

KGL. WILHELMS-REALSCHULE
STUTTGART.

GITTERVEKTOREN

VON

PROF. FRIEDRICH HAAG

BEILAGE ZUM PROGRAMM 1907

STUTTGART

KGL. HOFBUCHDRUCKEREI CARL LIEBICH

1907



1907, Programm No. 758.

95t (1907)
47

758.



Gittervektoren.

Ein Gittervektor entsteht, wenn man 2 Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) miteinander verbindet. Die Verbindungslinie ist mit aquidistanten Punkten besetzt. Die Länge (Tensor) des Vektors ist der Abstand zweier benachbarter Punkte.

In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, wie die Operationen mit solchen Vektoren für einige Gebiete der Zahlentheorie und der Geometrie nutzbar gemacht werden können. Im ersten werden die Quadrate der Gittervektoren, Zahlen, die in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden können, untersucht. Der zweite wird zeigen, wie sich die Gittervektoren in geraden Linien und (Netz-)Ebenen aneinanderreihen, d. h. wie sich die diophantischen Gleichungen ersten Grades auf graphischem Wege lösen lassen. Im dritten Abschnitt wird untersucht, wie sich die Gittervektoren einer und derselben Form um einen Gitterpunkt gruppieren. Die in eine Netzebene fallenden Vektoren liefern regelmässige ebene Punktsysteme. Im vierten endlich wird versucht werden, die algebraische Multiplikation (Streckenmultiplikation) von Gittervektoren im Raum auszuführen, was für eine grosse Zahl von Fällen auch gelingt.

Ein erster Anhang wird zeigen, wie für einen beliebigen Vektor Näherungsvektoren berechnet werden können, ein zweiter handelt von harmonischen Vektoren.

I. Gitterzahlen.

Definition: Gitterzahlen (GZ) (Gittervektorquadratzahlen), sollen die Zahlen heissen, welche in die Summe zweier Quadratzahlen (QZ) zerlegt werden können. Ist eine der beiden Quadratzahlen gleich Null, so geht die GZ in eine QZ über.

$$\text{Ist} \quad GZ = a^2 + b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

wo die Komponenten a und b ganze Zahlen sind, so sieht man (Fig. 1), dass sich

GZ auf quadriertem Papier (im quadratischen Gitter) als ein Quadrat mit der Seite $[0,0] - [a,b]$ so darstellen lässt, dass alle 4 Eckpunkte des Quadrates mit Gitterpunkten des quadratischen Netzes zusammenfallen.

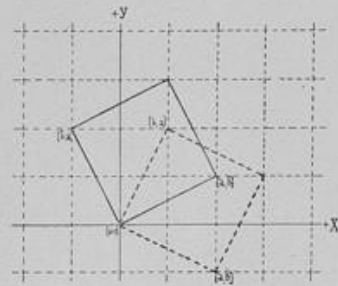


Fig. 1.

Die Seite dieses Quadrates ($\sqrt{a^2 + b^2}$) soll als Vektor angesehen, mit $a \pm bi$ in die Rechnung eingeführt und mit

$$V = [a \ b]$$

bezeichnet werden.

1. Satz. Durch Multiplikation zweier GZ erhält man eine neue GZ.

Beweis.

$$V \cdot V' = [a \ b] \cdot [a' \ b'] = \begin{cases} (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i = A + Bi \\ (a - bi)(a' + b'i) = aa' + bb' + (ab' - a'b)i = A' + B'i \\ (a + bi)(a' - b'i) = aa' + bb' - (ab' - a'b)i = A' - B'i \\ (a - bi)(a' - b'i) = aa' - bb' - (ab' + a'b)i = A - Bi \end{cases}$$

Von den 4 verschiedenen Resultaten der Multiplikation stellen das 1. und 4., ebenso das 2. und 3. den Vektor einer und derselben GZ dar.

Bei der Multiplikation zweier Vektoren braucht also nur bei einem derselben das doppelte Vorzeichen der imaginären Komponente berücksichtigt zu werden; wie man sich leicht überzeugt, erhält man auch kein neues Resultat, wenn man das Vorzeichen der reellen Komponente ändert oder die Komponenten vertauscht:

$$(b + ai)(-a' + b'i) = -ab - ab' - (aa' - bb')i = -B - Ai$$

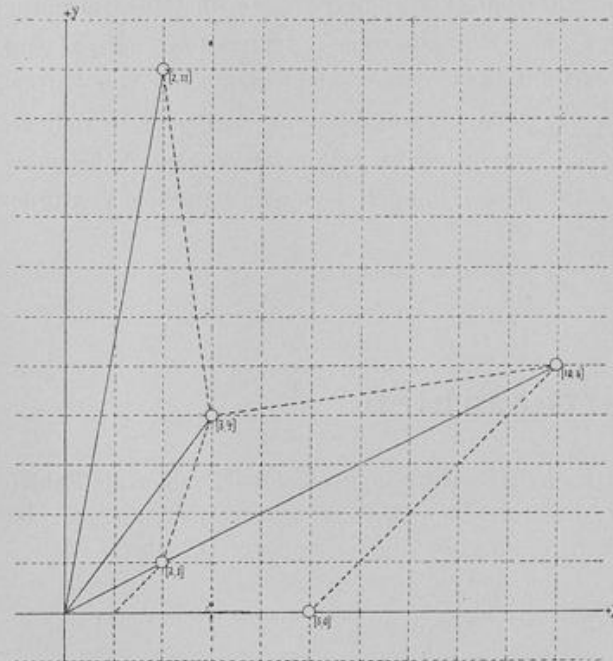


Fig. 3.

1. Beispiel:

$$(1 + i)(3 \pm 2i) = \begin{cases} 1 + 5i \\ 5 + i \end{cases}$$

d. h.

$$(1^2 + 1^2)(3^2 + 2^2) = 1^2 + 5^2$$

2. Beispiel:

$$(2 + i)(2 \pm i) = \begin{cases} 3 + 4i \\ 5 \end{cases}$$

d. h.

$$(2^2 + 1^2)^2 = \begin{cases} 3^2 + 4^2 \\ 5^2 \end{cases}$$

3. Beispiel:

$$[2 + i]^3 = \begin{cases} 2 + 11i \\ 5(2 + i) \end{cases}$$

d. h.

$$5^3 = \begin{cases} 2^2 + 11^2 \\ 10^2 + 5^2 \end{cases}$$

1. Anmerkung. Aus der bekannten Konstruktion können die analytischen Formeln abgeleitet werden: Sind φ u. ψ die Winkel, welche von den Vektoren $[a\ b]$ bzw. $[a'\ b']$ mit der x-Achse gebildet werden, so ist

$$(1) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b'}{a'}$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} (\varphi \pm \psi) = \frac{a'b \pm a b'}{a a' \mp b b'} = \begin{cases} \frac{B}{A} \\ \frac{B'}{A'} \end{cases}$$

Ferner ist

$$(3) \quad A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) \\ = (a a' + b b')^2 + (a' b - a b')^2$$

und daher

$$\begin{aligned} A &= a a' - b b' \\ B &= a' b + a b' \\ A' &= a a' + b b' \\ B' &= a' b - a b' \end{aligned}$$

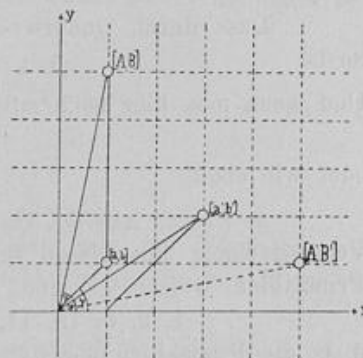


Fig. 2.

2. Anmerkung. Ist eine GZ $(A^2 + B^2)$ durch eine andere $(a^2 + b^2)$, so ist ihr Vektor $A + Bi$ durch $a + bi$ oder $a - bi$ teilbar und umgekehrt. Eine nicht durch eine andere teilbare GZ heisst Primgitterzahl (s. Satz 4), ein unteilbarer Vektor soll Primvektor genannt werden.

Beispiel: $11 + 2i$ ist nicht durch $2 + i$, wohl aber durch $2 - i$ teilbar:

$$\frac{11 + 2i}{2 - i} = \frac{(11 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{20 + 15i}{5} \\ = 4 + 3i$$

Die graphische Lösung der Aufgabe, einen Vektor in Primvektoren zu zerlegen, s. am Schluss dieses Abschnitts.

2. Satz. Wird eine GZ mit einer Zahl multipliziert, die keine GZ ist (Nichtgitterzahl NGZ), so entsteht eine NGZ.

Beweis. Im Vektor der NGZ $[a' + b'i]$ ist mindestens eine der beiden Komponenten irrational, woraus sofort erhellt, dass bei der Multiplikation mit $[a + bi]$ beide Komponenten des Produkts irrational werden.

$$\text{Beispiel: } [3 + 2i][\sqrt{2} + i] = 3\sqrt{2} - 2 + i(3 + 2\sqrt{2})$$

$$\text{d. h. } (3^2 + 2^2)(2 + 1) = (3\sqrt{2} - 2)^2 + (3 + 2\sqrt{2})^2 = 39.$$

3. Satz. Multipliziert man eine NGZ mit einer andern NGZ', so entsteht im allgemeinen eine NGZ. Nur wenn $\text{NGZ} = \text{GZ} \cdot \text{NGZ}'$, so erhält man durch Multiplikation mit NGZ' eine GZ.

Der Beweis folgt aus der Tatsache, dass durch Multiplikation zweier verschiedener Irrationalzahlen im allgemeinen wieder eine Irrationalzahl entsteht.

$$\text{Beispiel: } [(2\sqrt{2} - 1) - i(2 + \sqrt{2})][\sqrt{2} - i] = 6 + 3i$$

Da die erste Klammer das Produkt aus $[\sqrt{2} + i][2 - i]$ darstellt, so ist

$$3 \cdot 5 \cdot 3 = 6^2 + 3^2.$$

Man erhält also hier durch die Multiplikation zweier NGZ 15 und 3 eine GZ, weil eigentlich zwei GZ, 5 und 9, miteinander multipliziert worden sind.

Dass durch Quadrieren einer NGZ eine GZ entsteht, ist selbstverständlich. So ist

$$[\sqrt{2} + i][\sqrt{2} - i] = 3 \text{ d. h. } 3^2 = 9$$

Und wenn man hier noch mit dem Vektor von 5 multipliziert, so ist

$$3[2 + i] = 6 + 3i$$

oder wie oben

$$9 \cdot 5 = 6^2 + 3^2.$$

4. Satz. Alle GZ lassen sich aus verhältnismässig wenigen Grundzahlen durch Vervielfachung mit diesen selbst gewinnen. Es sind dies in erster Linie diejenigen Primzahlen, welche GZ sind:

1, 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97*)

d. h. die Primzahlen von der Form $4h + 1$ und noch 2.

In zweiter Linie sind es die Quadrate der übrigen Primzahlen

$$9, 49, 121 \dots (4h - 1)^2$$

Die Primgitterzahlen sind also:

0, 1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, 53, 61, 73, 89, 97**)

Sämtliche Gitterzahlen von 1-100 sind:

1	$29 = 5^2 + 2^2$	$65 = 8^2 + 1 = 7^2 + 4^2$
$2 = 1 + 1$	$32 = 4^2 + 4^2$	$68 = 8^2 + 2^2$
$4 = 2^2$	$34 = 5^2 + 3^2$	$72 = 6^2 + 6^2$
$5 = 2^2 + 1$	$36 = 6^2$	$73 = 8^2 + 3^2$
$8 = 2^2 + 2^2$	$37 = 6^2 + 1$	$74 = 7^2 + 5^2$
$9 = 3^2$	$40 = 6^2 + 2^2$	$80 = 8^2 + 4^2$
$10 = 3^2 + 1$	$41 = 5^2 + 4^2$	$81 = 9^2$
$13 = 3^2 + 2^2$	$45 = 6^2 + 3^2$	$82 = 9^2 + 1$
$16 = 4^2$	$49 = 7^2$	$85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$
$17 = 4^2 + 1$	$50 = 7^2 + 1 = 5^2 + 5^2$	$89 = 8^2 + 5^2$
$18 = 3^2 + 3^2$	$52 = 6^2 + 4^2$	$90 = 9^2 + 3^2$
$20 = 4^2 + 2^2$	$53 = 7^2 + 2^2$	$97 = 9^2 + 4^2$
$25 = 5^2 = 4^2 + 3^2$	$58 = 7^2 + 3^2$	$98 = 7^2 + 7^2$
$26 = 5^2 + 1$	$61 = 6^2 + 5^2$	$100 = 10^2 = 8^2 + 6^2$
	$64 = 8^2$	

Ihre Anzahl von 1 bis n^2 ist für $n = 3p$: $\frac{n^2}{3} + n$

für $n = 3p + 1$: $\frac{n^2 - 1}{3} + n$

*) In der Zahlentheorie wird der Satz von Fermat bewiesen, dass jede Primzahl von der Form $4h + 1$ sich stets und zwar nur auf eine einzige Weise in zwei Quadraten zerfallen lässt. Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 2. Auflage, S. 163.

**) Die angeschriebene Reihe ist identisch mit der von Scheffler für die Normen $(a^2 + b^2)$ der vollkommenen Primzahlen (Primvektoren) angegebenen. Scheffler, Die unbestimmte Analytik, S. 681.

5. Satz. Alle NGZ können abgeleitet werden aus den Primzahlen von der Form $(4h - 1)$:

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83

Denn eine solche gibt, ausgenommen die in Satz 3 besprochenen Fälle, mit einer beliebigen anderen Zahl multipliziert, wieder eine NGZ.

Die NGZ sind somit:

3, 7, 11, 15, 19, 21, 23, 27, 31, 33, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 57, 59, 63, 67, 69, 71,
75, 77, 79, 83, 87, 91, 93, 95, 99

und ihre mit 2^n multiplizierten Werte.

6. Satz. Durch Multiplikation zweier Primzahlen von der Form $4h + 1$ erhält man Zahlen (DGZ), welche sich auf 2 verschiedene Arten in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegen lassen.

Beweis. Wie in Satz 1 gezeigt worden, erhält man durch Multiplikation zweier Vektoren im allgemeinen 2 verschiedene Resultate:

$$[a \ b] [a' \ b'] = \begin{cases} A + Bi \\ A' + Bi \end{cases}$$

Ist aber eine der beiden $GZ = 2$, deren Vektor $1 + i$ ist, so wird $A = B'$ und $A' = B$ und man erhält die beiden Vektoren $A + Bi$ und $B + Ai$, welche Seiten des nämlichen Quadrates darstellen (s. 1. Beispiel zu Satz 1) und allgemein:

$$(1 + i)(a \pm bi) = a \mp b + i(a \pm b) = \begin{cases} A + Bi \\ B + Ai \end{cases}$$

Will man also durch Multiplikation zweier Gitterzahlen eine DGZ gewinnen, so darf 2 nicht dabei sein; ebensowenig eine Zahl von der Form $(4h - 1)^2$. Selbstverständlich ist aber 2 DGZ oder $(4h - 1)^2$ DGZ wieder eine DGZ.

Man erhält die Reihe:

$$\begin{aligned} 5^2 &= 5^2 + 0 = 4^2 + 3^2 = 25 \\ 2 \cdot 5^2 &= 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \\ 5 \cdot 13 &= 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \\ 5 \cdot 17 &= 7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 = 85 \\ 2^2 \cdot 5^2 &= 10^2 + 0 = 8^2 + 6^2 = 100 \\ 5^3 &= 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2 = 125 \\ 2 \cdot 5 \cdot 13 &= 9^2 + 7^2 = 11^2 + 3^2 = 130 \\ 5 \cdot 29 &= 9^2 + 8^2 = 12^2 + 1 = 145 \\ 13^2 &= 13^2 + 0 = 12^2 + 5^2 = 169 \\ 2 \cdot 5 \cdot 17 &= 11^2 + 7^2 = 13^2 + 1 = 170 \\ 5 \cdot 37 &= 11^2 + 8^2 = 13^2 + 4^2 = 185 \\ 2^3 \cdot 5^2 &= 10^2 + 10^2 = 14^2 + 2^2 = 200 \\ 5 \cdot 41 &= 13^2 + 6^2 = 14^2 + 3^2 = 205 \\ 5 \cdot 45 &= 15^2 + 0 = 12^2 + 9^2 = 225 \\ 2 \cdot 5^3 &= 13^2 + 9^2 = 15^2 + 5^2 = 250 \\ &\dots \end{aligned}$$

Die zwei verschiedenen Zerlegungen des Produktes zweier Primzahlen von der Form $4h + 1$ in die Summe zweier Quadratzahlen können mit Hilfe der quadratischen Formen ausgeführt werden.*) Mit der Vektormethode geht die Sache viel einfacher:

$$\begin{aligned} (2 + i)(3 + 2i) &= \begin{cases} 4 + 7i \\ 8 - i \end{cases} \\ \text{d. h.} \quad 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 &= 8^2 + 1^2 \end{aligned}$$

7. Satz. Das Produkt von n verschiedenen Primzahlen der Form $(4h + 1)$ kann auf 2^{n-1} verschiedene Arten in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden.

$$\text{Beweis. Ist } [a_1 + b_1 i][a_2 + b_2 i] = \begin{cases} A + Bi \\ A' + B'i \end{cases}$$

so erhält man durch die Multiplikation mit $[a_3 + b_3 i]$ 4 verschiedene Resultate; diese wiederum mit $[a_4 + b_4 i]$ multipliziert, gibt 8 u. s. f.

Beispiel: $5 \cdot 13 \cdot 17$

$$\begin{aligned} [2 + i][3 + 2i] &= \begin{cases} 4 + 7i \\ 8 - i \end{cases} \\ [4 + 7i][4 + i] &= \begin{cases} 9 + 32i \\ 23 + 24i \end{cases} \\ [8 - i][4 + i] &= \begin{cases} 33 + 4i \\ 31 - 12i \end{cases} \end{aligned}$$

Und somit $1105 = 9^2 + 32^2 = 23^2 + 24^2 = 33^2 + 4^2 = 31^2 + 12^2$.

8. Satz. Die n -te Potenz einer Primzahl von der Form $(4h + 1)$ kann auf $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Arten in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Der Satz soll zunächst für die Potenzen von 5 bewiesen werden (s. Fig. 3):

$$\begin{aligned} [2 + i]^2 &= \begin{cases} 3 + 4i \\ 5 \end{cases} & \text{somit } 5^2 &= \begin{cases} 3^2 + 4^2 \end{cases} \\ [2 + i]^3 &= \begin{cases} 2 + 11i \\ 5(2 + i) \end{cases} & \text{somit } 5^3 &= \begin{cases} 4^2 + 11^2 \\ 10^2 + 5^2 \end{cases} \\ [2 + i]^4 &= \begin{cases} -7 + 24i \\ 5(3 + 4i) \\ 25 \end{cases} & \text{somit } 5^4 &= \begin{cases} 7^2 + 24^2 \\ 15^2 + 20^2 \end{cases} \\ [2 + i]^5 &= \begin{cases} -38 + 41i \\ 5(2 + 11i) \\ 25(2 + i) \end{cases} & \text{somit } 5^5 &= \begin{cases} 38^2 + 41^2 \\ 10^2 + 55^2 \\ 50^2 + 25^2 \end{cases} \\ [2 + i]^6 &= \begin{cases} -117 + 44i \\ 5(-7 + 24i) \\ 25(3 + 4i) \\ 125 \end{cases} & \text{somit } 5^6 &= \begin{cases} 117^2 + 44^2 \\ 35^2 + 120^2 \\ 75^2 + 100^2 \end{cases} \end{aligned}$$

*) Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 2. Aufl. S. 163. Beispiel 2.

Die Zerlegung von 65^2 soll noch ausgeführt werden:

$$[2 + i]^2 \cdot [3 + 2i]^2 = \begin{bmatrix} 3 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 + 12i \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{cases} -33 + 56i \\ 63 - 16i \\ 25 + 60i \\ 39 + 52i \\ 65 \end{cases}$$

Der Abschnitt über Gitterzahlen soll mit der Lösung folgender Aufgaben geschlossen werden:

„Einem quadratischen Gitter ein Gitter mit n -mal so grosser Masche einzeichnen“.

Auflösung. Irgend 2 Vektoren $[a \ b]$ und $[c \ d]$ bilden eine Masche von der Grösse $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (in Fig. 4 ist die Masche $= 5$). Werden die Richtungen

der beiden Vektoren als Achsen eines neuen Koordinatensystems angesehen und sind x' , y' Koordinaten eines Punktes im neuen Gitter, so ist

$$[x \ y] = [a \ b] x' + [c \ d] y'$$

$$\text{d. h. } \begin{cases} x = ax' + cy' \\ y = bx' + dy' \end{cases}$$

$$\text{oder } \begin{cases} x' = \frac{dx - cy}{ad - bc} \\ y' = \frac{ay - bx}{ad - bc} \end{cases}$$

Nur wenn

$$ad - bc = \pm 1$$

d. h. wenn der Inhalt der neuen Masche gleich dem der alten ist, werden die sämtlichen Eckpunkte des alten Gitters auch solche des neuen.*) Von einer derartigen Verwandlung eines

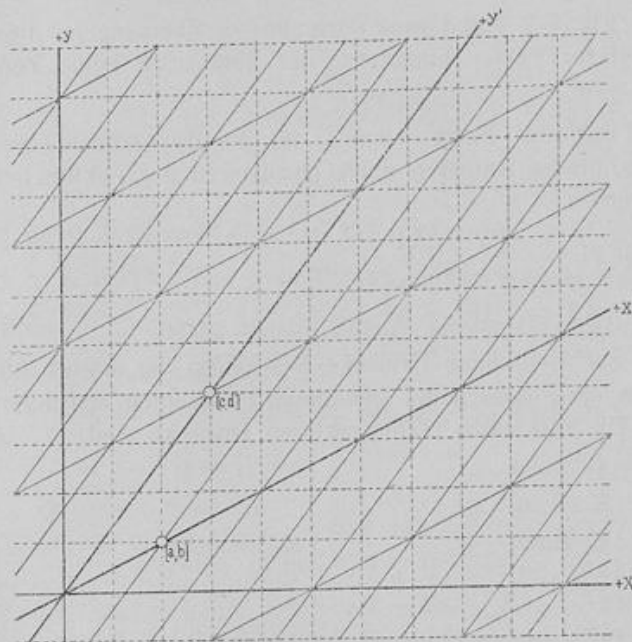


Fig. 4.

Gitters soll im folgenden Kapitel die Rede sein.

$$\text{Hier ist } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = n$$

und da jede ganze Zahl auf unendlich viele verschiedene Arten als 2-gliedrige Determinante dargestellt werden kann, so lässt auch unsere Aufgabe für ein gegebenes n unendlich viele Lösungen zu.

*) F. Klein, Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896/97. S. 6.

Die Aufgabe wird aber zu einer bestimmten, wenn noch die weitere Forderung hinzukommt, dass die Masche des neuen Gitters wieder ein Quadrat sein müsse. Jetzt kann n nur eine Gitterzahl sein. Für $n = 5$ mit dem Vektor $[21]$ ist die Lösung in Fig. 5 ausgeführt; ebenso für den Vektor $[23]$ mit $n = 13$.

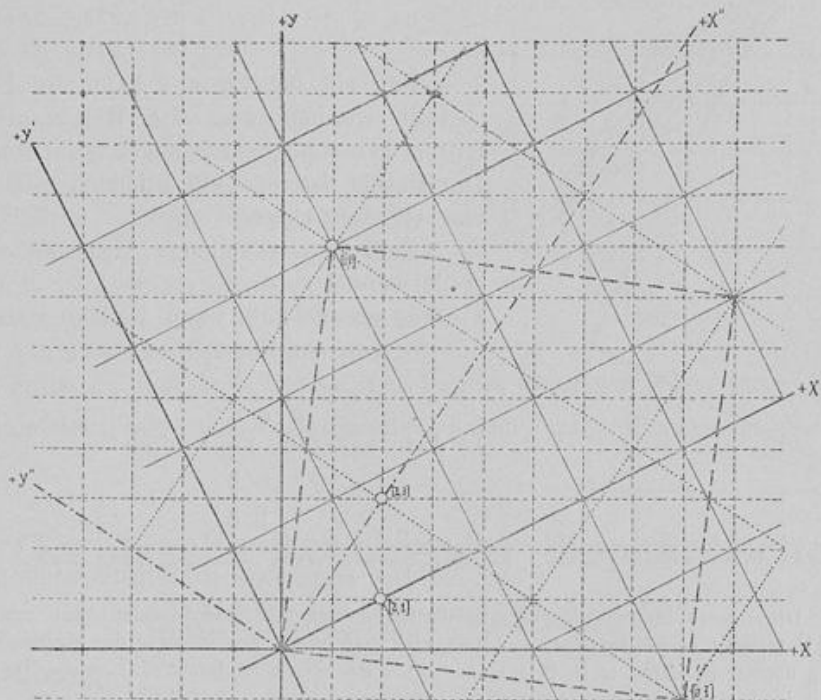


Fig. 5.

Anmerkung. Die gemeinsamen Eckpunkte der beiden Gitter bilden ein neues Gitter mit dem Vektor $[1.8]$, der durch Multiplikation der Vektoren $[2.1]$ und $[2.3]$ gewonnen werden kann.

Der Beweis folgt aus den Transformationsformeln, die jetzt lauten:

$$\begin{cases} x = a x' - b y' \\ y = b x' + a y' \end{cases}$$

und die identisch sind mit den bei Satz 1 aufgestellten Formeln für die Multiplikation zweier Vektoren $[a. b] \cdot [x'. y'] = [x. y]$. Daraus folgt für die Division

$$\begin{cases} x' = \frac{a x + b y}{a^2 + b^2} \\ y' = \frac{a y - b x}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Die einfache geometrische Konstruktion für die Multiplikation zweier Vektoren soll an dem Beispiel $[2.1] \cdot [3.4]$ gezeigt werden [Fig. 6].

Allgemein: Sollen die Vektoren $[a\ b]$ und $[c\ d]$ miteinander multipliziert werden, so

addiert man $c \cdot [a, b] + d \cdot [b, a]$ oder $a [c, d] + b [d, c]$, womit die Multiplikation auf eine wiederholte Addition zurückgeführt und die Uebereinstimmung mit der analytischen Methode herbeigeführt ist:

$$[a + bi] \cdot [c + di] = a [c + di] + bi [c + di] \\ = c [a + bi] + di [b + bi]^*)$$

Für ein beliebiges n kann die Forderung gestellt werden, dass die Masche des neuen Gitters grösstmögliche Symmetrie aufweisen solle. Die Masche ist jetzt ein Rhombus, der nur für eine GZ zum Quadrat wird.

Zum Beweis sollen 2 Hilfssätze aufgestellt werden:

a) Jede gerade Zahl kann als eine Determinante von der Form

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 2ab$$

b) Jede ungerade Zahl durch

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

dargestellt werden.

Der erste Satz ist selbstverständlich.

*) Diese neue Methode der Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann mit Vorteil im elementaren Unterricht verwendet werden. Hier wird man zuerst zeigen, dass die Multiplikation mit i eine Drehung um 90° bedeutet, z. B. $[2 + i]i = -1 + 2i$. Dann ist leicht einzusehen, dass die Multiplikation $[2 + i] \cdot [3 + 4i]$ mit der vektoriellen Addition

$$3[2 + i] + 4i[2 + i] \\ \text{oder } 2[3 + 4i] + i[3 + 4i]$$

gleichbedeutend ist.

Umgekehrt kann die Zerlegung einer komplexen Zahl (Gittervektors) $[a + bi]$ in Faktoren (Primvektoren) mittelst eines Kreises über dem zugehörigen Vektor graphisch ausgeführt werden. Liegt auf dem Halbkreis ausser $[a, 0]$ nur 1 Gitterpunkt, so halbiert der zugehörige Vektor $\sqrt{a + bi}$ den Winkel, den der gegebene Vektor $[a\ b]$ mit dem Einheitsvektor $[1\ 0]$ bildet. Enthält der Kreis 2 Gitterpunkte, so sind die zugehörigen Vektoren Vielfache der gesuchten; wenn sie den vorhin ge-

nannten Winkel in 3 gleiche Teile teilen, so stellen die gesuchten Vektoren $\sqrt[3]{a + bi}$ und $\sqrt[3]{(a + bi)^2}$ dar. Vergl. Fig. 6 mit Fig. 3. Diese Betrachtung führt zur graphischen Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

Der genannte Kreis hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2x - 11y = 0$$

Auf ihm liegen die Punkte

$$[2\ 0], [6\ 3] = 3[2\ 1], [6\ 8] = 2[3\ 4], [2\ 11], [0\ 11], [4\ 8] = 4[1\ 2], [4\ 3]$$

Die beiden letzten Vektoren $-1 + 2i$ und $-4 + 3i$ sind ebenfalls in $2 + 11i$ enthalten und es gilt der Satz:

Ist $\alpha + \beta i$ ein Faktor von $a + bi$, so ist auch $(\alpha + \beta i)i = -\beta + \alpha i$ ein solcher.

Zum Beweis setzt man $(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = a + bi$

$$\frac{a + bi}{i(\alpha + \beta i)} = \frac{\alpha' + \beta' i}{i} = -\alpha' i + \beta'$$

Dann ist

Für den zweiten hat man

$$3 = 2^2 - 1$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

$$9 = 5^2 - 4^2$$

$$11 = 6^2 - 5^2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$n = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$$

$$n+2 = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$$

In Fig. 7 ist die Masche eines Gitters mit dem Inhalt $n = 7$ gezeichnet. Die nämliche Figur soll zeigen, dass n auch ein Bruch sein kann ($n = \frac{1}{7}$). Denn im folgenden Abschnitt wird bewiesen werden, dass eine Masche von der Grösse n in n^2 kleine Maschen zerlegt wird, wenn man durch die innerhalb und auf dem Umfang gelegenen Gitterpunkte Parallelen mit den Seiten zieht; jedes der so entstehenden kleinen Parallelogramme ist also $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

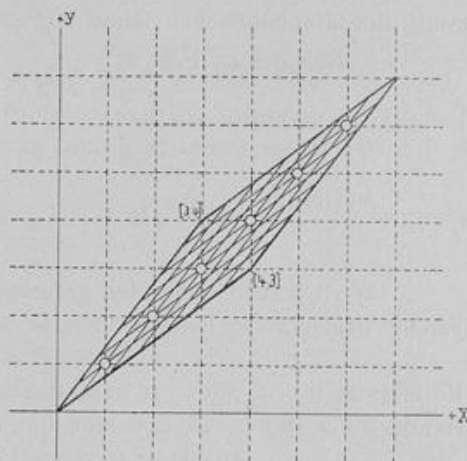


Fig. 7.

II. Graphische Lösung der diophantischen Gleichungen 1. Grades.*)

Vorübung.

Eine Gerade, deren Gleichung

$$m x + n y = c$$

ist in ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf quadriertem Papier (in ein quadratisches Gitter) einzuzichnen, wobei zuerst die Achsenabschnitte berechnet werden. Sind m , n und c ganze Zahlen, so zeigt sich, wenn m und n relativ prim (S. 12), dass die Gerade Gitterpunkte enthält, deren Koordinaten die bei Auf-

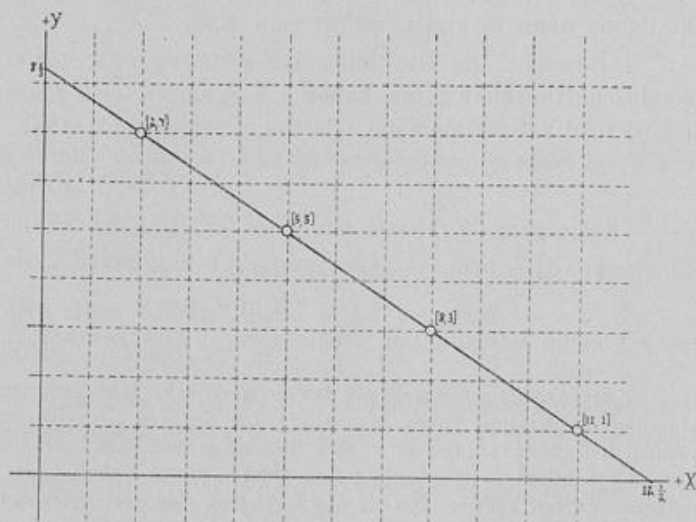


Fig. 8.

*) Im Jahrgang XXIII (1892) der Zeitschrift für math. und nat. Unterricht habe ich unter dieser Überschrift eine Studie veröffentlicht, die hier in neuer und verbesserter Form erscheint. Mein Aufsatz ist von der Redaktion (S. Günter) mit einer umfangreichen Nachschrift versehen worden. Nach

lösung der diophantischen Gleichung gesuchten Wertpaare darstellen.

1. Beispiel (s. Fig. 8):

$$2x + 3y = 25 \text{ (Heis, No. 3)}$$

Die Achsenabschnitte sind

$$x_0 = 12\frac{1}{2}, y_0 = 8\frac{1}{3}$$

Auflösung:

$$\begin{array}{l} x = 2 \mid 5 \mid 8 \mid 11 \mid \\ y = 7 \mid 5 \mid 3 \mid 1 \mid \end{array}$$

Wird irgend einer der gefundenen Punkte zum Anfangspunkt des Koordinatensystems gemacht, so hat die Gerade die Gleichung

$$2x + 3y = 0$$

Die Gerade $2x + 3y = 0$ enthält also Gitterpunkte in denselben Abständen wie die Gerade $2x + 3y = 25$ und man hat allgemein:

Die Gerade $mx + ny = 0$ enthält Gitterpunkte

$$[0 \cdot 0], [n \cdot m], [2n \cdot 2m] \text{ u. s. f.}$$

in den nämlichen Abständen wie $mx + ny = c$. Durch eine Verschiebung gleich und parallel dem Abstand zweier dieser Punkte kommt die Punktreihe mit sich selbst zur Deckung. Dieser Abstand ($\sqrt{m^2 + n^2}$) heisst Vektor oder Parameter der Reihe. Je kleiner er ist, desto dichter ist die Gerade mit Punkten besetzt.

Daraus ergibt sich der

I. Satz: Die Dichtigkeit der Punktreihe $mx + ny = c$ ist umgekehrt proportional ihrem Vektor ($\sqrt{m^2 + n^2}$).

Zusatz. Die Gleichung $mx + ny = c$ liefert ganzzahlige Werte für x und y nur dann, wenn m und n teilerfremd sind.

Beweis. Die Gleichung ist stets so zu reduzieren, dass m , n und c keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Sei nun a ein gemeinschaftlicher Divisor von m und n , so dividiert man die Gleichung mit a und erhält

$$m_1 x + n_1 y = \frac{c}{a}$$

wo $\frac{c}{a}$ keine ganze Zahl sein kann; es ist also keine Auflösung in ganzen Zahlen möglich.

II. Satz: Ein Punkt der Reihe

$$mx + ny = c$$

hat 2 gleiche Koordinaten, wenn c ein Vielfaches von $(m + n)$ ist.

Prüfung der Arbeiten, die sich mit der meinigen sehr nahe berühren sollten, bleibe ich bei meiner Behauptung, dass meine Arbeit ganz allein auf der von Bravais fusst. Die Günterschen Bemerkungen können sich nur auf den sehr nahe liegenden Gedanken beziehen, dass die ganzzahligen Lösungen einer diophantischen Gleichung ersten Grades mit 2 Unbekannten als Koordinaten der Gitterpunkte gefunden werden können, die auf der durch die gegebene Gleichung dargestellten Geraden liegen. Die Bezeichnung der Quadratecken als „Gitterpunkte“ rührt von Eisenstein (Crelles Journal, B. 28, Jhg. 44). Aber erst Bravais hat (i. Jahr 1848) die hier in Betracht kommenden Eigenschaften der Netzebene in seinem berühmten, jetzt in deutscher Übersetzung erschienenen Werk wissenschaftlich untersucht. (Die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum verteilten Punkten. Ostwalds Klassiker. Übersetzt von C. und E. Blasius.)

Beweis. Ist $c = p(m + n)$
so ist die Gleichung befriedigt durch

$$x = p \text{ und } y = p \text{ (in Fig. 1. [5.5]).}$$

Zusatz. Ist $c = m + n$, so sind die Koordinaten des Punktes $x = 1$ u. $y = 1$. Eine diophantische Gleichung ist somit nur dann durch zusammengehörige positive Werte befriedigt, wenn $c \geq m + n$.

2. Beispiel

$$2x + 3y = 5$$

liefert die Werte [1.1].

In nebenstehender Figur sind dargestellt die Punkt-reihen

$$2x + 3y = \begin{cases} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

der Raum zwischen

$$2x + 3y = 0$$

und

$$2x + 3y = 5$$

wird durch die übrigen Reihen des Systems (2.3) in 5 gleichbreite Streifen eingeteilt.

III. Satz: Der Punkt-reihe

$$mx + ny = 0$$

sind benachbart die Reihen

$$mx + ny = \pm 1^*)$$

Beweis. Da m und n relativ prim, so ist es immer möglich, ganzzahlige Werte zu finden, welche die Gleichung

$$mx + ny = \pm 1$$

befriedigen. Dies folgt aus dem bekannten Lehrsatz: Sind $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte eines Kettenbruchs, so ist jedesmal

$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = \pm 1.$$

Zwischen $mx + ny = 0$ und $mx + ny = \pm 1$ können aber keine System-punkte liegen, da ja x u. y ganzzahlige Werte sein müssen. (Der Abstand der Reihe $mx + ny = 1$ vom Anfangspunkt $[0, 0]$ ist $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$). Es folgen in den nämlichen Abständen die Reihen

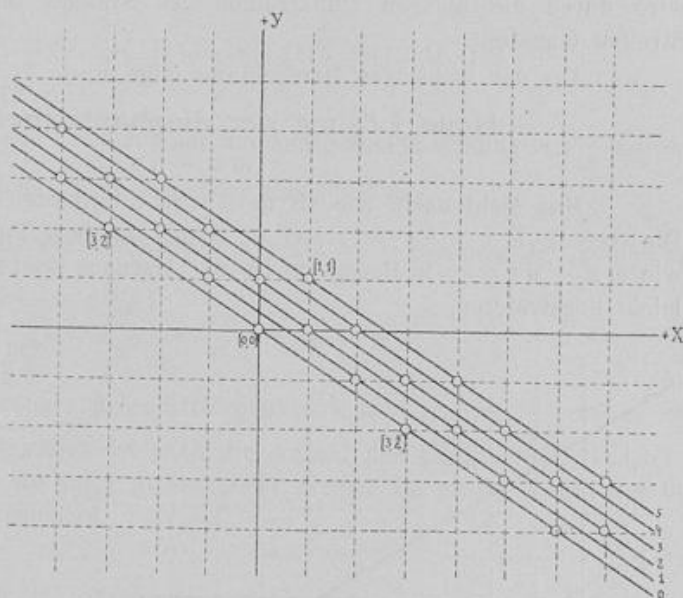


Fig. 9.

*) Bravais: Sur les systèmes des points distribués régulièrement. Problème VI. pag. 11. Études cristallographiques. Paris 1866.

$$m x + n y = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m + n - 1 \\ m + n \end{cases}$$

daraus folgt der

IV. Satz: Der Raum zwischen

$$m x + n y = 0 \text{ und } m y + n y = m + n$$

wird durch die übrigen Punktreihen des Systems (m, n) in $m + n$ gleich breite Streifen eingeteilt.

Aus der bisherigen Betrachtung folgt eine

Neue Lösung der diophantischen Gleichung

$$m x + n y = c.$$

Man sieht nach, wie oft $m + n$ in c enthalten ist, z. B. p mal; der Rest sei r . Die Gerade $m x + n y = r$ hat in Bezug auf den Punkt $[0, 0]$ die nämliche Lage, wie $m x + n y = c$ in Bezug auf $[p, p]$. Darnach lässt sich die Gerade $m x + n y = c$ leicht konstruieren.

3. Beispiel.

$$5 x + 8 y = 29 \text{ (Heis No. 10).}$$

Auflösung. $29 : 13 = 2$, Rest 3,

$5 x + 8 y = 3$ liefert den Punkt $[1, 1]$,

$5 x + 8 y = 0$ die Deckschiebung $[8, 5]$ oder $[\bar{8}, 5]$.

$$[2, 2] + [1, 1] = [1, 3]$$

$[1, 3]$ ist ein Punkt der gegebenen Reihe $5 x + 8 x = 29$.

Weitere Punkte findet man durch Addition und Subtraktion der Deckschiebung:

$$[1, 3] + [8, 5] = [9, 2]$$

$$[1, 3] - [8, 5] = [\bar{7}, 9] \text{ u. s. f.}$$

Es gibt also nur einen einzigen zur Reihe $5 x + 8 y = 29$ gehörigen Gitterpunkt im ersten

Quadranten und damit nur eine Lösung der gegebenen diophantischen Gleichung.

Die Anfertigung einer Figur ist unnötig, bei grösseren Zahlen in der gegebenen Gleichung auch untunlich, wie das folgende Beispiel zeigt.

4. Beispiel. $13 x + 24 y = 2373 \text{ (Heis No. 7).}$

Auflösung: $2373 : 37 = 64$, Rest 5

$13 x + 24 y = 5$ liefert das Wertpaar $[7, 4]$.

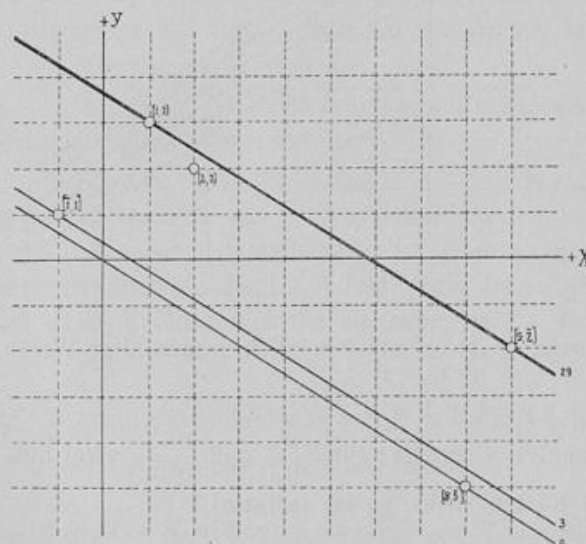


Fig. 10.

[Beim Suchen nach Werten, welche die Gleichung befriedigen, stellt man die Vielfachen der einen Zahl neben die der andern und sieht nach, wo die Differenz gleich dem Absolutglied wird. So ist hier

$$13 \cdot 7 + 24 \cdot 4 = -91 + 96 = 5].$$

Einer der gesuchten Punkte ist

$$[7 \cdot 4] + [64 \cdot 64] = 57 \cdot 68]$$

und durch wiederholte Addition und Subtraktion der Deckschiebung $[24 \cdot 13]$ erhält man die übrigen:

$$[81 \cdot 55], [105 \cdot 42], [129 \cdot 29], [153 \cdot 16], [177 \cdot 3], 201 \cdot 10] \dots$$

$$[33 \cdot 81], [9 \cdot 94], [15 \cdot 107] \dots$$

V. Satz. Die Anzahl von Lösungen der diophantischen Gleichung $m x + n y = c$ ist gleich den in $\frac{c}{m n}$ enthaltenen Einheiten oder um 1 grösser.

Beweis: Der Abschnitt der Geraden $m x + n y = c$ zwischen der x- und der y-Achse beträgt

$$\sqrt{\frac{c^2}{m^2} + \frac{c^2}{n^2}} = \frac{c}{m n} \sqrt{m^2 + n^2}$$

Der Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte $\sqrt{m^2 + n^2}$ ist $\frac{c}{m n}$ mal in dem genannten Abschnitt enthalten; dies ist auch die Anzahl der Lösungen in Beispiel 1, in den andern Beispielen ist sie um 1 grösser; der Grund ist an der Hand der gegebenen Figuren leicht aufzufinden.

Eigenschaften der Netzebene.

Verbindet man in Figur 9 irgend einen Gitterpunkt $[a \cdot b]$ der Geraden $m x + n y = 1$ mit dem Anfangspunkt, so liegen in der Verlängerung dieser Verbindungslinie die Punkte $[2 a \cdot 2 b]$, $[3 a \cdot 3 b]$ u. s. f. auf den Parallelen $m x + n y = 2$, $m x + n y = 3$ u. s. f. Diese Punkte gelangen mit benachbarten zur Deckung durch eine Verschiebung gleich und parallel dem Vektor des Systems $(m \cdot n)$. Daraus folgt, dass die Quadratecken auf unendlich viele verschiedene Arten durch 2 Züge von Parallelen erzeugt werden können. Diese bilden Netze mit parallelogrammatischen Maschen, deren Inhalt stets gleich dem Inhalt des Quadrates, der Masche des zu Grund gelegten quadratischen Netzes ist.

Zum Beweis suchen wir den Inhalt der durch die 3 Eckpunkte $[0 \cdot 0]$, $[n \cdot m]$, $[a \cdot b]$ bestimmten Masche, wo $[a \cdot b]$ auf der Parallelen $m x + n y = 1$ liegt, und setzen als bekannt voraus, dass der Abstand dieser Parallelen vom Nullpunkt $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; dies ist aber die Höhe des in Rede stehenden Parallelogramms, die man nur mit seiner Grundlinie $\sqrt{m^2 + n^2}$ zu multiplizieren braucht, um den Inhalt 1 zu bekommen.

Ein zweiter Beweis folgt aus der Betrachtung des Parallelogramms, das durch die 3 Punkte $[0, 0]$, $[n, m]$ und $[1, 1]$ bestimmt ist. Sein Inhalt ist

$$\begin{vmatrix} n & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m + n$$

Nach Satz IV wird es aber durch die Parallelen des Systems (m, n) in $m + n$ gleich breite Streifen eingeteilt.

Aus dieser Betrachtung folgt, dass man Maschen von jeder beliebigen Grösse n (n eine ganze Zahl) auf unendlich viele Arten herstellen kann; unter diesen gibt es eine solche (Grundmasche) mit kürzesten Vektoren als Seiten. Durch Probieren erhält man für 7

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad (\text{s. Fig. 11})$$

(Die Grundmasche einer Gitterzahl ist ein Quadrat).

VI. Satz. Eine Masche von der Grösse n wird in n gleiche Teile zerlegt, wenn man durch die innerhalb und auf dem Umfang liegenden Gitterpunkte Parallelen mit einer Seite zieht.

Beweis. Die Parallelen mit dem Vektor $[x_1, y_1]$

sind $-y_1 x + x_1 y = 1, 2, 3$ u. s. f.

Die durch den Punkt $[x_2, y_2]$ gelegte Parallele

$$-y_1 x + x_1 y = -y_1 x_2 + x_1 y_2 = n$$

Die $n - 1$ Gitterpunkte, durch welche die Parallelen gezogen werden, liegen alle innerhalb der Masche, wenn auf dem Vektor $[x_2, y_2]$ keiner sich befindet, d. h. wenn x_2 und y_2 relativ prim sind. Zieht man auch noch die Parallelen mit dem Vektor $[x_1, y_1]$, so wird die Masche in n^2 kleinere zerlegt, deren jede $\frac{1}{n}$ der Masche des zu Grund

gelegten quadratischen Gitters ist. Selbstverständlich gelten

diese Betrachtungen nicht nur für das quadratische, sondern auch für jedes beliebige andere Gitter.

Wir wiederholen, wie man ein Gitter (Netz) in ein anderes mit der nämlichen Masche verwandelt: Man verbindet irgend zwei Gitterpunkte miteinander; enthält die Verbindungsstrecke Gitterpunkte, so wählt man die Strecke zwischen 2 nächstliegenden als erste Seite der neuen Masche. In einer der beiden benachbarten Parallelen kann dann irgend ein Gitterpunkt als dritter Eckpunkt der Masche angenommen werden. Bei einer solchen Verwandlung behält die Masche (das Elementarparallelogramm) immer den nämlichen Inhalt. Dies hat Bravais a. a. O. auf 3 verschiedene Arten bewiesen.

Einen neuen Weg zum Beweis dieses Satzes hat F. Klein betreten.* In einem Netz ist die Anzahl der Gitterpunkte ebenso gross, wie die der Maschen. Denn jede Masche hat 4 Eckpunkte und in jedem Gitterpunkt stossen 4 Maschen zusammen. Da vor und nach dem Wechsel der verbindenden Geraden die Gitterpunkte die gleichen

*) F. Klein, Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896. S. 7.

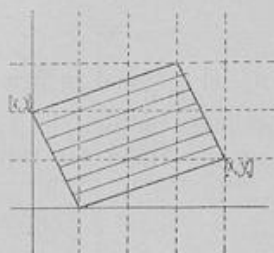


Fig. 11.

sind, so ist auch die Anzahl der Maschen des ursprünglichen und des neukonstruierten Netzes gleich. In beiden Fällen wird die Ebene in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile zerlegt, folglich sind die Teilstücke, d. h. die Maschen in beiden Fällen gleich gross (s. auch E. Sommerfeld, Bemerkungen zu der Volumtheorie von Krystallen. Centralblatt für Mineralogie. Stuttgart 1902. S. 636.)

Aus diesem Satz folgt weiter: Je kleiner bei der Verwandlung die Grundlinie der Masche angenommen wird, desto grösser muss ihre Höhe sein, d. h. zwischen den dichtesten Punktreihen liegen die breitesten Bänder. Unter den gleichen Maschen gibt es immer eine solche, deren Seiten die kürzesten sind. Diese Masche heisse ich „Grundmasche“. In meiner früheren Arbeit habe ich sie „Grundparallelogramm“ genannt, mit welchem Namen Blasius jetzt die Masche bezeichnet, während Sohncke für die Masche die von Klein benützte Bezeichnung „Elementarparallelogramm“ vorge schlagen hat. Die 2 Seiten meiner Grundmasche sind die beiden kürzesten Seiten des Bravais'schen Hauptdreiecks (s. später).

Diophantische Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Schneidet man auf 3 aufeinander senkrechten Achsen $OA = OB = OC = 1$ ab, konstruiert über den Abschnitten als Kanten einen Würfel und füllt den Raum mit kongruenten Würfeln aus, so hat man ein kubisches Raumgitter konstruiert. Jeder Eckpunkt des Gitters hat 3 Koordinaten, die Vielfache der Einheit, also ganze Zahlen sind. Es ist leicht zu zeigen, dass eine durch 3 Gitterpunkte gelegte Ebene unendlich viele solcher Punkte enthält, die ein Netz mit parallelogrammatischer Masche bilden; ferner dass die Gleichung einer solchen Netzebene auf die Form

$$hx + ky + lz = c$$

gebracht werden kann, wo h , k und l ganze Zahlen sind. (Gesetz der rationalen Indices. *)

Wir gehen aus von der Gleichung einer durch O gelegten Ebene

$$hx + ky + lz = 0$$

Die Spur dieser Ebene

$$hx + ky = 0$$

in der XY -Ebene ist befriedigt durch die Werte k und h und deren Vielfache, ist also eine Punktreihe; dasselbe gilt von den Spuren in den andern Koordinatenebenen. Die Projektion des Netzes auf eine der Koordinatenebenen (YZ) ist nun leicht zu zeichnen:

5. Beispiel.

$$3x + 5y + 7z = 0$$

In den Koordinatenebenen erhält man zunächst die Punkte $[5.3.0]$, $[7.0.3]$, $[0.7.5]$. Die zugehörigen Vektoren sind Deckschiebungen; durch Aneinanderreihen (Addition und Subtraktion) der Deckschiebungen erhält man weitere Punkte:

*) Bravais. Études crist. pag. 112.

Sohncke, Wiedenmanns Annalen der Physik. Bd. 16, S. 489.

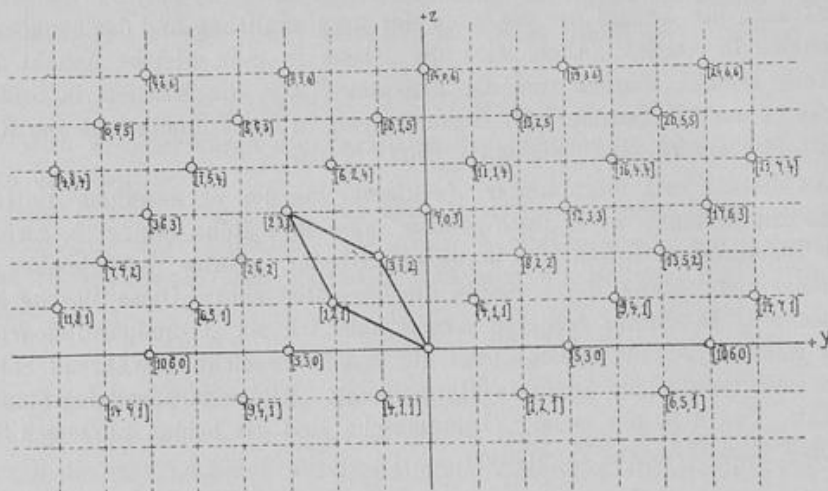


Fig. 12.

$$[\bar{7}.0.3] \pm [5.3.0] = \begin{cases} [\bar{12}.3.3] = 3 \cdot [4.1.1] \\ [\bar{2}.3.3] \end{cases}$$

$$[\bar{2}.3.3] - [5.3.0] = [3.6.3] = 3 \cdot [1.2.1]$$

$$[1.2.1] + [4.1.1] = [\bar{3}.1.2]$$

Und so lässt sich das Netz rasch vervollständigen. Dass $[1.2.1]$ und $[\bar{3}.1.2]$ die kleinsten Deckschiebungen sind, findet man durch die Überlegung, dass die Länge des Vektors $[h.k.l]$ gleich $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$. Sie bilden die Seiten der in der Figur eingezeichneten Grundmasche, deren kürzere Diagonale, die Deckschiebung $[4.1.1]$, mit den beiden vorigen das Hauptdreieck bildet. Aus der in Figur 12 abgebildeten Projektion lässt sich das in der Ebene $(3.5.7)$ liegende Netz zeichnen, wenn man aus den berechneten Seiten ($\sqrt{6}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{18}$) zuerst das Hauptdreieck konstruiert. Im folgenden Abschnitt ist dies an einem andern Beispiel ausgeführt. Dort ist auch gezeigt, wie die Auflösung der Gleichung $hx + ky + lz = 0$ dem Kristallographen sowohl die Zonen (Kanten) in der Ebene $(h.k.l)$, als die zur Zone $[h.k.l]$ gehörigen Ebenen liefert.

Anmerkung. In Fig. 12 erkennt man, dass die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$3x + 5y = 7$$

auf der Schnittgeraden der Ebenen $3x + 5y + 7z = 0$ und $z = -1$ erscheinen. Es sind dies $[14.\bar{7}]$, $[9.4]$, $[4.1]$, $[\bar{1}.2]$, $[6.5]$ u. s. f.

Daraus folgt eine

neue Lösung der diophantischen Gleichung

$$mx + ny = c.$$

Man konstruiert die Projektion des Netzes der Ebene

$$m x + n y + c z = 0$$

auf die YZ -Ebene, so findet man die Lösungen in den Gitterpunkten, bei welchen $z = -1$. (Man könnte ebensogut die Projektion des Netzes der Ebene $m x + n y + z = 0$ zeichnen und die Gitterpunkte aufsuchen, für welche $z = -c$.)

Bei dem Beispiel 4

$$13 x + 24 y = 5$$

waren wir noch auf ein allerdings sehr leichtes Raten angewiesen. Soll die Lösung vollständig graphisch durchgeführt werden, so müssen die in den Achsenebenen gelegenen Vektoren der Netzebene $13 x + 24 y + 5 z = 0$ so lange aneinandergereiht werden, bis ein Punkt mit $z = -1$ erscheint. Die Vektoren sind

$$[0.5.24], [5.0.13], [24.13.0].$$

$$[5.0.13] - [0.5.24] = [5.5.11]$$

$$[5.0.13] + [5.5.11] = [10.5.2]$$

$$[5.0.13] - 7 \cdot [10.5.2] = [65.35.1]$$

durch wiederholte Addition der Deckschiebung $[24.13.0]$ erhält man die weiteren Lösungen: $[41.22.1]$, $[17.9.1]$, $[7.4.1]$ u. s. f.

Netzebene und Raumgitter.

Bravais leitet den Inhalt der Masche einer Netzebene für jedes schiefe Achsensystem ab. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt ein kurzer Beweis für ein senkrechtes Achsensystem.

Von den 3 Indices $(h.k.l)$ sind jedenfalls 2 relativ prim; es seien dies h u. k . Die Spur in der Ebene XY ist

$$h x + k y = 0$$

eine Gerade, welche mit äquidistanten Punkten besetzt ist. Der erste ist $[0.0]$, der zweite $[k.h]$ u. s. f. Dieser Punktreihe ist benachbart die Parallele

$$z = 1, h x + k y = -1$$

welche, wie oben gezeigt, durch ganzzahlige Werte von x und y befriedigt wird. Der Abstand dieser zweiten in der XY -Ebene liegenden Punktreihe von 0 ist $\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$.

Der Abstand der Punkte $[0.0]$ und $[k.h]$ ist $\sqrt{h^2 + k^2}$. Die Grundlinie der zwischen den beiden Parallelen liegenden Masche ist $\sqrt{h^2 + k^2}$, ihr Inhalt somit gleich 1. Sie ist die Projektion der Masche des in der Ebene $(h.k.l)$ liegenden Netzes. Ist α der Winkel, welchen diese Ebene mit der XY -Ebene bildet, so ist

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Der gesuchte Inhalt der Masche der Netzebene $(h.k.l)$ ist somit

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

Der Satz lässt sich ausdrücken wie folgt:

Die Dichtigkeit sowohl der Punktreihe $[h, k, l]$ als der Netzebene (h, k, l) ist umgekehrt proportional der $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$.*)

Der Ebene $hx + ky + lz = 0$

ist benachbart die Netzebene $hx + ky + lz = 1$

Der Abstand beider Ebenen ist

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Daraus folgt der für die Kristallographie wichtige Satz: Je dichter eine Netzebene mit Punkten besetzt ist, um so grösser ist ihr Abstand von der nächsten parallelen Netzebene.**)

Zwischen 2 Maschen benachbarter Netzebenen lässt sich ein Spat (Parallelepiped) legen; durch Fortsetzen der Konstruktion erhält man 3 Züge von je parallelen äquidistanten Ebenen, die sich in den Eckpunkten des kubischen Gitters schneiden. Damit ist das kubische Raumgitter in ein spätiges (parallelepipedisches) verwandelt. Der Inhalt des Spats ist gleich 1, gleich dem des Würfels (Grundspats).

Graphische Lösung der diophantischen Gleichungen ersten Grades mit 3 Unbekannten:

$$hx + ky + lz = c.$$

Die Deckschiebungen der Netzebene erhält man nach Beispiel 5 durch Auflösung der Gleichung

$$hx + ky + lz = 0$$

Man sucht dann zuerst die Punkte in der Spur der gegebenen Netzebene mit derjenigen Koordinatenebene, auf welche man das Netz vermittelst der Deckschiebungen projizieren will.

6. Beispiel.

$$3x + 5y + 7z = 67$$

(Heis No. 13)

In Beispiel 5 wurden für die Netzebene $(3, 5, 7)$ die Deckschiebungen

$[1, 2, 1]$, $[3, 1, 2]$ u. $[4, 1, 1]$ gefunden.

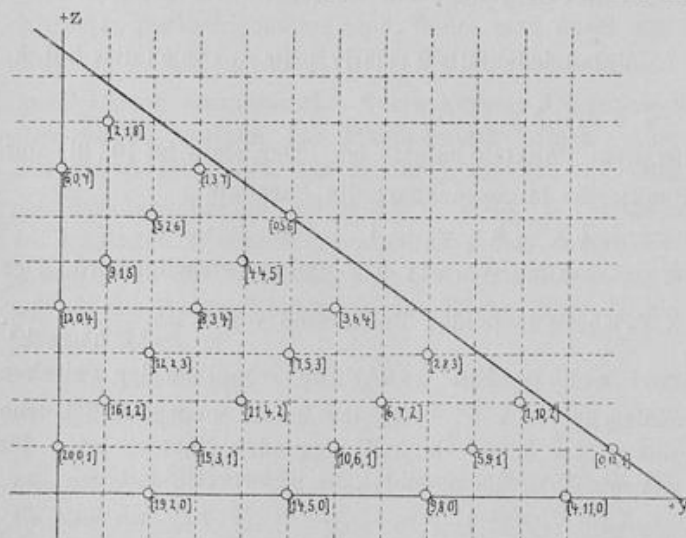


Fig. 13.

*) F. Haag, Die regulären Krystallkörper. Programm des K. Gymnasiums Rottweil 1887.

**) L. Sohncke. Zeitschrift für Krystallographie. 1887. S. 213.

Bravais. Etudes crist. pag. 168.

$x = 0$ gibt als Spur der Netzebene in der YZ -Ebene $5y + 7z = 67$. Diese liefert die Gitterpunkte $[0.5.6]$ und $[0.12.1]$

Ausgehend von diesen kann mit Hilfe der Deckschiebungen das von der genannten Spur, sowie von der y und z -Achse gebildete Dreieck rasch mit den Projektionen der Gitterpunkte auf die YZ -Ebene ausgefüllt werden. Für die ausserhalb des Dreiecks fallenden Punkte sind nicht alle Koordinaten positiv.

VI. Satz. Die Anzahl von Lösungen der diophantischen Gleichung

$$hx + ky + lz = c$$

beträgt mindestens

$$\frac{c^2}{2hkl}$$

Beweis. Bei den in Betracht kommenden Lösungen der diophantischen Gleichung müssen alle Koordinaten positiv sein; dies ist nur der Fall bei dem von den 3 Achsenebenen ausgeschnittenen Stück der Netzebene, das in den positiven Oktanten fällt. Die Projektion des in Rede stehenden Dreiecks auf die XY -Ebene ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\frac{c}{h}$ und $\frac{c}{k}$, dessen Inhalt

$$\frac{c^2}{2hk}$$

Nun wurde gezeigt, dass die Projektion der Masche auf die XY -Ebene gleich 1 ist. Wenn man nachsieht, wie oft diese in der Projektion des Dreiecks enthalten ist, so erhält man

$$\frac{c^2}{2hkl}$$

Wie jedes Beispiel zeigt, ist sie aber grösser. Für Beispiel 6 ist $\frac{c^2}{2hkl} = 21,3$. Die Anzahl der Lösungen ist 26. Nur für eine unendlich grosse Netzebene, also für $c = \infty$ ist die Anzahl der in der Netzebene enthaltenen Gitterpunkte gleich der Anzahl der Maschen.

Am leichtesten lässt sich die Rechnung durchführen für

$$x + y + z = c$$

hier ist die Projektion der Masche auf die XY -Ebene das Quadrat vom Inhalt 1, welches $\frac{c^2}{2}$ mal im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit der Kathete c enthalten ist. Die Anzahl der Gitterpunkte ist $\frac{c^2 + 5c + 6}{2}$, welche Zahl für $c = \infty$ mit der ersten identisch ist, da sie nur um Grössen ersten Grades von ihr abweicht.

Schlussbemerkung. Verfasser glaubt bewiesen zu haben, dass sich die diophantischen Gleichungen mit 3 Unbekannten in hervorragender Weise zu graphischer Behandlung eignen. Sie war Sohnecke nicht bekannt, der dies in einer freundlichen Zusage v. J. 1892 vollständig anerkennt, während er die Lösung der Gleichungen mit 2 Unbekannten früher selbst gefunden, aber nicht veröffentlicht hat.

III. Anordnung der Massenpunkte in den Flächen regulärer Kristalle*).

Zwei Netzebenen $(h_1 k_1 l_1)$ u. $(h_2 k_2 l_2)$ | Zwei Vektoren $[h_1 k_1 l_1]$ u. $[h_2 k_2 l_2]$

$$(1) h_1 x + k_1 y + l_1 z = 0$$

$$(2) h_2 x + k_2 y + l_2 z = 0$$

haben den Vektor $[h k l]$ gemeinsam | liegen in der Ebene $(h k l)$

$$(3) h x + k y + l z = 0$$

$$\text{wenn } h = \begin{vmatrix} k_1 l_1 \\ k_2 l_2 \end{vmatrix} \quad k = \begin{vmatrix} l_1 h_1 \\ l_2 h_2 \end{vmatrix} \quad l = \begin{vmatrix} h_1 k_1 \\ h_2 k_2 \end{vmatrix}$$

Gleichung (3) stellt die Verbindungs-
linie des Punktes $[h k l]$ mit dem 0-Punkt
dar, wo x, y und z die Indices einer durch
diesen Vektor gelegten Ebene bedeuten;
 h, k und l sind die Projektionen des
Vektors auf die Achsen. Die Länge des
Vektors ist

Gleichung (3) stellt die durch den
0-Punkt gehende Netzebene $(h k l)$ dar, wo
 x, y und z die Indices eines in dieser
Ebene liegenden Vektors bedeuten; h, k
und l sind die Projektionen der Masche
der Netzebene auf die Achsenebenen. Der
Inhalt der Masche ist

$$\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

Anmerkung. Im schiefwinkligen System ist zu setzen

$$\sqrt{h^2 + k^2 + l^2 + 2 h k \cos(h k) + 2 k l \cos(k l) + 2 l h \cos(l h)}$$

Liebisch hat in seiner geometrischen Krystallographie das Dualitätsprinzip
zwischen Vektoren (Kanten) und Netzebenen (Flächen) durchgeführt. Die gleich-
lautenden Formeln für den Winkel zweier Vektoren oder Flächen s. E. Sommerfeld,
Geom. Krist. Leipzig 1906. S. 116.

Durch Aufsuchen aller ganzzahligen Werte, welche die Gleichung (3) befriedigen,
erhält man zunächst die Indices aller in der Fläche $(h k l)$ liegenden Gittervektoren
(Kanten, Zonen), aber auch alle durch den Gittervektor $[h k l]$ hindurchgehenden
Netzebenen.

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie die Gleichung durch Projektion des
Netzes auf eine Achsenebene gelöst werden kann. Die Methode soll noch am folgen-
den Beispiel erläutert werden:

$$5 x + 3 y + z = 0$$

Fig. 14 stellt die Projektion der Netzebene $(5 \ 3 \ 1)$ auf die YZ -Ebene dar.

Die in den Koordinatenebenen liegenden Punkte sind am leichtesten zu be-
stimmen; so erhält man mit

$$x = 0 : [0 \ \bar{1} \ 3].$$

Die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit dem 0-Punkt, der Vektor $[0 \ \bar{1} \ 3]$, ist
eine Deckschiebung der Netzebene, d. h. durch eine Verschiebung gleich und parallel
mit dieser Strecke wird das Netz mit sich selbst zur Deckung gebracht. In der Fort-
setzung liegen die Punkte $[0 \ 2 \ 6]$, $[0 \ 3 \ 9]$ u. s. f., welche in der Figur nicht be-

*) Mit dieser Ueberschrift habe ich im Jahre 1889 einen Aufsatz in der Zeitschrift für Krystollographie (XV. Jahrgang) veröffentlicht, der hier in neuer und verbesserter Gestalt erscheint.

zeichnet worden sind. Das einfache Hilfsmittel, die Vielfachen der vorkommenden Vektoren nicht zu bezeichnen, bezweckt, die wichtigsten (dichtesten) Zonen deutlich als solche in die Erscheinung treten zu lassen.

$$y = 0 \text{ liefert } [\bar{1} . 0 . 5].$$

$$[\bar{1} . 0 . 5] - [0 . \bar{1} . 3] = [1 . \bar{1} . 2] \text{ u. s. f.}$$

So wird das Netz durch Aneinanderreihen von Deckschiebungen (vektorielle Addition und Subtraktion) vervollständigt. Die Verbindungslinie eines jeden Netz-

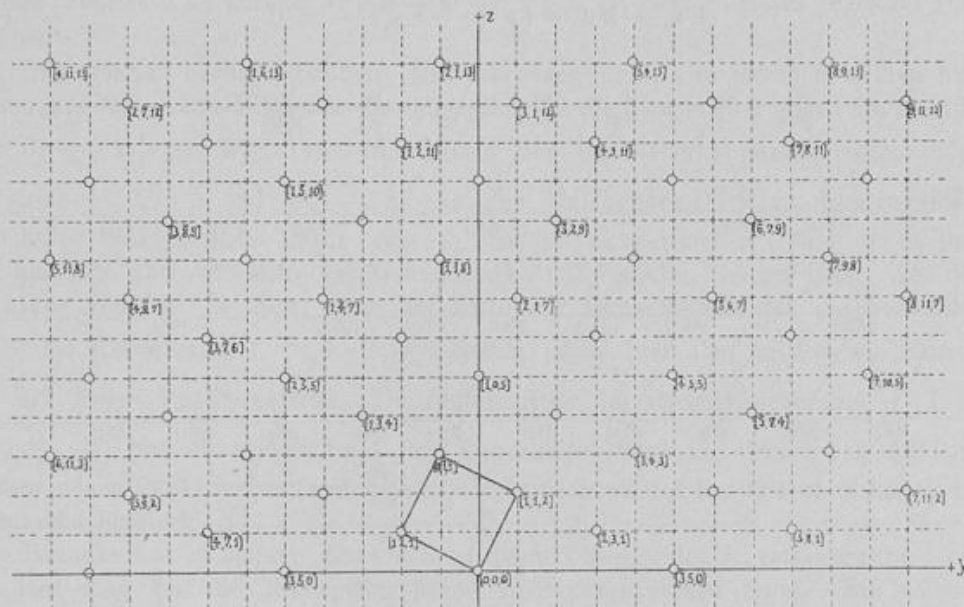


Fig. 14.

punktes mit dem 0-Punkt ist eine Deckschiebung der Netzebene und eine Zone der Fläche (5.3.1). Die Länge einer Deckschiebung $[x y z]$ ist $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Die zwei kleinsten Werte dieser Wurzel liefern die Indices der beiden dichtesten Zonen oder die Seiten der Grundmasche; sie ist in unserem Fall ein Rhombus mit den Seiten $[1 . 2 . 1]$ und $[\bar{1} . 1 . 2]$, nächstdem kommen die Diagonalzonen $[0 . \bar{1} . 3]$ und $[2 . 3 . 1]$, von denen die erstere als die dichtere von beiden die 3. Seite des Hauptdreiecks bildet. Aus den berechneten Seitenlängen kann dieses Dreieck in seiner wahren Gestalt gezeichnet und zur Grundlage für die Herstellung des Netzes benützt werden. Es soll dies aber nicht für die Fläche (5.3.1) sondern für eine andere ausgeführt werden, deren Grundmasche im folgenden ebenfalls betrachtet werden wird.

Fig. 15 stellt das Netz der Fläche (5.4.3) dar. Die Seiten der Grundmasche $[\bar{1} . 2 . \bar{1}]$ und $[2 . 1 . 2]$ wurden durch Projektion des Netzes auf die YZ-Ebene gewonnen; die 3. Seite des Hauptdreiecks ist $[\bar{1} . \bar{1} . 3]$. Die Seiten dieses Dreiecks sind $\sqrt{6}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{11}$. Aus diesen kann zuerst ein Dreieck konstruiert und dann kann die Ebene durch kongruente Dreiecke ausgefüllt werden.

Werden die Würfel des zu Grund gelegten Raumgitters centriert, so erhält man ein dodekaedrisches Raumgitter, werden die Würfelflächen centriert, ein oktaedrisches Gitter. Wie Bravais gezeigt hat, können in beiden Fällen neue Punkte in der Netzebene auftreten*). Er setzt für die Koordinaten der Würfelcentren

$$(1) \ x = m + \frac{1}{2}, \ y = n + \frac{1}{2}, \ z = p + \frac{1}{2}$$

wo m, n und p ganze Zahlen sind. Die Bedingung dafür, dass die Ebene (hkl) einen der neuen Systempunkte enthalte, ist

$$hm + kn + lp + \frac{h+k+l}{2} = 0$$

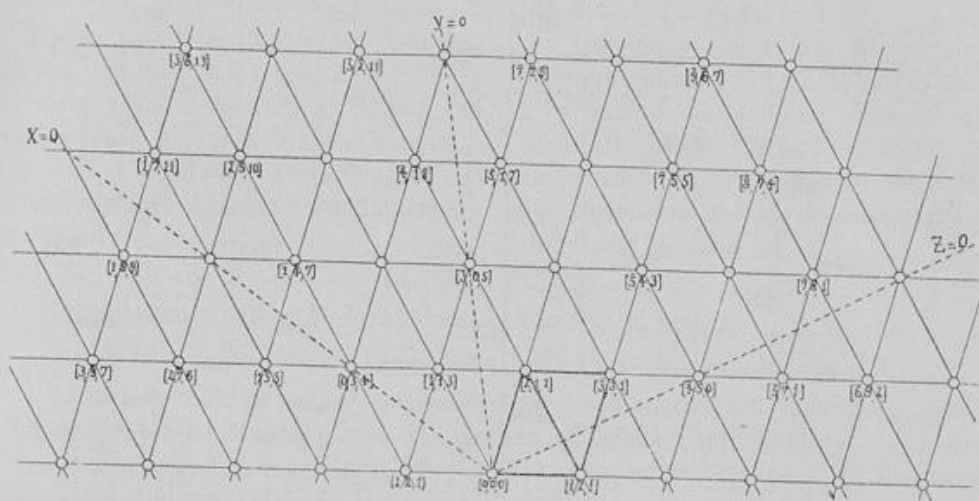


Fig. 15.

woraus erhellt, dass $h+k+l$ eine gerade Zahl sein muss. Ist dies der Fall, so lege man durch die neuen Punkte Ebenen parallel der Ebene XY . Diese kommen mit der Ebene (hkl) zum Schnitt nach neuen Punktreihen, die in der Mitte zwischen den alten liegen, woraus hervorgeht, dass die neue Masche gleich der Hälfte der alten

$$\frac{1}{2} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \text{ ist.}$$

Werden im kubischen Raumgitter die Würfelflächen parallel der XY -Ebene centriert, so hat einer der neuen Punkte die Koordinaten

$$(2) \ x = m + \frac{1}{2}, \ y = n + \frac{1}{2}, \ z = p.$$

Die Ebene (hkl) enthält einen dieser Punkte, wenn

$$hm + kn + lp + \frac{h+k}{2} = 0$$

wenn also $h+k$ gerade ist. Der Vektor der in der XY -Ebene liegenden Punktreihe ist jetzt halb so gross, als im kubischen Gitter und ebenso der Inhalt der Masche. Werden sämtliche 6 Flächen der Würfel eines kubischen Raumgitters centriert, so enthält die Ebene (hkl) Punkte jeder Art, wenn sowohl $h+k$ als $h+l$

*) Bravais, études crist. pag. 159–161.

und $k + l$ gerade sind. Mindestens eine dieser Bedingungen ist jedenfalls erfüllt. Es soll dies die erste sein. Dann können zwei verschiedene Fälle eintreten:

1. Fall $h + l$ ungerade; dann ist auch $k + l$ ungerade.
2. Fall $h + l$ gerade, dann ist auch $k + l$ gerade; denn die Indices müssen jetzt alle ungerade sein, da andernfalls alle Indices gerade sein müssten, was ausgeschlossen ist. So beweist Bravais seinen Satz:

Im oktaedrischen Gitter ist der Inhalt der Masche einer Netzebene $\frac{1}{2}\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$, wenn das Produkt hkl gerade, er ist $\frac{1}{4}\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$, wenn dieses Produkt ungerade ist*).

Wir können leicht feststellen, wie die neuen Punkte in jedem einzelnen Fall zu liegen kommen. Die Mitte der Grundmasche für die Fläche (5 3 1) hat die Koordinaten: $0, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ (s. Fig. 14). Die Mitten der im 0-Punkt zusammenstossenden Seiten sind: $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$. Aus den Gleichungen (1) folgt, dass in dieser Fläche keine Würfelcentren liegen, aus (2) dass im oktaedrischen Gitter die Seitenmitten und also auch die Mitte der Grundmasche mit Punkten besetzt sind. Aus der Betrachtung von Fig. 15 folgt, dass die Mitte der Grundmasche für die Netzebene (5 . 4 . 3) die Koordinaten $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ besitzt, dass hier also im dodekaedrischen Gitter ein neuer Punkt auftritt. Die Seitenmitten der Grundmasche sind $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$ und $1, \frac{1}{2}, 1$. Nur die erstere (und ihre Gegenseite) wird im oktaedrischen Gitter mit einem neuen Punkt besetzt und damit ist entsprechend der Bravais'schen Regel die Grundmasche halbiert.

Sohncke hat in seiner „Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur“ gezeigt, dass man für die Raumgitterpunkte 24-Punkter setzen kann. Ein solcher 24-Punkter entsteht, wenn den Flächen eines Gyroeders Punkte zugeordnet werden in derselben Weise, wie der Fläche (h k l) der Punkt [h k l] zugeordnet ist, d. h. so dass der Vektor [h k l] senkrecht steht auf der Ebene (h k l). (Zum Beweis nimmt man in der Ebene (h k l) den beliebigen Punkt [x y z] an, für welchen also $hx + ky + lz = 0$; aus dieser Gleichung folgt aber, dass die beiden Vektoren [h k l] und [x y z] aufeinander senkrecht stehen. Es steht also [h k l] senkrecht auf jeder beliebigen in der Ebene (h k l) gezogenen Geraden.) An Stelle des Sohncke'schen 24-Punkters setze ich einen 48-Punkter, der sich aus 2 enantiomorphen 24-Punktern zusammensetzt und dessen Eckpunkte den Flächen eines Hexakisoktaeders entsprechen. Dass dies zulässig ist, folgt aus Sohnckes „Erweiterung der Theorie“**). Man braucht bei Konstruktion eines 24-Punktersystems nur 2 Konstruktionspunkte anzunehmen, die symmetrisch gegen eine Axenebene liegen und erhält 48-Punkter. Wie der 48-Punkter, so besitzt auch jedes durch die Pole (Berührungspunkte der einbeschriebenen Kugel) der Flächen irgend einer der Formen des regulären Systems gebildete Vieleck lauter kongruente

*) Ein anderer Beweis findet sich in der krystallographischen Zeitschrift 41 Bd. 1906. S. 478: E. v. Fedorow: Der einfachste Beweis des zur Bestimmung der Hauptstrukturarten dienenden Satzes.

**) Zeitschrift für Krystallographie 1888. 14, 417.

oder symmetrische Ecken; um jede Ecke ist die Verteilung der übrigen Eckpunkte dieselbe wie um jede andere*). Wir erhalten also regelmässige Punktsysteme, wenn jeder Punkt eines Raumgitters durch ein derartiges Vieleck ersetzt wird. Im oktaedrischen und im dodekaedrischen Gitter können die an Stelle der neu auftretenden Gitterpunkte (Mitten der Würfelflächen bzw. Würfelmitten) zu stellenden Vielecke Gegenstellung bekommen; z. B. bei Tetraedern, so dass die oberen Kanten der einen den unteren Kanten der anderen parallel sind. Dann erhält man Punktsysteme, deren Ecken auf Schraubenlinien liegen. Durch verschiedenartige und wiederholte Wegnahme der Hälfte aller Systempunkte können die von Sohncke für das reguläre System aufgestellten Punktsysteme oder wenigstens spezielle Fälle derselben abgeleitet werden, wie ich schon in meiner ersten Arbeit „Die regulären Krystallkörper“ (Programm des K. Gymnasiums Rottweil 1887) nachgewiesen habe. Jedenfalls genügt diese Anschauung zur Ableitung der regelmässigen ebenen Punktsysteme.

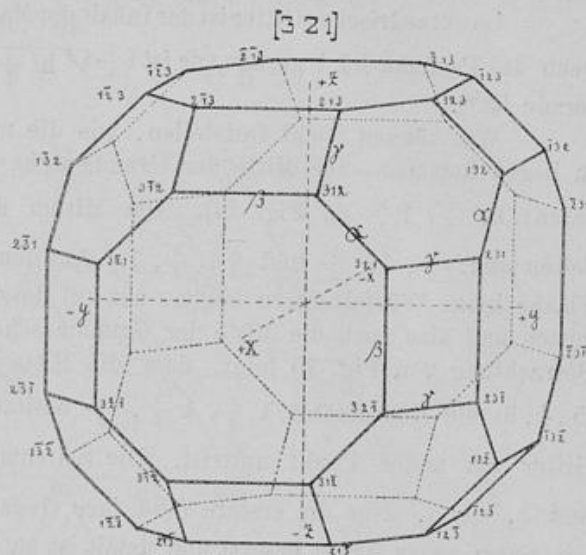


Fig. 16.

Unsere Methode, die in einer beliebigen Ebene (Fläche) liegenden Punktsysteme aufzusuchen, ist die folgende: Nach dem oben beschriebenen Verfahren wird zunächst die Grundmasche konstruiert. Um die Eckpunkte derselben gruppieren sich die Ecken eines n -punkters $[h k l]$, wie die Vektoren (Zonen) mit den Indices h, k und l im Netz der Fläche.

Die 48 Eckpunkte des n -punkters $[h k l]$ bestimmen ebenso viele Vektoren (Zonen) der Form $[h k l]$. Welche von diesen in einer gegebenen Ebene liegen, das zeigt

*) F. Haag, Die den Vielfachen des regulären Krystallsystems dualistisch entsprechenden Vielecke. Zeitschrift für Krystallographie. XLII. 1906. S. 170. Wenn man die Vielecke den Vielfachen in der Weise zuordnet, dass die Eckpunkte der ersteren die Pole der Flächen der letzteren sind, so stimmen die Eckkoordinaten der Vielecke mit den Indices der Vielfache überein. Dies kann wie folgt bewiesen werden: Eine Fläche $(h k l)$ hat die Gleichung

$$h x + k y + l z = 1.$$

Ihr Abstand vom Mittelpunkt ist $\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$

Wird der Radius der Kugel $= 1$ gesetzt, so hat der Pol die Entfernung $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$. Der zu ihm gehörige Vektor steht senkrecht auf $(h k l)$, für einen beliebigen Punkt desselben ist also

$$x : y : z = h : k : l$$

Daraus folgt, dass h, k und l die Koordinaten des Pols sind. In Fig. 16 ist der dem Hexakis-oktaeder entsprechende 48-Punkter (Hexakisoktagon), in Fig. 17 das dem Gyroeder entsprechende Vieleck, der Sohncke'sche 24-Punkter dargestellt.

die in Fig. 14 veranschaulichte Methode der Projektion der Netzebene auf eine der Koordinatenebenen.

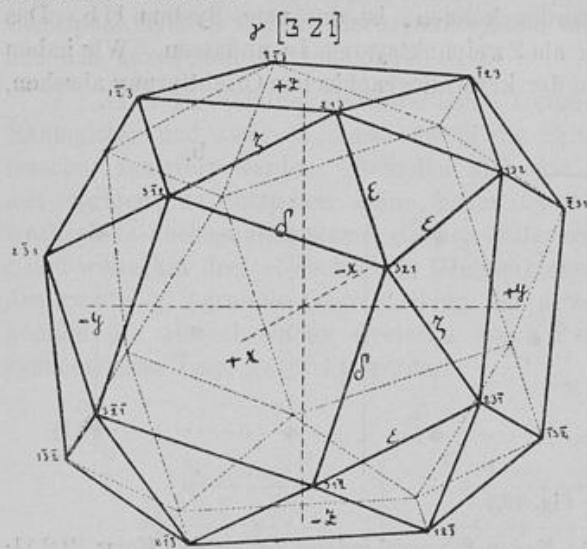


Fig. 17.

s. Fig. 18. Das einfache quadratische Netz, das quadratische 1-Punktsystem Ia, stellt einen besonderen Fall aller vorhergehenden dar.

I. So erhält man in der Würfel-
fläche (100) als Zonen einer Form
[h k o]:

[o h k], [o h k], [o h k], [o h k], [o k h],
[o k h], [o k h], [o k h].

Diese 8 Punkte bilden ein halb-
regelmässiges, gleichwinkliges Achteck
mit den Symetrieachsen Y und Z. Die
Grundmasche in der Würfel-
fläche (100) hat die Seiten [0 0 1] und [0 1 0], ist
also ein Quadrat. Damit ist das qua-
dratische 8-Punktsystem (Ia) gefunden.
Aus ihm ergeben sich durch Ver-
schwinden der Hälfte aller System-
punkte das quadratische Vierpunkt-
system erster (b), zweiter (c) und
dritter Art (d) und aus diesen wieder
das quadratische Zweipunktsystem (e)

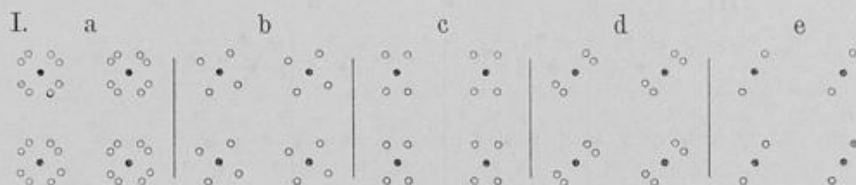


Fig. 18.

Im Netz der Würfel-
fläche treten nur in der Mitte der quadratischen Grund-
masche, nicht in den Seiten, neue Punkte auf und zwar beim oktaedrischen Gitter.
Um diese neuen Punkte können sich die n-Punkter und damit auch die n-Ecke ent-
weder parallel oder in Gegenstellung gruppieren. Im ersten Fall ergeben sich centriert-
quadratische Punktsysteme, welche, abgesehen von der kristallographischen Orientierung,
identisch sind mit den vorigen.

II. Im zweiten Fall erhält man die quadratischen abwechselnden Systeme.
Die 48-Punkter sollen dabei stets Parallelstellung behalten und nur die aus ihnen ab-
geleiteten (enantiomorphen) Hälft- und Viertelpunkter Gegenstellung annehmen können.
Es ergeben sich: ein einziges abwechselndes Vierpunktsystem IIa, ein Zweipunkt-
system, bei dem die abwechselnden 2-Punkte symmetrisch sind, entpuppt sich bei
näherer Betrachtung (Zusammenlegen mehrerer Maschen) als Vierpunktsystem Ic; ein

zweites, bei welchem sie aufeinander senkrecht stehen, ist identisch mit Ib, endlich ein solches bei dem sie durch eine Verschiebung gleich und parallel der halben Maschen-
seite in symmetrische Lage gebracht werden können, ist das neue System IIb. Das
abwechselnde Einpunktsystem lässt sich als Zweipunktsystem Ie auffassen. Wir haben
also in der Würfeläche, wenn wir von der krystallographischen Orientierung absehen,
8 verschiedene Punktsysteme.

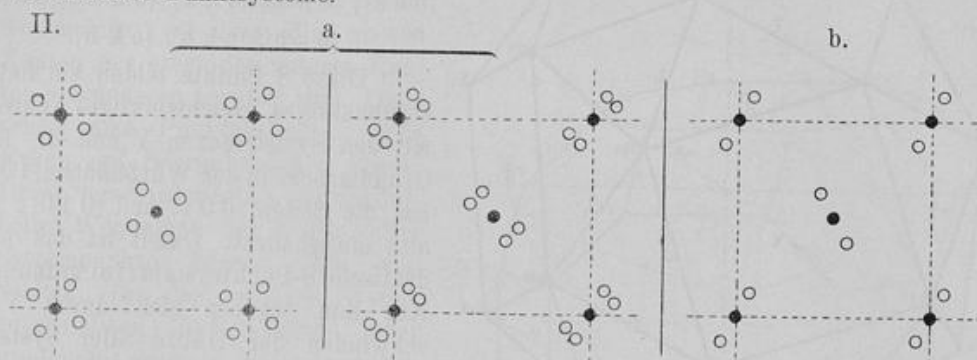


Fig. 19.

III. In der Oktaederfläche (111) liegen 6 verschiedene Zonen der Form $[321]$:
 $12\bar{3}$, $21\bar{3}$, $31\bar{2}$, $3\bar{2}1$, $2\bar{3}1$, $1\bar{3}2$. Die entsprechenden 12 Punkte bilden ein halb-
regelmässiges Zwölfeck*). Die Grundmasche besteht aus 2 gleichseitigen Dreiecken,
deren Seiten den Schnittlinien der Oktaederfläche mit den Axenebenen parallel laufen
und Symmetrieachsen für das Zwölfeck sind. Durch Verschwinden der Hälfte aller System-

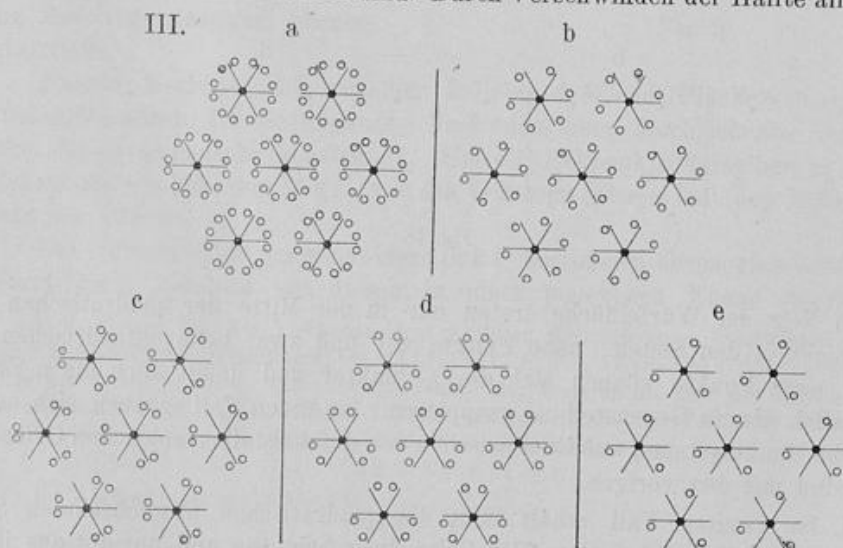


Fig. 20.

*) Die nämliche Eigenschaft findet sich bei allen Vielecken von der Form $[h, h - 1, 1]$, die
den parallelkantigen Hexakisoktaedern dualistisch entsprechen. Je 6 Kanten dieser Vielecke liegen in
einer durch den Mittelpunkt gehenden auf einer dreizahligen Symmetrieachse senkrecht stehenden Ebene.
(F. Haag a. a. O. S. 172.)

punkte werden aus dem Zwölfeck entweder gleichseitige oder gleichwinklige Sechsecke und aus beiden gleichseitige Dreiecke. Es ergeben sich demnach: das hexagonale Zwölfpunktsystem (a), ein Sechspunktsystem erster (b), zweiter (c) und dritter Art (d) und das hexagonale Dreipunktsystem (e).

III¹. Im Netz der Oktaederfläche treten neue Punkte auf für ein oktaedrisches Raumgitter und zwar so, dass sowohl die Seiten als die Mitte des Rhombus (Grundmasche) zentriert werden. Befinden sich die neuen n-Ecke in Parallelstellung mit den vorigen, so entstehen keine neuen Systeme. Dagegen ergeben sich drei abwechselnde Sechspunktsysteme, die den einfachen Sechspunktsystemen entsprechen a, b, c und weiterhin drei abwechselnde Dreipunktsysteme. Das erste (d) zeigt symmetrische, das zweite (e) parallele Gegenstellung der abwechselnden Dreiecke. Beim dritten (f) können die abwechselnden Dreiecke durch Parallelverschiebung längs einer Axe in symmetrische Lage gebracht werden.

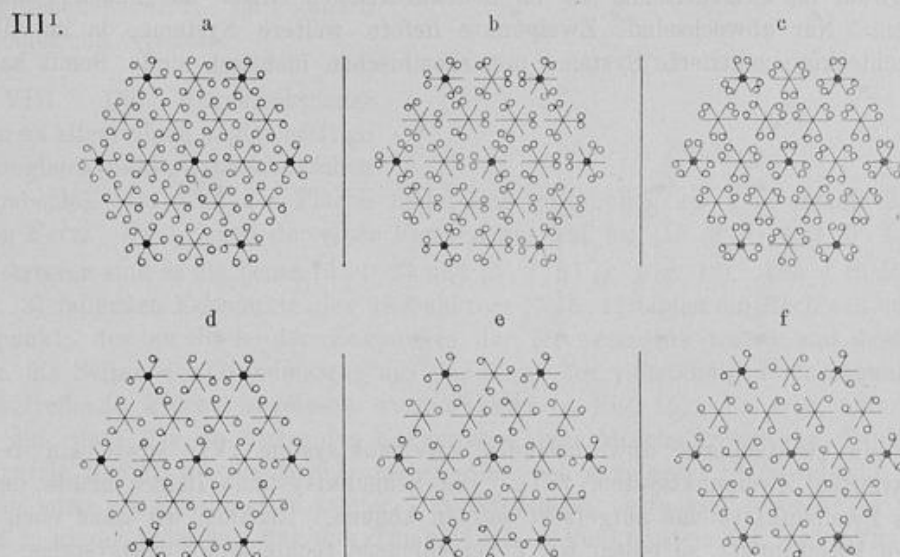


Fig. 21.

Bei den aus den letzten 3 Systemen ableitbaren Einpunktsystemen treten Ungleichheiten längs den verschiedenen Maschenseiten auf, weshalb sie nicht hieher gerechnet werden können. Es folgt dies auch schon daraus, dass hier $\frac{2}{3}$ aller Systempunkte verschwinden müssten. Mit dem hexagonalen Einpunktsystem zählen wir in der Oktaederfläche 12 Punktsysteme.

IV. Formen mit rechteckiger Grundmasche sind: (1.1.0), (h.k.o), (2.1.1), (3.3.2), (4.1.1), (4.3.3), (8.3.3), (5.2.1), (10.6.3). Wie bei den folgenden mit rhombischer Grundmasche finden sich bei ihnen mindestens einmal 2 Vektoren derselben Form z. B. in der Fläche (10.6.3):

$$[3.2.6] \text{ und } [3.6.2].$$

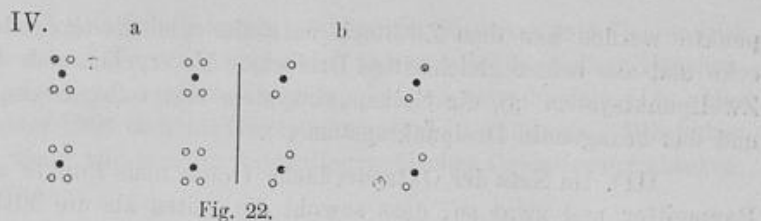


Fig. 22.

Die Ecken des zugehörigen n -Punktes bilden ein Rechteck (Vierpunkt), dessen Seiten parallel den Seiten der Grundmasche, im angegebenen Beispiel

$$[0.1.2] \text{ und } [3.4.2]$$

Danach ergeben sich das rechteckige Vier- (a) und Zweipunktsystem (b).

V. und VI. Zwei gegenüberliegende Seiten oder die Mitte der Grundmasche können sowohl im oktaedrischen als im dodekaedrischen Gitter mit neuen Punkten besetzt sein. Nur abwechselnde Zweipunkte liefern weitere Systeme, da im allgemeinen rechteckige zentrierte Systeme mit rhombischen identisch sind. Somit haben

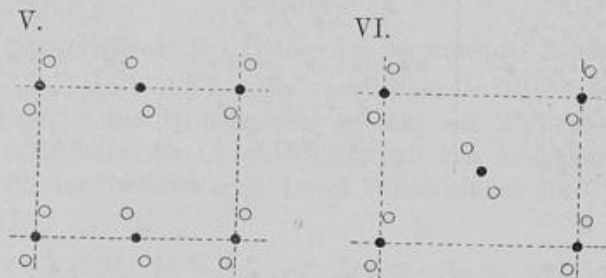


Fig. 23.

wir noch ein rechteckiges abwechselndes Zweipunktsystem (V), sowie ein recht. abw. zentriertes Zweipunktsystem (VI). Die Einpunktsysteme liefern nichts neues, da sie als Zweipunktsysteme aufgefasst werden können. Rechnen wir dazu noch das rechteckige Maschennetz, so haben wir 5 verschiedene rechteckige Punktsysteme.

VII. Formen mit rhombischer Grundmasche sind: $(2.2.1)$, $(3.1.1)$, $(3.2.2)$, $(3.3.1)$, $(5.5.3)$, $(5.3.1)$, $(21.7.5)$. Die Eckpunkte des Rhombus können wie bei No. 5 durch Vier- oder Zweipunkte ersetzt sein. Es ergeben sich demnach das



Fig. 24.

rhombische Vier- (a) und Zweipunktsystem (b). Bei den zwei ersten der angeführten Formen mit rhombischer Masche wird im oktaedrischen Gitter nur die Mitte der Masche mit einem neuen Punkte besetzt, die sich ergebenden zentrierten rhombischen sind mit den rechteckigen Systemen identisch, die abwechselnden Zwei- und Einpunktsysteme mit den zuletzt angeführten rhombischen.

VII¹. Bei den Formen (3.3.1), (5.3.1), (21.7.5) werden im oktaedrischen Gitter ausser der Mitte auch die Seiten mit neuen Punkten besetzt. Wir erhalten ein abwechselndes rhombisches Zwei- und Einpunktsystem und somit, wenn das rhombische Maschennetz dazugerechnet wird, im ganzen 5 rhombische Systeme.

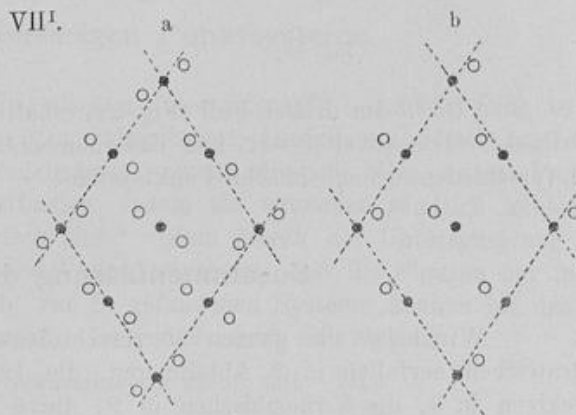


Fig. 25.

VIII. Die Hexakisoktaeder haben im allgemeinen ungleichseitige und ungleichwinklige Grundmaschen (Rhomboide). Im Netz der Fläche findet sich gewöhnlich nur eine einzige Zone derselben Form. Zwei Zonen derselben Form treten auf bei (15.3.1) und (5.4.3). Bei der letzteren sind es die Zonen [5.1.7] und [5.7.1] (s. Fig. 15). Die 4 in die Fläche (5.4.3) fallenden Eckpunkte des 48 Punkters [7.5.1] bilden ein Rechteck oder einen Vierpunkt, der an Stelle der Eckpunkte der Grundmasche treten und dessen Lage gegen die Seiten der Grundmasche aus der Figur des vollständigen Maschennetzes für die betreffende Fläche abgelesen werden kann (s. Fig. 15). Es tritt nun hier der Fall ein, dass der an Stelle des Eckpunktes einer Masche tretende n-Punkt höhere Symmetrie besitzt, als die Masche selbst. Das sich ergebende rhomboidische 4 Punktsystem muss als Kombination zweier 2 Punktsysteme betrachtet werden; es verbleibt somit in dieser Abteilung nur das rhomboidische 2 Punktsystem (a); das 4 Punktsystem (b) soll aber zunächst noch mitgerechnet werden.

VIII¹. Im dodekaedrischen und im oktaedrischen Gitter können entweder 2 gegenüberliegende Seiten, oder die Mitte oder alle 4 Seiten (mit der Mitte der Grundmasche) mit neuen Punkten besetzt sein. Der erste Fall liefert kein einziges neues System. Im zweiten kommen nur die abwechselnden 2 Punkte in Betracht; die abw. 1 Punkte können als 2 Punktsystem VIIIa zusammengefasst werden. Wir haben also nur ein zentriertes abwechselndes 2 Punktsystem (Fig. 27).

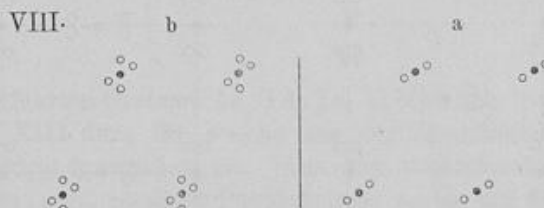


Fig. 26.

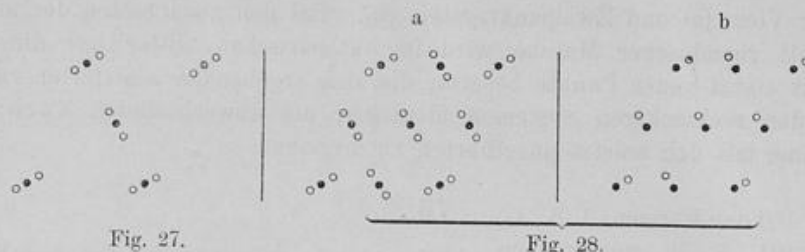


Fig. 27.

Fig. 28.

VIII¹¹. Im dritten Fall (Fig. 28) erhalten wir das rhomboidische abwechselnde 2-Punktsystem (zweiter Art) und das rhomboidische abw. 1 Punktsystem. Wir zählen 6 verschiedene rhomboidische Punktsysteme.

Zusammenfassung der Resultate.

Wir haben im ganzen 36 verschiedene Punktsysteme gefunden. Die 8 quadratischen zerfallen in 2 Abteilungen, die 12 hexagonalen ebenfalls, die 5 rechteckigen in 3, die 5 rhombischen in 2, die 6 rhomboidischen in 3 Abteilungen. In jeder der 12 Abteilungen sind Systeme zusammengestellt, die alle aus dem ersten (a) durch Verschwinden der Hälfte oder des vierten Teils aller Systempunkte abgeleitet werden können. Jedes der aufgestellten Systeme kann noch mit Systemen gleicher Art kombiniert werden. So können z. B. bei jedem System die Eckpunkte der Grundmasche hinzutreten, weil das einfache Maschennetz einen besonderen Fall eines jeden Systems darstellt. In der zu Anfang erwähnten Arbeit habe ich angenommen, dass schon die 48-Punkter und nicht erst die aus ihnen abgeleiteten Hälft- und Viertel-flächen im oktaedrischen und rhombendodekaedrischen Gitter Gegenstellung annehmen können. Aus dieser Annahme ergeben sich 6 weitere Systeme, die jetzt noch angeführt werden sollen. In der Würfel-fläche das abwechselnde Achtpunktsystem, in der Oktaeder-fläche das abwechselnde 12-Punktsystem, 2 abwechselnde rechteckige (Fig. 29 a und b) und 2 abwechselnde rhombische Systeme (c und d).

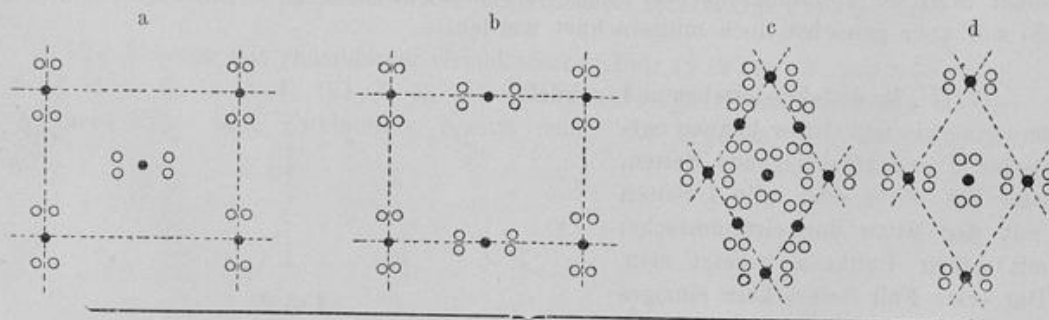


Fig. 29.

Derartige Punktsysteme können in Kristallflächen vorhanden sein; wenn auch, wie leicht einzusehen, die Verteilung der Massenpunkte um die einzelnen derselben

verschieden ist, so gibt es immer noch unendlich viele Punkte, die Mascheneckpunkte, bei denen diese Forderung erfüllt ist. Das nämliche gilt für die abwechselnden hexagonalen III¹, rhombischen VII¹ und rhomboidischen Systeme VIII¹ und VIII². Werden diese (11) ausgeschieden, so verbleiben, wenn auch noch das rhomboidische 4-Punktsystem VIIIb eliminiert wird,

die 24 regelmässigen Punktsysteme.

In einer musterhaften planimetrischen Untersuchung*) beschreibt Sohncke alle regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Nach seiner Erklärung heisst ein Punktsystem regelmässig, „wenn die von allen seinen Punkten ausgehenden Linienbündel übereinstimmen, indem sie entweder sämtlich kongruent, oder teils kongruent, teils symmetrisch sind.“ (Zum Zweck der Unterscheidung kongruenter und symmetrischer Linienbündel wird festgesetzt, dass die Figuren nur in der Ebene beweglich sein sollen.) Alle von S. gefundenen Systeme können bei den von mir aufgestellten untergebracht werden. Insbesondere ist sein System

I	mit dessen Unterabteilungen ident. mit	III b
II	„ „ „ „ „	III c
III	„ „ „ „ „	III e
IV	„ „ „ „ „	I b
V	ist ident. mit	II a
VI	„ „ „ „ „	VII a
VII	„ „ „ „ „	I a
VIII	„ „ „ „ „	III a
IX	„ „ „ „ „	III d
X	„ „ „ „ „	IV a
XI	„ „ „ „ „	VIII a
XIa	„ „ „ „ „	VIII c
XIb	„ „ „ „ „	IV b
XIc	sind spezielle Fälle des Systems VII b, für welche die Verbindungslinien der 2-Punkte in die Richtung einer Diagonale des Rhombus fallen.	(Das einfache rhomboidische Maschennetz)
XId		
XIe		
XII	ist ident. mit	V
XIII	„ „ „ „ „	VI

Die von Sohncke nicht angeführten Systeme Ic, Id, Ie, II b stellen besondere Fälle seiner Systeme X, VI, XIb, XIII dar, für welche aus der rhombischen oder rechteckigen Grundmasche ein Quadrat geworden ist. Aus der vorstehenden Vergleichung folgt, dass die sämtlichen regelmässigen Punktsysteme schon von Sohncke gefunden worden sind. Am Schluss seiner Abhandlung behält er sich vor, alle überhaupt möglichen regelmässigen Systeme des Raumes aufzufinden. „Erst wenn dies gelungen ist, wird es auch nötig sein, eine Klassifikation derselben (und implicite auch

*) Borchardt's Journal für reine und angew. Mathematik. Jahrg. 1874. S. 47. B. 77.

der ebenen Systeme) nach dem grösseren oder geringeren Grade ihrer Symmetrie vorzunehmen.“ Nachdem er die Aufgaben für die räumlichen Systeme gelöst hatte*), war es ihm aber nicht möglich, die ebenen Systeme daraus abzuleiten. Und zwar erstens, weil sein 24-Punkter nicht ausreicht und dafür ein 48-Punkter gesetzt werden muss, zweitens, weil ihm die graphische Lösung der diophantischen Gleichungen ersten Grades mit 3 Unbekannten nicht bekannt war, wie er mir in einer freundlichen Zuschrift mitgeteilt hat.

Die regelmässigen Punktsysteme sind die folgenden:

1.	Ia	das quadratische	8-Punktsystem (Sohnckes System VII)
2.	Ib	„	4 „ erster Art (S. IV)
3.	Ic	„	4 „ zweiter Art (X spez. Fall)
4.	Id	„	4 „ dritter „ (VI „ „)
5.	Ie	„	2 „ (XIb spez. Fall)
6.	If	„	1 „ (XIa „ „)
7.	IIa	„	abwechselnde 4-Punktsystem (V)
8.	IIb	„	2 „ (XIII spez. Fall)
9.	IIIa	„ hexagonale	12-Punktsystem (VIII)
10.	IIIb	„	6 „ 1. Art (I)
11.	IIIc	„	6 „ 2. „ (II)
12.	IIId	„	6 „ 3. „ (IX)
13.	IIIe	„	3 „ (III)
14.	IIIf	„	1 „ (XIa spez. Fall)
15.	IVa	„ rechteckige	4 „ (X)
16.	IVb	„	2 „ (XIb)
17.	IVc	„	1 „ (XIa spez. Fall)
18.	V	„	abwechselnde 2-Punktsystem (XII)
19.	VI	„	zentrierte 2-Punktsystem (XIII)
20.	VIIa	„ rhombische	4-Punktsystem (VI)
21.	VIIb	„	2 „ (XIc—d sind spez. Fälle von VIIb)
22.	VIIc	„	1 „ (XIa spez. Fall)
23.	VIIIa	„ rhomboidische	2 „ (XI)
24.	VIIIb	„	1 „ (XIa)

Wie den Punkten einer Netzebene (1-Punktsystem) die zu einer Zone gehörigen Flächen dualistisch entsprechen, so stellen die den 1-Punkt vertretenden Punktgruppen das dualistische Gegenstück der Vizinalflächen dar.

*) Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur von Dr. L. Sohncke. Leipzig 1879.

IV. Raumgitterzahlen.

Tafel der Raumgitterzahlen von 0—100.

0

$$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$$

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 2^2$$

$$5 = 2^2 + 1$$

$$6 = 2^2 + 1 + 1$$

7

$$8 = 2^2 + 2^2$$

$$9 = 2^2 + 2^2 + 1 = 3^2$$

$$10 = 3^2 + 1$$

$$11 = 3^2 + 1 + 1$$

$$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$$

$$13 = 3^2 + 2^2$$

$$14 = 3^2 + 2^2 + 1$$

15

$$16 = 4^2$$

$$17 = 4^2 + 1 = 3^2 + 2^2 + 2^2$$

$$18 = 3^2 + 3^2 = 4^2 + 1 + 1$$

$$19 = 3^2 + 3^2 + 1$$

$$20 = 4^2 + 2^2$$

$$21 = 4^2 + 2^2 + 1$$

$$22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$$

23

$$24 = 4^2 + 2^2 + 2^2$$

$$25 = 4^2 + 3^2 = 5^2$$

$$26 = 5^2 + 1 = 4^2 + 3^2 + 1$$

$$27 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 1 + 1$$

28

$$29 = 5^2 + 2^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$$

$$30 = 5^2 + 2^2 + 1$$

31

$$32 = 4^2 + 4^2$$

$$33 = 4^2 + 4^2 + 1 = 5^2 + 2^2 + 2^2$$

$$34 = 4^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 3^2$$

$$35 = 5^2 + 3^2 + 1$$

$$36 = 4^2 + 4^2 + 2^2 = 6^2$$

$$37 = 6^2 + 1$$

$$38 = 6^2 + 1 + 1 = 5^2 + 3^2 + 2^2$$

39

$$40 = 6^2 + 2^2$$

$$41 = 6^2 + 2^2 + 1 = 4^2 + 4^2 + 3^2 = 5^2 + 4^2$$

$$42 = 5^2 + 4^2 + 1$$

$$43 = 5^2 + 3^2 + 3^2$$

$$44 = 6^2 + 2^2 + 2^2$$

$$45 = 5^2 + 4^2 + 2^2 = 6^2 + 3^2$$

$$46 = 6^2 + 3^2 + 1$$

47

$$48 = 4^2 + 4^2 + 4^2$$

$$49 = 6^2 + 3^2 + 2^2 = 7^2$$

$$50 = 5^2 + 5^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2 = 7^2 + 1$$

$$51 = 5^2 + 5^2 + 1 = 7^2 + 1 + 1$$

$$52 = 6^2 + 4^2$$

$$53 = 6^2 + 4^2 + 1 = 7^2 + 2^2$$

$$54 = 5^2 + 5^2 + 2^2 = 6^2 + 3^2 + 3^2 = 7^2 + 2^2 + 1$$

55

$$56 = 6^2 + 4^2 + 2^2$$

$$57 = 5^2 + 4^2 + 4^2 = 7^2 + 2^2 + 2^2$$

$$58 = 7^2 + 3^2$$

$$59 = 5^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 3^2 + 1$$

60

$$61 = 6^2 + 4^2 + 3^2 = 6^2 + 5^2$$

$$62 = 6^2 + 5^2 + 1 = 7^2 + 3^2 + 2^2$$

63

$$64 = 8^2$$

$$65 = 6^2 + 5^2 + 2^2 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1$$

$$66 = 5^2 + 5^2 + 4^2 = 7^2 + 4^2 + 1 = 8^2 + 1 + 1$$

$$67 = 7^2 + 3^2 + 3^2$$

$$68 = 6^2 + 4^2 + 4^2 = 8^2 + 2^2$$

$$69 = 7^2 + 4^2 + 2^2 = 8^2 + 2^2 + 1$$

$$70 = 6^2 + 5^2 + 3^2$$

71

$$72 = 6^2 + 6^2 = 8^2 + 2^2 + 2^2$$

$$73 = 8^2 + 3^2 = 6^2 + 6^2 + 1$$

$$74 = 7^2 + 4^2 + 3^2 = 7^2 + 5^2 = 8^2 + 3^2 + 1$$

$$75 = 5^2 + 5^2 + 5^2 = 7^2 + 5^2 + 1$$

$$76 = 6^2 + 6^2 + 2^2$$

$$77 = 6^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2$$

$$78 = 7^2 + 5^2 + 2^2$$

79

$$80 = 8^2 + 4^2$$

$$81 = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 7^2 + 4^2 + 4^2 = 8^2 + 4^2 + 1 = 9^2$$

$$82 = 8^2 + 3^2 + 3^2 = 9^2 + 1$$

$$83 = 7^2 + 5^2 + 3^2 = 9^2 + 1 + 1$$

$$84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$$

$$85 = 7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2$$

$$86 = 9^2 + 2^2 + 1 = 6^2 + 5^2 + 5^2$$

87

$$88 = 6^2 + 6^2 + 4^2$$

$$89 = 7^2 + 6^2 + 2^2 = 8^2 + 5^2 = 9^2 + 2^2 + 2^2$$

$$90 = 7^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 5^2 + 1 = 9^2 + 3^2$$

$$91 = 9^2 + 3^2 + 1$$

92

$$93 = 8^2 + 5^2 + 2^2$$

$$94 = 7^2 + 6^2 + 3^2 = 9^2 + 3^2 + 2^2$$

95

$$96 = 8^2 + 4^2 + 4^2$$

$$97 = 6^2 + 6^2 + 5^2 = 9^2 + 4^2$$

$$98 = 8^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 7^2 = 9^2 + 4^2 + 1$$

$$99 = 7^2 + 5^2 + 5^2 = 7^2 + 7^2 + 1 = 9^2 + 3^2 + 3^2$$

$$100 = 8^2 + 6^2 = 10^2$$

In vorstehender Tafel der Raumgitterzahlen (GZ) sind diejenigen Zahlen (NGZ), die sich nicht in die Summe dreier QZ zerlegen lassen, besonders hervorgehoben.

Ist $GZ = a^2 + b^2 + c^2$ und p eine beliebige ganze Zahl, so ist

$$p^2 GZ = (ap)^2 + (bp)^2 + (cp)^2$$

woraus sich sofort der Satz ergibt:

1. Satz. Eine GZ mit p^2 multipliziert ist wieder eine GZ.

2. Satz. Eine NGZ mit p^2 multipliziert ist wieder eine NGZ, z. B. $7 \cdot 2^2 = 28$.

3. Satz. Die NGZ sind Zahlen von der Form $(8n - 1)p^2$, wo n und p beliebige ganze Zahlen sind.*)

*) Legendre, Theorie des nombres, S. 321 beweist, dass $(8n + 7)2^{2k}$ keine „trinäre“ Form sein kann. Er geht davon aus, dass jede gerade Quadratzahl durch $4m$, jede ungerade durch $8n + 1$ dargestellt werden kann. Ist die Summe dreier Quadratzahlen ungerade, so kann sie nur durch eine der Formen

$$8p + 1 + 8q + 1 + 8r + 1 = 8k + 3$$

$$4p + 4q + 8r + 1 = 8k + 1$$

dargestellt werden, welche die Form $(8n + 7)$ nicht einschliessen u. s. f. Eine wenig geänderte Beweisführung ist die folgende:

Daraus folgt sofort der bekannte Satz, dass alle ganzen Zahlen sich in die Summe von 4 Quadratzahlen zerlegen lassen; denn betrachtet man die einer NGZ vorausgehende Zahl der Tabelle, so braucht man nur 1 zu addieren, um die Richtigkeit des Satzes einzusehen.**)

4. Satz. Zahlen, die auf mindestens 2 verschiedene Arten in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden können, stellen sich dar a) in der Form q^n , wo q eine beliebige ganze Zahl, ausgenommen die Potenzen von 2, da 2^n stets eine einfache GZ; b) in der Form $(8n+1)r$, wo r jede beliebige Zahl sein kann, ausgenommen die NGZ.

5. Satz. $NGZ(8n+1) = NGZ$

Die durch Probieren gefundenen Sätze 4 u. 5 könnten nur dann bewiesen werden, wenn es gelänge, das Problem der Streckenmultiplikation in die räumliche Geometrie zu übertragen. Dass dieses Problem aber im dreidimensionalen Raum nicht allgemein gelöst werden kann, folgt aus dem Beispiel 3.5, wo die einzelnen Faktoren als Vektorenquadrate dargestellt werden können, nicht aber ihr Produkt. Lipschitz hat gezeigt, dass dieses Produkt ein Quaternion ist.***)

Die Regel für die Multiplikation von Quaternionen kann dem folgenden Schema†) entnommen werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -1 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -1 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -1 \end{vmatrix}$$

Der Wert des Produktes $e_i e_k$ ist in der Horizontalreihe enthalten, die links e_i und in der Vertikalreihe, die oben e_k enthält. Danach ergibt sich

$$(1 + 2e_1)(1 + e_1 + e_2) = -1 + 3e_1 + e_2 + 2e_3$$

d. h. $(1 + 2^2)(1 + 1 + 1) = 1 + 3^2 + 1 + 2^2$

Alle Zahlen lassen sich in einer der folgenden Formen darstellen

$$8n, 8n+1, 8n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6, 8n+7$$

Ihre Quadrate sind daher von der Form

$$8n_1, 8n_1+1, 8n_1+4$$

Bildet man die Summe von 3 Quadratzahlen, so sind nur die Formen $8n, 8n+1, 8n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6$ möglich und nur wenn man die Summe von 4 Quadratzahlen bildet, kann auch die Form $8n+7$ auftreten. Alle Zahlen von der Form $8n+7$ können als Summen von 4 Quadratzahlen hergestellt werden, von denen 3 ungerade Zahlen sind, während die vierte von der Form $4n+2$ ist.

**) Aus der von Schering in Crelles Journal, Bd 115, S. 301 angegebenen Formel

$$(m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2 = (m^2 + n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2mp + 2nq)^2 + (2mp - 2nq)^2$$

folgt der Satz, dass das Quadrat jeder Zahl, ausgenommen die Potenzen von 2 (bei denen p und q gleich 0), sich in die Summe dreier Quadrate zerlegen lässt.

**) Lipschitz, Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn. 1886. S. 53.

†) E. Study, Theorie der komplexen Grössen. S. 167. Encyclopaedie der meth. Wiss. I. A.4. Auf diese Arbeit bin ich in dankenswerter Weise von H. Prof. Dr. Mehmke aufmerksam gemacht worden.

Die Zahlentheorie hat die Aufgabe gelöst, ein ganzzahliges Quaternion, dessen Norm (hier 15) gegeben ist, in Primquaternionen zu zerlegen. Den dreigliedrigen Quaternionen (sagen wir Ternionen), die für die Zwecke unserer Aufgabe allein in Betracht kommen, hat diese Theorie noch keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Insbesondere ist die Frage zu lösen: Unter welchen Umständen ist das Produkt zweier Ternionen wieder ein Ternion?

Da es gleichgültig ist, welche der 3 Einheiten e_1 , e_2 oder e_3 verschwindet, so setzen wir

$$e_3 = 0$$

Das Produkt zweier Ternionen ist

$$(x_1 + e_1 y_1 + e_2 z_1) (x_2 + e_1 y_2 + e_2 z_2) \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + e_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + e_2 (x_1 z_2 + z_1 x_2) + e_3 (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

Das Produkt zweier Ternionen ist also wieder ein Ternion, wenn

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0$$

Das Multiplikationsschema ist

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$(1 + e_1 + 2 e_2) (1 + 2 e_1 + 4 e_2) = -9 + 3 e_1 + 6 e_2$$

d. h.

$$[1.1.2] \cdot [1.2.4] = [9.3.6]$$

oder

$$(1 + 1 + 2^2) (1 + 2^2 + 4^2) = (9^2 + 3^2 + 6^2)$$

Dass das hier gewonnene Resultat nicht genügt, zeigt schon die Multiplikation mit $2 = [1.1.0]$. Sie kann mit der gefundenen Regel nur durchgeführt werden für $z_1 = 0$, oder $x_1 = y_1$. Es widerstrebt z. B.

$$[1.1.0] \cdot [4.2.1]$$

und doch wissen wir, dass ein Ternion der Form $[5.4.1]$ herauskommen muss. Am Schluss der folgenden geometrischen Betrachtung wird gezeigt werden, wie das letzte Ternion aus den beiden ersten abgeleitet werden kann.

Streckenmultiplikation im Raum.

Sind $[x_1 y_1 z_1]$ und $[x_2 y_2 z_2]$ zwei Vektoren, $[x y z]$ ein dritter Vektor, dessen Tensor gleich dem Produkt der Tensoren der beiden ersten sein soll, so ist

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

Vorerst möge angenommen werden, dass die 3 Vektoren mit dem Einheitsvektor $[1.0.0]$ in einer Ebene liegen, deren Gleichung

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y z_1 - y_1 z = 0$$

dann ist $\cos [x_1 \cdot y_1 \cdot z_1] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

der $\sin [x_1 \cdot y_1 \cdot z_1] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{\sqrt{y_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

$\cos [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$\sin [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{\sqrt{y_2^2 + z_2^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$\cos [x \cdot y \cdot z] [1 \cdot 0 \cdot 0] = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Und da bei der Streckenmultiplikation in der Ebene der letzte Winkel gleich der Summe der beiden ersten ist, so folgt

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x_1 x_2 + \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2)}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

oder mit Hilfe von Gleichung (1)

$$(3) \quad x = x_1 x_2 + \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2)}$$

Die Wurzel wird rational, wenn

$$(4) \quad y_2 = p y_1 \text{ und } z_2 = p z_1$$

Aus (2) folgt (5) $z = \frac{z_1}{y_1} y$

und somit $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \frac{y_1^2 + z_1^2}{y_1^2} y^2$

oder nach (1) $y^2 \frac{y_1^2 + z_1^2}{y_1^2} = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + p^2 y_1^2 + p^2 z_1^2) - x^2$

und mit Hilfe von (3)

$$\begin{aligned} &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 p^2 (y_1^2 + z_1^2) + x_2^2 (y_1^2 + z_1^2) \\ &\quad + p^2 (y_1^2 + z_1^2)^2 - x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2 p (y_1^2 + z_1^2) \\ &\quad - (y_1^2 + z_1^2)^2 p^2 \\ &= (y_1^2 + z_1^2) (p^2 x_1^2 + 2 p x_1 x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

woraus der Wert für y folgt. Wir haben

$$(6) \quad \begin{cases} x = x_1 x_2 \pm p (y_1^2 + z_1^2) = x_1 x_2 \pm y_1 y_2 \pm z_1 z_2 \\ y = \pm y_1 (p x_1 \mp x_2) = \pm (x_1 y_2 \mp x_2 y_1) \\ z = \pm z_1 (p x_1 \mp x_2) = \pm (x_1 z_2 \mp z_1 x_2) \end{cases}$$

wo entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gelten, und sind jetzt in der Lage, die folgende Multiplikation auszuführen:

$$[112] [124] = \left\{ \begin{array}{l} [11 \cdot \underline{+1} \cdot \underline{+2}] \\ [-9 \cdot \underline{+3} \cdot \underline{+6}]^* \end{array} \right.$$

das nämliche Resultat, das wir durch Multiplikation der beiden Ternionen

$$(\pm x_1 \pm e_1 y_1 \pm e_2 z_1) (\pm x_2 \pm e_1 y_2 \pm e_2 z_2)$$

erhalten.

Vermittelst der Streckenmultiplikation kann jeder Vektor quadriert werden. Mit Berücksichtigung der verschiedenen Vorzeichen erhält man nur die beiden wesentlich verschiedenen Resultate:

$$\begin{aligned} (x + e_1 y + e_2 z)^2 &= x^2 - y^2 - z^2 + 2 e_1 x y + 2 e_2 x z \\ (x + e_1 y + e_2 z) (x - e_1 y - e_2 z) &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\text{Es ist somit} \quad [a \cdot b \cdot c]^2 = \left\{ \begin{array}{l} [a^2 - b^2 - c^2 \cdot 2 a b \cdot 2 a c] \\ [a^2 + b^2 + c^2 \cdot 0 \cdot 0] \end{array} \right.$$

Man sieht auch unmittelbar, dass

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4 a^2 b^2 + 4 a c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Beispiel:

$$[2 \cdot 2 \cdot 1]^2 = [-1 \cdot 8 \cdot 4] = 9^2 \text{ und } [1 \cdot 2 \cdot 2]^2 = [7 \cdot 4 \cdot 4] = 9^2$$

Eine zweite Zerlegung für 81 liefert der Vektor $3 [2 \cdot 2 \cdot 1] = [6 \cdot 6 \cdot 3]$.

Die erhaltenen Formeln bieten die Möglichkeit, aus einem Vektor die Quadratwurzel zu ziehen. Ist $[a \cdot b \cdot c]$ der gegebene Vektor, $[x \cdot y \cdot z]$ die gesuchte Quadratwurzel, so hat man

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 &= a \\ 2 x y &= b \\ 2 x z &= c \\ \hline (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Besonders einfach wird die Lösung, wenn $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \pm d \\ y^2 + z^2 &= \frac{1}{2} (-a \pm d) \\ x^2 &= \frac{1}{2} (a \pm d) \\ y^2 &= \frac{b^2}{2 (a \pm d)} \\ z^2 &= \frac{c^2}{2 (a \pm d)} \end{aligned}$$

*) Es ist sehr einfach die mechanische Regel abzuleiten, vermittelt welcher die beiden verschiedenen Multiplikationsresultate erhalten werden, wenn man die beiden Vektoren untereinander schreibt:

$$\begin{array}{r} 11 \cdot 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 \cdot 4 \\ \hline 9 \cdot 3 \cdot 6 \end{array}$$

Beispiel. $[6.3.2] = [7.0.0]$ gibt

$$\left[\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{26}} \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} \right]^2 = \begin{Bmatrix} [7.0.0] \\ [6.3.2] \end{Bmatrix}$$

Versucht man die Streckenmultiplikation in der Weise zu verallgemeinern,

dass $\angle [x.y.z] [x_1.y_1.z_1] = [x_2.y_2.z_2] [1.0.0]$

und $\angle [x.y.z] [y_2.x_2.z_2] = [x_1.y_1.z_1] [1.0.0]$

so erhält man das folgende System von Gleichungen

$$\text{I. } x^2 + y^2 + z^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

$$\text{II. } xx_1 + yy_1 + zz_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) x_2$$

$$\text{III. } xx_2 + yy_2 + zz_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) x_1$$

das nur für den Fall rationale Werte zu ergeben scheint, wenn, wie bisher, angenommen worden, die beiden zu multiplizierenden Vektoren mit dem Einheitsvektor in einer Ebene liegen.

Beispiel. $[1.2.1] [4.2.1] = [\bar{1}.10.5]$

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 126 \\ x + 2y + z & = & 24 \quad -1 \\ 4x + 2y + z & = & 21 \quad +1 \\ \hline 3x & = & -3 \\ x & = & -1 \quad \text{u. s. f.} \end{array}$$

Multiplikation durch Koordinatentransformation.*)

Jedem Punkt mit ganzzahligen Koordinaten entspricht ein Punkt des kubischen Raumgitters mit einer Würfelkante gleich der Einheit. Andere kubische Raumgitter findet man durch Aufsuchen dreier Vektoren derselben Form, die aufeinander senkrecht stehen:

$$[a.b.c] [b.c.a] [c.a.b]$$

also durch Auflösung der Gleichung

$$ab + bc + ac = 0$$

eines Kegels. Die Axen des Koordinatensystems sind Mantellinien. Die Schnitte mit Ebenen parallel einer Axenebene sind Hyperbeln, deren reelle Axe in die Halbierungslinie des Winkels zweier Koordinatenachsen fällt; auf dieser liegen die ersten Gitter-

*) Soll ein Gitter in ein anderes verwandelt werden, dessen Grundspat durch die Vektoren $[a_1 b_1 c_1]$, $[a_2 b_2 c_2]$, $[a_3 b_3 c_3]$ bestimmt ist und sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes im neuen System x, y, z , so ist der zu ihm gehörige Vektor

$$x [a_1 b_1 c_1] + y [a_2 b_2 c_2] + z [a_3 b_3 c_3]$$

und wenn X, Y, Z die Koordinaten des nämlichen Punktes im alten Gitter, so folgt

$$\begin{cases} X = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{cases}$$

punkte; es sind aber noch weitere vorhanden, wie die nähere Untersuchung zeigt. Man erhält für

$$\begin{aligned} c &= -1 : [2.2.1] \\ c &= -2 : [4.4.2], [6.3.2] \\ &= -3 : [6.6.3], [12.4.3] \\ &\quad [8.4.4], [12.6.4], [20.5.4] \\ &\quad [10.10.5], [30.6.5] \\ &\quad [12.12.6], [15.10.6], [24.8.6], [42.7.6] \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Die absoluten Multiplikatoren sind demnach

$$[2.2.1], [6.3.2], [12.4.3], [20.5.4], [15.10.6], [42.7.6] \dots$$

und deren Vielfache. Allgemein

$$[m \ n \ (n+p) \cdot m \ p \ (n+p) \cdot m \ n \ p]$$

Jeder beliebige Vektor kann mit einem absoluten Multiplikator $[a \cdot b \cdot c]$ nach folgendem Schema multipliziert werden:

$$[x \cdot y \cdot z] \cdot [a \cdot b \cdot c] = x [a \cdot b \cdot c] + y [b \cdot c \cdot a] + z [c \cdot a \cdot b]$$

Der Punkt $[x \cdot y \cdot z]$ im neuen Gitter hat die Koordinaten

$$X = a x + b y + c z$$

$$Y = b x + c y + a z$$

$$Z = c x + a y + b z$$

Der Spat des neuen Gitters hat den Inhalt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}$$

wo

$$a b + b c + a c = 0$$

Unter der nämlichen Bedingung ist also

$$**) (x^2 + y^2 + z^2) (a^2 + b^2 + c^2) = (a x + b y + c z)^2 + (b x + c y + a z)^2 + (c x + a y + b z)^2$$

Betrachtet man nochmals die allgemeine Form des absoluten Multiplikators und bemerkt, dass

$$n^2 (n+p)^2 + p^2 (n+p)^2 + n^2 p^2 = (n^2 + n p + p^2)^2$$

woraus

$$x = \frac{\begin{vmatrix} X & a_2 & a_3 \\ Y & b_2 & b_3 \\ Z & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & X & a_3 \\ b_1 & Y & b_3 \\ c_1 & Z & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & X \\ b_1 & b_2 & Y \\ c_1 & c_2 & Z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ist die Nennerdeterminante gleich 1, so hat der Spat des neuen Gitters den nämlichen Inhalt wie der des alten und die Anzahl der Gitterpunkte ist in beiden Gittern gleich gross.

E. Sommerfeld. Geometrische Kristallographie. Leipzig 1906. S. 84 und 85.

**) Diese Formel wurde zuerst von Catalan auf anderem Wege gefunden. Atti Nuovi Lincei 35. S. 103; auf die Arbeiten von Catalan bin ich in dankenswerter Weise von H. Prof. Dr. Wölfling aufmerksam gemacht worden.

so findet man den Satz:

Zahlen von der Form $m^2(n^2 + np + p^2)$ lassen sich in die Summe dreier Quadrate

$$a^2 = m^2 n^2 (n + p)^2$$

$$b^2 = m^2 p^2 (n + p)^2$$

$$c^2 = n^2 p^2$$

zerlegen, die mit jeder beliebigen Summe dreier Quadrate $(x^2 + y^2 + z^2)$ nach dem Schema (**) multipliziert werden können. Solche Zahlen sind

$$3^2, 6^2, 7^2, 9^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 18^2, 19^2, 21^2 \text{ u. s. f.}$$

$$\text{Es ist z. B. } 7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2 \text{ aber } a = 6, b = 3, c = -2$$

$$(3^2 + 2^2 + 1)(6^2 + 3^2 + 2^2) = 22^2 + 11^2 + 9^2$$

Die Multiplikation der Vektoren ist entschieden vorzuziehen; dabei erhält man 8 verschiedene Resultate:

$$[3 \cdot 2 \cdot 1] \cdot [6 \cdot 3 \cdot 2] = 3 [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [3 \cdot 2 \cdot 6] + [2 \cdot 6 \cdot 3] = [22 \cdot 11 \cdot 9]$$

$$+ \quad + \quad - \quad [26 \cdot 1 \cdot 3]$$

$$+ \quad - \quad + \quad [10 \cdot 19 \cdot 15]$$

$$+ \quad - \quad - \quad [14 \cdot 7 \cdot 21]$$

$$\text{und} \quad 1 \cdot [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [3 \cdot 2 \cdot 6] + 3 [2 \cdot 6 \cdot 3] = [6 \cdot 17 \cdot 19]$$

$$+ \quad + \quad - \quad [18 \cdot 19 \cdot 1]$$

$$+ \quad - \quad + \quad [6 \cdot 25 \cdot 5]$$

$$+ \quad - \quad - \quad [6 \cdot 11 \cdot 23]$$

Setzt man

$$(x e_1 + y e_2 + z e_3)(a e_1 + b e_2 + c e_3) = a x e_1^2 + b x e_1 e_2 + c x e_1 e_3 + a y e_2 e_1 + b y e_2^2 + c y e_2 e_3 + a z e_3 e_1 + b z e_3 e_2 + c z e_3^2$$

so heisst das Multiplikationsthema

$$X = (a x + b y - c z) e_1$$

$$Y = (b x - c y + a z) e_2$$

$$Z = (-c x + a y + b z) e_3$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & e_2 & -e_3 \\ e_2 & e_3 & e_1 & -e_2 \\ e_3 & e_2 & e_3 & -e_1 \end{vmatrix}$$

Anstatt die Glieder des Multiplikanden zu verändern, könnte man sich anderer Multiplikatoren bedienen:

$$3 [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [3 \cdot 2 \cdot 6] + [2 \cdot 6 \cdot 3] = [14 \cdot 7 \cdot 21]$$

Man erhält dabei aber keine neuen Resultate; ebensowenig bei der Vertauschung:

$$3 [6 \cdot 3 \cdot 2] + 2 [2 \cdot 6 \cdot 3] + [3 \cdot 2 \cdot 6] = [19 \cdot 1 \cdot 18]$$

Das Schema ist jetzt

$$\begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & -e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & e_3 & -e_1 \\ e_3 & e_3 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}$$

Es gibt 48 verschiedene Vektoren derselben Form $[a.b.c]$, welche den Flächen eines Hexakisoktaeders entsprechen. Sucht man die Anzahl der wesentlich verschiedenen Vektorentripel (dreier aufeinander senkrechten Vektoren), so ist zunächst zu bemerken, dass ein diametral entgegengesetztes kein neues Multiplikationsresultat liefert. Die 24 übrig bleibenden werden zu je dreien zusammengefasst. Der dualistisch entsprechende Satz heisst: Einem Hexakisoktaeder lassen sich 8 verschiedene Rhomboeder umschreiben. Die Flächen der Formen $(6.3.2)$, $(12.4.3)$, $(15.10.6)$ u. s. f.

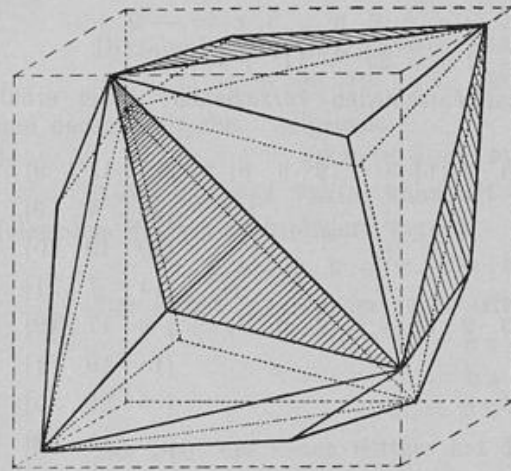


Fig. 30.

lassen sich zu je 6 als Würfel zusammenfassen; man könnte sie Oktakishexaeder nennen. Der Pyramidenwürfel $(2.2.1)$ ist ein Tetrakishexaeder (Fig. 30). (Die parallel ihrer Symmetrieaxe schraffierten Flächen liegen in den Würfelflächen. Man darf sie sich nur nach dieser Axe gebrochen denken, um eine Vorstellung vom Oktakishexaeder zu bekommen.)

Entgegen der Multiplikation mit absoluten Multiplikatoren ist eine solche mit anderen Vektoren, die Koordinatentransformation oder das Multiplikationsschema, vom Multiplikanden abhängig (relative Multiplikation). Als Beispiel diene die Multiplikation mit 2. Hier scheint die Transformation mit

dem Spat $[1.1.0]$, $[\bar{1}.1.0]$, $[1.0.1]$ durchgeführt werden zu können, denn es ist

$$[1.1.0] \cdot [1.1.1] = [1.1.0] + [\bar{1}.1.0] + [1.0.1] = [\bar{1}.2.1]$$

$$[1.1.0] \cdot [2.1.0] = 2[1.1.0] + [\bar{1}.1.0] = [1.3.0]$$

$$[1.1.0] \cdot [2.2.1] = 2[1.1.0] + 2[\bar{1}.1.0] + [1.0.1] = [1.4.1]$$

aber für die folgenden Multiplikationen mit $[2.1.1]$ und $[3.1.0]$ muss ein anderer Spat gewählt, oder es müssen die Multiplikanden verändert werden:

$$[1.1.0] \cdot [1.1.2] = [1.1.0] + [\bar{1}.1.0] + 2[1.0.1] = [2.2.2]$$

$$[1.1.0] \cdot [1.3.0] = [1.1.0] + 3[\bar{1}.1.0] = [2.4.0]$$

Die Multiplikation mit $[3.2.1]$ ist auf keine Weise durchführbar, was mit der Tatsache in Einklang steht, dass 28 nicht in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden kann. Dagegen erhält man

$$[1.1.0] \cdot [4.2.1] = 4[1.1.0] + 2[1.0.1] + [\bar{1}.0.1] = [5.4.1]$$

Diese Multiplikation ist in der Ebene der Vektoren $[1.1.0]$ und $[1.0.1]$ ausgeführt; denn $4[1.1.0] + [1.0.1] = [5.4.1]$; der Spat ist auf einen Rhombus reduziert, bei dem eine Seite doppelt zu nehmen ist.

Bei der Streckenmultiplikation

$$[x \cdot y \cdot z] = [x_1 \cdot y_1 \cdot z_1] \cdot [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2]$$

wurde S. 67 gefunden

$$(3) \ x = x_1 x_2 \pm \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2)}$$

S. 69

$$7 = \left[\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{26}} \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} \right]$$

gibt mit

$$[0.1.1] \quad \text{multipliziert nach Gleichung (3)}$$

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{9}{26} + \frac{2}{13}\right)(1+1)} = \pm 1$$

Zur Berechnung von y und z hat man

$$(1) \ x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$(2) \ y z_1 - y_1 z = 0 \text{ d. h. } y \sqrt{\frac{13}{2}} = z \sqrt{\frac{9}{26}}$$

$$y = \frac{3}{2} z$$

Somit

$$y = \pm 3, z = \pm 2$$

Zur Verallgemeinerung der Methode setzen wir

$$a = \left[\sqrt{\frac{a+b}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2-b^2-c^2}{2(a+b)}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right]$$

Bei der Multiplikation mit [0.1.1] wird

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}} \cdot 2 = \pm \sqrt{a-b} = \pm p$$

$$a = \left[\sqrt{\frac{2a-p^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p^2(2a-p^2)-2c}{2(2a-p^2)}} \cdot \sqrt{\frac{c}{2a-p^2}} \right]$$

mit [0.1.1] multipliziert gibt

$$y = \pm \frac{1}{p} \sqrt{p^2(2a-p^2)-2c}$$

$$z = \frac{1}{p} \sqrt{2c}$$

Beispiel: $a = 15, c = 2, p = 1$ gibt

$$\left[\sqrt{\frac{29}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25}{58}} \cdot \sqrt{\frac{2}{29}} \right] \cdot [0.1.1] = \left[\pm 1, \pm 5, \pm 2 \right]$$

Als ein Beispiel relativer Multiplikation kann auch noch die Streckenmultiplikation aufgefasst werden. Aus den Formeln (6) S. 67 folgt

$$[x \cdot y \cdot z] = x_1 [x_2 \cdot y_2 \cdot z_2] + y_1 [y_2 \cdot x_2 \cdot 0] + z_1 [z_2 \cdot 0 \cdot x_2]$$

Da der Vektor $[x_2 \cdot y_2 \cdot z_2]$ sowohl senkrecht steht auf $[y_2 \cdot x_2 \cdot 0]$ als auf $[z_2 \cdot 0 \cdot x_2]$

so wird hier das kubische Raumgitter in ein Gitter von monokliner Struktur mit einem senkrechten Prisma als Grundspat verwandelt, dessen Grundflächen Parallelogramme sind.

Ein eigenartiges Beispiel absoluter Multiplikation bietet die Multiplikation mit einem Vektor der Form

$$[a \cdot b \cdot 0] \text{ wo } a^2 + b^2 = c^2$$

Es ist

$$[x \cdot y \cdot z] \cdot [a \cdot b \cdot 0] = x [a \cdot b \cdot 0] + y [b \cdot a \cdot 0] + z [0 \cdot 0 \cdot c]$$

$$\text{d. h. } (x^2 + y^2 + z^2) (a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 + (a^2 + b^2) z^2$$

Hier wird das kubische Zahlengitter in ein anderes mit der Kante $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ verwandelt. Die Stellung der neuen Würfel kann keine andere sein, als die eben angenommene, bei welcher die Grundflächen in einer der Koordinatenebenen liegen und deren Seitenkanten parallel einer Axe laufen.

Bei einer schiefen Stellung der Grundfläche

$$[a \cdot b \cdot c], [b \cdot c \cdot a]$$

wo

$$ab + bc + ac = 0$$

ist der auf ihr senkrechte Vektor $[c \cdot a \cdot b]$; dieser bestimmt mit den beiden vorigen den Würfel, der bei der absoluten Multiplikation erster Art in Frage kommt. Wir haben gesehen, dass auch die absolute Multiplikation zweiter Art eine kubische ist, haben also zwei verschiedene Arten der kubischen Multiplikation zu unterscheiden. Die Streckenmultiplikation bietet ein Beispiel einer monoklinen (orthorhomboidischen) Multiplikation, die für $y_2 = z_2$, d. h. für den Fall, dass der eine Vektor in einer Medianebene des Axensystems liegt, zur rhombischen wird.

Bei der Multiplikation mit $(1 \cdot 1 \cdot 0)$ handelt es sich um den Spat $[1 \cdot 1 \cdot 0]$, $[1 \cdot 1 \cdot 0]$, $[1 \cdot 0 \cdot 1]$, bei welchem die beiden ersten Vektoren ein Quadrat bestimmen, auf welchem der 3. schief steht; wie man leicht einsieht, ist aber eine einzige Symmetrieebene vorhanden, so dass ein monoklines Prisma mit quadratischer Schiefendfläche vorliegt; jedoch ist ausserdem noch die Gleichheit sämtlicher Kanten im Gegensatz zum monoklinen Typus hervorzuheben. Bei der Multiplikation mit $[2 \cdot 1 \cdot 0]$ handelt es sich ebenfalls um ein Prisma mit quadratischer Schiefendfläche, dem jedoch die Symmetrieebene fehlt:

$$[2 \cdot 1 \cdot 0] \cdot [2 \cdot 1 \cdot 2] = 2 [2 \cdot 1 \cdot 0] + [1 \cdot 2 \cdot 0] + 2 [0 \cdot 1 \cdot 2] = [5 \cdot 2 \cdot 4]$$

Diese Art der Multiplikation möge die klinequadratische heissen.

Zusammenfassung der Resultate dieses Abschnitts.

Die algebraische Multiplikation zweier Vektoren ist gleichbedeutend mit einer Verwandlung des kubischen Zahlengitters in ein anderes, dessen Grundspat entweder nur von einem oder von beiden Vektoren abhängig ist. Im ersten Fall kann die (absolute) Multiplikation mit jedem beliebigen anderen Vektor ausgeführt werden, im zweiten (relative M.) nicht. Genügen die Koordinaten eines Vektors $[a \cdot b \cdot c]$ der Bedingung $ab + bc + ac = 0$, so kann er mit jedem beliebigen anderen multipliziert

werden durch Verwandlung des kubischen Zahlengitters in ein anderes mit würfelförmigem Grundspat, dessen Kante $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ist für einen Vektor $[a, b, 0]$ die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt, so kann er mit jedem beliebigen anderen durch Verwandlung des kubischen Zahlengitters in ein kubisches mit der Kante $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ multipliziert werden. Die Streckenmultiplikation im Raum ist ausführbar, wenn die zu multiplizierenden Vektoren mit einer Axe in einer Ebene liegen; sie ist gleichbedeutend mit einer Transformation in ein Gitter von orthorhombischem oder orthorhomboidischem Grundspat. Andere Beispiele der relativen Multiplikation führen auf einen klinoquadratischen Grundspat von monosymmetrischem oder asymmetrischem Typus.

Näherungsvektoren. (I Anhang.)

Durch die Untersuchungen von Jakobi (Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus 3 vorhergehenden abgeleitet wird. Borchardt's Journ. für reine und angew. Math. 69. p. 29 — 64) und Fürstenau (Über Kettenbrüche höherer Ordnung. Programm Wiesbaden 1874) ist es möglich geworden, für jeden beliebig komplizierten Vektor eine kürzeste Reihe von ihm sich immer mehr nähernden Vektoren anzugeben. E. Sommerfeld (Kettenbruchähnliche Entwicklungen zur Beurteilung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Flächenkombinationen an Krystallen. Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie. 1903. S. 537) hat die Methode dualistisch auf die kristallographischen Formen angewendet.

Die Form solcher Kettenbrüche ist die folgende:

$$\frac{m}{p} = a_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{b_4 + \dots}}}}}}} \quad \frac{n}{p} = b_0 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{b_4 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}}}}}}}$$

Die Näherungswerte $\frac{m_k}{p_i}$ und $\frac{n_i}{p_i}$ erhält man durch Vernachlässigung aller derjenigen Koeffizienten a_k und b_k (Teilnenner), deren Index $k > i$, d. h. wenn man alles

das vernachlässigt, was hinter der die Grössen a_i und b_i verbindenden Vertikalen steht. Die Näherungswerte lauten somit

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{p_0} &= a_0 & \frac{n_0}{p_0} &= b_0 \\ \frac{m_1}{p_1} &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1} & \frac{n_1}{p_1} &= b_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 b_0 + 1}{a_1} \\ \frac{m_2}{p_2} &= \frac{(a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2 + 1}{a_1 a_2 + b_2} & \frac{n_2}{p_2} &= \frac{(a_1 b_0 + 1) a_2 + b_0 b_2}{a_1 a_2 + b_2} \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Und es gelten die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} m_i = a_i m_{i-1} + b_i m_{i-2} + m_{i-3} \\ n_i = a_i n_{i-1} + b_i n_{i-2} + n_{i-3} \\ p_i = a_i p_{i-1} + b_i p_{i-2} + p_{i-3} \end{cases}$$

Der Algorithmus, nach welchem die Koeffizienten a_i und b_i berechnet werden, soll an dem Beispiel des kleinsten Hexakisoktaeders bei gegebenem Inhalt gezeigt werden. Es wurden (Programm des K. Gymn. Rottweil 1887) von mir als Näherungswerte für die Indizes gefunden

$$1553 : 848 : 392$$

$$\begin{aligned} \frac{1553}{392} &= 3 + \frac{377}{392} = 3 + \frac{377 : 64}{392 : 64} & \frac{292}{64} &= 6 + \frac{8 : 57}{64 : 57} & \frac{64}{57} &= 1 + \frac{7 : 8}{57 : 8} \quad \text{u. s. f.} \\ \frac{848}{392} &= 2 + \frac{64}{392} = 2 + \frac{1}{392 : 64} & \frac{377}{64} &= 5 + \frac{1}{64 : 57} & \frac{8}{57} &= 0 + \frac{1}{57 : 8} \end{aligned}$$

Die Rechnung kann nach dem folgenden Schema ausgeführt werden:

3	1553	392	848	2	(Der neue Divisor wird
6	392	64	377	5	in die Mitte gestellt; er
1	64	57	8	0	ist der Rest mit der Zahl
7	57	8	7	0	rechts; der Rest mit der
1	8	7	1	0	Zahl links kommt rechts,
7	7	1	1	1	links der alte Divisor.)

Man erhält die Näherungswerte

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{p_0} &= \frac{3}{1} & \frac{n_0}{p_0} &= \frac{2}{1} \\ \frac{m_1}{p_1} &= \frac{23}{6} & \frac{n_1}{p_1} &= \frac{13}{6} \\ \frac{m_2}{p_2} &= \frac{24}{6} & \frac{n_2}{p_2} &= \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Die weiteren Näherungswerte werden durch die Rekursionsformeln bestimmt:

$$\begin{aligned} m_3 &= 7 \cdot 24 + 0 \cdot 23 + 3 = 171 \\ n_3 &= 7 \cdot 13 + 0 \cdot 13 + 2 = 93 \\ p_3 &= 7 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + 1 = 43 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Wie man sieht, passen an den Anfang die Näherungswerte

$$\begin{aligned} \frac{m_{-1}}{p_{-1}} &= \frac{1}{0} & \frac{n_{-1}}{p_{-1}} &= \frac{0}{0} \\ \frac{m_{-2}}{p_{-2}} &= \frac{0}{0} & \frac{n_{-2}}{p_{-2}} &= \frac{1}{0} \\ \frac{m_{-3}}{p_{-3}} &= \frac{0}{1} & \frac{n_{-3}}{p_{-3}} &= \frac{0}{1} \end{aligned}$$

Denn es ist $m_2 = a_2 m_1 + b_2 m_0 + m_{-1}$

$(a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2 + 1 = a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0 + m_{-1}, m_{-1} = 1$ u. s. f.
so dass die Rekursionsformeln gleich von vornherein benützt werden können.

Es ist

$$\begin{aligned} m_0 &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3 \\ n_0 &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 \\ p_0 &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Betrachtet man m, n und p (wo $m > n > p$) als die Koordinaten der Endpunkte eines Vektors, so stellen die Grössen m_i, n_i und p_i die Koordinaten von Näherungsvektoren dar. Die Rekursionsformeln können aufgefasst werden als Formeln für die Transformation des kubischen Zahlengitters in ein Gitter mit den Vektoren

$$[m_{i-1} \cdot n_{i-1} \cdot p_{i-1}], [m_{i-2} \cdot n_{i-2} \cdot p_{i-2}], [m_{i-3} \cdot n_{i-3} \cdot p_{i-3}]$$

oder $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-3}$ und diese Formeln können geschrieben werden

$$v_i = a_i v_{i-1} + b_i v_{i-2} + v_{i-3}$$

a_i, b_i und 1 sind die Koordinaten des Punktes $[m_i \cdot n_i \cdot p_i]$ im System $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-3}$. Vermittelst dieser Formeln kann bewiesen werden, dass

$$\begin{vmatrix} m_i & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} = 1$$

d. h. dass der durch 3 aufeinanderfolgende Näherungsvektoren gebildete Trivector (Spät) = 1 ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m_i & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m_i - a_i m_{i-1} - b_i m_{i-2} & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i - a_i n_{i-1} - b_i n_{i-2} & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i - a_i p_{i-1} - b_i p_{i-2} & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} m_{i-3} & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_{i-3} & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_{i-3} & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{i-1} & m_{i-2} & m_{i-3} \\ n_{i-1} & n_{i-2} & n_{i-3} \\ p_{i-1} & p_{i-2} & p_{i-3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser letzteren Beziehung erhält man schliesslich die Determinante

$$\begin{vmatrix} m_{-1} & m_{-2} & m_{-3} \\ n_{-1} & n_{-2} & n_{-3} \\ p_{-1} & p_{-2} & p_{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Die letzte Determinante stellt den Grundspat des kubischen Zahlengitters dar. Von ihm ausgehend, kann die Transformation in ein Gitter mit einem durch den Endvektor, den letzten und vorletzten Näherungsvektor bestimmten Grundspat durch eine Anzahl besonders einfacher Schritte ausgeführt werden. Diese Schritte lassen sich als geometrische Summierungen der Vektoren darstellen. Für das angeführte Beispiel sind es die folgenden:

$$\begin{aligned}[3.2.1] &= 3.[1.0.0] + 2.[0.1.0] + [0.0.1] \\ [23.13.6] &= 6.[3.2.1] + 5.[1.0.0] + [0.1.0] \\ [24.13.6] &= 1.[23.13.6] + 0.[3.2.1] + [1.0.0] \\ [171.93.43] &= 7.[24.13.6] + 0.[23.13.6] + [3.2.1] \\ [194.106.49] &= 1.[171.93.43] + 0.[24.13.6] + [23.13.6] \\ [1553.848.392] &= 7.[194.106.49] + 1.[171.93.43] + [24.13.6]\end{aligned}$$

Bei diesen Transformationen ändert sich das Volumen des Grundspats, also auch das zu Grund gelegte Punktgitter nicht. (Umgekehrt kann ähnlich wie auf S. 28 bewiesen werden, dass alle Ebenengitter, welche aus ein und demselben Punktgitter durch verschiedenartige Eintragung von Ebenen erzeugt werden können, gleich grosse Grundspate besitzen).

Die Anwendbarkeit der Kettenbruchmethode auf die Transformation eines ebenen Gitters ist von F. Klein dargelegt worden (Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896/97). Sommerfeld hat a. a. O. die für den Fall eines räumlichen Gitters notwendig werdenden Verallgemeinerungen vorgenommen.

Ein sehr bemerkenswertes Beispiel ist noch das folgende: „Gesucht wird dasjenige Hexakisoktaeder, dessen Ecken auf der Oberfläche einer Kugel liegen.“

Setzen wir den Radius der umbeschriebenen Kugel, also die Hälfte der vierzähligen Axe = 1, so ist auch die dreizählige

$$\frac{h\sqrt{3}}{h+k+1} = 1$$

und ebenso die zweizählige

$$\frac{h\sqrt{2}}{h+k} = 1$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort

$$\frac{k}{h} = -1 + \sqrt{2}$$

und aus der ersten

$$\frac{l}{h} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Somit

$$h:k:l = 1:(-1 + \sqrt{2}):(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

durch Verwandlung der Wurzeln in Kettenbrüche erhält man

$$\frac{k}{h} = (1:2, 2, 2 \dots) \quad \text{mit den Näherungswerten } \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{k}{h} + \frac{l}{h} = (1:1, 2, 1, 2, 1, 2 \dots) \quad \text{,, , , , } \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{11}, \frac{8}{15} \text{ u. s. f.}$$

Die Werte $\frac{k}{h} = \frac{6}{15}$ und $\frac{l}{h} = \frac{5}{15}$ liefern die ausgezeichnete Näherungsform
(15 . 6 . 5)

Nach der Methode von Jakobi-Fürstenau erhält man die folgende Reihe von Näherungsformen

(3 . 1 . 1)
(9 . 4 . 3)
(19 . 8 . 6)
(22 . 9 . 7)
(280 . 116 . 89)
(3146 . 1303 . 1000)

Der letzten Form steht (9 . 4 . 3) schon näher als (15 . 6 . 5), da 15:5 zwar gleich 3, aber 6:5 = 1,2, hingegen 4:3 = 1,333. Noch näher steht (19 . 8 . 6); vergleichen wir mit dieser die Form (15 . 6 . 5) bezüglich ihrer Lösung der gestellten Aufgabe, so ist für die erstere

$$\frac{h \sqrt{3}}{h + k + l} = 0,997 \quad \text{für die letzte } 0,9993$$

dagegen
$$\frac{h \sqrt{2}}{h + k} = 0,995 \quad \text{bzw. } 1,0101.$$

Erheblich schlechter ist in dieser Beziehung (9 . 4 . 3), für welche man die Zahlen 0,974 und 0,977 erhält.

Harmonische Vektoren. (II. Anhang.)

Sind 3 Gittervektoren $[a_1 \ b_1]$, $[a_2 \ b_2]$, $[a_3 \ b_3]$ in einer Ebene gegeben, zu denen der vierte harmonische gefunden werden soll, so ist die Lösung sehr einfach, wenn, wie in Fig. 31, einer der Vektoren v_3 durch vektorielle Addition aus den beiden anderen v_1 und v_2 abgeleitet werden kann. Ist

$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$,
so ist v_3 die eine Diagonale des Parallelogramms mit den Seiten $\lambda_1 v_1$ und $\lambda_2 v_2$; die

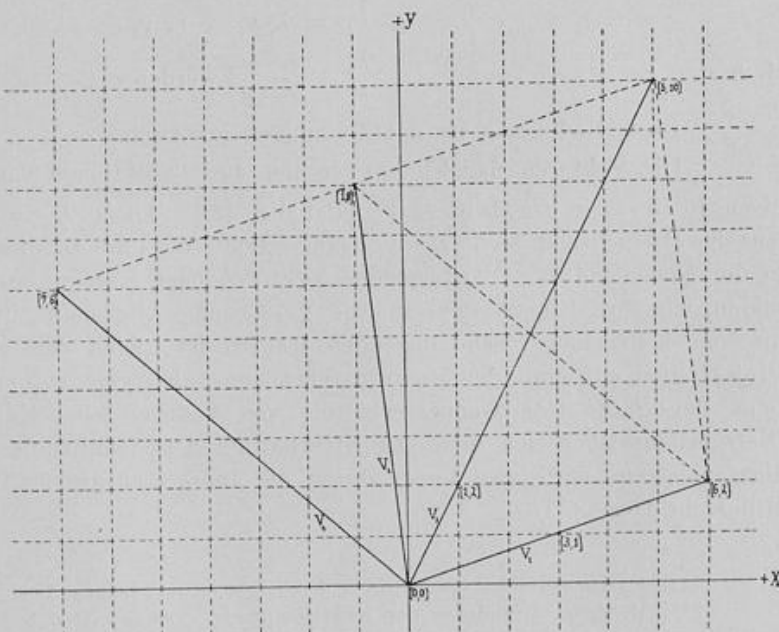


Fig. 31.

andere Diagonale gibt die Richtung des gesuchten Vektors an:

$$v_4 = \lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_2^*)$$

Die Entfernung des Punktes $[a_3 \ b_3]$ vom Vektor v_1 ist

$$\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

Und
$$\sin(v_1 v_3) = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

das Doppelverhältnis von 4 Vektoren

$$(v_1 v_2 v_3 v_4) = \frac{\sin(v_1 v_3)}{\sin(v_2 v_3)} : \frac{\sin(v_1 v_4)}{\sin(v_2 v_4)} = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} : \frac{a_1 b_4 - a_4 b_1}{a_2 b_4 - a_4 b_2}$$

Ist dieses gleich -1 , so bilden die 4 Vektoren ein harmonisches Büschel. Die nämliche Bedingung lässt sich für jedes schiefwinklige System auf folgende Art ableiten: Ist $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, so hat man

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ b_3 &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \\ \lambda_2 &= \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{aligned}$$

Ist ferner $v_4 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ so ergeben sich für μ_1 und μ_2 ähnliche Ausdrücke. Nun soll aber ein harmonisches Büschel entstehen, oder es soll

$$v_4 = \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$$

d. h.

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{\mu_2}{\mu_1} \text{ werden.}$$

Diese Bedingung ist mit der obigen identisch.

Die Vektoren der Fig. 31 stellen die Projektionen von 4 Punkten der Netzebene (5.3.1) in Fig. 14 dar. Es sind dies $[2.3.1]$, $[1.1.8]$, $[1.1.2]$ und $[3.7.6]$. Aus der Betrachtung der letzteren Figur erhellt, dass die zu diesen Punkten gehörigen, in der Netzebene (5.3.1) liegenden Vektoren oder Kanten ein harmonisches Büschel bilden, wie ihre Projektionen auf die YZ-Ebene. Allgemein gilt: Das Doppelverhältnis von 4 in einer Ebene liegenden Kanten ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Projektionen auf eine der Koordinatenebenen, also eine rationale Zahl. Dualistisch folgt der Satz: Das Doppelverhältnis von 4 durch eine Kante gehenden Flächen (Netzebenen) ist gleich dem Doppelverhältnis der Schnittlinien mit einer der Koordinatenebenen, wird also linear durch die Indizes ausgedrückt. Dies ist das Gauss-Millersche Gesetz.**)

*) E. Sommerfeldt, Geometrische Kristallographie. Leipzig 1906. S. 101.

**) M. Viola, Grundzüge der Kristallographie. Leipzig 1904. S. 65. Liebisch, Geometrische Kristallographie. Leipzig 1881. S. 37 u. f.

andere Diagonale gi

Die Entfer

Und

das Doppelverhältn

$(v_1 v_2 v_3 v_4)$

Ist dieses
Die nämliche Be
ableiten: Ist v_3 :

woraus

Ist ferner v_4 =
soll aber ein ha

d. h.

Diese

Die Ve

ebene (5 . 3 . 1)

Aus der Betrac

in der Netzebe

bilden, wie ih

nis von 4 in

Projektionen

folgt der Sa

(Netzebenen)

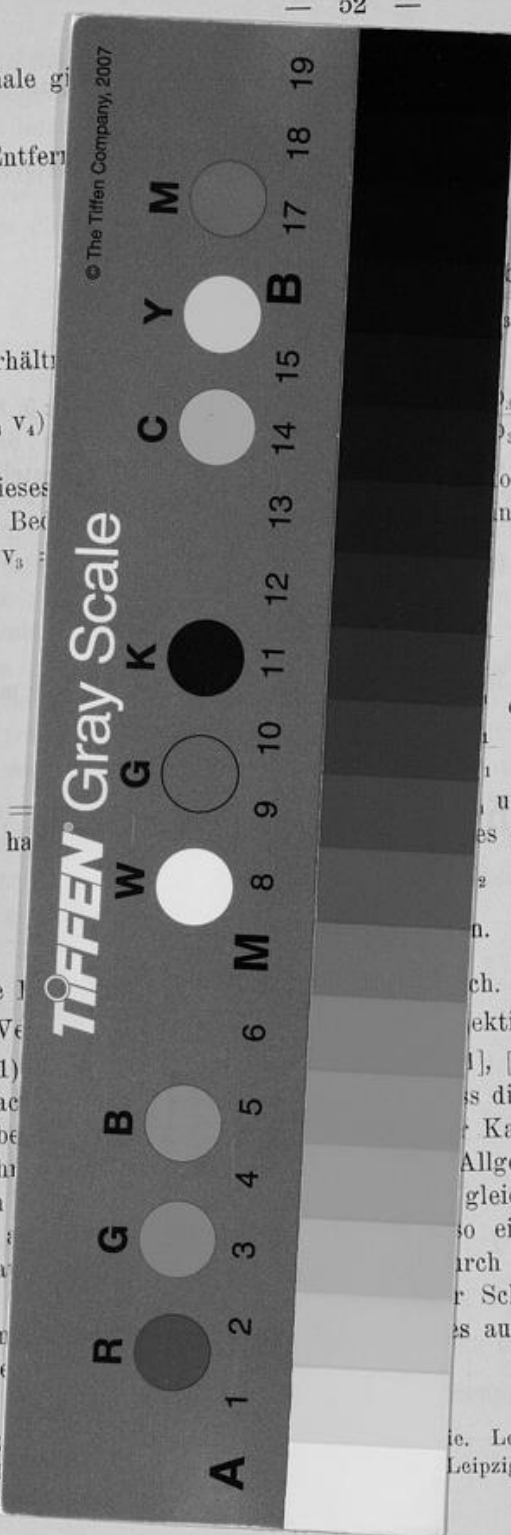
dinatenebenen

Millersche Ge

*) E

**) M

Krystallographi



ors an:

v_1 ist

$$\frac{b_1}{b_3^2 + b_3^2}$$

$$\frac{b_3 - a_3 b_1}{b_3 - a_3 b_2} : \frac{a_1 b_4 - a_4 b_1}{a_2 b_4 - a_4 b_2}$$

oren ein harmonisches Büschel.
anklige System auf folgende Art

$$\text{oder } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

und μ_2 ähnliche Ausdrücke. Nun
es soll

ch.
ektionen von 4 Punkten der Netz-
[1], [1 . 1 . 8], [1 . 1 . 2] und [3 . 7 . 6].
ss die zu diesen Punkten gehörigen,
Kanten ein harmonisches Büschel
Allgemein gilt: Das Doppelverhält-
gleich dem Doppeltverhältnis ihrer
so eine rationale Zahl. Dualistisch
urch eine Kante gehenden Flächen
r Schnittlinien mit einer der Koor-
es ausgedrückt. Dies ist das Gauss-

ie. Leipzig 1906. S. 101.

Leipzig 1904. S. 65. Liebisch, Geometrische

