividiert man die Gleichung mit a und erhält

$$m_1 x + n_1 y = \frac{c}{a}$$

wo $\frac{c}{a}$ keine ganze Zahl sein kann; es ist also keine Auflösung in ganzen Zahlen möglich.

II. Satz: Ein Punkt der Reihe

$$mx + ny = c$$

hat 2 gleiche Koordinaten, wenn c ein Vielfaches von $(m + n)$ ist.

Prüfung der Arbeiten, die sich mit der meinigen sehr nahe berühren sollten, bleibe ich bei meiner Behauptung, dass meine Arbeit ganz allein auf der von Bravais fusst. Die Günterschen Bemerkungen können sich nur auf den sehr nahe liegenden Gedanken beziehen, dass die ganzzahligen Lösungen einer diophantischen Gleichung ersten Grades mit 2 Unbekannten als Koordinaten der Gitterpunkte gefunden werden können, die auf der durch die gegebene Gleichung dargestellten Geraden liegen. Die Bezeichnung der Quadratecken als „Gitterpunkte“ rührt von Eisenstein (Crelles Journal, B. 28, Jhg. 44). Aber erst Bravais hat (i. Jahr 1848) die hier in Betracht kommenden Eigenschaften der Netzebene in seinem berühmten, jetzt in deutscher Übersetzung erschienenen Werk wissenschaftlich untersucht. (Die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum verteilten Punkten. Ostwalds Klassiker. Übersetzt von C. und E. Blasius.)

Beweis. Ist $c = p(m + n)$
so ist die Gleichung befriedigt durch

$$x = p \text{ und } y = p \text{ (in Fig. 1. [5.5]).}$$

Zusatz. Ist $c = m + n$, so sind die Koordinaten des Punktes $x = 1$ u. $y = 1$.
Eine diophantische Gleichung ist somit nur dann durch zusammengehörige positive
Werte befriedigt, wenn $c \geq m + n$.

2. Beispiel

$$2x + 3y = 5$$

liefert die Werte [1.1].

In nebenstehender Figur
sind dargestellt die Punkt-
reihen

$$2x + 3y = \begin{cases} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

der Raum zwischen

$$2x + 3y = 0$$

und

$$2x + 3y = 5$$

wird durch die übrigen
Reihen des Systems (2.3)
in 5 gleichbreite Streifen
eingeteilt.

III. Satz: Der Punkt-
reihe

$$mx + ny = 0$$

sind benachbart die Reihen

$$mx + ny = \pm 1^*)$$

Beweis. Da m und n relativ prim, so ist es immer möglich, ganzzahlige Werte
zu finden, welche die Gleichung

$$mx + ny = \pm 1$$

befriedigen. Dies folgt aus dem bekannten Lehrsatz: Sind $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ zwei auf-
einanderfolgende Näherungswerte eines Kettenbruchs, so ist jedesmal

$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = \pm 1.$$

Zwischen $mx + ny = 0$ und $mx + ny = \pm 1$ können aber keine System-
punkte liegen, da ja x u. y ganzzahlige Werte sein müssen. (Der Abstand der Reihe
 $mx + ny = 1$ vom Anfangspunkt $[0, 0]$ ist $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$). Es folgen in den näm-
lichen Abständen die Reihen

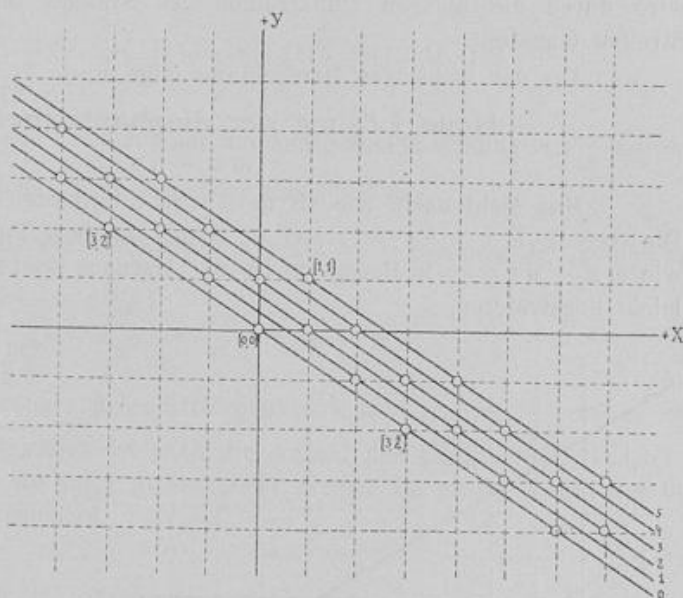


Fig. 9.

*) Bravais: Sur les systèmes des points distribués régulièrement. Problème VI. pag. 11.
Études cristallographiques. Paris 1866.

$$m x + n y = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m + n - 1 \\ m + n \end{cases}$$

daraus folgt der

IV. Satz: Der Raum zwischen

$$m x + n y = 0 \text{ und } m y + n y = m + n$$

wird durch die übrigen Punktreihen des Systems (m, n) in $m + n$ gleich breite Streifen eingeteilt.

Aus der bisherigen Betrachtung folgt eine

Neue Lösung der diophantischen Gleichung

$$m x + n y = c.$$

Man sieht nach, wie oft $m + n$ in c enthalten ist, z. B. p mal; der Rest sei r . Die Gerade $m x + n y = r$ hat in Bezug auf den Punkt $[0, 0]$ die nämliche Lage, wie $m x + n y = c$ in Bezug auf $[p, p]$. Darnach lässt sich die Gerade $m x + n y = c$ leicht konstruieren.

3. Beispiel.

$$5 x + 8 y = 29 \text{ (Heis No. 10).}$$

Auflösung. $29 : 13 = 2$, Rest 3,
 $5 x + 8 y = 3$ liefert den Punkt $[1, 1]$,
 $5 x + 8 y = 0$ die Deckschiebung
 $[8, 5]$ oder $[\bar{8}, 5]$.

$$[2, 2] + [1, 1] = [1, 3]$$

$[1, 3]$ ist ein Punkt der gegebenen Reihe $5 x + 8 x = 29$.

Weitere Punkte findet man durch Addition und Subtraktion der Deckschiebung:

$$[1, 3] + [8, 5] = [9, 2]$$

$$[1, 3] - [8, 5] = [\bar{7}, 9] \text{ u. s. f.}$$

Es gibt also nur einen einzigen zur Reihe $5 x + 8 y = 29$ gehörigen Gitterpunkt im ersten

Quadranten und damit nur eine Lösung der gegebenen diophantischen Gleichung.

Die Anfertigung einer Figur ist unnötig, bei grösseren Zahlen in der gegebenen Gleichung auch untunlich, wie das folgende Beispiel zeigt.

4. Beispiel. $13 x + 24 y = 2373 \text{ (Heis No. 7).}$

Auflösung: $2373 : 37 = 64$, Rest 5

$13 x + 24 y = 5$ liefert das Wertpaar $[7, 4]$.

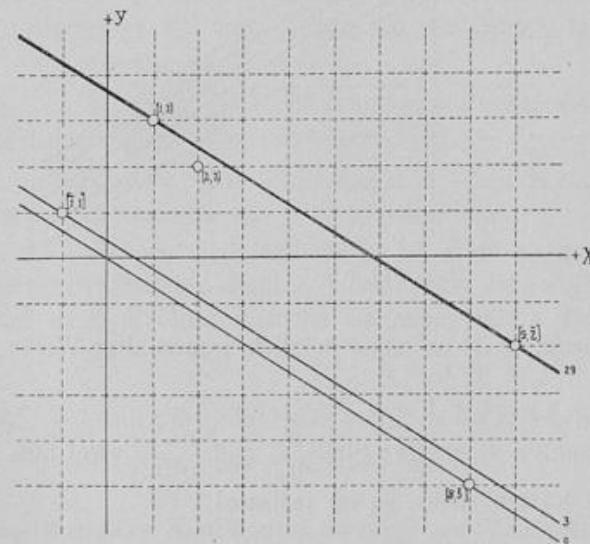


Fig. 10.

[Beim Suchen nach Werten, welche die Gleichung befriedigen, stellt man die Vielfachen der einen Zahl neben die der andern und sieht nach, wo die Differenz gleich dem Absolutglied wird. So ist hier

$$13 \cdot 7 + 24 \cdot 4 = -91 + 96 = 5].$$

Einer der gesuchten Punkte ist

$$[7 \cdot 4] + [64 \cdot 64] = 57 \cdot 68]$$

und durch wiederholte Addition und Subtraktion der Deckschiebung $[24 \cdot 13]$ erhält man die übrigen:

$$[81 \cdot 55], [105 \cdot 42], [129 \cdot 29], [153 \cdot 16], [177 \cdot 3], 201 \cdot 10] \dots$$

$$[33 \cdot 81], [9 \cdot 94], [15 \cdot 107] \dots$$

V. Satz. Die Anzahl von Lösungen der diophantischen Gleichung $m x + n y = c$ ist gleich den in $\frac{c}{m n}$ enthaltenen Einheiten oder um 1 grösser.

Beweis: Der Abschnitt der Geraden $m x + n y = c$ zwischen der x- und der y-Achse beträgt

$$\sqrt{\frac{c^2}{m^2} + \frac{c^2}{n^2}} = \frac{c}{m n} \sqrt{m^2 + n^2}$$

Der Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte $\sqrt{m^2 + n^2}$ ist $\frac{c}{m n}$ mal in dem genannten Abschnitt enthalten; dies ist auch die Anzahl der Lösungen in Beispiel 1, in den andern Beispielen ist sie um 1 grösser; der Grund ist an der Hand der beigegebenen Figuren leicht aufzufinden.

Eigenschaften der Netzebene.

Verbindet man in Figur 9 irgend einen Gitterpunkt $[a \cdot b]$ der Geraden $m x + n y = 1$ mit dem Anfangspunkt, so liegen in der Verlängerung dieser Verbindungslinie die Punkte $[2 a \cdot 2 b]$, $[3 a \cdot 3 b]$ u. s. f. auf den Parallelen $m x + n y = 2$, $m x + n y = 3$ u. s. f. Diese Punkte gelangen mit benachbarten zur Deckung durch eine Verschiebung gleich und parallel dem Vektor des Systems $(m \cdot n)$. Daraus folgt, dass die Quadratecken auf unendlich viele verschiedene Arten durch 2 Züge von Parallelen erzeugt werden können. Diese bilden Netze mit parallelogrammatischen Maschen, deren Inhalt stets gleich dem Inhalt des Quadrates, der Masche des zu Grund gelegten quadratischen Netzes ist.

Zum Beweis suchen wir den Inhalt der durch die 3 Eckpunkte $[0 \cdot 0]$, $[n \cdot m]$, $[a \cdot b]$ bestimmten Masche, wo $[a \cdot b]$ auf der Parallelen $m x + n y = 1$ liegt, und setzen als bekannt voraus, dass der Abstand dieser Parallelen vom Nullpunkt $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; dies ist aber die Höhe des in Rede stehenden Parallelogramms, die man nur mit seiner Grundlinie $\sqrt{m^2 + n^2}$ zu multiplizieren braucht, um den Inhalt 1 zu bekommen.

Ein zweiter Beweis folgt aus der Betrachtung des Parallelogramms, das durch die 3 Punkte $[0, 0]$, $[n, m]$ und $[1, 1]$ bestimmt ist. Sein Inhalt ist

$$\begin{vmatrix} n & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m + n$$

Nach Satz IV wird es aber durch die Parallelen des Systems (m, n) in $m + n$ gleich breite Streifen eingeteilt.

Aus dieser Betrachtung folgt, dass man Maschen von jeder beliebigen Grösse n (n eine ganze Zahl) auf unendlich viele Arten herstellen kann; unter diesen gibt es eine solche (Grundmasche) mit kürzesten Vektoren als Seiten. Durch Probieren erhält man für 7

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad (\text{s. Fig. 11})$$

(Die Grundmasche einer Gitterzahl ist ein Quadrat).

VI. Satz. Eine Masche von der Grösse n wird in n gleiche Teile zerlegt, wenn man durch die innerhalb und auf dem Umfang liegenden Gitterpunkte Parallelen mit einer Seite zieht.

Beweis. Die Parallelen mit dem Vektor $[x_1, y_1]$

sind $-y_1 x + x_1 y = 1, 2, 3$ u. s. f.

Die durch den Punkt $[x_2, y_2]$ gelegte Parallele

$$-y_1 x + x_1 y = -y_1 x_2 + x_1 y_2 = n$$

Die $n - 1$ Gitterpunkte, durch welche die Parallelen gezogen werden, liegen alle innerhalb der Masche, wenn auf dem Vektor $[x_2, y_2]$ keiner sich befindet, d. h. wenn x_2 und y_2 relativ prim sind. Zieht man auch noch die Parallelen mit dem Vektor $[x_1, y_1]$, so wird die Masche in n^2 kleinere zerlegt, deren jede $\frac{1}{n^2}$ der Masche des zu Grund

gelegten quadratischen Gitters ist. Selbstverständlich gelten

diese Betrachtungen nicht nur für das quadratische, sondern auch für jedes beliebige andere Gitter.

Wir wiederholen, wie man ein Gitter (Netz) in ein anderes mit der nämlichen Masche verwandelt: Man verbindet irgend zwei Gitterpunkte miteinander; enthält die Verbindungsstrecke Gitterpunkte, so wählt man die Strecke zwischen 2 nächstliegenden als erste Seite der neuen Masche. In einer der beiden benachbarten Parallelen kann dann irgend ein Gitterpunkt als dritter Eckpunkt der Masche angenommen werden. Bei einer solchen Verwandlung behält die Masche (das Elementarparallelogramm) immer den nämlichen Inhalt. Dies hat Bravais a. a. O. auf 3 verschiedene Arten bewiesen.

Einen neuen Weg zum Beweis dieses Satzes hat F. Klein betreten.* In einem Netz ist die Anzahl der Gitterpunkte ebenso gross, wie die der Maschen. Denn jede Masche hat 4 Eckpunkte und in jedem Gitterpunkt stossen 4 Maschen zusammen. Da vor und nach dem Wechsel der verbindenden Geraden die Gitterpunkte die gleichen

*) F. Klein, Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896. S. 7.

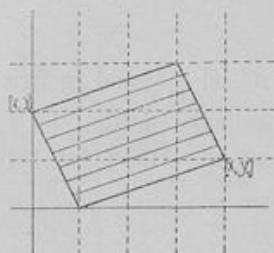


Fig. 11.

sind, so ist auch die Anzahl der Maschen des ursprünglichen und des neukonstruierten Netzes gleich. In beiden Fällen wird die Ebene in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile zerlegt, folglich sind die Teilstücke, d. h. die Maschen in beiden Fällen gleich gross (s. auch E. Sommerfeld, Bemerkungen zu der Volumtheorie von Krystallen. Centralblatt für Mineralogie. Stuttgart 1902. S. 636.)

Aus diesem Satz folgt weiter: Je kleiner bei der Verwandlung die Grundlinie der Masche angenommen wird, desto grösser muss ihre Höhe sein, d. h. zwischen den dichtesten Punktreihen liegen die breitesten Bänder. Unter den gleichen Maschen gibt es immer eine solche, deren Seiten die kürzesten sind. Diese Masche heisse ich „Grundmasche“. In meiner früheren Arbeit habe ich sie „Grundparallelogramm“ genannt, mit welchem Namen Blasius jetzt die Masche bezeichnet, während Sohncke für die Masche die von Klein benützte Bezeichnung „Elementarparallelogramm“ vorge schlagen hat. Die 2 Seiten meiner Grundmasche sind die beiden kürzesten Seiten des Bravais'schen Hauptdreiecks (s. später).

Diophantische Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Schneidet man auf 3 aufeinander senkrechten Achsen $OA = OB = OC = 1$ ab, konstruiert über den Abschnitten als Kanten einen Würfel und füllt den Raum mit kongruenten Würfeln aus, so hat man ein kubisches Raumgitter konstruiert. Jeder Eckpunkt des Gitters hat 3 Koordinaten, die Vielfache der Einheit, also ganze Zahlen sind. Es ist leicht zu zeigen, dass eine durch 3 Gitterpunkte gelegte Ebene unendlich viele solcher Punkte enthält, die ein Netz mit parallelogrammatischer Masche bilden; ferner dass die Gleichung einer solchen Netzebene auf die Form

$$hx + ky + lz = c$$

gebracht werden kann, wo h , k und l ganze Zahlen sind. (Gesetz der rationalen Indices. *)

Wir gehen aus von der Gleichung einer durch O gelegten Ebene

$$hx + ky + lz = 0$$

Die Spur dieser Ebene

$$hx + ky = 0$$

in der XY -Ebene ist befriedigt durch die Werte k und h und deren Vielfache, ist also eine Punktreihe; dasselbe gilt von den Spuren in den andern Koordinatenebenen. Die Projektion des Netzes auf eine der Koordinatenebenen (YZ) ist nun leicht zu zeichnen:

5. Beispiel.

$$3x + 5y + 7z = 0$$

In den Koordinatenebenen erhält man zunächst die Punkte $[5.3.0]$, $[7.0.3]$, $[0.7.5]$. Die zugehörigen Vektoren sind Deckschiebungen; durch Aneinanderreihen (Addition und Subtraktion) der Deckschiebungen erhält man weitere Punkte:

*) Bravais. Études crist. pag. 112.

Sohncke, Wiedenmanns Annalen der Physik. Bd. 16, S. 489.

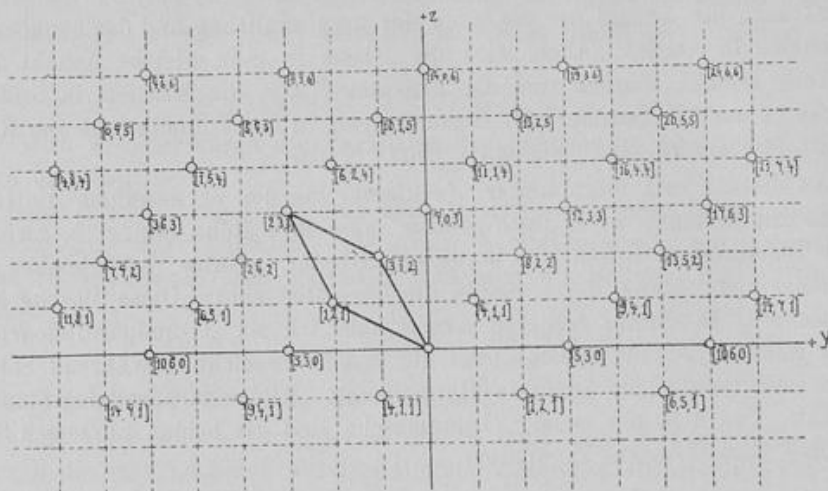


Fig. 12.

$$[\bar{7}.0.3] \pm [5.3.0] = \begin{cases} [\bar{12}.3.3] = 3 \cdot [4.1.1] \\ [\bar{2}.3.3] \end{cases}$$

$$[\bar{2}.3.3] - [5.3.0] = [3.6.3] = 3 \cdot [1.2.1]$$

$$[1.2.1] + [4.1.1] = [\bar{3}.1.2]$$

Und so lässt sich das Netz rasch vervollständigen. Dass $[1.2.1]$ und $[\bar{3}.1.2]$ die kleinsten Deckschiebungen sind, findet man durch die Überlegung, dass die Länge des Vektors $[h.k.l]$ gleich $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$. Sie bilden die Seiten der in der Figur eingezeichneten Grundmasche, deren kürzere Diagonale, die Deckschiebung $[4.1.1]$, mit den beiden vorigen das Hauptdreieck bildet. Aus der in Figur 12 abgebildeten Projektion lässt sich das in der Ebene $(3.5.7)$ liegende Netz zeichnen, wenn man aus den berechneten Seiten ($\sqrt{6}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{18}$) zuerst das Hauptdreieck konstruiert. Im folgenden Abschnitt ist dies an einem andern Beispiel ausgeführt. Dort ist auch gezeigt, wie die Auflösung der Gleichung $hx + ky + lz = 0$ dem Kristallographen sowohl die Zonen (Kanten) in der Ebene $(h.k.l)$, als die zur Zone $[h.k.l]$ gehörigen Ebenen liefert.

Anmerkung. In Fig. 12 erkennt man, dass die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$3x + 5y = 7$$

auf der Schnittgeraden der Ebenen $3x + 5y + 7z = 0$ und $z = -1$ erscheinen. Es sind dies $[14.7]$, $[9.4]$, $[4.1]$, $[\bar{1}.2]$, $[6.5]$ u. s. f.

Daraus folgt eine

neue Lösung der diophantischen Gleichung

$$mx + ny = c.$$

Man konstruiert die Projektion des Netzes der Ebene

$$m x + n y + c z = 0$$

auf die YZ -Ebene, so findet man die Lösungen in den Gitterpunkten, bei welchen $z = -1$. (Man könnte ebensogut die Projektion des Netzes der Ebene $m x + n y + z = 0$ zeichnen und die Gitterpunkte aufsuchen, für welche $z = -c$.)

Bei dem Beispiel 4

$$13 x + 24 y = 5$$

waren wir noch auf ein allerdings sehr leichtes Raten angewiesen. Soll die Lösung vollständig graphisch durchgeführt werden, so müssen die in den Achsenebenen gelegenen Vektoren der Netzebene $13 x + 24 y + 5 z = 0$ so lange aneinandergereiht werden, bis ein Punkt mit $z = -1$ erscheint. Die Vektoren sind

$$[0.5.24], [5.0.13], [24.13.0].$$

$$[5.0.13] - [0.5.24] = [5.5.11]$$

$$[5.0.13] + [5.5.11] = [10.5.2]$$

$$[5.0.13] - 7 \cdot [10.5.2] = [65.35.1]$$

durch wiederholte Addition der Deckschiebung $[24.13.0]$ erhält man die weiteren Lösungen: $[41.22.1]$, $[17.9.1]$, $[7.4.1]$ u. s. f.

Netzebene und Raumgitter.

Bravais leitet den Inhalt der Masche einer Netzebene für jedes schiefe Achsensystem ab. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt ein kurzer Beweis für ein senkrechtes Achsensystem.

Von den 3 Indices $(h.k.l)$ sind jedenfalls 2 relativ prim; es seien dies h u. k . Die Spur in der Ebene XY ist

$$h x + k y = 0$$

eine Gerade, welche mit äquidistanten Punkten besetzt ist. Der erste ist $[0.0]$, der zweite $[k.h]$ u. s. f. Dieser Punktreihe ist benachbart die Parallele

$$z = 1, h x + k y = -1$$

welche, wie oben gezeigt, durch ganzzahlige Werte von x und y befriedigt wird. Der Abstand dieser zweiten in der XY -Ebene liegenden Punktreihe von 0 ist $\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$.

Der Abstand der Punkte $[0.0]$ und $[k.h]$ ist $\sqrt{h^2 + k^2}$. Die Grundlinie der zwischen den beiden Parallelen liegenden Masche ist $\sqrt{h^2 + k^2}$, ihr Inhalt somit gleich 1. Sie ist die Projektion der Masche des in der Ebene $(h.k.l)$ liegenden Netzes. Ist α der Winkel, welchen diese Ebene mit der XY -Ebene bildet, so ist

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Der gesuchte Inhalt der Masche der Netzebene $(h.k.l)$ ist somit

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

Der Satz lässt sich ausdrücken wie folgt:

Die Dichtigkeit sowohl der Punktreihe $[h, k, l]$ als der Netzebene (h, k, l) ist umgekehrt proportional der $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$.*)

Der Ebene $hx + ky + lz = 0$

ist benachbart die Netzebene $hx + ky + lz = 1$

Der Abstand beider Ebenen ist

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Daraus folgt der für die Kristallographie wichtige Satz: Je dichter eine Netzebene mit Punkten besetzt ist, um so grösser ist ihr Abstand von der nächsten parallelen Netzebene.**)

Zwischen 2 Maschen benachbarter Netzebenen lässt sich ein Spat (Parallelepiped) legen; durch Fortsetzen der Konstruktion erhält man 3 Züge von je parallelen äquidistanten Ebenen, die sich in den Eckpunkten des kubischen Gitters schneiden. Damit ist das kubische Raumgitter in ein spätiges (parallelepipedisches) verwandelt. Der Inhalt des Spats ist gleich 1, gleich dem des Würfels (Grundspats).

Graphische Lösung der diophantischen Gleichungen ersten Grades mit 3 Unbekannten:

$$hx + ky + lz = c.$$

Die Deckschiebungen der Netzebene erhält man nach Beispiel 5 durch Auflösung der Gleichung

$$hx + ky + lz = 0$$

Man sucht dann zuerst die Punkte in der Spur der gegebenen Netzebene mit derjenigen Koordinatenebene, auf welche man das Netz vermittelst der Deckschiebungen projizieren will.

6. Beispiel.

$$3x + 5y + 7z = 67$$

(Heis No. 13)

In Beispiel 5 wurden für die Netzebene $(3, 5, 7)$ die Deckschiebungen

$[1, 2, 1]$, $[3, 1, 2]$ u. $[4, 1, 1]$ gefunden.

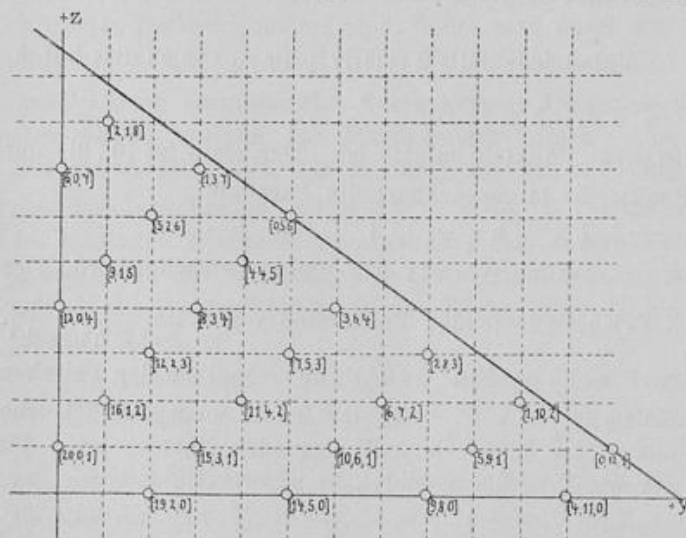


Fig. 13.

*) F. Haag, Die regulären Krystallkörper. Programm des K. Gymnasiums Rottweil 1887.

**) L. Sohncke. Zeitschrift für Krystallographie. 1887. S. 213.

Bravais. Etudes crist. pag. 168.

$x = 0$ gibt als Spur der Netzebene in der YZ -Ebene $5y + 7z = 67$. Diese liefert die Gitterpunkte $[0.5.6]$ und $[0.12.1]$

Ausgehend von diesen kann mit Hilfe der Deckschiebungen das von der genannten Spur, sowie von der y und z -Achse gebildete Dreieck rasch mit den Projektionen der Gitterpunkte auf die YZ -Ebene ausgefüllt werden. Für die ausserhalb des Dreiecks fallenden Punkte sind nicht alle Koordinaten positiv.

VI. Satz. Die Anzahl von Lösungen der diophantischen Gleichung

$$hx + ky + lz = c$$

beträgt mindestens

$$\frac{c^2}{2hkl}$$

Beweis. Bei den in Betracht kommenden Lösungen der diophantischen Gleichung müssen alle Koordinaten positiv sein; dies ist nur der Fall bei dem von den 3 Achsenebenen ausgeschnittenen Stück der Netzebene, das in den positiven Oktanten fällt. Die Projektion des in Rede stehenden Dreiecks auf die XY -Ebene ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\frac{c}{h}$ und $\frac{c}{k}$, dessen Inhalt

$$\frac{c^2}{2hk}$$

Nun wurde gezeigt, dass die Projektion der Masche auf die XY -Ebene gleich 1 ist. Wenn man nachsieht, wie oft diese in der Projektion des Dreiecks enthalten ist, so erhält man

$$\frac{c^2}{2hkl}$$

Wie jedes Beispiel zeigt, ist sie aber grösser. Für Beispiel 6 ist $\frac{c^2}{2hkl} = 21,3$. Die Anzahl der Lösungen ist 26. Nur für eine unendlich grosse Netzebene, also für $c = \infty$ ist die Anzahl der in der Netzebene enthaltenen Gitterpunkte gleich der Anzahl der Maschen.

Am leichtesten lässt sich die Rechnung durchführen für

$$x + y + z = c$$

hier ist die Projektion der Masche auf die XY -Ebene das Quadrat vom Inhalt 1, welches $\frac{c^2}{2}$ mal im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit der Kathete c enthalten ist. Die Anzahl der Gitterpunkte ist $\frac{c^2 + 5c + 6}{2}$, welche Zahl für $c = \infty$ mit der ersten identisch ist, da sie nur um Grössen ersten Grades von ihr abweicht.

Schlussbemerkung. Verfasser glaubt bewiesen zu haben, dass sich die diophantischen Gleichungen mit 3 Unbekannten in hervorragender Weise zu graphischer Behandlung eignen. Sie war Sohnecke nicht bekannt, der dies in einer freundlichen Zusage v. J. 1892 vollständig anerkennt, während er die Lösung der Gleichungen mit 2 Unbekannten früher selbst gefunden, aber nicht veröffentlicht hat.