

Gittervektoren.

Ein Gittervektor entsteht, wenn man 2 Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) miteinander verbindet. Die Verbindungslinie ist mit aquidistanten Punkten besetzt. Die Länge (Tensor) des Vektors ist der Abstand zweier benachbarter Punkte.

In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, wie die Operationen mit solchen Vektoren für einige Gebiete der Zahlentheorie und der Geometrie nutzbar gemacht werden können. Im ersten werden die Quadrate der Gittervektoren, Zahlen, die in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden können, untersucht. Der zweite wird zeigen, wie sich die Gittervektoren in geraden Linien und (Netz-)Ebenen aneinanderreihen, d. h. wie sich die diophantischen Gleichungen ersten Grades auf graphischem Wege lösen lassen. Im dritten Abschnitt wird untersucht, wie sich die Gittervektoren einer und derselben Form um einen Gitterpunkt gruppieren. Die in eine Netzebene fallenden Vektoren liefern regelmässige ebene Punktsysteme. Im vierten endlich wird versucht werden, die algebraische Multiplikation (Streckenmultiplikation) von Gittervektoren im Raum auszuführen, was für eine grosse Zahl von Fällen auch gelingt.

Ein erster Anhang wird zeigen, wie für einen beliebigen Vektor Näherungsvektoren berechnet werden können, ein zweiter handelt von harmonischen Vektoren.

I. Gitterzahlen.

Definition: Gitterzahlen (GZ) (Gittervektorquadratzahlen), sollen die Zahlen heissen, welche in die Summe zweier Quadratzahlen (QZ) zerlegt werden können. Ist eine der beiden Quadratzahlen gleich Null, so geht die GZ in eine QZ über.

$$\text{Ist} \quad GZ = a^2 + b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

wo die Komponenten a und b ganze Zahlen sind, so sieht man (Fig. 1), dass sich

GZ auf quadriertem Papier (im quadratischen Gitter) als ein Quadrat mit der Seite $[0,0] - [a,b]$ so darstellen lässt, dass alle 4 Eckpunkte des Quadrates mit Gitterpunkten des quadratischen Netzes zusammenfallen.

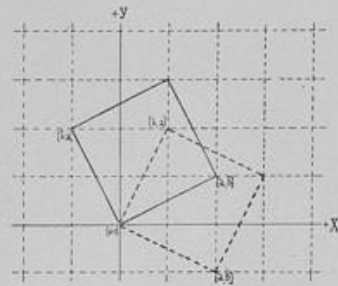


Fig. 1.

Die Seite dieses Quadrates ($\sqrt{a^2 + b^2}$) soll als Vektor angesehen, mit $a \pm bi$ in die Rechnung eingeführt und mit

$$V = [a \ b]$$

bezeichnet werden.

1. Satz. Durch Multiplikation zweier GZ erhält man eine neue GZ.

Beweis.

$$V \cdot V' = [a \ b] \cdot [a' \ b'] = \begin{cases} (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i = A + Bi \\ (a - bi)(a' + b'i) = aa' + bb' + (ab' - a'b)i = A' + B'i \\ (a + bi)(a' - b'i) = aa' + bb' - (ab' - a'b)i = A' - B'i \\ (a - bi)(a' - b'i) = aa' - bb' - (ab' + a'b)i = A - Bi \end{cases}$$

Von den 4 verschiedenen Resultaten der Multiplikation stellen das 1. und 4., ebenso das 2. und 3. den Vektor einer und derselben GZ dar.

Bei der Multiplikation zweier Vektoren braucht also nur bei einem derselben das doppelte Vorzeichen der imaginären Komponente berücksichtigt zu werden; wie man sich leicht überzeugt, erhält man auch kein neues Resultat, wenn man das Vorzeichen der reellen Komponente ändert oder die Komponenten vertauscht:

$$(b + ai)(-a' + b'i) = -ab - ab' - (aa' - bb')i = -B - Ai$$

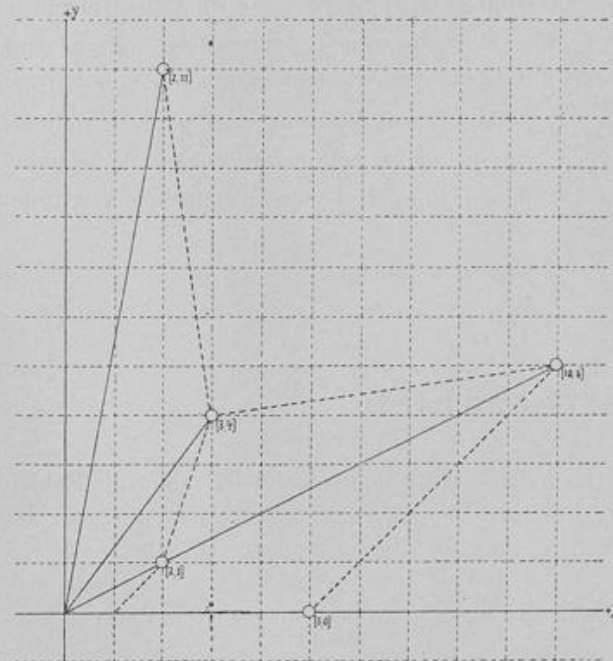


Fig. 3.

1. Beispiel:

$$(1 + i)(3 \pm 2i) = \begin{cases} 1 + 5i \\ 5 + i \end{cases}$$

d. h.

$$(1^2 + 1^2)(3^2 + 2^2) = 1^2 + 5^2$$

2. Beispiel:

$$(2 + i)(2 \pm i) = \begin{cases} 3 + 4i \\ 5 \end{cases}$$

d. h.

$$(2^2 + 1^2)^2 = \begin{cases} 3^2 + 4^2 \\ 5^2 \end{cases}$$

3. Beispiel:

$$[2 + i]^3 = \begin{cases} 2 + 11i \\ 5(2 + i) \end{cases}$$

d. h.

$$5^3 = \begin{cases} 2^2 + 11^2 \\ 10^2 + 5^2 \end{cases}$$

1. Anmerkung. Aus der bekannten Konstruktion können die analytischen Formeln abgeleitet werden: Sind φ u. ψ die Winkel, welche von den Vektoren $[a\ b]$ bzw. $[a'\ b']$ mit der x-Achse gebildet werden, so ist

$$(1) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b'}{a'}$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} (\varphi \pm \psi) = \frac{a'b \pm a b'}{a a' \mp b b'} = \begin{cases} \frac{B}{A} \\ \frac{B'}{A'} \end{cases}$$

Ferner ist

$$(3) \quad A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) \\ = (a a' + b b')^2 + (a' b - a b')^2$$

und daher

$$\begin{aligned} A &= a a' - b b' \\ B &= a' b + a b' \\ A' &= a a' + b b' \\ B' &= a' b - a b' \end{aligned}$$

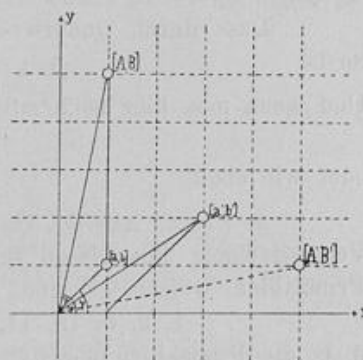


Fig. 2.

2. Anmerkung. Ist eine GZ $(A^2 + B^2)$ durch eine andere $(a^2 + b^2)$, so ist ihr Vektor $A + Bi$ durch $a + bi$ oder $a - bi$ teilbar und umgekehrt. Eine nicht durch eine andere teilbare GZ heisst Primgitterzahl (s. Satz 4), ein unteilbarer Vektor soll Primvektor genannt werden.

Beispiel: $11 + 2i$ ist nicht durch $2 + i$, wohl aber durch $2 - i$ teilbar:

$$\frac{11 + 2i}{2 - i} = \frac{(11 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{20 + 15i}{5} \\ = 4 + 3i$$

Die graphische Lösung der Aufgabe, einen Vektor in Primvektoren zu zerlegen, s. am Schluss dieses Abschnitts.

2. Satz. Wird eine GZ mit einer Zahl multipliziert, die keine GZ ist (Nichtgitterzahl NGZ), so entsteht eine NGZ.

Beweis. Im Vektor der NGZ $[a' + b'i]$ ist mindestens eine der beiden Komponenten irrational, woraus sofort erhellt, dass bei der Multiplikation mit $[a + bi]$ beide Komponenten des Produkts irrational werden.

$$\text{Beispiel: } [3 + 2i][\sqrt{2} + i] = 3\sqrt{2} - 2 + i(3 + 2\sqrt{2})$$

$$\text{d. h. } (3^2 + 2^2)(2 + 1) = (3\sqrt{2} - 2)^2 + (3 + 2\sqrt{2})^2 = 39.$$

3. Satz. Multipliziert man eine NGZ mit einer andern NGZ', so entsteht im allgemeinen eine NGZ. Nur wenn $\text{NGZ} = \text{GZ} \cdot \text{NGZ}'$, so erhält man durch Multiplikation mit NGZ' eine GZ.

Der Beweis folgt aus der Tatsache, dass durch Multiplikation zweier verschiedener Irrationalzahlen im allgemeinen wieder eine Irrationalzahl entsteht.

$$\text{Beispiel: } [(2\sqrt{2} - 1) - i(2 + \sqrt{2})][\sqrt{2} - i] = 6 + 3i$$

Da die erste Klammer das Produkt aus $[\sqrt{2} + i][2 - i]$ darstellt, so ist

$$3 \cdot 5 \cdot 3 = 6^2 + 3^2.$$

Man erhält also hier durch die Multiplikation zweier NGZ 15 und 3 eine GZ, weil eigentlich zwei GZ, 5 und 9, miteinander multipliziert worden sind.

Dass durch Quadrieren einer NGZ eine GZ entsteht, ist selbstverständlich. So ist

$$[\sqrt{2} + i][\sqrt{2} - i] = 3 \text{ d. h. } 3^2 = 9$$

Und wenn man hier noch mit dem Vektor von 5 multipliziert, so ist

$$3[2 + i] = 6 + 3i$$

oder wie oben

$$9 \cdot 5 = 6^2 + 3^2.$$

4. Satz. Alle GZ lassen sich aus verhältnismässig wenigen Grundzahlen durch Vervielfachung mit diesen selbst gewinnen. Es sind dies in erster Linie diejenigen Primzahlen, welche GZ sind:

1, 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97*)

d. h. die Primzahlen von der Form $4h + 1$ und noch 2.

In zweiter Linie sind es die Quadrate der übrigen Primzahlen

$$9, 49, 121 \dots (4h - 1)^2$$

Die Primgitterzahlen sind also:

0, 1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, 53, 61, 73, 89, 97**)

Sämtliche Gitterzahlen von 1-100 sind:

1	$29 = 5^2 + 2^2$	$65 = 8^2 + 1 = 7^2 + 4^2$
$2 = 1 + 1$	$32 = 4^2 + 4^2$	$68 = 8^2 + 2^2$
$4 = 2^2$	$34 = 5^2 + 3^2$	$72 = 6^2 + 6^2$
$5 = 2^2 + 1$	$36 = 6^2$	$73 = 8^2 + 3^2$
$8 = 2^2 + 2^2$	$37 = 6^2 + 1$	$74 = 7^2 + 5^2$
$9 = 3^2$	$40 = 6^2 + 2^2$	$80 = 8^2 + 4^2$
$10 = 3^2 + 1$	$41 = 5^2 + 4^2$	$81 = 9^2$
$13 = 3^2 + 2^2$	$45 = 6^2 + 3^2$	$82 = 9^2 + 1$
$16 = 4^2$	$49 = 7^2$	$85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$
$17 = 4^2 + 1$	$50 = 7^2 + 1 = 5^2 + 5^2$	$89 = 8^2 + 5^2$
$18 = 3^2 + 3^2$	$52 = 6^2 + 4^2$	$90 = 9^2 + 3^2$
$20 = 4^2 + 2^2$	$53 = 7^2 + 2^2$	$97 = 9^2 + 4^2$
$25 = 5^2 = 4^2 + 3^2$	$58 = 7^2 + 3^2$	$98 = 7^2 + 7^2$
$26 = 5^2 + 1$	$61 = 6^2 + 5^2$	$100 = 10^2 = 8^2 + 6^2$
	$64 = 8^2$	

Ihre Anzahl von 1 bis n^2 ist für $n = 3p$: $\frac{n^2}{3} + n$

für $n = 3p + 1$: $\frac{n^2 - 1}{3} + n$

*) In der Zahlentheorie wird der Satz von Fermat bewiesen, dass jede Primzahl von der Form $4h + 1$ sich stets und zwar nur auf eine einzige Weise in zwei Quadraten zerfallen lässt. Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 2. Auflage, S. 163.

**) Die angeschriebene Reihe ist identisch mit der von Scheffler für die Normen $(a^2 + b^2)$ der vollkommenen Primzahlen (Primvektoren) angegebenen. Scheffler, Die unbestimmte Analytik, S. 681.

5. Satz. Alle NGZ können abgeleitet werden aus den Primzahlen von der Form $(4h - 1)$:

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83

Denn eine solche gibt, ausgenommen die in Satz 3 besprochenen Fälle, mit einer beliebigen anderen Zahl multipliziert, wieder eine NGZ.

Die NGZ sind somit:

3, 7, 11, 15, 19, 21, 23, 27, 31, 33, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 57, 59, 63, 67, 69, 71,
75, 77, 79, 83, 87, 91, 93, 95, 99

und ihre mit 2^n multiplizierten Werte.

6. Satz. Durch Multiplikation zweier Primzahlen von der Form $4h + 1$ erhält man Zahlen (DGZ), welche sich auf 2 verschiedene Arten in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegen lassen.

Beweis. Wie in Satz 1 gezeigt worden, erhält man durch Multiplikation zweier Vektoren im allgemeinen 2 verschiedene Resultate:

$$[a \ b] [a' \ b'] = \begin{cases} A + Bi \\ A' + Bi \end{cases}$$

Ist aber eine der beiden $GZ = 2$, deren Vektor $1 + i$ ist, so wird $A = B'$ und $A' = B$ und man erhält die beiden Vektoren $A + Bi$ und $B + Ai$, welche Seiten des nämlichen Quadrates darstellen (s. 1. Beispiel zu Satz 1) und allgemein:

$$(1 + i)(a \pm bi) = a \mp b + i(a \pm b) = \begin{cases} A + Bi \\ B + Ai \end{cases}$$

Will man also durch Multiplikation zweier Gitterzahlen eine DGZ gewinnen, so darf 2 nicht dabei sein; ebensowenig eine Zahl von der Form $(4h - 1)^2$. Selbstverständlich ist aber 2 DGZ oder $(4h - 1)^2$ DGZ wieder eine DGZ.

Man erhält die Reihe:

$$\begin{aligned} 5^2 &= 5^2 + 0 = 4^2 + 3^2 = 25 \\ 2 \cdot 5^2 &= 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \\ 5 \cdot 13 &= 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \\ 5 \cdot 17 &= 7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 = 85 \\ 2^2 \cdot 5^2 &= 10^2 + 0 = 8^2 + 6^2 = 100 \\ 5^3 &= 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2 = 125 \\ 2 \cdot 5 \cdot 13 &= 9^2 + 7^2 = 11^2 + 3^2 = 130 \\ 5 \cdot 29 &= 9^2 + 8^2 = 12^2 + 1 = 145 \\ 13^2 &= 13^2 + 0 = 12^2 + 5^2 = 169 \\ 2 \cdot 5 \cdot 17 &= 11^2 + 7^2 = 13^2 + 1 = 170 \\ 5 \cdot 37 &= 11^2 + 8^2 = 13^2 + 4^2 = 185 \\ 2^3 \cdot 5^2 &= 10^2 + 10^2 = 14^2 + 2^2 = 200 \\ 5 \cdot 41 &= 13^2 + 6^2 = 14^2 + 3^2 = 205 \\ 5 \cdot 45 &= 15^2 + 0 = 12^2 + 9^2 = 225 \\ 2 \cdot 5^3 &= 13^2 + 9^2 = 15^2 + 5^2 = 250 \\ &\dots \end{aligned}$$

Die zwei verschiedenen Zerlegungen des Produktes zweier Primzahlen von der Form $4h + 1$ in die Summe zweier Quadratzahlen können mit Hilfe der quadratischen Formen ausgeführt werden.*) Mit der Vektormethode geht die Sache viel einfacher:

$$\begin{aligned} (2 + i)(3 + 2i) &= \begin{cases} 4 + 7i \\ 8 - i \end{cases} \\ \text{d. h.} \quad 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 &= 8^2 + 1^2 \end{aligned}$$

7. Satz. Das Produkt von n verschiedenen Primzahlen der Form $(4h + 1)$ kann auf 2^{n-1} verschiedene Arten in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden.

$$\text{Beweis. Ist } [a_1 + b_1 i][a_2 + b_2 i] = \begin{cases} A + Bi \\ A' + B'i \end{cases}$$

so erhält man durch die Multiplikation mit $[a_3 + b_3 i]$ 4 verschiedene Resultate; diese wiederum mit $[a_4 + b_4 i]$ multipliziert, gibt 8 u. s. f.

Beispiel: $5 \cdot 13 \cdot 17$

$$\begin{aligned} [2 + i][3 + 2i] &= \begin{cases} 4 + 7i \\ 8 - i \end{cases} \\ [4 + 7i][4 + i] &= \begin{cases} 9 + 32i \\ 23 + 24i \end{cases} \\ [8 - i][4 + i] &= \begin{cases} 33 + 4i \\ 31 - 12i \end{cases} \end{aligned}$$

Und somit $1105 = 9^2 + 32^2 = 23^2 + 24^2 = 33^2 + 4^2 = 31^2 + 12^2$.

8. Satz. Die n -te Potenz einer Primzahl von der Form $(4h + 1)$ kann auf $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Arten in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Der Satz soll zunächst für die Potenzen von 5 bewiesen werden (s. Fig. 3):

$$\begin{aligned} [2 + i]^2 &= \begin{cases} 3 + 4i \\ 5 \end{cases} & \text{somit } 5^2 &= \begin{cases} 3^2 + 4^2 \end{cases} \\ [2 + i]^3 &= \begin{cases} 2 + 11i \\ 5(2 + i) \end{cases} & \text{somit } 5^3 &= \begin{cases} 4^2 + 11^2 \\ 10^2 + 5^2 \end{cases} \\ [2 + i]^4 &= \begin{cases} -7 + 24i \\ 5(3 + 4i) \\ 25 \end{cases} & \text{somit } 5^4 &= \begin{cases} 7^2 + 24^2 \\ 15^2 + 20^2 \end{cases} \\ [2 + i]^5 &= \begin{cases} -38 + 41i \\ 5(2 + 11i) \\ 25(2 + i) \end{cases} & \text{somit } 5^5 &= \begin{cases} 38^2 + 41^2 \\ 10^2 + 55^2 \\ 50^2 + 25^2 \end{cases} \\ [2 + i]^6 &= \begin{cases} -117 + 44i \\ 5(-7 + 24i) \\ 25(3 + 4i) \\ 125 \end{cases} & \text{somit } 5^6 &= \begin{cases} 117^2 + 44^2 \\ 35^2 + 120^2 \\ 75^2 + 100^2 \end{cases} \end{aligned}$$

*) Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 2. Aufl. S. 163. Beispiel 2.

Die Zerlegung von 65^2 soll noch ausgeführt werden:

$$[2 + i]^2 \cdot [3 + 2i]^2 = \begin{bmatrix} 3 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 + 12i \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{cases} -33 + 56i \\ 63 - 16i \\ 25 + 60i \\ 39 + 52i \\ 65 \end{cases}$$

Der Abschnitt über Gitterzahlen soll mit der Lösung folgender Aufgaben geschlossen werden:

„Einem quadratischen Gitter ein Gitter mit n -mal so grosser Masche einzeichnen“.

Auflösung. Irgend 2 Vektoren $[a \ b]$ und $[c \ d]$ bilden eine Masche von der Grösse $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (in Fig. 4 ist die Masche = 5). Werden die Richtungen

der beiden Vektoren als Achsen eines neuen Koordinatensystems angesehen und sind x' , y' Koordinaten eines Punktes im neuen Gitter, so ist

$$[x \ y] = [a \ b] x' + [c \ d] y'$$

$$\text{d. h. } \begin{cases} x = a x' + c y' \\ y = b x' + d y' \end{cases}$$

$$\text{oder } \begin{cases} x' = \frac{d x - c y}{a d - b c} \\ y' = \frac{a y - b x}{a d - b c} \end{cases}$$

Nur wenn

$$a d - b c = \pm 1$$

d. h. wenn der Inhalt der neuen Masche gleich dem der alten ist, werden die sämtlichen Eckpunkte des alten Gitters auch solche des neuen.*) Von einer derartigen Verwandlung eines

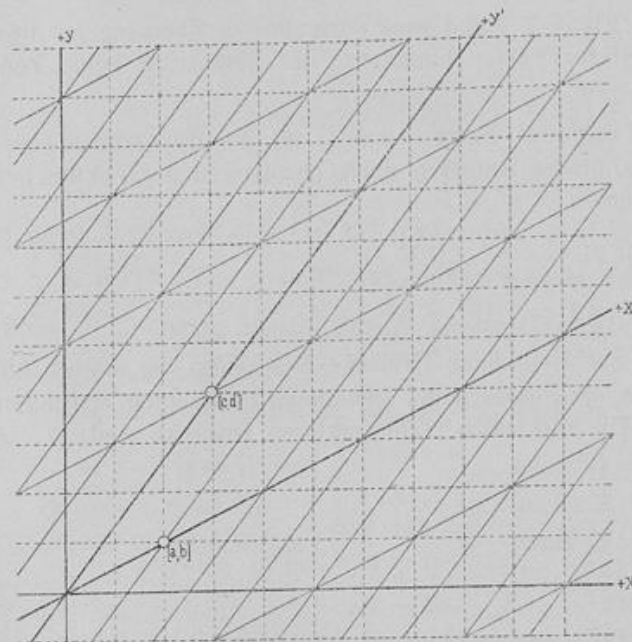


Fig. 4.

Gitters soll im folgenden Kapitel die Rede sein.

Hier ist

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = n$$

und da jede ganze Zahl auf unendlich viele verschiedene Arten als 2-gliedrige Determinante dargestellt werden kann, so lässt auch unsere Aufgabe für ein gegebenes n unendlich viele Lösungen zu.

*) F. Klein, Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896/97. S. 6.

Die Aufgabe wird aber zu einer bestimmten, wenn noch die weitere Forderung hinzukommt, dass die Masche des neuen Gitters wieder ein Quadrat sein müsse. Jetzt kann n nur eine Gitterzahl sein. Für $n = 5$ mit dem Vektor $[21]$ ist die Lösung in Fig. 5 ausgeführt; ebenso für den Vektor $[23]$ mit $n = 13$.

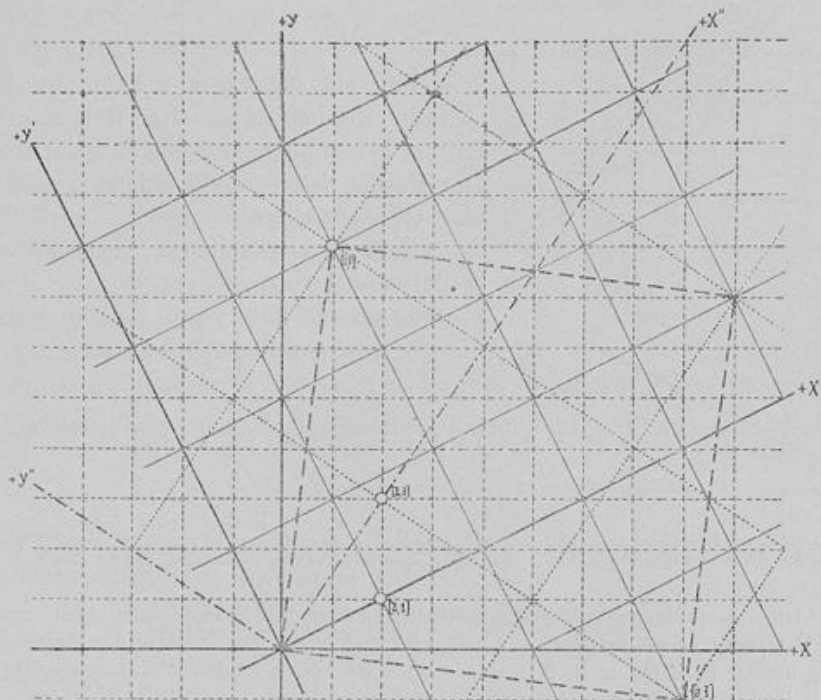


Fig. 5.

Anmerkung. Die gemeinsamen Eckpunkte der beiden Gitter bilden ein neues Gitter mit dem Vektor $[1.8]$, der durch Multiplikation der Vektoren $[2.1]$ und $[2.3]$ gewonnen werden kann.

Der Beweis folgt aus den Transformationsformeln, die jetzt lauten:

$$\begin{cases} x = a x' - b y' \\ y = b x' + a y' \end{cases}$$

und die identisch sind mit den bei Satz 1 aufgestellten Formeln für die Multiplikation zweier Vektoren $[a. b] \cdot [x'. y'] = [x. y]$. Daraus folgt für die Division

$$\begin{cases} x' = \frac{a x + b y}{a^2 + b^2} \\ y' = \frac{a y - b x}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Die einfache geometrische Konstruktion für die Multiplikation zweier Vektoren soll an dem Beispiel $[2.1] \cdot [3.4]$ gezeigt werden [Fig. 6].

Allgemein: Sollen die Vektoren $[a\ b]$ und $[c\ d]$ miteinander multipliziert werden, so

addiert man $c \cdot [a, b] + d \cdot [b, a]$ oder $a [c, d] + b [d, c]$, womit die Multiplikation auf eine wiederholte Addition zurückgeführt und die Uebereinstimmung mit der analytischen Methode herbeigeführt ist:

$$[a + bi] \cdot [c + di] = a [c + di] + bi [c + di] \\ = c [a + bi] + di [b + bi]^*)$$

Für ein beliebiges n kann die Forderung gestellt werden, dass die Masche des neuen Gitters grösstmögliche Symmetrie aufweisen solle. Die Masche ist jetzt ein Rhombus, der nur für eine GZ zum Quadrat wird.

Zum Beweis sollen 2 Hilfssätze aufgestellt werden:

a) Jede gerade Zahl kann als eine Determinante von der Form

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 2ab$$

b) Jede ungerade Zahl durch

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

dargestellt werden.

Der erste Satz ist selbstverständlich.

*) Diese neue Methode der Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann mit Vorteil im elementaren Unterricht verwendet werden. Hier wird man zuerst zeigen, dass die Multiplikation mit i eine Drehung um 90° bedeutet, z. B. $[2 + i]i = -1 + 2i$. Dann ist leicht einzusehen, dass die Multiplikation $[2 + i] \cdot [3 + 4i]$ mit der vektoriellen Addition

$$3[2 + i] + 4i[2 + i] \\ \text{oder } 2[3 + 4i] + i[3 + 4i]$$

gleichbedeutend ist.

Umgekehrt kann die Zerlegung einer komplexen Zahl (Gittervektors) $[a + bi]$ in Faktoren (Primvektoren) mittelst eines Kreises über dem zugehörigen Vektor graphisch ausgeführt werden. Liegt auf dem Halbkreis ausser $[a, 0]$ nur 1 Gitterpunkt, so halbiert der zugehörige Vektor $\sqrt{a + bi}$ den Winkel, den der gegebene Vektor $[a\ b]$ mit dem Einheitsvektor $[1\ 0]$ bildet. Enthält der Kreis 2 Gitterpunkte, so sind die zugehörigen Vektoren Vielfache der gesuchten; wenn sie den vorhin ge-

nannten Winkel in 3 gleiche Teile teilen, so stellen die gesuchten Vektoren $\sqrt[3]{a + bi}$ und $\sqrt[3]{(a + bi)^2}$ dar. Vergl. Fig. 6 mit Fig. 3. Diese Betrachtung führt zur graphischen Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

Der genannte Kreis hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2x - 11y = 0$$

Auf ihm liegen die Punkte

$$[2\ 0], [6\ 3] = 3[2\ 1], [6\ 8] = 2[3\ 4], [2\ 11], [0\ 11], [4\ 8] = 4[1\ 2], [4\ 3]$$

Die beiden letzten Vektoren $-1 + 2i$ und $-4 + 3i$ sind ebenfalls in $2 + 11i$ enthalten und es gilt der Satz:

Ist $\alpha + \beta i$ ein Faktor von $a + bi$, so ist auch $(\alpha + \beta i)i = -\beta + \alpha i$ ein solcher.

Zum Beweis setzt man $(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = a + bi$

$$\frac{a + bi}{i(\alpha + \beta i)} = \frac{\alpha' + \beta' i}{i} = -\alpha' i + \beta'$$

Dann ist

Für den zweiten hat man

$$3 = 2^2 - 1$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

$$9 = 5^2 - 4^2$$

$$11 = 6^2 - 5^2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$n = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$$

$$n+2 = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$$

In Fig. 7 ist die Masche eines Gitters mit dem Inhalt $n = 7$ gezeichnet. Die nämliche Figur soll zeigen, dass n auch ein Bruch sein kann ($n = \frac{1}{7}$). Denn im folgenden Abschnitt wird bewiesen werden, dass eine Masche von der Grösse n in n^2 kleine Maschen zerlegt wird, wenn man durch die innerhalb und auf dem Umfang gelegenen Gitterpunkte Parallelen mit den Seiten zieht; jedes der so entstehenden kleinen Parallelogramme ist also $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

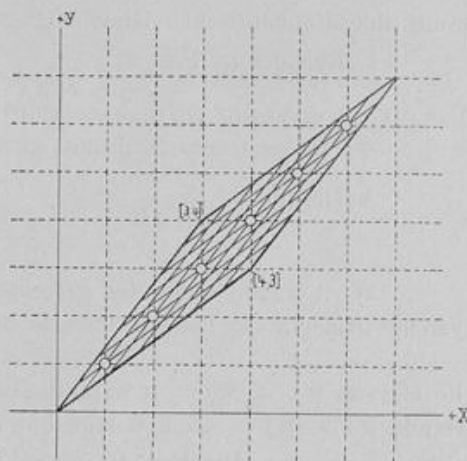


Fig. 7.

II. Graphische Lösung der diophantischen Gleichungen 1. Grades.*)

Vorübung.

Eine Gerade, deren Gleichung

$$m x + n y = c$$

ist in ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf quadriertem Papier (in ein quadratisches Gitter) einzuzichnen, wobei zuerst die Achsenabschnitte berechnet werden. Sind m , n und c ganze Zahlen, so zeigt sich, wenn m und n relativ prim (S. 12), dass die Gerade Gitterpunkte enthält, deren Koordinaten die bei Auf-

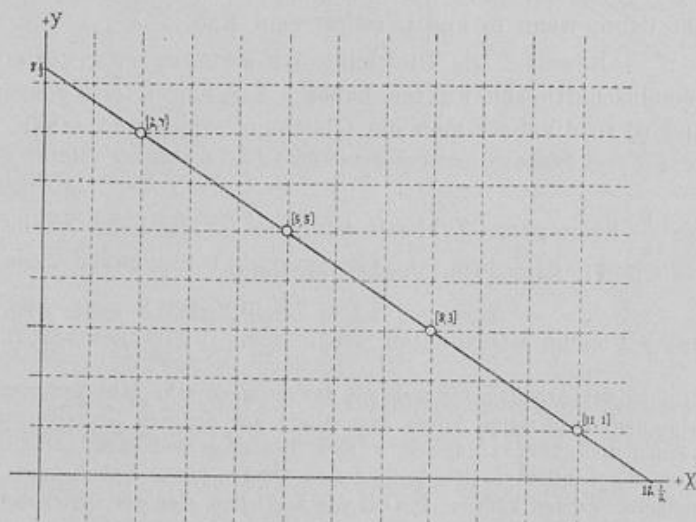


Fig. 8.

*) Im Jahrgang XXIII (1892) der Zeitschrift für math. und nat. Unterricht habe ich unter dieser Überschrift eine Studie veröffentlicht, die hier in neuer und verbesserter Form erscheint. Mein Aufsatz ist von der Redaktion (S. Günter) mit einer umfangreichen Nachschrift versehen worden. Nach