Das verallgemeinerte
MALFATTISCHE PROBLEM
nebst
fünf demselben äquivalenten Aufgaben.[1]

Es handelt sich hier um folgende sechs Aufgaben:

1. Auf einer reellen Ebene oder Kugel sind drei Kreise a b c gegeben, die keinem Büschel angehören. Drei kein Büschel bildende Kreise u′ v′ w′ sind so zu zeichnen, dass die Kreise eines jeden der 4 Tripel u′ v′ w′, u′ b c, v′ c a, w′ a b sich paarweise berühren.

2. Auf einer Geraden oder Kreislinie, die auf einer reellen Ebene oder Kugel liegt, sind drei kohärente Punktreihen a b c gegeben, die keinem Büschel angehören. Drei damit kohärente, kein Büschel bildende Punktreihen u′ v′ w′ sind so herzustellen, dass die Punktreihen eines jeden der 4 Tripel u′ v′ w′, u′ b c, v′ c a, w′ a b sich paarweise berühren.

3. Auf einer reellen Ebene oder Kugel sind drei kohärente Punktfelder a b c gegeben, die keinem Büschel angehören. Drei damit kohärente, kein Büschel bildende Punktfelder u′ v′ w′ sind so herzustellen, dass die Punktfelder eines jeden der 4 Tripel u′ v′ w′, u′ b c, v′ c a, w′ a b sich paarweise berühren.

4. Auf einer reellen Ebene oder Kugel sind drei kein Büschel bildende Kreise a b c und drei sich paarweise berührende Kreise u v w gegeben, die gleichfalls keinem Büschel angehören. Ein a b c inverses Kreistripel x y z ist so zu zeichnen, dass die Kreise eines jeden der 3 Tripel x v w, y w u, z u v sich paarweise berühren.[2]

---

[1] Ausführliche bis 1883 reichende Litteraturangaben über den Gegenstand liefert Sachs in der Beilage zum Jahresberichte (1884-85) des Realgymnasiums Durlach. Seitdem sind diesbezügliche Abhandlungen noch von Nakoneczny im Jahresberichte (1884-85) des Gymnasiums Stanislawow, von C. Neumann im Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-Phys. Cl., Bd. 41, und von C. Davids im Archiv f. Math. u. Phys., Jahrgang 1895, erschienen.

[2] Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall der folgenden: „Zu n ($n > 2$) gegebenen Kreisen $K_1 K_2 K_3 \ldots K_n$, von denen jeder zwei ihm als Nachbarn zugeordnete berührt, ohne mit ihnen ein Büschel zu bilden, n Kreise $X_1 X_2 X_3 \ldots X_n$ so zu zeichnen, dass die Kreise eines jeden der Tripel $K_1 K_2 X_3$, $K_2 K_3 X_4$, $K_3 K_4 X_5 \ldots K_{n-1} K_n X_1$, $K_n K_1 X_2$ sich paarweise berühren und die Kreise der Paare $X_1 X_2$, $X_2 X_n$, $X_3 X_4 \ldots X_{n-1} X_n$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Auf einer Geraden oder Kreislinie, die auf einer reellen Ebene oder Kugel liegt, sind drei kohärente kein Büschel bildende Punktreihen a b c und drei kohärente sich paarweise berührende Punktreihen u v w gegeben, die gleichfalls keinem Büschel angehören. Ein zu a b c projektives und mit u v w kohärentes Punktreihentripel x y z ist so herzustellen, dass die Punktreihen eines jeden der 3 Tripel x v w, y w u, z u v sich paarweise berühren.

6. Auf einer reellen Ebene oder Kugel sind drei kohärente kein Büschel bildende Punktfelder a b c und drei kohärente sich paarweise berührende Punktfelder u v w gegeben, die gleichfalls keinem Büschel angehören. Ein zu a b c inverses und mit u v w kohärentes Punktfeldertripel x y z ist so herzustellen, dass die Punktfelder eines jeden der 3 Tripel x v w, y w u, z u v sich paarweise berühren.

7. Anmerkung. Diese 6 Aufgaben sind, wie gezeigt werden wird, im folgenden Sinne äquivalent. Jede Lösung irgend einer von ihnen liefert stets eine Lösung jeder der fünf übrigen, wenn bei 1 und 4 auch imaginäre Kreise, bei 2 und 5 auch imaginäre projektive Beziehungen und bei 3 und 6 nur reelle Kreisverwandtschaften zugelassen werden. Zunächst werden die Aufgaben 1 und 4 unter Vermeidung des Imaginären gelöst. Durch das dabei eingeschlagene Verfahren gelangt man, ohne jemals auf Imaginäres zu stossen, sicher, ohne auf Abwege zu geraten, zu allen reellen Lösungen. Dadurch wird auch einem Mangel abgeholfen, der der berühmten Steiner'schen Lösung des verallgemeinerten Malfattischen Problems anhaftet. Folgt man nämlich Steiners Anweisungen, so weiss man während des Konstruierens oft nicht, ob der eingeschlagene, sich vielfach verzweigende Weg zu einer reellen oder imaginären Lösung, und ob er, was noch schlimmer ist, überhaupt zum Ziele führt. Thatsächlich liefert die Steiner'sche Konstruktion nebst den richtigen auch viele falsche Lösungen. Die zweite Hälfte der Arbeit enthält die allgemeine, auch für imaginäre Gebilde geltende Lösung der 6 obigen Aufgaben. Die dazu nötigen Sätze werden analytisch (durch Rechnung mit Doppelverhältnissen) bewiesen. Gleichwohl ist die Konstruktion rein geometrisch; dieselbe kommt nämlich auf die Aufstellung von 7 projektiven Punktreihen und auf die Bestimmung der Doppelpunkte der von der ersten und siebenten Reihe gebildeten Involution hinaus. Diese allgemeine Lösung wird hier unter anderm aus dem Grunde geliefert, um an einem geeigneten Beispiele zu zeigen, dass sich bei Konstruktionsaufgaben auch die imaginären Lösungen verhältnismässig leicht durch wirkliches Zeichnen herstellen lassen.

$X_n X_1$ sich bezüglich unter den gegebenen Winkeln $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n$ schneiden." Die Lösung der so verallgemeinerten Aufgabe bietet im wesentlichen keine grösseren Schwierigkeiten als die der obigen dar. In dem Falle, dass keines der n Kreistripel ein Büschel bildet, hat die Aufgabe, wenn der gegebene Kranz aus 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ... n Kreisen besteht, bezüglich 128, 512, 2048, 8192, 32 768, 131 072, 524 288, 2 097 152 ... 2^{2n+1} Lösungen. Bei reellen Winkeln $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n$ sind diese Lösungen sämtlich reell, wenn die Anzahl der äusseren Berührungen bei dem Kranze eine ungerade ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hilfssätze.

8. Sind 6 reelle Kreise u v w x y z so gelegen, dass die Kreise der Paare v w, w u, u v, x v, y w, z u, x w, y u, z v sich bezüglich in durchweg von einander verschiedenen Punkten $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ berühren und sind r s t diejenigen Potenzkreise von y z, z x, x y, die u v w bezüglich rechtwinklig schneiden, so wird 1. entweder bei keinem oder bei zweien der Würfe $\alpha\beta\lambda\rho$, $\beta\gamma\mu\sigma$, $\gamma\alpha\varkappa\tau$ das erste Punktepaar durch das letzte getrennt und sind 2. die Kreise r s t durchweg reell und bilden 3. ein Büschel.

Beweis. (Fig. 1). 1. Die Punkte jedes der drei Paare $\varkappa\rho$, $\lambda\sigma$, $\mu\tau$ liegen offenbar entweder beide innerhalb oder beide ausserhalb des durch $\alpha\beta\gamma$ gehenden Kreises (s. auch Fig. 12). Von den 6 Punkten $\rho\lambda$, $\sigma\mu$, $\tau\varkappa$ befinden sich mithin stets eine gerade Anzahl sowohl innerhalb als auch ausserhalb des Kreises $\alpha\beta\gamma$. Daraus ergiebt sich sofort die Behauptung 1. 2. Berühren sich drei reelle Kreise paarweise, so liegen stets zwei beliebige dieser Kreise auf derselben Seite des dritten, d. h. es befinden sich, abgesehen von den 2 betreffenden Berührungspunkten, alle Punkte derselben entweder innerhalb oder ausserhalb des dritten. Auf der nämlichen Seite von u liegen demnach die Kreise jedes der 3 Paare z v, v w, w y. Mithin liegen die 4 Kreise z v w y und damit auch die 2 Kreise z y auf derselben Seite des sie berührenden Kreises u. Daraus folgt, dass r reell ist. [Verwandelt man durch eine geeignete Inversion die aus den Kreisen y z u bestehende Figur derart, dass u zu einer Geraden wird, so muss dann u eine gemeinschaftliche äussere Tangente der Kreise y und z sein und als solche von einem reellen Potenzkreise r von y z rechtwinklig getroffen werden.] Ebenso zeigt man, dass auch die Potenzkreise s und t reell sind. 3. Berühren sich drei reelle Kreise paarweise, so ist bei jeder Lage derselben die Anzahl der äusseren Berührungen eine ungerade. Darnach ist bei jedem der 4 Punkttripel 1. $\alpha\varkappa\rho$, 2. $\beta\lambda\sigma$, 3. $\gamma\mu\tau$, 4. $\alpha\beta\gamma$ die Anzahl der dabei vorkommenden äusseren Berührungen eine ungerade. Aus 1., 2., 3. folgt, dass an den 9 Berührungspunkten $\alpha\beta\gamma\varkappa\rho\lambda\sigma\mu\tau$ die äusseren Berührungen in ungerader Anzahl vorkommen. Daraus und aus 4. ergiebt sich, dass die Anzahl der äusseren Berührungen bei den 6 Punkten $\varkappa\rho\lambda\sigma\mu\tau$ eine gerade ist. Mithin bilden r s t ein Kreisbüschel. Es gilt nämlich, wie leicht zu sehen, folgendes Kriterium: „Sind x y z drei beliebige reelle Kreise einer Ebene oder Kugel, r s t reelle Potenzkreise von y z, z x, x y und u v w drei reelle Kreise, die bezüglich y z, z x, x y berühren und r s t rechtwinklig schneiden, so gehören die Potenzkreise einem Büschel an oder nicht, je nachdem unter den 6 vorkommenden Berührungen die Anzahl der äusseren eine gerade oder ungerade ist".

9. Folgerung. (Fig. 6). Sind 7 reelle Kreise u v w x′ y′ z′ x″ so gelegen, dass sich die Kreise der Paare v w, w u, u v, x′ v, y′ w, z′ u, x′ w, y′ u, z′ v, x″ v, x″ w bezüglich in den Punkten $\alpha\beta\gamma\varkappa'\lambda'\mu'\rho'\sigma'\tau'\varkappa''\rho''$ berühren und dass ausserdem entweder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bei keinem oder bei zweien der Würfe $\alpha\beta\lambda'\rho'$, $\beta\gamma\mu'\sigma'$, $\gamma\alpha\varkappa''\tau'$ des erste Punktepaar das letzte trennt, so wird dann und nur dann das Punktepaar $\gamma\alpha$ durch das Punktepaar $\varkappa'\varkappa''$ nicht getrennt.

10. Sind bei 6 reellen Kreisen a b c x y z die Kreise d e f r s t bezüglich reelle Potenzkreise der Paare b c, c a, a b, y z, z x, x y, gehören ausserdem sowohl d e f als auch r s t je einem Kreisbüschel an, und lassen sich drei Inversionen so angeben, dass durch sie die Kreistripel b c d, c a e, a b f der Reihe nach in die Tripel y z r, z x s, x y t übergehen, so giebt es dann und nur dann eine vierte Inversion, die das ganze Tripel a b c nebst seinen Potenzkreisen d e f auf einmal in das Tripel x y z nebst dessen Potenzkreisen r s t überführt. Dann ist also a b c d e f $\curlywedge$ x y z r s t.

Der Beweis ist leicht zu führen.

11. Ist f ein reeller Potenzkreis zweier reellen sich nicht berührenden Kreise a b und sind J J', A D, B E so angeordnete Schnittpunktepaare von f a b mit einem beliebigen reellen zu f a b orthogonalen Kreise m, dass A B und D E zwei Paare konjugierter Pole von f sind, so haben die 4 Würfe A E B J, B D A J, D B E J', E A D J' einen und denselben Wert ε und die 4 Würfe A E B J', B D A J', D B E J, E A D J gleichfalls einen und denselben dem früheren entgegengesetzt gleichen Wert $-\varepsilon$. Andere nach demselben Kombinationsgesetze gebildete Würfe ausser den 8 obigen giebt es hier nicht. Variiert der Orthogonalkreis m, so bleiben die Werte der neuen entsprechenden Würfe unverändert. In diesem Sinne giebt es zu zwei Kreisen a b und einem Potenzkreise f derselben zwei und nur zwei Wurfwerte ε und $-\varepsilon$. Dieselben sind reell und von o oder ∞ oder 1 oder -1 verschieden. — Schneiden sich die Kreise a und b in reellen Punkten, so findet bei keinem der 8 Würfe eine Trennung der aus den jedesmaligen 2 ersten und 2 letzten Punkten gebildeten Paare statt. — Haben aber die Kreise a und b keinen reellen Punkt gemein, so tritt diese Trennung ein oder nicht, je nachdem der betreffende Wurfwert positiv oder negativ ist.

Beweis. (Fig. 2, 3, 4, 5). Als bekannt darf hier das Bestehen der 3 Punktinvolutionen 1. A D . B E. J J', 2. A B . D E . J^2 . J'^2, 3. A E . B D . J J' angenommen werden. Aus diesen Involutionen ergeben sich die projektiven Beziehungen A E B J $\curlywedge$ B D A J $\curlywedge$ D B E J' $\curlywedge$ E A D J' und A E B J' $\curlywedge$ B D A J' $\curlywedge$ D B E J $\curlywedge$ E A D J. Nun ist nach Möbius (A E B J) . (A J B J') . (A J' B E) = 1. Da aber wegen der 2. Involution (A J B J') = -1 ist, so ist, falls (A E B J) = ε gesetzt wird, (A E B J') = $-\varepsilon$. — Tritt an Stelle von m ein anderer Orthogonalkreis m_0 mit den analog bezeichneten Schnittpunkten J_0 J_0', A_0 D_0, B_0 E_0, so sind die Punktepaare A A_0, B B_0, D D_0, J J_0, J' J_0' offenbar konjugierte Pole eines der beiden Potenzkreise von m und m_0. Es ist daher A_0 B_0 D_0 E_0 J_0 J_0' $\curlywedge$ A B D E J J'. Die Werte der entsprechenden neuen Würfe stimmen mithin mit denen der früheren überein. — Es ist $(A E B J)^2$. (A D B E) = (A E B J) . (B D A J) . (A D B E) = (A E B J) . (A J B D) (A D B E) = 1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(nach Möbius), oder $(A\,E\,B\,J)^2 = (A\,E\,B\,D)$, oder $\varepsilon = \pm\sqrt{(A\,E\,B\,D)}$. Da die 4 Punkte A B D E auf einem reellen Kreise (m) liegen, selbst reell und stets von einander verschieden sind und die Punktepaare A B und D E sich nicht trennen, so ist $(A\,E\,B\,D)$ stets reell, von o oder ∞ oder 1 verschieden und positiv. Mithin ist ε reell und von o oder ∞ oder ± 1 stets verschieden. — Aus $(A\,E\,B\,D) = \varepsilon^2$, $(A\,E\,B\,J) = \varepsilon$, $(A\,E\,B\,J') = -\varepsilon$ folgt $(A\,B\,E\,D) = 1-\varepsilon^2$, $(A\,B\,E\,J) = 1-\varepsilon$, $(A\,B\,E\,J') = 1+\varepsilon$. — Schneiden sich die Kreise a und b in reellen Punkten, so wird A E durch B D nicht getrennt. Dann ist also $(A\,B\,E\,D)$ und auch $1-\varepsilon^2$ positiv, oder $\varepsilon^2 < 1$, oder sowohl $1-\varepsilon$ als auch $1+\varepsilon$ und damit sowohl $(A\,B\,E\,J)$ als auch $(A\,B\,E\,J')$ positiv. Dann trennt also A E weder B J noch B J'. — Haben dagegen a und b keinen reellen Punkt gemein, so wird A E durch B D getrennt. Dann ist also $(A\,B\,E\,D)$ und auch $1-\varepsilon^2$ negativ, oder $\varepsilon^2 > 1$ oder entweder $1-\varepsilon$ oder $1+\varepsilon$ und entweder $(A\,B\,E\,J)$ oder $(A\,B\,E\,J')$ negativ und der andere Wert positiv. Dann trennt also A E von den zwei Paaren B J und B J' das eine, nicht aber das andere.

12. (Zusatz.) Berühren sich 2 reelle Kreise a und b und ist f derjenige Potenzkreis derselben, der nicht in einen Nullkreis ausartet, so soll A E B J nur dann ein zu a b f gehöriger Wurf heissen, wenn seine 4 Punkte sämtlich von einander verschieden sind. Es sind dann A E B J stets 4 harmonische Punkte, so dass $\varepsilon = (A\,E\,B\,J) = -1$ ist.

13. Sind u v w x y t a b f 9 derartige reelle Kreise, dass die Paare v w, w u, u v, x v, y w, x w, y u sich bezüglich in den Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa\,\lambda\,\rho\,\sigma$ berühren, t und f Potenzkreise von x y und a b sind und t den Kreis w rechtwinklig schneidet, und sind A E B J und A E B J' zwei zu a b f gehörige Würfe (S. 11 und 12), so sind die Kreistripel x y t und a b f invers, falls ausserdem noch der Wurf $\alpha\,\beta\,\lambda\,\rho$ entweder zu A E B J oder A E B J' projektiv ist, und ist umgekehrt $\alpha\,\beta\,\lambda\,\rho$ entweder zu A E B J oder A E B J' projektiv, falls ausserdem noch die Kreistripel x y t und a b f invers sind.

Beweis. (Fig. 2 und 7). Sämtliche Kreise mögen auf einer Kugel liegen.[1] Diejenigen Winkel, unter denen die Radien dieser Kreise vom Kugelzentrum aus erscheinen, mögen der Reihe nach gleichfalls u v w x y etc. heissen. Der entsprechende Winkel für die sphärische Centrale der Kreise x y, die diese Kreise und t in den Punktepaaren $A_1\,D_1$, $B_1\,E_1$ und $J_1\,J_1'$ schneiden möge, sei e. Die Punkte seien dabei so angeordnet, dass $A_1\,B_1$ und $D_1\,E_1$ Paare konjugierter Pole des Kreises t sind. Bilden die nach den Punkten ρ und λ gehenden Radien des Kreises w den Winkel $(\rho\,w\,\lambda)$ mit einander, so ist nach bekannten Formeln der sphärischen

[1] Wird die Figur in einer Ebene angenommen, so wird der Beweis noch einfacher. Die II analoge Hauptformel lautet dann: $\overline{\rho\lambda}^2 = \frac{2xw}{x+w}\cdot\frac{2yw}{y+w}\,(A_1\,E_1\,B_1\,J_1)^2 = \frac{2xw}{x+w}\cdot\frac{2yw}{y+w}\,(A_1\,E_1\,B_1\,J_1')^2$, wenn dabei x, y, w Radien sind (Fig. 7). Aus der wohl ohne weiteres verständlichen Figur 8 geht der Satz beinahe ohne jegliche Rechnung hervor.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Trigonometrie $\sin^2\frac{1}{2}(\rho\ w\ \lambda) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\rho\lambda)}{\sin^2 w} = \frac{\sin\frac{1}{2}(e+x-y)\sin\frac{1}{2}(e-x+y)}{\sin(x+w)\sin(y+w)}$, oder

I. $\sin^2\frac{1}{2}(\rho\lambda) = \frac{\sin x \sin w}{\sin(x+w)} \cdot \frac{\sin y \sin w}{\sin(y+w)} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(e+x-y)\sin\frac{1}{2}(e-x+y)}{\sin x \ . \ \sin y.}$ Nun ist aber

$\sphericalangle\, e+x-y = B_1 D_1$, $\sphericalangle\, e+y-x = A_1 E_1$, $\sphericalangle\, x = \frac{1}{2}(D_1 A_1)$, $\sphericalangle\, y = \frac{1}{2}(E_1 B_1)$.

Folglich ist $\frac{\sin\frac{1}{2}(e+x-y)\ \sin\frac{1}{2}(e-x+y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sin\frac{1}{2}(D_1 B_1)\ \sin\frac{1}{2}(A_1 E_1)}{\sin\frac{1}{2}(A_1 D_1)\ \sin\frac{1}{2}(E_1 B_1)}$

$=(A_1 E_1 B_1 D_1)$. Dieses Doppelverhältnis ist aber (nach 11, Beweis) gleich $(A_1 E_1 B_1 J_1)^2$

$=(A_1 E_1 B_1 J_1')^2$. Mithin ist II. $\sin^2\frac{1}{2}(\rho\lambda) = \frac{\sin x \sin w}{\sin(x+w)} \cdot \frac{\sin y \sin w}{\sin(y+w)} \cdot (A_1 E_1 B_1 J_1)^2$

$= \frac{\sin x \sin w}{\sin(x+w)} \cdot \frac{\sin y \sin w}{\sin(y+w)} (A_1 E_1 B_1 J_1')^2$. Wendet man die Formel I bei den Kreistripeln x v w, v u w, u y w an und berücksichtigt man, dass die Kreispaare v x, v u, u y sich berühren, so erhält man III. $\sin^2\frac{1}{2}(\rho\alpha) = \frac{\sin x \sin w}{\sin(x+w)} \cdot \frac{\sin v \sin w}{\sin(v+w)}$,

IV. $\sin^2\frac{1}{2}(\alpha\beta) = \frac{\sin v \sin w}{\sin(v+w)} \cdot \frac{\sin u \sin w}{\sin(u+w)}$, V. $\sin^2\frac{1}{2}(\beta\lambda) = \frac{\sin u \sin w}{\sin(u+w)} \cdot \frac{\sin y \sin w}{\sin(y+w)}$.

Aus II bis V folgt $(\alpha\beta\lambda\rho)^2 = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha\beta)\ \sin^2\frac{1}{2}(\lambda\rho)}{\sin^2\frac{1}{2}(\beta\lambda)\ \sin^2\frac{1}{2}(\rho\alpha)} = (A_1 E_1 B_1 J_1)^2$

$= (A_1 E_1 B_1 J_1')^2$. Es ist also entweder VI. $(\alpha\beta\lambda\rho) = (A_1 E_1 B_1 J_1)$ oder VII. $(\alpha\beta\lambda\rho)$ $=(A_1 E_1 B_1 J_1')$. Wird nun ferner VIII. $\alpha\beta\lambda\rho \curlywedge A E B J$ vorausgesetzt, so ist entweder X. $A E B J \curlywedge A_1 E_1 B_1 J_1$ oder XI. $A E B J \curlywedge A_1 E_1 B_1 J_1'$. Gilt X, so folgt aus dieser Projektivität und den Involutionen $A D . B E . J J'$, $A B . D E . J^2 . J'^2$ und $A_1 D_1 . B_1 E_1 . J_1 J_1'$, $A_1 B_1 . D_1 E_1 . J_1^2 . J_1'^2$ die Beziehung $A D B E J J' \curlywedge$ $A_1 D_1 B_1 E_1 J_1 J_1'$. Von diesen Punkten liegen die 6 ersten und 6 letzten bezüglich auf zwei Kreisen m und m_1. Setzt man zwei Punktfelder dadurch in direkt inverse Beziehung zu einander, dass man den Punkten A D B die Punkte $A_1 D_1 B_1$ zuordnet, so entsprechen sich m und m_1 und jene 6 Punkte von m entsprechen der Reihe nach jenen 6 Punkten von m_1. Diejenigen Kreise, die m in den Punktepaaren A D, B E, J J' rechtwinklig schneiden, müssen offenbar denjenigen Kreisen entsprechen, die durch die entsprechenden Punktepaare $A_1 D_1$, $D_1 E_1$, $J_1 J_1'$ gehen und zu dem entsprechenden Kreise m_1 rechtwinklig sind. Es müssen also die Kreistripel a b f und x y t invers sein. Gilt nicht X, sondern XI, so ist der Beweis der nämliche, nur hat man J_1' mit J_1 zu vertauschen. — Wird umgekehrt nicht VIII vorausgesetzt, sondern a b f $\curlywedge$ x y t angenommen, so wird damit gleichzeitig entweder $A E B J \curlywedge$ $A_1 E_1 B_1 J_1$ oder $A E B J \curlywedge A_1 E_1 B_1 J_1'$ als geltend angenommen. Hieraus und aus VI und VII folgt sofort, dass $\alpha\beta\lambda\rho$ entweder zu A E B J oder zu A E B J' projektiv ist.

14. Berühren sich zwei feste Kreise und werden beide von einem veränderlichen nicht zu demselben Büschel gehörigen Kreise berührt, so geschieht dies in zwei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

projektiven Punktreihen, welche den Berührungspunkt der festen Kreise zu einem zweifachen Doppelpunkte haben.

Dieser Satz ist allgemein bekannt.

---

15. I. Die Aufgabe 4 ist für den Fall zu lösen, dass von den 9 Kreisen ausserdem noch vorausgesetzt, respektive verlangt wird, dass sie durchweg reell sind und keine drei unter ihnen ein Büschel bilden.

II. Analysis. (Fig. 1 und 10). Bei den Kreispaaren v w, w u, u v, x v, x w, y w, y u, z u, z v seien $\alpha\beta\gamma\varkappa\rho\lambda\sigma\mu\tau$ die Berührungspunkte und bei y z, z x, x y die Kreise r s t diejenigen Potenzkreise, welche u, v, w bezüglich rechtwinklig schneiden. Die Punkte $\alpha\beta\gamma\varkappa\rho\lambda\sigma\mu\tau$ sind durchweg reell und liegen nach 8 so, dass entweder bei keinem oder bei zweien der Würfe $\alpha\beta\lambda\rho$, $\beta\gamma\mu\sigma$, $\gamma\alpha\varkappa\tau$ das jedesmalige erste Punktepaar das zweite trennt. Gleichfalls nach 8 sind ferner die Potenzkreise r s t reell und gehören einem Büschel an. Nach Voraussetzung ist hier x y z $\curlywedge$ a b c. Entsprechen nun bei der dadurch festgelegten Kreisverwandtschaft den Kreisen r s t die Kreise d e f, ist also x y z r s t $\curlywedge$ a b c d e f, so sind d e f reelle ein Büschel bildende Potenzkreise von b c, c a, a b. Werden die Kreise der 3 Büschel b c d; c a e; a b f von je einem beliebigen Kreise orthogonal bezüglich (s. Fig. 10) in den Punktepaaren $B_1 E_1$, $C_1 F_1$, $G G'$; $C_2 F_2$, $A_2 D_2$, $H H'$; $A_3 D_3$, $B_3 E_3$, $J J'$ geschnitten und werden die Punkte so angeordnet, dass $B_1 C_1$, $E_1 F_1$; $C_2 A_2$, $F_2 D_2$; $A_3 B_3$, $D_3 E_3$ bei den Kreisen d; e; f bezüglich Paare konjugierter Pole sind, so ist nach 13 entweder $\alpha\beta\lambda\rho \curlywedge A_3 E_3 B_3 J$ oder $\alpha\beta\lambda\rho \curlywedge A_3 E_3 B_3 J'$. Hier sei $\alpha\beta\lambda\rho \curlywedge A_3 E_3 B_3 J$ und analog $\beta\gamma\mu\sigma \curlywedge B_1 F_1 C_1 G$ und $\gamma\alpha\varkappa\tau \curlywedge C_2 D_2 A_2 H$. Wegen der oben angegebenen Lagenbeziehung der Punkte bei den Würfen $\rho\lambda\alpha\beta$, $\sigma\mu\beta\gamma$, $\tau\varkappa\gamma\alpha$, die durch Inversion unzerstörbar ist, trennt auch entweder bei keinem oder bei zweien der Würfe $A_3 E_3 B_3 J$; $B_1 F_1 C_1 G$; $C_2 D_2 A_2 H$ das erste Punktepaar das letzte. (Für den Fall $\alpha\beta\lambda\rho \curlywedge A_3 E_3 B_3 J'$ ist das Resultat das nämliche.) Denkt man sich auf v einen beliebigen reellen Punkt $\varkappa'$ und 4 Kreise x' y' z' x'' so gezeichnet (Fig. 9), dass sie die Kreispaare v w, w u, u v, v w bezüglich in derartigen Punkten $\varkappa'\rho'$, $\lambda'\sigma'$, $\mu'\tau'$, $\varkappa''\rho''$ berühren, dass $\alpha\beta\lambda'\rho' \curlywedge \alpha\beta\lambda\rho$, $\beta\gamma\mu'\sigma' \curlywedge \beta\gamma\mu\sigma$, $\gamma\alpha\varkappa''\tau' \curlywedge \gamma\alpha\varkappa\tau$, so sind die Punkte $\rho'\lambda'\sigma'\mu'\tau'\varkappa''\rho''$ und damit auch die Kreise x' y' z' x'' durchweg reell. Aus den 6 letzten Projektivitäten folgt $\alpha\beta\lambda'\rho' \curlywedge A_3 E_3 B_3 J$, $\beta\gamma\mu'\sigma' \curlywedge B_1 F_1 C_1 G$, $\gamma\alpha\varkappa''\tau' \curlywedge C_2 D_2 A_2 H$. Der Kreis x'' ist im allgemeinen von x' verschieden. Denkt man sich aber x' und damit auch y' z' x'' beweglich, so fällt zuweilen x'' auf x'. So tritt dies ein, wenn x' mit x identisch ist, indem dann y' auf y und z' auf z fällt. In diesem Falle liefern aber die Kreise x' y' z' eine Lösung der Aufgabe. Sollen also die Kreise x' y' z' x'' eine Lösung liefern, so müssen die Kreise x' x'' und damit auch die Punkte $\varkappa'\varkappa''$ auf einander fallen. Unsere Aufgabe ist also gelöst, wenn sich die Abhängigkeit der von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ erzeugten Punktreihen bestimmen und jeder Doppelpunkt derselben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

konstruieren lässt. Nach 14 ist $\varkappa' \curlywedge \rho'$, $\lambda' \curlywedge \sigma'$, $\mu' \curlywedge \tau'$. Wegen $\alpha\,\beta\,\lambda'\,\rho' \curlywedge A_3\,E_3\,B_3\,J$, $\beta\,\gamma\,\mu'\,\sigma' \curlywedge B_1\,F_1\,C_1\,G$, $\gamma\,\alpha\,\varkappa''\,\tau' \curlywedge C_2\,D_2\,A_2\,H$ ist ausserdem $\rho' \curlywedge \lambda'$, $\sigma' \curlywedge \mu'$, $\tau' \curlywedge \varkappa''$. Dabei haben diese drei Paare projektiver Reihen $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$, $\gamma\,\alpha$ bezüglich zu Doppelpunkten. Mithin ist $\varkappa' \curlywedge \rho' \curlywedge \lambda' \curlywedge \sigma' \curlywedge \mu' \curlywedge \tau' \curlywedge \varkappa''$. Es sind also die von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ erzeugten Reihen projektiv. Lässt man $\varkappa'$ nach α gelangen, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der 6 letzten Projektivitäten, dass dann $\varkappa''$ auf γ fällt. Gelangt umgekehrt $\varkappa'$ nach γ, so fällt $\varkappa''$ auf α. Die von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ beschriebenen projektiven Punktreihen bilden daher eine Involution, bei der $\alpha\,\gamma$ ein Paar konjugierter Punkte und $\varkappa$ ein Doppelpunkt ist. — Es sei hier noch auf den Umstand hingewiesen, dass, wie gezeigt wurde, sämtliche bei dieser Analysis benutzten Punkte und Kreise reell sein müssen, wenn die Lösung reell sein soll.

III. Konstruktion. (Fig. 9 und 10). Stelle zu den Kreispaaren b c, c a, a b drei reelle, einem Büschel angehörige Potenzkreise d e f her (Fig. 10), zeichne drei reelle Kreise so, dass sie die Kreise der drei Büschel b c d, c a e, a b f rechtwinklig in den Punktepaaren $B_1\,E_1$, $C_1\,F_1$, $G\,G'$; $C_2\,F_2$, $A_2\,D_2$, $H\,H'$; $A_3\,D_3$, $B_3\,E_3$, $J\,J'$ bezüglich schneiden, wähle dabei die Bezeichnung der Schnittpunkte derart, dass $B_1\,C_1$, $E_1\,F_1$; $C_2\,A_2$, $F_2\,D_2$; $A_3\,B_3$, $D_3\,E_3$ bezüglich Paare konjugierter Pole der Kreise d, e, f sind, und dass ausserdem entweder bei keinem oder bei zweien der 3 Würfe $A_3\,E_3\,B_3\,J$, $B_1\,F_1\,C_1\,G$, $C_2\,D_2\,A_2\,H$ das erste Punktepaar durch das letzte getrennt wird, lege durch α einen beliebigen reellen die Kreise v w rechtwinklig in $\varkappa'$ und ρ' schneidenden Kreis (Fig. 9), bestimme auf dem Kreise w einen Punkt λ' der Projektivität $\alpha\,\beta\,\lambda'\,\rho' \curlywedge A_3\,E_3\,B_3\,J$ gemäss, lege durch β und λ' einen u in σ' rechtwinklig schneidenden Kreis, bestimme auf u einen Punkt μ' der Beziehung $\beta\,\gamma\,\mu'\,\sigma' \curlywedge B_1\,F_1\,C_1\,G$ entsprechend, lege durch γ und μ' einen v in τ' rechtwinklig schneidenden Kreis, bestimme auf w einen Punkt $\varkappa''$ so, dass $\gamma\,\alpha\,\varkappa''\,\tau' \curlywedge C_2\,D_2\,A_2\,H$, stelle einen Schnittpunkt $\varkappa$ des Kreises v mit derjenigen dazu gehörigen Polare her, die den Schnittpunkt der 2 Geraden $\gamma\,\alpha$ und $\varkappa'\,\varkappa''$ zum Pole hat, zeichne zu $\varkappa$ fünf Punkte $\rho\,\lambda\,\sigma\,\mu\,\tau$ in derselben Weise, wie zu $\varkappa'$ die Punkte $\rho'\,\lambda'\,\sigma'\,\mu'\,\tau'$ hergestellt wurden, und lege durch die Punktepaare $\varkappa\,\rho$, $\lambda\,\sigma$, $\mu\,\tau$ drei Kreise x, y, z, welche die Kreise $\alpha\,\varkappa\,\rho$, $\beta\,\lambda\,\sigma$, $\gamma\,\mu\,\tau$ bezüglich rechtwinklig schneiden. Die Kreise x, y, z sind die verlangten.

IV. Beweis. Die Punkte $A_2\,A_3\,B_3\,B_1\,C_1\,C_2\,D_2\,D_3\,E_3\,E_1\,F_1\,F_2\,G\,G'\,H\,H'\,J\,J'\,\varkappa'\,\rho'$ $\lambda'\,\sigma'\,\mu'\,\tau'\,\varkappa''\,\rho''$ sind nach Konstruktion durchweg reell. Da $\alpha\,\beta\,\lambda'\,\rho' \curlywedge A_3\,E_3\,B_3\,J$, $\beta\,\gamma\,\mu'\,\sigma' \curlywedge B_1\,F_1\,C_1\,G$, $\gamma\,\alpha\,\varkappa''\,\tau' \curlywedge C_2\,D_2\,A_2\,H$, so kommt den Punkten der Würfe $\alpha\,\beta\,\lambda'\,\rho'$, $\beta\,\gamma\,\mu'\,\sigma'$, $\gamma\,\alpha\,\varkappa''\,\tau'$ dieselbe durch Inversion unzerstörbare Lagenbeziehung zu, wie denen der ihnen entsprechenden Würfe $A_3\,E_3\,B_3\,J$, $B_1\,F_1\,C_1\,G$, $C_2\,D_2\,A_2\,H$. Es trennt also entweder bei keinem oder bei zweien dieser Würfe das erste Punktepaar das letzte. Mithin wird nach 9 das Punktepaar $\gamma\,\alpha$ durch das Punktepaar $\varkappa'\,\varkappa''$ auf dem Kreise v nicht getrennt. Der Schnittpunkt der Geraden $\gamma\,\alpha$ und $\varkappa'\,\varkappa''$ liegt demnach stets ausserhalb des Kreises v. Die Polare dieses Schnittpunktes rücksichtlich v trifft darum die Kreislinie v stets in reellen Punkten. Der Punkt $\varkappa$ ist mithin reell. Daraus ergiebt sich sofort, dass auch die Punkte $\rho\,\lambda\,\sigma\,\mu\,\tau$ und die Kreise x y z

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durchweg reell sind. — Da der Kreis $\alpha\,\varkappa\,\rho$ sowohl von x als auch von v in demselben Punkte $\varkappa$ rechtwinklig geschnitten wird, so berühren sich die Kreise x und v in $\varkappa$. Ebenso zeigt man, dass die Kreise der Paare x w, y w, y u, z u, z v sich bezüglich in ρ, λ, σ, μ, τ berühren. — Diejenigen Potenzkreise r, s, t von y z, z x, x y, die u, v, w bezüglich rechtwinklig schneiden, sind nach 8 reell und bilden ein Büschel (Fig. 1). — Denkt man sich den Punkt $\varkappa'$ auf dem Kreise v beweglich, so entstehen dann der Konstruktion nach folgende projektive Punktreihen: $\varkappa' \barwedge \rho' \barwedge \lambda' \barwedge \sigma' \barwedge \mu' \barwedge \tau' \barwedge \varkappa''$. Hieraus ergiebt sich sofort, dass dann $\varkappa'$ und $\varkappa''$ eine Involution erzeugen, die $\gamma\,\alpha$ zu einem Paar konjugierter Punkte hat. Mithin ist der Punkt $\varkappa$ nichts anderes als ein in gebräuchlicher Art konstruierter Doppelpunkt dieser Involution. Lässt man also $\varkappa'$ nach $\varkappa$ gelangen, so gelangt $\varkappa''$ ebenfalls nach $\varkappa$. Dabei sind $\varkappa'$ und $\varkappa''$ nicht nur als konjugierte Punkte dieser Involution, sondern auch als entsprechende Punkte bei den obigen, diese Involution hervorbringenden projektiven Reihen $\varkappa' \barwedge \rho' \barwedge \lambda' \barwedge \sigma' \barwedge \mu' \barwedge \tau' \barwedge \varkappa''$ anzusehen. Setzt man also $\varkappa' = \varkappa$, so wird $\rho' = \rho$, $\lambda' = \lambda$, $\sigma' = \sigma$, $\mu' = \mu$, $\tau' = \tau$, $\varkappa'' = \varkappa$. Mithin entsteht dann aus $\gamma\,\alpha\,\varkappa''\,\tau' \barwedge C_2\,D_2\,A_2\,H$ die Beziehung $\gamma\,\alpha\,\varkappa\,\tau \barwedge C_2\,D_2\,A_2\,H$. Da ausserdem nach Konstruktion $\alpha\,\beta\,\lambda\,\rho \barwedge A_3\,E_3\,B_3\,J$, $\beta\,\gamma\,\mu\,\sigma \barwedge B_1\,F_1\,C_1\,G$, so ist nach 13 y z r $\barwedge$ b c d, z x s $\barwedge$ c a e, x y t $\barwedge$ a b f. Da endlich, wie oben gezeigt wurde, die Potenzkreise r s t und d e f ausserdem noch je ein Büschel bilden, so sind nach 10 die Kreistripel x y z und a b c einander kreisverwandt. Da endlich die Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\rho\,\sigma$ durchweg von einander verschieden sind, so bildet keines der Tripel x v w, y w u, z u v, u v w ein Kreisbüschel.

V. Determination. Aus Analysis und Beweis geht hervor, dass man auf die bei der Konstruktion befolgte Weise stets eine reelle Lösung erhält und ausserdem jede reelle Lösung ausnahmslos erhalten kann. Es erübrigt daher nur noch, die Anzahl und Art der reellen Lösungen festzusetzen. Die I. Tabelle enthält hierzu die Resultate aller in Betracht kommenden 34 Fälle.

VI. Erläuterungen zur I. Tabelle. γ (oder γ'), unter a b stehend, giebt an, dass die Kreise a b keine reellen Schnittpunkte besitzen und durch c nicht getrennt (oder getrennt) werden, ferner C, dass a b zwei von einander verschiedene reelle Punkte gemein haben, ohne sich jedoch rechtwinklig zu schneiden, und R oder O, dass die Kreise orthogonal sind oder sich berühren. Gleichzeitig soll γ oder γ' oder C oder R oder 1 (im Falle O) den absoluten Werth von $(A_3\,E_3\,B_3\,J) = \sqrt{(A_3\,E_3\,B_3\,D_3)}$ bedeuten. Dann ist (nach 11, Beweis) $1 < \gamma < \infty$, $1 < \gamma' < \infty$, $O < C < 1$, jedoch C nicht gleich $1 : \sqrt{2}$. Von α, α', A, β, B soll Analoges gelten. Die unter b c, c a, a b stehenden Wurfwerte sind als unter sich gleich oder ungleich anzusehen, je nachdem sie mit demselben Buchstaben oder mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet sind. N giebt die Gesamtanzahl der reellen von einander verschiedenen Lösungen, und n die Anzahl der verschiedenen Lösungsgruppen an. Eine sogenannte mehrfache Lösung wird hier nur als e i n e gezählt. Zwei Lösungen sollen als derselben Gruppe oder als zwei verschiedenen Gruppen angehörig bezeichnet werden, je nachdem die ganze

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus u v w und den Kreisen x y z der einen Lösung bestehende Figur derjenigen invers oder nicht invers ist, die sich aus denselben Kreisen u v w und aus den Kreisen x′ y′ z′ der andern Lösung zusammensetzt. Die Zahlen 2, 4, 6, 12 geben an, wie viele Lösungen jede der daneben angegebenen Gruppen enthält.

VII. Kurze Ableitung der wichtigeren in der I. Tabelle angegebenen Resultate.

Nr. 1: A B C. Da je 2 der 3 Kreise a b c zwei reelle von einander verschiedene Punkte gemein haben, so gehören zu jedem der Kreispaare b c, c a, a b zwei reelle Potenzkreise $d\,d_1$, $e\,e_1$, $f\,f_1$. Diese lassen sich bekanntlich in 4 Tripel $d\,e\,f$, $d\,e_1\,f_1$, $e\,f_1\,d_1$, $f\,d_1\,e_1$ so anordnen, dass jedes Tripel ein Büschel bildet. Zu a b f gehören (nach 11, Beweis) zwei Würfe $A_3\,E_3\,B_3\,J$ und $A_3\,E_3\,B_3\,J'$ oder zwei Wurfwerte $+C$ und $-C$. Ebenso gehören je 2 Wurfwerte $+A$ und $-A$ und $+B$ und $-B$ zu b c d und c a e. Wendet man bei den Konstruktionen irgend eine der 8 Kombinationen $\pm A \pm B \pm C$ an, so erhält man (nach 11 und 9) stets eine hyperbolische von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gebildete Involution, also 8 . 2 oder 16 reelle Lösungen. Ebenso gehören zu $d\,e_1\,f_1$, $e\,f_1\,d_1$, $f\,d_1\,e_1$ je 16 reelle Lösungen. Damit sind alle möglichen Arten beim Konstruieren erschöpft. Es giebt also höchstens 64 reelle Lösungen. Es giebt aber auch nicht weniger Lösungen. Zunächst sind nämlich 2 Lösungen, die irgend eine der 32 von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ erzeugten Involutionen liefert, stets von einander verschieden, weil die Doppelpunkte der jedesmaligen Involution, die der Konstruktion nach niemals ausarten kann, stets von einander verschieden sind. Nach 11, Beweis, ist $C^2 = (A_3\,E_3\,B_3\,D_3)$. Wird $C_1^{\,2} = (A_3\,B_3\,E_3\,D_3)$ gesetzt, bedeutet also C_1 rücksichtlich $a\,b\,f_1$ dasselbe wie C in Bezug auf a b f, so ist wegen der Identität $(A_3\,B_3\,E_3\,D_3) + (A_3\,E_3\,B_3\,D_3) = 1$, $C_1^{\,2} + C^2 = 1$. Da ausserdem nach Annahme C^2 nicht gleich $\frac{1}{2}$ ist, so ist C_1 stets von C verschieden. Ebenso ist bei analoger Bedeutung A_1 von A und B_1 von B verschieden. Mithin sind keine 2 unter den bei der Konstruktion verwendeten 32 Wurfkombinationen $\pm A \pm B \pm C$, $\pm A \pm B_1 \pm C_1$, $\pm B \pm C_1 \pm A_1$, $\pm C \pm A_1 \pm B_1$ durchweg gleich. Somit können auch die Punkte $\varkappa\,\rho\,\lambda\,\sigma\,\mu\,\tau$ und die dazu gehörigen Kreise x y z, die zu irgend zweien dieser Kombinationen gehören, nicht durchweg übereinstimmen. Die oben angeführten 64 Lösungen sind mithin durchweg von einander verschieden: $N = 64$. Jede dieser Lösungen geht durch Inversion um den durch $\alpha\,\beta\,\gamma$ gehenden Orthogonalkreis t von u v w wieder in eine Lösung über. Zwei auf diese Art inverse Lösungen liefert jede der obigen 32 Involutionen. Dass dem so ist, geht schon daraus hervor, dass die Doppelpunkte $\varkappa\,\varkappa_0$ der betreffenden Involution durch das Paar konjugierter Punkte $\beta\,\gamma$ harmonisch getrennt werden und somit konjugierte Pole von t sind. Zwei Lösungen einer anderen Art können aber niemals kreisverwandt sein. Denn dann müssten auch die 2 zu den Lösungen gehörigen Wurfkombinationen, die, wie gezeigt wurde, stets von einander verschieden sind, in einander übergehen, was sich widerspricht. Hier giebt es also 64 reelle Lösungen, und dieselben bilden 32 zweigliedrige Gruppen.

Nr. 2: A B γ. Das Kreispaar a b besitzt keine reellen Schnittpunkte und daher nur einen reellen Potenzkreis f. Zur Konstruktion sind mithin nur 2 Potenzkreistripel

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d e f und d_1 e_1 f brauchbar. Von den zwei verfügbaren Wurfwerten $+\gamma$ und $-\gamma$ kann nur der eine, nämlich $-\gamma$ verwendet werden. Wählte man nämlich $+\gamma = (A_3\, E_3\, B_3\, J)$, so müsste nach 11 A_3 E_3 durch B_3 J und damit auch $\alpha\,\beta$ durch $\lambda'\,\rho'$ getrennt werden. Da ausserdem A und B stets zu Würfen gehören, bei denen eine derartige Trennung nicht stattfindet, so müsste nach 9 die von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gebildete Involution elliptisch sein, also keine reellen Doppelpunkte haben. Zu reellen Lösungen führen demnach nur die 8 Kombinationen $\pm A \pm B - \gamma$, $\pm A_1 \pm B_1 - \gamma$. $N = 8 \,.\, 2 = 16$.

Nr. 3: $\alpha\,\beta$ C. Die Kreispaare b c und c a enthalten nur je einen reellen Potenzkreis d und e. Verwendbar ist nur ein reelles Potenzkreistripel d e f. Zu reellen Lösungen führen nur die 4 Kombinationen $-\alpha - \beta \pm C$, $+\alpha + \beta \pm C$. $N = 4 \,.\, 2 = 8$.

Nr. 4: $\alpha\,\beta\,\gamma$. Die Kreispaare b c, c a, a b haben nur je einen reellen Potenzkreis d, e, f. Die Kreise d e f bilden ein Büschel, weil keiner der 3 Kreise a b c die beiden übrigen trennt. Verwendbar sind nur die 4 Kombinationen $-\alpha - \beta - \gamma$, $-\alpha + \beta + \gamma$, $+\alpha - \beta + \gamma$, $+\alpha + \beta - \gamma$. $N = 4 \,.\, 2 = 8$.

Nr. 5: $\alpha\,\beta\,\gamma'$. Vorhanden sind im ganzen nur 3 reelle Potenzkreise d e f_1. Diese bilden aber kein Büschel, da die Kreise a b durch den Kreis c getrennt werden. Es existiert kein verwendbares Potenzkreistripel. $N = 0$.

Nr. 9: A A C. Die Bestimmung von N ist wie bei Nr. 1 vorzunehmen. Da $B = A$, so ist b c $\curlywedge$ a c und nach 10 a b c $\curlywedge$ b a c (I). Gehen die Kreise x y z einer Lösung x y z $\curlywedge$ a b c (II) durch die Inversion u v w $\curlywedge$ v u w in die Kreise y_1 x_1 z_1 über, ist also u v w x y z $\curlywedge$ v u w y_1 x_1 z_1 (III), so ist $z_1 = z$ und x_1 y_1 z wieder eine Lösung. Da nämlich (s. Fig. 1) die Berührungspunkte $\mu\,\tau$ des Kreises z mit den Kreisen u v sich bei dieser Inversion wechselweise entsprechen, so ist z sein eigenes inverses Spiegelbild: $z_1 = z$. Ferner ist x_1 y_1 z $\curlywedge$ y x z (nach III) $\curlywedge$ b a c (nach II) $\curlywedge$ a b c (nach I). Mithin ist x_1 y_1 z $\curlywedge$ a b c. Da ausserdem aus III folgt, dass die Kreise x_1 y_1 z der Reihe nach die Kreispaare v w, w u, u v berühren, so bilden die Kreise x_1 y_1 z eine Lösung. Diese ist mit x y z identisch, wenn x y z durch eine der 8 Kombinationen $+A + A \pm C, -A - A \pm C, +A_1 - A_1 \pm C_1, -A_1 - A_1 \pm C$ zustande gekommen ist. Da nämlich durch die Inversion u v w $\curlywedge$ v u w jede dieser 8 Kombinationen in sich selbst übergeht, so müssen x y z und x_1 y_1 z Lösungen sein, die aus einer und derselben Involution hervorgehen. Wären diese Lösungen von einander verschieden, so müssten sie ausserdem noch (s. Nr. 1) durch die um den Orthogonalkreis t vorgenommene Inversion in einander übergehen. Die Inversion u v w $\curlywedge$ v u w ist offenbar gleichzeitig diejenige um w_0, den nicht ausartenden Potenzkreis von u und v. Es schneidet nun w_0 den Kreis t rechtwinklig. Läge nun $\varkappa$, der Berührungskreis von x und v, ausserhalb t, so müsste demselben bei der Inversion um t ein innerer Punkt von t entsprechen, während ihm bei der Inversion um w_0 ein äusserer Punkt von t, nämlich ρ zugeordnet wäre. Sowohl diese Annahme, als auch die, wenn man $\varkappa$ im Inneren von t sein liesse, führt auf einen Widerspruch. Bei jenen 8 Kombinationen ist also x_1 y_1 z mit x y z identisch. In diesem Falle ist also u v w x y z w_0 $\curlywedge$ v u w y x z w_0.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mithin ist dann der Potenzkreis von u v, nämlich w_0, gleichzeitig Potenzkreis von x y. Bei jeder der 12 Kombinationen $+A-A\pm C$, $+A_1-A_1\pm C$, $\pm A\pm A_1\pm C_1$ ist dagegen die Lösung $x_1 y_1 z$ stets von x y z verschieden und aus der letzten durch Inversion um t nicht zu erhalten, da durch die Inversion um w_0 diese Kombinationen in andere übergehen, nämlich bezüglich in $-A+A\pm C$, $-A_1+A_1\pm C$, $\pm A_1\pm A\pm C$. Hier giebt es also 64 Lösungen, die 8 zweigliedrigen und 12 viergliedrigen Gruppen angehören.

Nr. 10: A A γ. N wie bei Nr. 2. Ableitung einer Lösung $x_1 y_1 z$ aus einer Lösung x y z, durch die Inversion u v w $\curlywedge$ v u w, wie bei Nr. 9. Die Lösung $x_1 y_1 z$ ist mit x y z identisch bei jeder der 4 Kombinationen $+A+A-\gamma$, $-A-A-\gamma$, $+A_1+A_1-\gamma$, $-A_1-A_1-\gamma$ und von x y z verschieden bei jeder der 2 Kombinationen $+A-A-\gamma$, $+A_1-A_1-\gamma$. Hier giebt es 4 zweigliedrige und 2 viergliedrige Gruppen.

Nr. 11: $\alpha\,\alpha$ C. N wie bei Nr. 3. Durch die Inversion u v w $\curlywedge$ v u w geht hier wie bei Nr. 9 jede Lösung x y z in eine Lösung $x_1 y_1 z$ über. Zwei Lösungen derart x y z und $x_1 y_1 z$ sind hier stets identisch, da jede der 4 hier verwendbaren Kombinationen $-\alpha-\alpha\pm C$, $+\alpha+\alpha\pm C$ durch u v w $\curlywedge$ v u w in sich selbst übergeht. Hier giebt es 8 reelle Lösungen, die 4 zweigliedrigen Gruppen angehören.

Nr. 16: A A A. N lässt sich wie bei Nr. 1 bestimmen. Nicht nur durch u v w $\curlywedge$ v u w, sondern auch durch u v w $\curlywedge$ v w u geht jede Lösung x y z wieder in eine Lösung $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ über. Wegen A = B = C ist nämlich nicht nur a b c $\curlywedge$ b a c, sondern auch a b c $\curlywedge$ b c a $\curlywedge$ c a b. Werden nun zu einer Lösung x y z $\curlywedge$ a b c drei Kreise $x_2 y_2 z_2$ so bestimmt, dass u v w x y z $\curlywedge$ v w u $y_2 z_2 x_2$, so ist $x_2 y_2 z_2 \curlywedge$ z x y $\curlywedge$ c a b $\curlywedge$ a b c. Da die Kreise $x_2 y_2 z_2$ ausserdem der Reihe nach die Kreispaare v w, w u, u v berühren, so ist $x_2 y_2 z_2$ eine Lösung. — Jede Lösung geht bei den 2 Kombinationen $-A-A-A$, $+A+A+A$ sowohl durch u v w $\curlywedge$ v u w als auch durch u v w $\curlywedge$ v w u in sich selbst über, dagegen bei den 6 Kombinationen $-A-A+A$, $+A+A-A$, $-A_1-A_1\pm A$, $+A_1+A_1\pm A$ zwar durch die erste, nicht aber durch die zweite Inversion, und bei den 2 Kombinationen $\pm A+A_1-A_1$ weder durch die erste noch durch die zweite. Da ausserdem die Inversionen u v w $\curlywedge$ v w u, u v w $\curlywedge$ v u w, und die um den Orthogonalkreis t cyklisch sind, und zwar bezüglich mit den Cykluszahlen 3, 2, 2, so giebt es hier 64 Lösungen, die 2 zweigliedrigen, 6 sechsgliedrigen und 2 zwölfgliedrigen Gruppen angehören. — Sind $u_0 v_0 w_0$ die bezüglich zu u v w orthogonalen Potenzkreise von v w, w u, u v, so sind bei einer Lösung einer zweigliedrigen Gruppe dieselben gleichzeitig Potenzkreise von y z, z x, x y, so dass $u_0 = r$, $v_0 = s$, $w_0 = t$ und x y z r s t $\curlywedge$ y z x s t r $\curlywedge$ y x z s r t. Bei einer Lösung einer sechs- oder zwölfgliedrigen Gruppe stimmen dagegen die Potenzkreise $u_0 v_0 w_0$ und r s t nur in einem oder keinem Kreise überein.

Nr. 17: $\alpha\,\alpha\,\alpha$ (s. Nr. 4 und Nr. 16). Eine zu $-\alpha-\alpha-\alpha$ gehörige Lösung geht sowohl durch u v w $\curlywedge$ v u w als auch durch u v w $\curlywedge$ v w u in sich selbst über, und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine aus $+\alpha+\alpha-\alpha$ hervorgehende zwar durch die erste, nicht aber durch die zweite Inversion. Hier giebt es 8 Lösungen, die einer zweigliedrigen und einer sechsgliedrigen Gruppe angehören.

Nr. 18: R R C. Hier ist $(B_1 F_1 C_1 E_1) = \frac{1}{2}$. Mithin ist auch $(B_1 C_1 F_1 E_1) = \frac{1}{2}$. Hier ist also $A = A_1 (= \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Obwohl hier wie bei Nr. 1 vier reelle Potenzkreistripel verwendbar sind, so giebt es doch nur 16 brauchbare Kombinationen, nämlich $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C_1$. Es ist also, wenn man keine der Lösungen doppelt zählen will, $N = 16 . 2 = 32$. Durch die Inversion u v w ⩘ v u w geht jede der 8 Kombinationen $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C$, $+\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C_1$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C_1$, $+\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C_1$ in sich selbst über, dagegen keine der 4 Kombinationen $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm C_1$. Hier giebt es demnach 8 zweigliedrige und 4 viergliedrige Gruppen.

Nr. 20: R R R. Zulässig sind nur die 8 Kombinationen: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Somit ist, wenn man jede Lösung nicht als eine vierfache, sondern als eine einfache gelten lässt, $N = 8 . 2 = 16$. Die 2 Kombinationen $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $+\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ liefern 2 zweigliedrige und die 2 Kombinationen $+\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2 sechsgliedrige Gruppen.

Nr. 21: A B 0. Bei den sich berührenden Kreisen a b ist nur ein Potenzkreis f verwendbar. Würde nämlich bei der Konstruktion der in einen Nullkreis ausgeartete Potenzkreis f_1 von a b benutzt werden, so würde entweder λ auf β oder ρ auf α fallen, oder es müsste entweder u y w oder x v w ein Kreisbüschel sein, was hier ausgeschlossen ist. Mithin giebt es nur 2 brauchbare Potenzkreistripel. Da ferner bei a b f aus demselben Grunde nur ein Wurfwert, nämlich -1 (S. 12), benutzt werden darf, so sind nur die 8 Kombinationen $\pm A \pm B - 1$, $\pm A_1 \pm B_1 - 1$ zulässig. Mithin ist $N = 8 . 2 = 16$.

Nr. 34: 0 0 0. Vorhanden ist nur ein brauchbares Wurfwerttripel $-1 -1 -1$, das sowohl durch u v w ⩘ v u w als auch durch u v w ⩘ v w u in sich selbst übergeht. Hier giebt es demnach eine zweigliedrige Gruppe.

---

16. I. Das verallgemeinerte Malfattische Problem 1 ist für den Fall zu lösen, dass von den 6 Kreisen a b c u′ v′ w′ ausserdem noch vorausgesetzt, respektive verlangt wird, dass sie durchweg reell sind, dass keine 3 unter ihnen ein Büschel bilden und die Kreise a b c keinen gemeinschaftlichen Punkt haben.

II. Analysis. Ist u′ v′ w′ eine Lösung und sind u v w drei beliebig angenommene feste, reelle, sich paarweise berührende Kreise, die kein Büschel bilden, so ist stets

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach 10 u′ v′ w′ ⩚ u v w. Gehen die Kreise a b c durch diese Inversion u′ v′ w′ ⩚ u v w in die Kreise x y z über, ist also u′ v′ w′ a b c ⩚ u v w x y z, so ist damit diese Aufgabe auf die vorhergehende 15 zurückgeführt, wobei jeder reellen Lösung von 16 stets eine derartige reelle Lösung von 15 entspricht, bei der die Kreise a b c keinen gemeinschaftlichen Punkt haben.

III. Konstruktion. Zeichne drei beliebige sich paarweise berührende reelle Kreise u v w, die kein Büschel bilden, stelle zu a b c u v w eine reelle Lösung x y z der Aufgabe 15 her, so dass also x y z ⩚ a b c, und zeichne dazu 3 Kreise u′ v′ w′ so, dass a b c u′ v′ w′ ⩚ x y z u v w. Die Kreise u′ v′ w′ bilden eine Lösung.

IV. Beweis. Dieser ergiebt sich direkt aus a b c u′ v′ w′ ⩚ x y z u v w. Auch hier sei noch darauf hingewiesen, dass umgekehrt jede derartige reelle Lösung von 15, bei der die Kreise a b c keinen gemeinschaftlichen Punkt haben, eine reelle Lösung von 16 liefert.

V. Determination. Auf diese Weise kann man offenbar jene gewünschte reelle Lösung erhalten. Ungeachtet der aus Analysis und Beweis hervorgehenden Äquivalenz der Aufgaben 15 und 16 haben dennoch beide nicht immer gleichviel reelle Lösungen. Nur die Gruppenanzahlen sind stets bezüglich gleich. Die 2. Tabelle enthält nach Art der ersten die charakteristischen Zahlen. Nr. 29 ist hier auszuscheiden.

VI. Kurze Ableitung der wichtigeren in der II. Tabelle angegebenen Resultate. Nr. 1 : A B C. Wird bei der vorhergehenden Aufgabe (15) aus jeder der 32 zweigliedrigen Gruppen (15 VII Nr. 1) nur je eine Lösung x y z herausgegriffen und diese nur durch je eine Inversion x y z ⩚ a b c in eine Lösung u′ v′ w′ der vorliegenden Aufgabe (16) übergeführt, so erhält man aus den 32 nicht inversen oder „unabhängigen“ Lösungen x y z 32 unabhängige Lösungen u′ v′ w′. Durch Inversion um den Orthogonalkreis m von a b c geht aus jeder Lösung u′ v′ w′ eine neue reelle Lösung u″ v″ w″ der vorliegenden Aufgabe hervor. Auf diese Weise, wird behauptet, erhält man 64 von einander verschiedene Lösungen. Die 32 Lösungen u″ v″ w″ sind nämlich zunächst unter sich nicht invers, also sicherlich von einander verschieden. Keine von ihnen ist ferner identisch mit irgend einer der 32 Lösungen u′ v′ w′. Denn sie ist zu 31 derselben nicht einmal invers und nur zu einer invers, ohne jedoch mit ihr übereinzustimmen. Denn wären diese beiden identisch, ginge also u′ v′ w′ durch die Inversion um m in sich selbst über, so müsste m gleichzeitig Orthogonalkreis von u′ v′ w′ sein und die 6 Kreise a b c u′ v′ w′ durchweg rechtwinklig in Punkten schneiden, die gleichzeitig Berührungspunkte der Kreispaare a v′, a w′, b w′, b u′, c u′, c v′, v′ w′, w′ u′, u′ v′ wären. Bei der entsprechenden Lösung x y z von 15 müssten mithin die Berührungspunkte $\varkappa\ \rho\ \lambda\ \sigma\ \mu\ \tau\ \alpha\ \beta\ \gamma$ (s. Fig. 9) auf dem Kreise t liegen. Wie unschwer zu sehen, müssten dann $\varkappa$ und ρ auf α, λ und σ auf β und μ und τ auf γ fallen, oder es müsste jedes der 3 Kreistripel x v w, y w u, z u w ein Büschel bilden, was hier nicht der Fall ist (15 IV). Ausser diesen 64 ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schiedenen reellen Lösungen u′ v′ w′ und u″ v″ w″ giebt es keine ferneren reellen Lösungen mehr. Eine etwaige fernere Lösung u_1 v_1 w_1 müsste nämlich zunächst einer der 32 Lösungen u′ v′ w′ kreisverwandt sein, weil sich im entgegengesetzten Falle als Folgerung ergeben würde, dass die Aufgabe 15 mehr als 32 Lösungsgruppen enthielte, was (15 VII Nr. 1) ausgeschlossen ist. Wäre ferner u_1 v_1 w_1 zu u′ v′ w′ invers und doch von derjenigen Lösung u″ v″ w″ verschieden, die durch Inversion um m aus u′ v′ w′ hervorgeht, so müsste a b c u′ v′ w′ ⩚ a b c u″ v″ w″ ⩚ a b c u_1 v_1 w_1 oder a b c auf zwei verschiedene Arten sich selbst kreisverwandt sein. Dies könnte aber bekanntlich nur dann vorkommen, wenn einer der kein Büschel bildenden Kreise a b c die beiden übrigen rechtwinklig schnitte, was hier nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Hier giebt es mithin genau 64 verschiedene reelle Lösungen und 32 zweigliedrige Gruppen.

Nr. 17: $\alpha\,\alpha\,\alpha$. Nach der ersten Tabelle giebt es beim Falle Nr. 17 der vorigen Aufgabe (15) eine zwei- und eine sechsgliedrige Gruppe. Es seien nun x y z und x′ y′ z′ zwei bezüglich diesen Gruppen angehörige Lösungen dieser Aufgabe (15) und u′ v′ w′ und u″ v″ w″ zwei aus ihnen durch Inversion hervorgegangene Lösungen der vorliegenden Aufgabe (16). Bei der Lösung x y z sind die reellen ein Büschel bildenden Potenzkreise r s t von y z, z x, x y (vergl. 6 und 15 VII Nr. 16) gleichzeitig Potenzkreise von v w, w u, u v und schneiden den jedesmaligen dritten Kreis des Tripels x y z und des Tripels u v w bezüglich rechtwinklig. Wegen x y z u v w r s t ⩚ a b c u′ v′ w′ d e f sind auch die Potenzkreise d e f von b c, c a, a b gleichzeitig bei v′ w′, w′ u′, u′ v′ Potenzkreise und zu dem jedesmaligen dritten Kreise bei a b c wie bei u′ v′ w′ bezüglich orthogonal. Mithin geht die Lösung u′ v′ w′ durch jede der 3 um d, e, f vorgenommenen inversen Spiegelungen in sich selbst über. Da ausserdem nur die Inversion um den Orthogonalkreis m aus u′ v′ w′ eine neue Lösung liefert, so giebt es hier nur eine zweigliedrige Gruppe. Bei der Lösung x′ y′ z′ ist dagegen nur einer der reellen Potenzkreise gleichzeitig Potenzkreis von v w oder w u oder u v (vergl. 15 VII Nr. 16). Es sei dies der Kreis r. Dieser schneidet ausserdem sowohl x als auch u rechtwinklig. Dann ist auch bei der Lösung u″ v″ w″ unter den Potenzkreisen d, e, f von b c, c a, a b nur d gleichzeitig auch Potenzkreis von v w, und nur d schneidet sowohl a als auch u rechtwinklig. Mithin geht u″ v″ u″ durch inverse Spiegelung um d in sich selbst und durch Inversion um e und f in je eine neue Lösung über. Diese zwei letzten Inversionen um f und e oder die Inversionen a b c ⩚ b a c und a b c ⩚ c b a können durch die cyklische Inversion b a c ⩚ c b a, deren Cyklusanzahl 3 ist, ersetzt werden. Da ferner noch durch inverse Spiegelung um m je eine neue Lösung entsteht, so gehört u″ v″ w″ einer sechsgliedrigen Gruppe an. Hier giebt es demnach 8 verschiedene reelle Lösungen, die einer zwei- und einer sechsgliedrigen Gruppe angehören.

Nr. 20: R R R. In diesem Falle ist die Anzahl der Lösungen der vorliegenden Aufgabe (16) viermal grösser als die der vorhergehenden (15). Der Grund dafür ist der folgende. Da hier jeder Kreis des Tripels a b c die beiden übrigen rechtwinklig

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schneidet, so geht dieses Tripel durch 10 inverse Spiegelungen in sich selbst über, nämlich durch die um jeden der gegebenen Kreise a b c, um jeden ihrer 6 Potenzkreise d e f d′ e′ f′ und um den Orthogonalkreis m von a b c. Das Kreistripel u v w ist dagegen nur bei 4 Kreisen, nämlich bei u_0 v_0 w_0 t, sein eigenes inverses Spiegelbild. Da somit die Anzahl der inversen Spiegelungen, durch die eine Lösung in andere Lösungen übergeführt werden kann, bei a b c grösser als bei u v w ist, so ist es erklärlich, dass die vorliegende Aufgabe (16) mehr Lösungen als die vorhergehende (15) zulässt. Die obigen Spiegelungen sind zum Teil von einander abhängig. Will man sie ihrem Effekte nach richtig beurteilen, so muss man sie durch gleichwertige unter sich unabhängige Inversionen ersetzen. Als solche können bei der vorhergehenden Aufgabe (15): 1. die cyklische Inversion u v w $\curlywedge$ v w u, 2. die inverse Spiegelung u v w $\curlywedge$ v u w und 3. die um t und bei der vorliegenden Aufgabe (16): 1. die cyklische Inversion a b c $\curlywedge$ a b c, 2. die inverse Spiegelung d, 3. die um m, 4. die um a und 5. die um d′ dienen. Wären bei der vorliegenden Aufgabe (16) die Spiegelungen 4 und 5 nicht vorhanden, so müssten wegen der Übereinstimmung in der Anzahl und Art der neue Lösungen liefernden Inversionen, wie soeben bei Nr. 17 gezeigt wurde, die beiden Aufgaben gleichviel Lösungen haben, also je 16. Diese 16 Lösungen bei a b c werden aber durch die Inversion 4 verdoppelt, und die 32 dann vorhandenen durch die Spiegelung 5 abermals verdoppelt, so dass im ganzen 64 verschiedene reelle Lösungen resultieren. Dass dem so ist, lehrt übrigens auch direkt die Anschauung, falls man sich nämlich, was hier stets zulässig ist, a b c als grösste Kreise einer Kugel (als Äquator und zwei einander rechtwinklig schneidende Meridiane eines Globus) denkt.

17. Anmerkung. Aus der zweiten Tabelle, bei der die übrigen 30 Resultate in entsprechender Weise ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können, ergiebt sich folgende Gedächtnisregel. Bei der (oben genau formulierten) Steiner'schen Verallgemeinerung des Malfattischen Problems (16) ist die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Lösungen in jedem der 33 möglichen Fälle 2^{ε} mal grösser als die Anzahl der verschiedenen reellen Lösungen bei dem jedesmal entsprechenden Falle des Apollonischen Taktionsproblems, wenn ε die Zahl ist, die angiebt, wie viele unter den 3 Kreispaaren, die sich aus den gegebenen 3 Kreisen bilden lassen, von einander getrennte, reelle, gemeinschaftliche Punkte haben. Dabei ist jedoch wie beim Malfattischen Problem (16) auch beim Apollonischen eine Lösung nicht mitzuzählen, wenn bei ihr der konstruierte Kreis mit zwei der gegebenen Kreise ein Büschel bildet.

18. Anmerkung. Bei der nicht verallgemeinerten Malfattischen Aufgabe, bei der die drei gegebenen Kreise entweder in drei Gerade ausarten oder doch einen Punkt gemein haben, kann, wenn alles Übrige wie bei 16 ist, die unter 16 angegebene Lösungsweise beibehalten werden. Die Anzahl der Lösungen schrumpft dann bei jedem der 7 möglichen Fälle auf die Hälfte zusammen, und zwar aus dem Grunde, weil hier der Orthogonalkreis m der gegebenen Gebilde a b c entweder in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die unendlich entfernte Gerade der Ebene oder in einen Nullkreis ausartet, und somit zur inversen Spiegelung der Lösungen untauglich wird. Diese 7 Fälle sind in der dritten Tabelle näher charakterisiert.

Erklärungen, Hilfssätze und Hilfsaufgaben.

19. Die Formen $c_{22}\,x_1\,y_1 - c_{21}\,x_1\,y_2 - c_{12}\,x_2\,y_1 + c_{11}\,x_2\,y_2$ und $a_2\,x_1 - a_1\,x_2$ werden unten mit $c\,(x\,y)$, bezüglich mit $(x\,a)$ bezeichnet.

20. Die Beziehung zweier projektiven Punktreihen ist durch 3 Paare entsprechender Punkte ihrer Träger eindeutig bestimmt.

21. Projektive Punktreihen sollen kohärent heissen, wenn sie einen gemeinsamen Träger haben und dieser eine Gerade oder ein Kreis ist.

22. Bei $c\,(x\,y) = 0$ sind $c_{12} - c_{21} = (c\,c)$ und $c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21} = (c_1\,c_2)$ Invarianten.

23. Bei $c\,(x\,y) = 0$ ist $(c\,c)^2 : 4\,(c_1\,c_2)$ eine absolute Invariante. Dieselbe soll mit $\cos^2(x\,y)$ bezeichnet werden.

24. Sind bei zwei kohärenten Punktreihen $c\,(x\,y) = 0$ A B C D 4 derartige Punkte, dass $c\,(A\,B) = c\,(B\,C) = c\,(C\,D) = 0$, so ist das Doppelverhältnis $(A\,C\,D\,B) = 4\,\cos^2(x\,y)$. [Dies ist die geometrische Bedeutung der absoluten Invariante $(c\,c)^2 : (c_1\,c_2)$.]

25. Zwei kohärente Punktreihen $c\,(x\,y) = 0$ haben zusammenfallende oder getrennte Doppelpunkte, je nachdem $\cos^2(x\,y)$ gleich oder nicht gleich Eins ist, und umgekehrt. Im ersten Falle „berühren sich" dieselben, im letzten „schneiden sie sich". Der „Schnittwinkel" $(x\,y)$ derselben ist dabei derjenige, der in trigonometrischer Hinsicht durch die Gleichung $\cos^2(x\,y) = (c\,c)^2 : 4\,(c_1\,c_2)$ definiert ist.

26. Ist bei zwei kohärenten Punktreihen $c\,(x\,y) = 0$ die Invariante $\cos^2(x\,y) = 0$ so bilden die Punktreihen eine Involution, und umgekehrt. Die Reihen „schneiden sich dann rechtwinklig".

27. Sind A D, B E, C F 3 Paare konjugierter Punkte einer Involution A D . B E . C F, so ist $(A\,F)\,(B\,D)\,(C\,E) = (A\,E)\,(B\,F)\,(C\,D)$, und umgekehrt. Dies folgt aus $(A\,F\,B\,D) = (D\,C\,E\,A)$.

28. Ist bei zwei kohärenten Punktreihen $c\,(x\,y) = 0$ die Invariante $\cos^2(x\,y) = \infty$, oder ist dieselbe unbestimmt, so geht $c\,(x\,y)$ in ein Produkt von der Form $(x\,a)\,(y\,b)$ oder $(x\,a)\,(x\,a)$ über, und umgekehrt. Die Reihen sind dann „ausgeartet".

29. Ist bei zwei kohärenten Punktreihen $c\,(x\,y) = 0$ der Beziehung $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta)$ gleichwertig, so ist $(c\,c) = (a\,\beta) + (b\,\alpha)$, $(c_1\,c_2) = (\alpha\,a)\,(\beta\,b)$, $4\,\cos^2(x\,y) = [(a\,\beta) + (b\,\alpha)]^2 : (\alpha\,a)\,(\beta\,b)$, so dass $\cos(x\,y) = [(a\beta) + (b\alpha)] : 2\sqrt{(\alpha\,a)}\,.\,\sqrt{(\beta\,b)}$ gesetzt werden kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

30. Schneiden sich 2 kohärente Punktreihen x y in den Punkten C und F unter dem Winkel γ, so lässt sich ihre projektive Beziehung stets auf die Form $(C\,x\,F\,y) = e^{2i\gamma}$ bringen.

31. Schneiden sich 2 kohärente Punktreihen x y in den Punkten C und F orthogonal, so ist ihre projektive Beziehung $(C\,x\,F\,y) = -1$.

32. Berühren sich 2 kohärente Punktreihen x y in dem Punkte C und haben P und Q zu entsprechenden Punkten, so ist $(P\,Q)\,(x\,C)\,(y\,C) - (P\,C)\,(Q\,C)\,(x\,y) = 0$, und umgekehrt.

33. Drei oder mehrere kohärente Punktreihen „bilden ein Büschel", wenn sie sich sämtlich in denselben zwei Punkten schneiden oder in einem und demselben Punkte berühren.

34. Zwei Paare kohärenter Punktreihen $c\,(x\,y) = 0$ und $d\,(u\,v) = 0$ sind dann und nur dann projektiv [$c\,(x\,y)$ und $d\,(u\,v)$ durch lineare Substitution in einander überführbar], wenn sie in ihren absoluten Invarianten $\cos^2(x\,y)$ und $\cos^2(u\,v)$ übereinstimmen. Dies folgt aus 20 und 24. (Vergl. 28 und 31.)

35. Bei $c\,(x\,y) = 0$ und $a\,(y\,z) = 0$ ist $S\,(x\,y\,z) = c_{11}\,a_{22} + c_{22}\,a_{11} - c_{12}\,a_{12} - c_{21}\,a_{21}$ eine simultane Invariante.

36. Sind bei drei kohärenten Punktreihen x y z die Beziehungen $c\,(x\,y) = 0$ und $a\,(y\,z) = 0$ den Beziehungen $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma)$ gleichwertig, so ist $S\,(x\,y\,z) = c_{11}\,a_{22} + c_{22}\,a_{11} - c_{12}\,a_{12} - c_{21}\,a_{21} = (\beta\,b)\,[(a\,\gamma) + (c\,\alpha)]$.

37. Sind $a\,(y\,z) = 0$, $b\,(z\,x) = 0$, $c\,(x\,y) = 0$ linear von einander abhängige Gleichungen, so sind $S^2(z\,x\,y) : 4\,(b_1\,b_2)\,(c_1\,c_2)$, $S^2(x\,y\,z) : 4\,(c_1\,c_2)\,(a_1\,a_2)$, $S^2(y\,z\,x) : 4\,(a_1\,a_2)\,(b_1\,b_2)$, $(b\,b)\,(c\,c) : 2\,S\,(z\,x\,y)$, $(c\,c)\,(a\,a) : 2\,S\,(x\,y\,z)$, $(a\,a)\,(b\,b) : 2\,S\,(y\,z\,x)$ absolute simultane Invarianten. Dies folgt aus 22 und 35.

38. Sind $a\,(y\,z) = 0$, $b\,(z\,x) = 0$, $c\,(x\,y) = 0$ linear von einander abhängige Gleichungen, so bestehen zwischen ihren absoluten Invarianten die Beziehungen:

$$\cos^2(yz) = (aa)^2 : 4(a_1a_2) = S^2(zxy) : 4(b_1b_2)(c_1c_2) = [(bb)(aa) : 2S(yzx)] \,.\, [(cc)(aa) : 2S(xyz)]$$
$$\cos^2(zx) = (bb)^2 : 4(b_1b_2) = S^2(xyz) : 4(c_1c_2)(a_1a_2) = [(cc)(bb) : 2S(zxy)] \,.\, [(aa)(bb) : 2S(yzx)]$$
$$\cos^2(xy) = (cc)^2 : 4(c_1c_2) = S^2(yzx) : 4(a_1a_2)(b_1b_2) = [(aa)(cc) : 2S(xyz)] \,.\, [(bb)(cc) : 2S(zxy)]$$

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus 29 und 36, wenn man statt der obigen 3 abhängigen Gleichungen ihnen gleichwertige von der Form $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma)$ setzt.

39. Definition. Bei $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma) = (u\,d) : (u\,\delta)$ sollen die Kosinus der Schnittwinkel durch die Gleichungen $\cos(x\,y) = [(a\,\beta) + (b\,\alpha)] : 2\sqrt{(\alpha\,a)}\sqrt{(\beta\,b)}$, $\cos(x\,z) = [(a\,\gamma) + (c\,a)] : 2\sqrt{(\alpha\,a)}\sqrt{(\gamma\,c)}$, $\cos(x\,u) = [(a\,\delta) + (d\,\alpha)] : 2\sqrt{(\alpha\,a)}\sqrt{(\delta\,d)}$, $\cos(y\,z) = [(b\,\gamma) + (c\,\beta)] : 2\sqrt{(\beta\,b)}\sqrt{(\gamma\,c)}$, $\cos(y\,u) = [(b\,\delta) + (d\,\beta)] : 2\sqrt{(\beta\,b)}\sqrt{(\delta\,d)}$, $\cos(z\,u) = [(c\,\delta) + (d\,\gamma)] : 2\sqrt{(\gamma\,c)}\sqrt{(\delta\,d)}$, bei denen jede der Quadratwurzeln aus $(\alpha\,a)$, $(\beta\,b)$, $(\gamma\,c)$, $(\delta\,d)$ zwar zweideutig, jedoch an verschiedenen Stellen stets in dem-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selben Sinne zu nehmen ist, bestimmt sein. Die analoge Definition soll auch bei mehr als 4 kohärenten Punktreihen gelten. Dieselbe steht mit 23 und 29 in keinem Widerspruch.

40. Alle bei $(x\,a):(x\,\alpha)=(y\,b):(y\,\beta)=(z\,c):(z\,\gamma)=(u\,d):(u\,\delta)=\ldots$ vorkommenden absoluten Invarianten lassen sich durch die nach 39 definierten Kosinus der Schnittwinkel eindeutig darstellen. So sind $\cos^2(x\,y)$, $\cos(x\,y)\,.\,\cos(y\,z)\,.\,\cos(z\,x)$, $\cos(x\,y)\cos(y\,z):\cos(z\,x)$, $\cos(x\,y)\,.\,\cos(y\,z):\cos(z\,u)\cos(u\,x)$ lauter Invarianten. Diese 4 Beispiele dürften zur Erläuterung der Bildungsweise der Invarianten aus den Kosinus ausreichen. Die in 38 vorkommenden Invarianten lauten hiernach $(b\,b)(c\,c):2\,S(z\,x\,y)=\cos(z\,x)\cos(x\,y):\cos(y\,z)$, $(c\,c)(a\,a):2\,S(x\,y\,z)=\cos(x\,y)\cos(y\,z):\cos(z\,x)$, $(a\,a)(b\,b):2\,S(y\,z\,x)=\cos(y\,z)\cos(z\,x):\cos(x\,y)$. Beweis: Nach 39 ist $\cos(x\,y)\cos(y\,z)\,.\,\cos(z\,x)=[(a\,\beta)+(b\,\alpha)]\,[(b\,\gamma)+(c\,\beta)]\,[(c\,\alpha)+(a\,\gamma)]:8\,(\alpha\,a)\,(\beta\,b)\,(\gamma\,c)$. Der invariante Charakter der linken Seite geht unmittelbar aus ihrer Form hervor. Ebenso verhält es sich bei jedem der drei übrigen Beispiele. Nach 29 und 36 ist endlich $(b\,b)\,(c\,c):2\,S(z\,x\,y)=[(c\,\alpha)+(a\,\gamma)]\,.\,[(a\,\beta)+(b\,\alpha)]:2\,(\alpha\,a)\,[(b\,\gamma)+(c\,\beta)]=\cos(z\,x)\cos(x\,y):\cos(y\,z)$.

41. Genügen bei 3 kohärenten Punktreihen $(x\,a):(x\,\alpha)=(y\,b):(y\,\beta)=(z\,c):(z\,\gamma)$ die Winkel A, B, C den Gleichungen $\cos A=[(b\,\gamma)+(c\,\beta):2\sqrt{(\beta\,b)}\,\sqrt{(\gamma\,c)}$, $\cos B=[(c\,\alpha)+(a\,\gamma)]:2\sqrt{(\gamma\,c)}\,\sqrt{(\alpha\,a)}$, $\cos C=[(a\,\beta)+(b\,\alpha)]:2\sqrt{(\alpha\,a)}\,\sqrt{(\beta\,b)}$, die im Sinne von 39 zu nehmen sind, so genügt auch jedes der drei Tripel 1) $A,\,B+\pi,\,C+\pi$, 2) $A+\pi,\,B,\,C+\pi$, 3) $A+\pi,\,B+\pi,\,C$ diesen Gleichungen im Sinne der Definition 39. Ausserdem kann dabei ein beliebiges Vielfaches von $2\,\pi$ zu jedem der Winkel addiert oder davon subtrahiert werden. Dagegen ist keines der 4 Tripel 1) $A+\pi$, B, C, 2) A, $B+\pi$, C, 3) A, B, $C+\pi$, 4) $A+\pi$, $B+\pi$, $C+\pi$ ein Tripel von bei x y z vorkommenden Schnittwinkeln im Sinne der Definition 39. Dies folgt unmittelbar aus 39.

42. Ist $(y\,\alpha)\,(z\,\alpha)+(y\,z)\,a=0$ und $(x\,\beta)\,(z\,\beta)+(x\,z)\,b=0$, so ist 39 gemäss $\cos(y\,z)=2a:2\sqrt{a^2}\,\sqrt{1}$, $\cos(z\,x)=2\,b:2\sqrt{b^2}\,\sqrt{1}$, $\cos(x\,y)=-[(\alpha\beta)^2+2\,a\,b]:2\sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2}$, so dass sich für die Kosinus folgende 4 Wertetripel ergeben:

$\cos(x\,y)$	$-1-(\alpha\,\beta)^2:2\,a\,b$	$-1-(\alpha\,\beta)^2:2\,a\,b$	$1+(\alpha\,\beta):2\,a\,b$	$1+(\alpha\,\beta):2\,a\,b$
$\cos(y\,z)$	$+1$	-1	-1	$+1$
$\cos(z\,x)$	$+1$	-1	$+1$	-1

Lässt man das erste Wertetripel gelten, so ist $\cos^2\frac{1}{2}(x\,y)=-(\alpha\,\beta)^2:4\,a\,b$. Beweis: Aus den 2 gegebenen Gleichungen folgt $z_1:z_2=[y_1(\alpha_1\,\alpha_2-a)-y_2\,\alpha_1{}^2]:[y_1\,\alpha_2{}^2-y_2(\alpha_1\,\alpha_2+a)]=[x_1(\beta_1\,\beta_2-b)-x_2\,\beta_1{}^2]:[x_1\,\beta_2{}^2-x_2(\beta_1\,\beta_2+b)]$. Hieraus, aus 29 und 39 ergiebt sich die Behauptung.

43. Durch 3 von einander getrennte Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma$ sind die projektiven Beziehungen dreier kohärenten Reihen x y z, die sich paarweise bezüglich in diesen Punkten berühren, eindeutig bestimmt: $2\,(\beta\,\gamma)\,(y\,\alpha)\,(z\,\alpha)-(\alpha\,\beta)\,(\gamma\,\alpha)\,(y\,z)=0$, $2\,(\gamma\,\alpha)\,(z\,\beta)\,(x\,\beta)-(\beta\,\gamma)\,(\alpha\,\beta)\,(z\,x)=0$, $2\,(\alpha\,\beta)\,(x\,\gamma)\,(y\,\gamma)-(\gamma\,\alpha)\,(\beta\,\gamma)\,(x\,y)=0$. Sind dabei $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bestimmte (4. harmonische) Punkte, dass $(\gamma\,\alpha\,\beta\,\alpha') = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta') = (\beta\,\gamma\,\alpha\,\gamma') = -1$, so gelten gleichzeitig die projektiven Beziehungen $x\,(\alpha'\,\beta\,\gamma) \barwedge y\,(\alpha\,\beta'\,\gamma) \barwedge z\,(\alpha\,\beta\,\gamma')$. Beweis. Da sich die Punktreihen x y z paarweise in $\alpha\,\beta\,\gamma$ bezüglich berühren sollen, so haben ihre projektiven Beziehungen nach 32 die Form 1) $(y\,\alpha)\,(z\,\alpha) - (y\,z)\,a = 0$, 2) $(z\,\beta)\,(x\,\beta) - (z\,x)\,b = 0$, 3) $(x\,\gamma)\,(y\,\gamma) - (y\,x)\,c = 0$. Für $y = z$ wird nach 1) $y = z = \alpha$ und nach 2) und 3) $(\alpha\,\beta)\,(x\,\beta) - (\alpha\,x)\,b = 0$, $(x\,\gamma)\,(\alpha\,\gamma) - (x\,\alpha)\,c = 0$. Durch Elimination von x aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich $(\gamma\,\alpha)^2\,b + (\alpha\,\beta)^2\,c = (\alpha\,\beta)\,(\beta\,\gamma)\,(\gamma\,\alpha)$. Ebenso ist $(\alpha\,\beta)^2\,c + (\beta\,\gamma)^2\,a = (\beta\,\gamma)\,(\gamma\,\alpha)\,(\alpha\,\beta)$ und $(\beta\,\gamma)^2\,a + (\gamma\,\alpha)^2\,b = (\gamma\,\alpha)\,(\alpha\,\beta)\,(\beta\,\gamma)$. Hieraus folgt $a = (\alpha\,\beta)\,(\gamma\,\alpha) : 2\,(\beta\,\gamma)$, $b = (\beta\,\gamma)\,(\alpha\,\beta) : 2\,(\gamma\,\alpha)$, $c = (\gamma\,\alpha)\,(\beta\,\gamma) : 2\,(\alpha\,\beta)$.

44. Berühren sich drei kohärente Punktreihen x y z paarweise in 3 von einander verschiedenen Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma$, so sind die Wertetripel ihrer Schnittwinkelkosinus im Sinne der Definition 39 die folgenden: 1) $+1+1+1$, 2) $+1-1-1$, 3) $-1+1-1$, 4) $-1-1+1$. Beweis. Die projektiven Beziehungen der Reihen x y z sind die in 43 angegebenen. Die in 42 vorkommenden Grössen a und b haben die Werte $a = -(\alpha\,\beta)\,(\gamma\,\alpha) : 2\,(\beta\,\gamma)$ und $b = +(\beta\,\gamma)\,(\alpha\,\beta) : 2\,(\gamma\,\alpha)$. Nach 42 ist somit hier, wenn man zunächst nur das erste Wertetripel berücksichtigt, $\cos(x\,y) = \cos(y\,z) = \cos(z\,x) = 1$ u. s. w.

45. Wird bei 5 kohärenten Punktreihen t x y z u die Reihe t von jeder der 4 übrigen bezüglich in den Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ berührt, so ist das Doppelverhältnis $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \cos\frac{1}{2}(x\,y)\,\cos\frac{1}{2}(z\,u) : \cos\frac{1}{2}(y\,z)\,\cos\frac{1}{2}(u\,x)$, falls, was hier nach 42 im Sinne der Definition 39 statthaft ist, $\cos(x\,t) = \cos(y\,t) = \cos(z\,t) = \cos(u\,t) = +1$ gesetzt wird. — Beweis. Die projektiven Beziehungen der Reihen t x y z u sind nach 32: $(x\,\alpha)\,(t\,\alpha) + (x\,t)\,a = 0$, $(y\,\beta)\,(t\,\beta) + (y\,t)\,b = 0$, $(z\,\gamma)\,(t\,\gamma) + (z\,t)\,c = 0$, $(u\,\delta)\,(t\,\delta) + (u\,t)\,d = 0$. Nach 42 ist $(\alpha\,\beta)^2 = -4\,a\,b\,\cos^2\frac{1}{2}(x\,y)$, $(\gamma\,\delta)^2 = -4\,c\,d\,\cos^2\frac{1}{2}(z\,x)$, $(\beta\,\gamma)^2 = -4\,b\,c\,\cos^2\frac{1}{2}(y\,z)$, $(\delta\,\alpha) = -4\,d\,a\,\cos^2\frac{1}{2}(u\,x)$. Mithin ist $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)^2 = (\alpha\,\beta)^2\,(\gamma\,\delta)^2 : (\beta\,\gamma)^2\,(\delta\,\alpha)^2 = \cos^2\frac{1}{2}(x\,y)\,\cos^2\frac{1}{2}(z\,u) : \cos^2\frac{1}{2}(y\,z)\,\cos^2(u\,x)$.

46. Sind bei 5 kohärenten Punktreihen t x y z u, bei denen t von den 4 übrigen Reihen bezüglich in den Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ berührt wird, die Reihen t z u und damit die Punkte $\gamma\,\delta$ fest und die Reihen x y derart veränderlich, dass, wenn n, p, q 3 beliebige feste Zahlen sind, $\cos^2(x\,y) = n$, $\cos^2(y\,z) = p$, $\cos^2(u\,x) = q$, so beschreiben die beweglichen Berührungspunkte $\alpha\,\beta$ zwei kohärente sich in den festen Punkten $\gamma\,\delta$ schneidende Reihen. Sollen die 4 Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ stets durchweg von einander verschieden sein, so ist dabei die projektive Beziehung dieser von $\alpha\,\beta$ erzeugten Reihen I. 16deutig, wenn keine der Zahlen n, p, q gleich ∞ oder gleich 1 oder gleich 0 ist; II. 4deutig, wenn die Reihen jedes der Paare y z und u x sich berühren $(p = q = 1)$ und die Reihen x y sich weder berühren noch orthogonal noch unter einem Winkel schneiden, dessen Kosinus unendlich gross ist; III. 2deutig, wenn die Reihen jedes der Paare y z und u x sich berühren $(p = q = 1)$ und die Reihen x y sich rechtwinklig schneiden $(n = 0)$, und IV. eindeutig, wenn die Reihen jedes der Paare x y, y z, z u, u x sich berühren $(n = p = \cos^2(z\,u) = q = 1)$. — Beweis. Wird auch hier, wie bei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

45, $\cos(x\,t) = \cos(y\,t) = \cos(z\,t) = \cos(u\,t) = +1$ angenommen, so ist nach 42 $\cos(z\,u)$ eindeutig bestimmt. Für $\cos(z\,u) = r$ ist nach 45 $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \pm\sqrt{(1 \pm n)(1 \pm q)} : \sqrt{(1 \pm p)(1 + r)}$. Aus dieser Formel ergiebt sich alles, was behauptet wurde, wenn man noch dabei berücksichtigt, dass bei 4 von einander verschiedenen Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ das Doppelverhältnis keinem der Werthe 0, 1, ∞ gleich sein darf.

47. Berühren sich bei 4 kohärenten Punktreihen u v w x die Reihen der Paare v w, w u, u v, v x, x w bezüglich in den von einander verschiedenen Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa\,\rho$, so besteht die Involution $\alpha^2 . \beta\varkappa . \gamma\rho$. Ist dabei die Reihe x und nur diese veränderlich, so erzeugen ihre veränderlichen Berührungspunkte $\varkappa\,\rho$ zwei kohärente, sich in dem festen Punkte α berührende Punktreihen. Besteht umgekehrt bei 5 Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa\,\rho$ die Involution $\alpha^2 . \beta\varkappa . \gamma\rho$, so sind durch dieselben 4 derartige kohärente Punktreihen u v w x eindeutig bestimmt, dass sich die Reihen der Paare v w, w u, u v, v x, x w bezüglich in $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa\,\rho$ berühren. — Beweis. Nach 43 ist $2(\beta\gamma)(v\,\alpha) . (w\,\alpha) - (\alpha\,\beta)(\gamma\,\alpha)(v\,w) = 0$, und $2(\rho\,\varkappa)(v\,\alpha)(w\,\alpha) - (\alpha\,\rho)(\varkappa\,\alpha)(v\,u) = 0$. Diese zwei projektiven Beziehungen sind identisch, da sie zwischen denselben 2 Reihen v und w bestehen. Es ist also $(\beta\,\gamma)(\alpha\,\rho)(\varkappa\,\alpha) = (\rho\,\varkappa)(\alpha\,\beta)(\gamma\,\alpha)$. Mithin besteht nach 27 die Involution $\alpha^2 . \beta\varkappa . \gamma\rho$ und beschreiben nach 32 $\rho\,\varkappa$ zwei kohärente sich in α berührende Reihen.

48. Sind A D, B E, C F 3 Paare beliebiger Punkte eines Trägers, die jedoch keine Involution bilden und unter denen kein Punkt eines Paares mit einem Punkte der beiden übrigen Paare identisch ist, so sind dadurch drei kohärente Punktreihen x y z, die sich paarweise bezüglich in diesen Punktepaaren schneiden, eindeutig bestimmt. Die Punktreihen x y z sind ferner von einander verschieden und keine zwei unter ihnen arten aus (28). — Beweis. Die Punkte A B C D E F seien zunächst durchweg von einander verschieden. Bei den 3 Involutionen B E . C F . x t, C F . A D . y t, A D . B E . z t sind die 3 Punktreihen x y z unter sich projektiv, weil sie einer 4. Reihe t projektiv sind. Dabei sind die 3 Involutionen und die 3 kohärenten Reihen x y z verschieden und nicht ausgeartet (28). Bestimmt man 6 Punkte A′ B′ C′ D′ E′ F′ derart, dass sie den 3 Involutionen B E . C F . A D′ . D A′, C F . A D . B E′ . E B′, A D . B E . C F′ . F C′ genügen, so ist t (A D B E C F) $\barwedge$ x (D′ A′ E B F C) $\barwedge$ y (D A E′ B′ F C) $\barwedge$ z (D A E B F′ C′). Dabei ist stets D′ von D, E′ von E und F′ von F verschieden. Dadurch sind die projektiven Beziehungen der Reihen x y z festgelegt, aus denen ausserdem noch hervorgeht, dass die Reihen der Paare y z, z x, x y sich bezüglich in den Punkten A D, B E, C F schneiden. Es lassen sich also auf die gewünschte Art 3 kohärente Punktreihen aufstellen. Dies ist ferner nur auf eine Art möglich. Wäre es nämlich noch auf eine andere Weise zu erreichen, so dass etwa an Stelle der obigen Punkte A′ B′ C′ D′ E′ F′ andere Punkte A″ B″ C″ D″ E″ F″ träten, wäre also x (D″ A″ E B F C) $\barwedge$ y (D A E″ B″ F C) $\barwedge$ z (D A E B F″ C″), so müssten zunächst D″ von D, E″ von E und F″ von F verschieden sein, weil sonst die 3 Reihen x y z identisch wären. Ferner wäre dann A″ D″ E F $\barwedge$ A D C F $\barwedge$ D A F C und A″ D″ B E $\barwedge$ A D B E $\barwedge$ D A E B. Es bestünden demnach die Involutionen C F . A D″ . D A″ und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B E . A D″ . D A″. Diese 2 Involutionen müssten aber wegen der Übereinstimmung in 2 von einander verschiedenen Paaren konjugierter Punkte eine einzige bilden. Mithin bestünde dann die Involution B E . C F . A D″ . D A″ und, wenn man cyklisch weiter geht, C F . A D . B E″ . E B″ und A D . B E . C F″ . F C″. Ein Vergleich der 3 letzten Involutionen mit den 3 analogen früheren lehrt, dass dann A″ = A′, B″ = B′, C″ = C′, D″ = D′, E″ = E′, F″ = F′ sein müsste. Der Beweis für die noch übrigen Fälle I. C = F, II. B = E, C = F, III. A = D, B = E, C = F ist im wesentlichen ebenso zu führen, wobei noch der Hilfssatz anzuwenden ist: „Berühren sich zwei kohärente Punktreihen G A B ⩘ G C D, so besteht die Involution G^2 . A D . B C, und umgekehrt."

49. Drei von einander verschiedene kohärente Punktreihen x y z, die nicht einen und denselben Punkt sämtlich gemein haben und von denen keine zwei ausarten, sind durch ihre Schnittpunkte A D, B E, C F eindeutig bestimmt. — Beweis. Zunächst darf kein Punkt eines der drei Paare A D, B E, C F mit einem der 2 übrigen übereinstimmen. Denn wäre etwa A mit B identisch, so hätten die Reihen der Paare y z und z x einen gemeinschaftlichen Punkt und damit auch die des ganzen Tripels x y z, was ausgeschlossen ist. Sind ferner A″ B″ C″ D″ E″ F″ 6 bei diesen Reihen so bestimmte Punkte, dass x (D″ A″ E B F C) ⩘ y (D A E″ B″ F C) ⩘ z (D A E B F″ C″), so müssten die Involutionen B E . C F . A D″ . D A″, C F . A D . B E″ . E B″, A D . B E . C F″ . F C″ bestehen (S. 48). Dann könnten aber die Punktepaare A D, B E, C F keine Involution bilden, weil in diesem Falle die 3 vorhergehenden Involutionen identisch wären, und somit wegen D″ = D, E″ = E, F″ = F die Reihen x y z identisch sein müssten, was hier nicht der Fall ist. Die Schnittpunkte A D, B E, C F haben mithin dieselbe Lage zu einander, wie die gleichbezeichneten Punkte in 48. Die Reihen x y z sind folglich nach 48 durch ihre Schnittpunkte eindeutig bestimmt.

50. Schneiden sich (25) drei kohärente Punktreihen x y z, ohne durchweg einen gemeinsamen Punkt zu haben, paarweise in den Punktepaaren A D, B E, C F, so sind ihre projektiven Beziehungen: (A y D z) = (C A) (B D) (E D) (F A) : (A B) (D C) (D F) (A E), (B z E x) = (A B) (C E) (F E) (D B) : (B C) (E A) (E D) (B F), (C x F y) = (B C) (A F) (D F) (E C) : (C A) (F B) (F E) (C D).

Beweis. Nach 49 und 48 sind die fraglichen Beziehungen durch die 3 Involutionen B E . C F . x t, C F . A D . y t, A D . B E . z t gegeben. Aus der ersten Involution folgt (F B) (C x) (E t) + (C E) (B x) (F t) = 0 und aus der zweiten (D C) (A y) (F t) + (A F) (C x) (D t) = 0 (27). Durch Elimination von t ergiebt sich hieraus (F B) (C x) (D C) (A y) (E F) + (C E) (B x) (A F) (C y) (F D) + (F B) (C x) (A F) (C y) (E D) = 0. Berücksichtigt man ausserdem die Identitäten (A y) (C F) = (C A) (F y) + (A F) (C y), (B x) (C F) = (C B) (F x) + (B F) (C x) und (D C) (E F) + (D E) (F C) + (D F) (C E) = 0, so erhält man (C x) (F y) (C A) (D C) (E F) (F B) = (C y) (F x) (C B) (C E) (A F) (D F) oder die dritte Gleichung der Behauptung. Durch cyklische Vertauschung ergeben sich hieraus die 2 noch fehlenden Beziehungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

51. Anmerkung. Berühren sich (25) in 50 die Punktreihen bei einem oder bei mehreren der Paare y z, z x, x y, so erhält man durch Specialisierung der Formeln in 50 folgende Beziehungen: I. Für A = D ist $(y\,z):(y\,A)(z\,A) = (B\,C):(A\,B)(C\,A) + (E\,F):(A\,E)(F\,A)$, $(z\,B\,x\,E) = (A\,B)^2(E\,C)(E\,F):(A\,E)^2(B\,C)(B\,F)$, $(x\,C\,y\,F) = (A\,F)^2(B\,C)(E\,C):(C\,A)^2(B\,F)(E\,F)$. II. Für A = D und B = E ist $(y\,z):(y\,A)(z\,A) = (B\,C):(A\,B)(C\,A) + (B\,F):(A\,B)(F\,A)$, $(z\,x):(z\,B)(x\,B) = (C\,A):(B\,C)(A\,B) + (F\,A):(B\,F)(A\,B)$, $(x\,C\,y\,F) = (A\,F)^2(B\,C)^2:(C\,A)^2(B\,F)^2 = (B\,C\,A\,F)^2 = e^{2i\gamma}$. III. Für A = D, B = E und C = F ist $(y\,z):(y\,A)(z\,A) = 2\,(B\,C):(A\,B)(C\,A)$, $(z\,x):(z\,B)(x\,B) = 2\,(C\,A):(B\,C)(A\,D)$, $(x\,y):(x\,C)(y\,C) = 2\,(A\,B):(C\,A)(B\,C)$ (Vergl. 43).

52. Schneiden sich (25) drei kohärente Punktreihen x y z, die nicht sämtlich einen Punkt gemein haben, paarweise in den Punktepaaren A D, B E, C F, so lassen sich ihre Schnittwinkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ so bestimmen, dass die Werte aller Würfe, die sich aus den Punkten A B C D E F bilden lassen, eindeutige Funktionen der 3 Aggregate $-\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha-\beta+\gamma$, $\alpha+\beta-\gamma$ sind. Beweis. Nach 30 ist $(A\,y\,D\,z) = e^{2i\alpha}$, $(B\,z\,E\,x) = e^{2i\beta}$, $(C\,x\,F\,y) = e^{2i\gamma}$. Hieraus und aus 50 folgt I. $e^{2i\alpha} = (C\,A)(B\,D)(E\,D)(F\,A):(A\,B)(D\,C)(D\,F)(A\,E)$, II. $e^{2i\beta} = (A\,B)(C\,E)(F\,E)(D\,B):(B\,C)(E\,A)(E\,D)(B\,F)$, III. $e^{2i\gamma} = (B\,C)(A\,F)(D\,F)(E\,C):(C\,A)(F\,B)(F\,E)(C\,D)$. Durch Multiplikation erhält man $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = [(B\,D)(C\,E)(A\,F):(D\,C)(E\,A)(F\,B)]^2$. Ohne Widerspruch mit I—III kann man $\alpha\,\beta\,\gamma$ so wählen, dass IV. $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = +(B\,D)(C\,E)(A\,F):(D\,C)(E\,A)(F\,B)$. Von den auf diese Weise (I—IV) bestimmten Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma$ gilt die obige Behauptung. Dividiert man nämlich nacheinander IV durch I, II, III, so erhält man (stets eindeutig) V. $e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)} = (C\,E)(A\,B)(F\,D):(F\,B)(C\,A)(D\,E)$, VI. $e^{i(\alpha-\beta+\gamma)} = (A\,F)(B\,C)(D\,E):(D\,C)(A\,B)(E\,F)$, VII. $e^{i(\alpha+\beta-\gamma)} = (B\,D)(C\,A)(E\,F):(E\,A)(B\,C)(F\,D)$. Für $\lambda = (B\,D)(C\,E)(A\,F) + (D\,C)(E\,A)(F\,B) - (C\,E)(A\,B)(F\,D) - (F\,B)(C\,A)(D\,E)$ ist $\lambda = (C\,E)[(B\,D)(A\,F) + (A\,B)(D\,F)] + (F\,B)[(D\,C)(E\,A) + (C\,A)(E\,D)]$. Wegen der Identitäten $(F\,A)(B\,D) + (F\,B)(D\,A) + (F\,D)(A\,B) = 0$ und $(C\,D)(E\,A) + (C\,E)(A\,D) + (C\,A)(D\,E) = 0$ erhält man $\lambda = (C\,E).(F\,B)(D\,A) + (F\,B).(C\,E)(A\,D)$, oder $\lambda = 0$, da $(D\,A) = -(A\,D)$. Setzt man nun $(B\,D)(C\,E)(A\,F) + (D\,C)(E\,A)(F\,B) = K$ (K ist dabei nach 49, 48 und 27 nicht gleich Null), so ist wegen $\lambda = 0$ auch $(C\,E)(A\,B)\,F\,D) + (F\,B)(C\,A)\,D\,E) = K$. Ebenso ergiebt sich noch $(A\,F)(B\,C)(D\,E) + (D\,C)(A\,B)(E\,F) = (B\,D)(C\,A)(E\,F) + (E\,A)(B\,C)(F\,D) = K$. Aus den Gleichungen IV—VII wird mithin $K:(D\,C)(E\,A)(F\,B) = 1 + e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$, $K:(B\,D)(C\,E)(A\,F) = 1 + e^{i(-\alpha-\beta-\gamma)}$, $K:(F\,B)(C\,A)(D\,E) = 1 + e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)}$, $K:(C\,E)(A\,B)(F\,D) = 1 + e^{i(\alpha-\beta-\gamma)}$, $K:(D\,C)(A\,B)(E\,F) = 1 + e^{i(\alpha-\beta+\gamma)}$, $K:(A\,F)(B\,C)(D\,E) = 1 + e^{i(-\alpha+\beta-\gamma)}$, $K:(E\,A)(B\,C)(F\,D) = 1 + e^{i(\alpha+\beta-\gamma)}$, $K:(B\,D)(C\,A)(E\,F) = 1 + e^{i(-\alpha-\beta+\gamma)}$. Hieraus folgt:

1. $(C\,A\,B\,D) = [1 + e^{i(\alpha-\beta+\gamma)}]:[1 + e^{i(-\alpha-\beta+\gamma)}]$,
2. $(A\,B\,C\,E) = [1 + e^{i(\beta-\gamma+\alpha)}]:[1 + e^{i(-\beta-\gamma+\alpha)}]$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. $(B\,C\,A\,F) = [1 + e^{i(\gamma-\alpha+\beta)}] : [1 + e^{i(-\gamma-\alpha+\beta)}]$,
4. $(F\,D\,E\,A) = [1 + e^{i(-\alpha+\beta-\gamma)}] : [1 + e^{i(\alpha+\beta-\gamma)}]$,
5. $(D\,E\,F\,B) = [1 + e^{i(-\beta+\gamma-\alpha)}] : [1 + e^{i(\beta+\gamma-\alpha)}]$,
6. $(E\,F\,D\,C) = [1 + e^{i(\gamma+\alpha-\beta)}] : [1 + e^{i(\gamma+\alpha-\beta)}]$,
7. $(A\,C\,D\,E) = [1 + e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}] : [1 + e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)}]$,
8. $(B\,A\,E\,F) = [1 + e^{i(\beta+\gamma+\alpha)}] : [1 + e^{i(-\beta+\gamma+\alpha)}]$,
9. $(C\,B\,F\,D) = [1 + e^{i(\gamma+\alpha+\beta)}] : [1 + e^{i(-\gamma+\alpha+\beta)}]$,
10. $(A\,B\,D\,F) = [1 + e^{i(-\alpha-\beta-\gamma)}] : [1 + e^{i(\alpha-\beta-\gamma)}]$,
11. $(B\,C\,E\,D) = [1 + e^{i(-\beta-\gamma-\alpha)}] : [1 + e^{i(\beta-\gamma-\alpha)}]$,
12. $(C\,A\,F\,E) = [1 + e^{i(-\gamma-\alpha-\beta)}] : [1 + e^{i(\gamma-\alpha-\beta)}]$.

Nach Möbius ist $(A\,D\,E\,B) = (A\,C\,E\,B)\,(A\,D\,E\,C) = [1 - (A\,E\,C\,B)]\,[1 - (A\,E\,D\,E)] = [e^{i(\beta-\gamma+\alpha)} - e^{i(-\beta-\gamma+\alpha)}] \cdot [e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} - e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)}] : [1 + e^{i(\beta-\gamma+\alpha)}] \cdot [1 + e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}]$. Es ist also

13. $(A\,B\,E\,D) = -\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) : \sin\alpha\sin\beta$,
14. $(A\,E\,B\,D) = \cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) : \sin\alpha\sin\beta$,
15. $(B\,C\,F\,E) = -\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) : \sin\beta\sin\gamma$,
16. $(B\,F\,C\,E) = \cos\frac{1}{2}(-\beta+\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma+\alpha) : \sin\beta\sin\gamma$,
17. $(C\,A\,D\,F) = -\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta) : \sin\gamma\sin\alpha$,
18. $(C\,A\,D\,F) = \cos\frac{1}{2}(-\gamma+\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha+\beta) : \sin\gamma\sin\alpha$.[1]

53. Anmerkung. Die letzten Formeln 1—18 gelten auch für die Fälle: I. A = D, II. A = D und B = E, III. A = D, B = E und C = F. Dabei sind die Winkel α, β, γ als durch die Gleichungen IV—VII bestimmt anzusehen.

54. Die nach 52, I—IV definierten Winkel α, β, γ, unter denen sich drei kohärente, nicht durch einen Punkt gehende Punktreihen x y z paarweise schneiden, sind gleichzeitig Schnittwinkel (y z), (z x), (x y) im Sinne von 39. — Beweis. Werden zunächst nur die 2 Gleichungen $(A\,y\,D\,z) = (C\,A)\,(B\,D)\,(E\,D)\,(F\,A) : (A\,B)\,(D\,C)\,(D\,F)\,(A\,E) = \varkappa : \rho = e^{2i\alpha}$, $(B\,z\,E\,x) = (A\,B)\,(C\,E)\,(F\,E)\,(D\,B) : (B\,C)\,(E\,A)\,(E\,D)\,(B\,F) = \lambda : \sigma = e^{2i\beta}$ zu Grunde gelegt, so erhält man daraus im Sinne von 39 $\cos(x\,y) = \{(\varkappa-\rho)(\lambda-\sigma)[(A\,B\,E\,D) - (A\,E\,B\,D)] - (\varkappa+\rho)(\lambda+\sigma)\} : 4\sqrt{\varkappa\rho}\,.\sqrt{\lambda\sigma}$, $\cos(y\,z) = (\varkappa+\rho) : 2\sqrt{\varkappa\rho}$, $\cos(z\,x) = (\lambda+\sigma) : 2\sqrt{\lambda\sigma}$. Mithin ist $\cos(x\,y) : \cos(y\,z)\cos(z\,x) = [(A\,B\,E\,D) - (A\,E\,B\,D)] \cdot \frac{\varkappa:\rho-1}{\varkappa:\rho+1} \cdot \frac{\lambda:\sigma-1}{\lambda:\sigma+1} - 1$. Setzt man 52 gemäss $\varkappa:\rho = e^{2i\alpha}$, $\lambda:\sigma = e^{2i\beta}$, $(A\,B\,E\,D) - (A\,E\,B\,D) = -[\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$

[1] Die Formeln Ziff. 1—18 sind gleichzeitig die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, wenn α, β, γ die Winkel und A, B, C die Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks und D, E, F die seines Gegendreiecks sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$+ \cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)] : \sin\alpha\sin\beta$, so erhält man $\cos(x\,y) : \cos(y\,z)\cos(z\,x) = \cos\gamma : \cos\alpha\cos\beta$. Ebenso ist $\cos(y\,z) : \cos(z\,x)\cos(x\,y) = \cos\alpha : \cos\beta\cos\gamma$ und $\cos(z\,x) : \cos(x\,y)\cos(y\,z) = \cos\beta : \cos\gamma\cos\alpha$. Aus diesen 3 Gleichungen folgt sofort die Behauptung.

55. Zwei Tripel kohärenter nicht ausgearteter Punktreihen $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$, bei denen weder die Reihen $x\,y\,z$ noch die Reihen $x'\,y'\,z'$ einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, sind dann und nur dann zu einander projektiv, wenn sie in ihren sämtlichen Invarianten übereinstimmen. — Beweis. Wegen dieser Übereinstimmung in den Invarianten lassen sich bei den Reihen die Schnittwinkel im Sinne von 39 so wählen, dass $(y\,z) = (y'\,z')$, $(z\,x) = (z'\,x')$, $(x\,y) = (x'\,y')$. Bei geeigneter Anordnung der betreffenden Schnittpunkte A D B E C F und A′ D′ B′ E′ C′ F′ können aber nach 54 diese Winkel durch die im Sinne von 52 definierten Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ und $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ ersetzt werden. Mithin ist dann $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Nach 52 ist der Wert jedes Wurfes, der sich sowohl aus A B C D E F als auch aus A′ B′ C′ D′ E′ F′ bilden lässt, eine eindeutige Funktion von $\alpha\,\beta\,\gamma$, bezüglich von $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$. Mithin ist jeder Wurf bei A B C D E F dem entsprechenden Wurf bei A′ B′ C′ D′ E′ F′ projektiv, da $\alpha\,\beta\,\gamma$ und $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ bezüglich gleich sind. Somit sind die ganzen Konfigurationen A B C D E F und A′ B′ C′ D′ E′ F′ und infolgedessen nach 49 auch die Tripel $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$ projektiv.

56. Haben drei kohärente Punktreihen $x\,y\,z$ einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt, so lassen sich ihre projektiven Beziehungen stets auf die Form $(x\,a) : (x\,\delta) = (y\,b) : (y\,\delta) = (z\,c) : (z\,\delta)$ bringen. Der gemeinschaftliche Schnittpunkt ist dabei $(x\,\delta) = 0$.

57. Sind bei drei kohärenten Punktreihen mit gemeinschaftlichem Schnittpunkte $(x\,a) : (x\,\delta) = (y\,b) : (y\,\delta) = (z\,c) : (z\,\delta)$ die paarweisen Schnittpunkte A D, B D, C D, so ist (A B C D) dem Doppelverhältnisse $[(a\,\delta), (b\,\delta), (c\,\delta), \infty]$ gleich. — Beweis. Für $x = y = C$ wird aus $(x\,a) : (x\,\delta) = (y\,b) : (y\,\delta)$ die Gleichung $(C\,a) - (C\,b) = 0$. Ebenso ist $(A\,b) = (A\,c) = 0$ und $(B\,c) - (B\,a) = 0$. Hieraus ergiebt sich $(A\,B\,C\,D) = (A\,B)(C\,D) : (B\,C)(D\,A) = [(a\,\delta) - (b\,\delta)] : [(c\,\delta) - (b\,d)] = [(a\,\delta), (b\,\delta), (c\,\delta), \infty]$.

58. Bei drei kohärenten Punktreihen, die einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben, lassen sich die Schnittwinkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ je zweier der Reihen so wählen, dass sie 1. der Definition 39 genügen, 2. $\alpha+\beta+\gamma \equiv \pi$, mod 2π und 3. das Doppelverhältnis der Schnittpunkte A B C D der Reihen eine eindeutige Funktion dieser Winkel wird. — Beweis. Bei $(x\,a) : (x\,\delta) = (y\,b) : (y\,\delta) = (z\,c) : (z\,\delta)$ setze man $e^{i\alpha} = -\sqrt{(\delta\,c)} : \sqrt{(\delta\,b)}$, $e^{i\beta} = -\sqrt{(\delta\,a)} : \sqrt{(\delta\,c)}$, $e^{i\gamma} = -\sqrt{(\delta\,b)} : \sqrt{(\delta\,a)}$. Dabei sind, so wird ausserdem festgesetzt, die Vorzeichen der Quadratwurzeln aus $(\delta\,a)$, $(\delta\,b)$, $(\delta\,c)$ zwar an sich beliebig, aber überall übereinstimmend zu nehmen. Aus diesen Gleichungen folgt $\cos\alpha = [(b\,\delta) + (c\,\delta)] : 2\sqrt{(\delta\,b)}\sqrt{(\delta\,c)}$, $\cos\beta = [(c\,\delta) + (a\,\delta)] : 2\sqrt{(\delta\,c)}\sqrt{(\delta\,a)}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\cos\gamma = [(a\,\delta) + (b\,\delta)] : 2\sqrt{(\delta\,a)}\,\sqrt{(\delta\,b)}$. Die auf die obige Weise willkürlich definierten Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma$ sind mithin Schnittwinkel von y z, z x, x y im Sinne von 39. Obwohl diese hier gegebene Definition der früheren 39 nicht widerspricht, so ist sie dennoch mit ihr nicht identisch, sie ist nämlich enger als die letztere. Ferner ist $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, oder $\alpha+\beta+\gamma \equiv \pi$, mod 2π und nach 57 $(A\,B\,C\,D) = [(a\,\delta) - (b\,\delta)] : [(c\,\delta) - (b\,\delta)] = [(b\,\delta)\,e^{-2i\gamma} - (b\,\delta)] : [(b\,\delta)\,e^{2i\alpha} - (b\,\delta)] = (e^{-2i\gamma} - 1) : (e^{2i\alpha} - 1) = -e^{-i(\alpha+\gamma)} \sin\gamma : \sin\alpha = e^{i\beta} \sin\gamma : \sin\alpha$.[1]

59. Stimmen zwei Tripel kohärenter Punktreihen x y z und x′ y′ z′ in allen ihren Invarianten überein, und haben die Reihen des einen Tripels x y z einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt (in dem sich aber keine 2 dieser Reihen berühren), so haben auch die des anderen Tripels x′ y′ z′ einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt. Bei den zwei Reihentripeln können dann im Sinne von 58 die Schnittwinkel so bestimmt werden, dass sie entweder bezüglich gleich oder doch bezüglich entgegengesetzt gleich sind. Im ersten Falle sind die zwei Reihentripel projektiv, nicht aber im letzten. Tripel der zweiten Art sollen symmetrische heissen. — Beweis. Sind $\alpha\,\beta\,\gamma$ im Sinne von 58 definierte Schnittwinkel von x y z, so dass also $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, so können dieselben wegen der Übereinstimmung in sämtlichen Invarianten von x y z und x′ y′ z′ nach 58 und 40 gleichzeitig als im Sinne von 39 definierte Schnittwinkel von x′ y′ z′ gelten. Hätten nun x′ y′ z′ keinen gemeinschaftlichen Schnittpunkt, wären vielmehr A′ D′, B′ E′, C′ F′ durchweg von einander verschiedene Schnittpunkte von y′ z′, z′ x′, x′ y′, so könnten dieselben nach 52 so angeordnet werden, dass $-1 = e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = (A'\,F')\,(B'\,C')\,(D'\,E') : (D'\,C')\,(A'\,D')\,(E'\,F')$ wäre. Nach 27 bestünde dann die Involution A′ D′. B′ E′. C′ F′. Mithin müssten die Reihen x′ y′ z′ identisch sein, was hier nicht der Fall ist. Die Reihen x′ y′ z′ haben darum einen gemeinsamen Schnittpunkt $D' = E' = F'$. Bei beiden Tripeln können mithin nach 56 die projektiven Beziehungen auf die Form gebracht werden $(x\,a) : (x\,\delta) = (y\,b) : (y\,\delta) = (z\,c) : (z\,\delta)$ und $(x'\,a') : (x'\,\delta') = (y'\,b') : (y'\,\delta') = (z'\,c') : (z'\,\delta')$. Wegen der Übereinstimmung in sämtlichen Invarianten folgt aus 40, dass entweder $(a\,\delta) : (b\,\delta) : (c\,\delta) = (a'\,\delta') : (b'\,\delta') : (c'\,\delta')$ oder aber $(a\,\delta) : (b\,\delta) : (c\,\delta) = \frac{1}{(a'\,\delta')} : \frac{1}{(b'\,\delta')} : \frac{1}{(c'\,\delta')}$. Mithin können im Sinne von 58 die Schnittwinkel $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ von x′ y′ z′ so definiert werden, dass im 1. Falle $e^{i\alpha} = -\sqrt{(\delta\,c)} : \sqrt{(\delta\,b)} = -\sqrt{(\delta'\,c')} : \sqrt{(\delta'\,b')} = e^{i\alpha'}$, also $\alpha = \alpha'$ und ebenso $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ wird, und dass im zweiten $e^{i\alpha} = -\sqrt{(\delta\,c)} : \sqrt{(\delta\,b)} = -\sqrt{(\delta'\,b)} : \sqrt{(\delta'\,c)} = e^{-i\alpha'}$, also $\alpha = -\alpha'$ und ebenso $\beta = -\beta'$ und $\gamma = -\gamma'$ wird. Nach 58 ist aber stets $(A\,B\,C\,D) = e^{i\beta} \sin\gamma : \sin\alpha$ und $(A'\,B'\,C'\,D') = e^{i\beta'} . \sin\gamma' : \sin\alpha'$. Im ersten Falle ist mithin A B C D $\curlywedge$ A′ B′ C′ D′, nicht aber im zweiten,

[1] Für $D = \infty$ erhält man hieraus den Sinussatz der ebenen Trigonometrie: $(A - B) : (C - B) = e^{i\beta} \sin\gamma : \sin\alpha$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

weil $\beta = -\beta = 0$ etc. ausgeschlossen ist, indem bei x y z keine Berührungen vorkommen.

60. Ist $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma) = [(u\,b)\lambda - (u\,c)\mu] : [(u\,\beta)\lambda - (u\,\gamma)\mu] = [(v\,c)\mu - (v\,a)\varkappa] : [(v\,\gamma)\mu - (v\,\alpha)\varkappa] = [(w\,a)\varkappa - (w\,b)\lambda] : [(w\,\alpha)\varkappa - (w\,\beta)\lambda]$, so bildet, wie auch die Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu$ gewählt werden mögen, bei den kohärenten Punktreihen x y z u v w jedes der 4 Tripel u y z, v z x, w x y, u v w je ein Büschel (33). Sollen umgekehrt bei 6 kohärenten Punktreihen x y z u v w die Tripel u y z, v z x, w x y je einem Büschel angehören und die Reihen u v w einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben, so lassen sich die projektiven Beziehungen der 6 Reihen auf die obige Form bringen, so dass dann auch die Reihen u v w ein Büschel bilden. Der Beweis ist leicht zu führen.

61. Bei zwei kohärenten Punktreihen soll eine dritte Reihe eine Potenzreihe heissen, wenn sie mit ihnen ein Büschel bildet und ihren Schnittwinkel halbiert.

62. Ist $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = [(w\,a) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,b) : \sqrt{(\beta\,b)}] : [(w\,\alpha) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,\beta) : \sqrt{(\beta\,b)}]$, so ist w eine Potenzreihe von x y. Ist umgekehrt bei zwei kohärenten Punktreihen $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta)$ eine Reihe w Potenzreihe, so lässt sich ihre projektive Beziehung zu x und y auf die obige Form bringen. Darnach giebt es zu 2 kohärenten Punktreihen zwei und nur zwei Potenzreihen. Diese schneiden sich rechtwinklig. Beweis. Aus $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = [(w\,a) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,b) : \sqrt{(\beta\,b)}] : [(w\,\alpha) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,\beta) : \sqrt{(b\,\beta)}]$ folgt nach 29: $4\cos^2(x\,w) = [(a\,\beta) + (b\,\alpha)] : \sqrt{(\alpha\,a)}\sqrt{(\beta\,b)} + 2$. Somit ist nach 39: $4\cos^2(x\,w) = 2\cos(x\,y) + 2$, oder $\cos(x\,y) = \cos 2(x\,w)$. Ebenso ist $\cos(x\,y) = \cos 2(y\,w)$.

63. Anmerkung. Berühren sich die Reihen x y, so artet die eine Potenzreihe in ihrer Beziehung zu x und y aus (28).

64. Ist $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma) = [(u\,b) : \sqrt{(\beta\,b)} - (u\,c) : \sqrt{(\gamma\,c)}] : [(u\,\beta) : \sqrt{(\beta\,b)} - (u\,\gamma) : \sqrt{(\gamma\,c)}] = [(v\,c) : \sqrt{(\gamma\,c)} - (v\,a) : \sqrt{(\alpha\,a)}] : [(v\,\gamma) : \sqrt{(\gamma\,c)} - (v\,\alpha) : \sqrt{(\alpha\,a)}] = [(w\,a) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,b) : \sqrt{(\beta\,b)}] : [(w\,\alpha) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,\beta) : \sqrt{(\beta\,b)}]$ und ist bei jeder der Quadratwurzeln aus $(\alpha\,a)$, $(\beta\,b)$, $(\gamma\,c)$ das Vorzeichen zwar beliebig, aber überall übereinstimmend gewählt, so sind u, v, w bei y z, z x, x y bezüglich Potenzkreise und bilden ein Büschel. Dabei halbieren diese Potenzreihen die im Sinne von 39 definierten Schnittwinkel von x y z. Sind umgekehrt bei drei kohärenten Punktreihen $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma)$ u und v Potenzreihen von y z und z x und hat eine fernere kohärente Reihe w mit x y beide Schnittpunkte und mit u v einen Schnittpunkt gemein, so besteht zwischen den 6 Reihen x y z u v w die obige Beziehung und ist folglich w diejenige Potenzreihe von x y, die mit u v ein Büschel bildet. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus 62, 60 und 39.

65. Werden zwei kohärente Punktreihen x y von einer ferneren kohärenten Punktreihe t orthogonal geschnitten, so wird jede Reihe z des durch x y bestimmten Büschels von t rechtwinklig getroffen. Beweis. Die projektiven Beziehungen von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

t x y z sind offenbar von der Form: $(t\,d) : (t\,\delta) = (x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = [(z\,a)\,\varkappa - (z\,b)\,\lambda] : [(z\,\alpha)\,\varkappa - (z\,\beta)\,\lambda]$. Dabei ist nach 26, 29 und 23 $(a\,\delta) + (d\,\alpha) = (b\,\delta) + (d\,\beta) = 0$. Ferner ist nach 23: $4\cos^2(z\,t) = [(a\,\delta)\,\varkappa - (b\,\delta)\,\lambda + (d\,\alpha)\,\varkappa - (d\,\beta)\,\lambda] : N$, also gleich Null, da der Zähler verschwindet. Nach 26 schneidet mithin t die Reihe z rechtwinklig.

66. Sind x y zwei beliebige kohärente Reihen mit den Doppelpunkten P Q, ist w die eine ihrer beiden Potenzreihen, die ihren Schnittwinkel γ halbiert, und trifft eine fernere kohärente Reihe t die Reihen x y und somit auch w bezüglich in den Punkten A D, B E, J J′ rechtwinklig, so ist bei einer gewissen Anordnung der Punkte $(A\,E\,B\,J) = (B\,D\,A\,J) = (D\,B\,E\,J') = (E\,A\,D\,J') = -\cos\frac{1}{2}\gamma$ und $(A\,E\,B\,J') = (B\,D\,A\,J') = (D\,B\,E\,J) = (E\,A\,D\,J) = \cos\frac{1}{2}\gamma$. Beweis. Nach 61 ist $(x\,w) = (w\,y) = \frac{1}{2}\gamma$ und nach 26 und 25 $(x\,t) = (y\,t) = (w\,t) = \frac{1}{2}\pi$. Mit Hilfe der Formeln Ziff. 1—18 von 52 lassen sich die Werte aller Würfe, die sich aus A D B E J J′ P Q bilden lassen, bei einer bestimmten dort angegebenen Anordnung der Punkte eindeutig berechnen. Darnach haben die obigen Würfe jene Werte. (Einfacher wird der Beweis, wenn die Form $y_1 : y_2 = w_1\,e^{\gamma i} : w_2 = x_1\,e^{2\gamma i} : x_2 = a\,t_2 : t_1$ zu Grunde gelegt wird.)

67. Definition. Zwei oder mehrere reell ähnliche oder reell kreisverwandte Punktfelder sollen kohärent heissen, wenn sie auf einer reellen Ebene oder Kugel so aufeinander liegen, dass sie in ihren kleinsten Teilen gleichwendig sind.

68. Die Beziehung zweier kohärenten Punktfelder x y ist durch $c\,(x\,y) = 0$ gegeben (19).

69. Alles über kohärente Punktreihen unter 20—66 Gesagte gilt im wesentlichen auch von kohärenten Punktfeldern. Dies folgt aus 68. Zwischen beiden besteht nur der Unterschied, dass bei kohärenten Punktfeldern nur reelle Punkte und reelle Beziehungen (67) vorkommen, während bei kohärenten Punktreihen (21) auch imaginäre Punkte und imaginäre projektive Beziehungen zuzulassen sind.

70. Aufgabe. Bei zwei involutorischen Punktfeldern, von denen zwei Paare konjugierter Punkte $A\,A_1$ und $B\,B_1$ gegeben sind, die Doppelpunkte G H zu bestimmen. Analysis. Aus $(A\,B\,A_1\,G) = (A_1\,B_1\,A\,G)$ folgt $(A\,B\,A_1\,G) = (A\,G\,A_1\,B_1)$, oder G liegt auf einem Potenzkreise der 2 durch $A\,A_1\,B$ und $A\,A_1\,B_1$ gehenden Kreise. Konstruktion. Zeichne zu den 2 Kreispaaren $A\,A_1\,B$, $A\,A_1\,B_1$ und $B\,B_1\,A$, $B\,B_1\,A_1$ bezüglich diejenigen Potenzkreise $A\,A_1\,X$ und $B\,B_1\,Y$, welche die von den Kreisbögen $A\,B\,A_1$, $A\,B_1\,A_1$ bezüglich $B\,A\,B_1$, $B\,A_1\,B_1$ gebildeten Winkel halbieren. Diese zwei Potenzkreise schneiden sich in den verlangten Punkten G und H. 1. Anmerkung. Die so erhaltenen Punkte G und H sind stets reell. Da nämlich die Kreisbogen $A\,A_1\,B$ und $A\,A_1\,B_1$ rücksichtlich des Potenzkreises $A\,A_1\,X$ inverse Spiegelbilder sind, so werden die Punkte B und B_1 durch die Kreislinie $A\,A_1\,X$ von einander getrennt, so dass diese jeden durch B und B_1 gehenden Kreis in reellen Punkten schneidet. 2. Anmerkung. Die gegebene Konstruktion versagt nur dann, wenn die Punktepaare $A\,A_1$ und $B\,B_1$ auf einem Kreise oder auf einer Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

liegen und sich nicht trennen. Wie dann zu konstruieren ist, darf als bekannt vorausgesetzt werden.

71. Aufgabe. Bei zwei kohärenten Punktfeldern, von denen 3 Paare entsprechender Punkte $A A_1$, $B B_1$ und $C C_1$ gegeben sind, die Schnittpunkte derselben G und H zu bestimmen. Analysis. Aus $(G A H A_1) = (G B H B_1) = (G C H C_1) = e^{2i\alpha}$ (Vergl. 30) folgt $(H A_1 G A) = (G B H B_1) = (G C H C_1)$. Mithin ist G H das den 2 Involutionen $A B_1 . A_1 B$ und $A C_1 . A_1 C$ gemeinsame Paare konjugierter Punkte. — Konstruktion. Bestimme (nach 70) die Punktepaare M N, P Q, G H so, dass sie bezüglich die Doppelpunkte der 3 Involutionen $A B_1 . A_1 B . M^2 . N^2$, $A C_1 . A_1 C . P^2 . Q^2$ und $M N . P Q . G^2 . H^2$ werden. — Anmerkung. Auch hier sind die Doppelpunkte G und H stets reell.

72. Zu 2 kohärenten Punktfeldern $x (G H A) \barwedge y (G H B)$ die beiden Potenzfelder (61, 62) w (G H Z) und w' (G H Z') zu bestimmen. — Analysis. Nach 30 ist $(G A H B) = e^{2i\alpha}$ und nach 61 $(G A H Z) = (G Z H B) = e^{i\alpha}$. Mithin ist (G A H Z) = (H B G Z). Z lässt sich mithin als Doppelpunkt der Involution A B . G H finden. — Konstruktion. Bestimme bei G H . A B die Doppelpunkte Z und Z'. Durch $x (G H A) \barwedge y (G H B) \barwedge w (G H Z) \barwedge w' (G H Z')$ sind die Potenzfelder w und w' bestimmt. — Anmerkung. Ist G = H, so ist (A G B Z) = — 1 und Z' = G (vergl. 28).

73. Zu zwei kohärenten Punktfeldern x und y ein zu beiden orthogonales Punktfeld z herzustellen. — Lösung. Bestimme 5 Punkte A B C D E so, dass $x (A C D) \barwedge y (B D E)$, und setze $y (B D E) \barwedge z (D B A)$.

---

74. I. Die Aufgabe 5 ist für den Fall zu lösen, dass von den 9 kohärenten Punktreihen a b c u v w x y z ausserdem noch vorausgesetzt, respektive verlangt wird, dass keine drei unter ihnen ein Büschel bilden und die Reihen a, b, c keinen gemeinsamen Punkt haben.

II. Analysis. Die Reihen der Paare v w, w u, u v, x v, y w, z u, x w, y u, z v mögen sich bezüglich in den Punkten $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ berühren und die der Paare b c, c a, a b sich unter den nach 39 definierten Winkeln A, B, C schneiden. Da x y z $\barwedge$ a b c, so sind A, B, C nach 55 (Umkehrung) und 40 gleichzeitig Schnittwinkel in demselben Sinne bei x y z. Da die Reihe w von den Reihen x y u v bezüglich in den stets von einander verschiedenen Punkten $\rho\lambda\beta\alpha$ berührt wird, und sich ausserdem auch x und v und ebenso u und y berühren, so ist nach 45 und 46, II—IV $(\rho\lambda\beta\alpha) = \sqrt{\cos^2\frac{1}{2}(x y)} = \sqrt{\cos^2\frac{1}{2} C}$. Hier kann stets $\sqrt{\cos^2\frac{1}{2} C} = -\cos\frac{1}{2} C$ gesetzt werden, da man, falls bei der Wurzelausziehung das positive Vorzeichen zu nehmen wäre, $C + 2\pi$ statt C eintreten lassen kann, ohne gegen die Definition 39 zu verstossen. Es ist also $(\rho\lambda\beta\alpha) = -\cos\frac{1}{2} C$ oder $(\alpha\lambda\beta\rho) = 2\cos^2\frac{1}{4} C$. Nach Möbius ist aber $(\alpha\lambda\beta\rho)(\alpha\rho\beta\gamma)(\alpha\gamma\beta\lambda) = 1$. Mithin ist $(\beta\gamma\alpha\lambda) = 2(\beta\gamma\alpha\rho)\cos^2\frac{1}{4} C$. Da bei jedem der 2 Tripel v w u und v w x die Reihen sich paarweise berühren, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

besteht nach 47 die Involution $\alpha^2 . \gamma\rho . \beta\varkappa$. Nach 27 ist also $(\alpha\rho)(\gamma\varkappa)(\beta\alpha) = (\alpha\varkappa).(\gamma\alpha)(\beta\rho)$ oder $(\alpha\beta)(\gamma\varkappa) : (\beta\gamma)(\varkappa\alpha) = -(\gamma\alpha)(\rho\beta) : (\beta\gamma)(\alpha\rho)$ oder $(\alpha\beta\gamma\varkappa)(\beta\gamma\alpha\rho) = -1$. Mithin ist $(\beta\gamma\alpha\lambda)(\alpha\beta\gamma\varkappa) = -2\cos^2\frac{1}{4}C$. Ebenso ist $(\gamma\alpha\beta\mu)(\beta\gamma\alpha\lambda) = -2\cos^2\frac{1}{4}A$ und $(\alpha\beta\gamma\varkappa)(\gamma\alpha\beta\mu) = -2\cos^2\frac{1}{4}B$. Hieraus folgt $(\alpha\beta\gamma\varkappa)^2 (\beta\gamma\alpha\lambda)^2 (\gamma\alpha\beta\mu)^2 = -8\cos^2\frac{1}{4}A\cos^2\frac{1}{4}B\cos^2\frac{1}{4}C$ oder $(\alpha\beta\gamma\varkappa)(\beta\gamma\alpha\lambda)(\gamma\alpha\beta\mu) = \pm 2\,i\sqrt{2}.\cos\frac{1}{4}A\cos\frac{1}{4}B.\cos\frac{1}{4}C$. Hier kann links das Minuszeichen weggelassen werden, indem es dadurch berücksichtigt werden kann, dass man etwa $A + 4\pi$ statt A setzt, was wiederum der Definition 39 nicht zuwiderläuft. Man erhält dann:

1. $(\alpha\beta\gamma\varkappa) = -(\alpha\gamma\beta\rho) = i\sqrt{2}\cos\frac{1}{4}B\cos\frac{1}{4}C : \cos\frac{1}{4}A$,
2. $(\beta\gamma\alpha\lambda) = -(\beta\alpha\gamma\sigma) = i\sqrt{2}\cos\frac{1}{4}C\cos\frac{1}{4}A : \cos\frac{1}{4}B$,
3. $(\gamma\alpha\beta\mu) = -(\gamma\beta\alpha\tau) = i\sqrt{2}\cos\frac{1}{4}A\cos\frac{1}{4}B : \cos\frac{1}{4}C$.

Darnach lassen sich mittels der 3 bekannten Punkte $\alpha\beta\gamma$ die unbekannten Berührungspunkte $\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ und dann nach 43 die projektiven Beziehungen der Reihen u v w x y z bestimmen.

III. Konstruktion. Bestimme die Schnittwinkel A, B, C von b c, c a, a b nach 39 (unter Berücksichtigung von 46 II—IV), den obigen Beziehungen 1—3 gemäss die Punkte $\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ und mit Hilfe der bezüglichen Berührungspunkte $\alpha\varkappa\rho$, $\beta\lambda\sigma$, $\gamma\mu\tau$ nach 43 die projektiven Beziehungen der Reihentripel x v w, y w u, z u v. Auf diese Art gelangt man zum Resultat durch Rechnung. Wie eine Lösung durch Zeichnung zu erhalten ist, folgt später unter 76 III.

IV. Beweis. Da nach Konstruktion $(\alpha\beta\gamma\varkappa) = -(\alpha\gamma\beta\rho)$, so ist $(\beta\gamma)(\alpha\rho).(\varkappa\alpha) = (\rho\varkappa)(\alpha\beta)(\gamma\alpha)$. Nach 27 besteht mithin die Involution $\alpha^2 . \beta\varkappa . \gamma\rho$. Somit sind nach 43 und 47 durch diese 5 Punkte $\alpha\beta\gamma\varkappa\rho$ 4 kohärente Punktreihen u v w x eindeutig derart bestimmt, dass die Reihen der Paare v w, w u, u v, v x, x w, sich bezüglich in $\alpha\beta\gamma\varkappa\rho$ berühren. Dabei sind nach 43 die neuen Reihen u v w mit den gegebenen gleich bezeichneten identisch. In gleicher Weise sind, was aus 2 und 3 folgt, durch die Punkte $\beta\gamma\alpha\lambda\sigma$ und $\gamma\alpha\beta\mu\tau$ je 4 kohärente Punktreihen v w u y und w u v z eindeutig bestimmt. Mithin stehen auch die Reihen x y z mittels der Reihen u v w unter sich in projektiver Beziehung. Damit ist gezeigt, dass durch die Punkte $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ sich drei zu u v w kohärente Reihen x y z so bestimmt sind, dass die Reihen der Paare x v, y w, z u, x w, y u, z v sich berühren. Da die Punkte $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ durchweg von einander verschieden sind, so bildet keines der Tripel u v w, x v w, y w u, z u v ein Büschel. Mithin erübrigt nur noch zu zeigen, dass die Tripel x y z und a b c projektiv sind. Sind (x y), (y z), (z x) die noch unbekannten Schnittwinkel bei den konstruierten Reihen x y z, so können dieselben nach 45 und 46 II—IV so vorausgesetzt werden, dass $(\rho\lambda\beta\alpha) = \sqrt{\cos^2\frac{1}{2}(x\,y)}$, $(\sigma\mu\gamma\beta) = \sqrt{\cos^2\frac{1}{2}(y\,z)}$, $(\tau\varkappa\alpha\gamma) = \sqrt{\cos^2\frac{1}{2}(z\,x)}$, $\cos(u\,v) = \cos(v\,w) = \cos(w\,u) = \cos(x\,v) = \cos(y\,w) = \cos(z\,u) = \cos(x\,w) = \cos(y\,u) = \cos(z\,u) = +1$. Da dann bei jedem der Tripel u v w, x v w, y w u, z u v die Schnittwinkel nach 44 im Sinne von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

39 definiert sind, so sind damit nach 42 auch die Schnittwinkel (x y), (y z), (z x) in demselben Sinne (nach 39) definiert. Nach 40 ergeben sich mithin aus cos (x y), cos (y z), cos (z x) sämtliche Invarianten von x y z. Aus den obigen Beziehungen 1—3 folgt ferner $(\rho\,\lambda\,\beta\,\alpha) = -\cos\frac{1}{2}C$, $(\sigma\,\mu\,\gamma\,\beta) = -\cos\frac{1}{2}A$, $(\tau\,\varkappa\,\alpha\,\gamma) = -\cos\frac{1}{2}B$. Mithin ist cos (y z) = cos A, cos (z x) = cos B, cos (x y) = cos C. Da sich nach 40 ausserdem auch sämtliche Invarianten von a b c durch cos A, cos B, cos C ausdrücken lassen, so stimmen die zwei Tripel x y z und a b c in sämtlichen Invarianten überein und sind nach 59 und 55 projektiv.

V. Determination. Nach Analysis und Beweis liefert jedes Winkeltripel A B C, das der Definition 39 unter Berücksichtigung von 46 II—IV genügt, ein bestimmtes Punktsextupel $\varkappa\,\lambda\,\mu\,\rho\,\sigma\,\tau$ und damit je eine und nur je eine Lösung der Aufgabe. Ist nun A B C ein derartiges Winkeltripel, so liefert auch jedes Tripel von der Form $\pm A + 2m\pi$, $\pm B + 2n\pi$, $\pm C + 2p\pi$, wenn m, n, p ganze Zahlen sind, je eine Lösung. Unter diesen ergeben die Kombinationen $A + 2\pi$, $B + 2\pi$, $C + 2\pi$; A, B, $c + 2\pi$; A, $B + 2\pi$, C; $A + 2\pi$, B, C; A, $B + 2\pi$, $C + 2\pi$; $A + 2\pi$, B, $C + 2\pi$; $A + 2\pi$, $B + 2\pi$, C im allgemeinen, wenn nicht A, B, C singuläre Werte haben, verschiedene Sextupel $\varkappa\,\lambda\,\mu\,\rho\,\sigma\,\tau$ und damit verschiedene Lösungen. Die übrigen Kombinationen liefern entweder dieselben Wurfwerte $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa)$, $(\beta\,\gamma\,\alpha\,\lambda)$ etc., oder diesen entgegengesetzt gleiche Werte. Auf diese Art erhält man also $8 \cdot 2 = 16$ verschiedene Lösungen. Nach 41 sind ferner auch A, $B + \pi$, $C + \pi$; $A + \pi$, B, $C + \pi$; $A + \pi$, $B + \pi$, C hierher gehörige Winkeltripel. Jedes derselben liefert wieder in gleicher Weise je 16 neue verschiedene Lösungen. Mithin lässt die obige Aufgabe, da andere hierher gehörige Winkelkombinationen nicht vorhanden sind, im ganzen, wenn die Reihen a, b, c nicht singulärer Natur sind, 64 verschiedene Lösungen zu. Sollen nun kohärente Reihen nur dann als reell gelten, wenn sowohl ihre Träger als auch ihre projektiven Beziehungen reell sind, so ist hier nach 43 eine Lösung dann und nur dann reell, wenn die Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\rho\,\sigma\,\tau$ reelle Punkte eines einzigen (reellen) Trägers sind. Dies ist nach 1—3 der Fall, wenn die Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma$ und die Zahlen $i\cos\frac{1}{4}A\cos\frac{1}{4}B : \cos\frac{1}{4}C$, $i\cos\frac{1}{4}B \cdot \cos\frac{1}{4}C : \cos\frac{1}{4}A$, $i\cos\frac{1}{4}C\cos\frac{1}{4}A : \cos\frac{1}{4}B$ durchweg reell sind. Das Nähere darüber giebt die VIII. Tabelle (vergl. X. Tabelle), in der unterhalb r, i, k bezüglich die Anzahlen der reellen und der rein und komplex imaginären Lösungen stehen.

75. Anmerkung. Wird die Aufgabe 74 dahin abgeändert, dass die Reihen a, b, c einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben sollen, so ist die Anzahl der Lösungen bei der auf diese Art vereinfachten Aufgabe im allgemeinen nur halb so gross. Ist nämlich a′ b′ c′ ein zu a b c symmetrisches (59), jedoch nicht projektives Reihentripel, so können nach 59 A, B, C und — A, — B, — C als zu diesen Tripeln gehörige Schnittwinkel gelten. Wird dann wie bei der Aufgabe 74 konstruiert, so erhält man stets, mag man A, B, C oder — A, — B, — C zu Grunde legen, nach 74 II 1—3 stets die nämlichen Punkte $\varkappa\,\lambda\,\mu\,\rho\,\sigma\,\tau$, und dies, wie bei 74, im Ganzen 64 mal. Das durch eines dieser 64 Punktsextupel bestimmte Reihentripel x y z ist nach 59 entweder zu a b c

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder zu a′ b′ c′ projektiv, bildet also eine entweder zu a b c oder zu a′ b′ c′ gehörige Lösung. Da die Tripel a b c und a′ b′ c′ gleichwertig sind, so müssen bei a b c so viel Lösungen wie bei a′ b′ c′ im allgemeinen vorhanden sein. Von den obigen 64 Tripeln gehören mithin 32 zu a b c und 32 zu a′ b′ c′ als Lösungen.

76. I. Das der Aufgabe 74 entsprechende Problem über kohärente Punktfelder ist zu lösen (vergl. 67—69).

II. Lösung. Nach 69 ist die allgemeine Lösung der Aufgabe 74 gleichzeitig eine vollständige Lösung der vorliegenden.

III. Konstruktion. Stelle zu den Felderpaaren b c, c a, a b bezüglich drei ein Büschel bildende Potenzfelder d, e, f (72, 64) und drei mit a b c kohärente Punktfelder derart her, dass diese die Felder der drei Büschel b c d, c a e, a b f bezüglich in den Punktepaaren $B_1 E_1$, $C_1 F_1$, $G G' — C_2 F_2$, $A_2 D_2$, $H H' — A_3 D_3$, $B_3 E_3$, $J J'$ orthogonal schneiden (73, 71). Bestimme zu einem beliebig angenommenen reellen Punkte $\varkappa'$ 6 Punkte $\rho' \lambda' \sigma' \mu' \tau' \varkappa''$ derart, dass $\alpha \beta \gamma \varkappa' \measuredangle \alpha \varkappa' \rho' \beta$, $A_3 E_3 B_3 J \measuredangle \alpha \beta \lambda' \rho'$, $\beta \gamma \alpha \lambda' \measuredangle \beta \lambda' \sigma' \gamma$, $B_1 F_1 C_1 G \measuredangle \beta \gamma \mu' \sigma'$, $\gamma \alpha \beta \mu' \measuredangle \gamma \mu' \tau' \alpha$, $C_2 D_2 A_2 H \measuredangle \gamma \alpha \varkappa'' \tau'$, zu der Involution $\gamma \alpha \,.\, \varkappa' \varkappa''$ die Doppelpunkte $\varkappa$ und $\varkappa_0$, zu $\varkappa$ 5 Punkte $\rho \lambda \sigma \mu \tau$, die von $\varkappa$ so abhängen, wie $\rho' \lambda' \sigma' \mu' \tau'$ von $\varkappa'$, und endlich nach 43 (Ende) 3 Tripel kohärenter Punktfelder x v w, y w u, z u v, bei denen sich die Felder paarweise bezüglich in den Punkten $\alpha \varkappa \rho$, $\beta \lambda \sigma$, $\gamma \mu \tau$ berühren. Dann sind u v w gleichzeitig die gegebenen und x y z die gesuchten Punktfelder.

IV. Anmerkung. Diese Konstruktion ist, wie aus 64, 65, 66 (Vergl. auch 15, III, IV) hervorgeht, nur eine nähere Anführung von 74 III. Ein Beweis für ihre Richtigkeit ist mithin nicht mehr erforderlich.

V. Determination. Die Gesamtanzahl der Lösungen ist dieselbe wie bei 74. Dabei ist jede Lösung reell, weil die konstruierten Gebilde d e f (72, 71, 64) $B_1 C_1 E_1 F_1$ $C_2 A_2 F_2 D_2$ $A_0 B_3 D_0 E_3$ $G G' H H' J J'$ (73, 72, 71, 70) $\varkappa' \rho' \lambda' \sigma' \mu' \tau' \varkappa''$ $\varkappa$ (70) $\rho \lambda \sigma \mu \tau$ und infolgedessen auch nach 43 die Reihen x y z reell sind. Die IX. Tabelle giebt unter der Voraussetzung, dass a, b, c keinen gemeinsamen Punkt haben, die Anzahlen der Lösungen für die einzelnen Fälle an.

77. I. Die Aufgabe 4 ist für den Fall zu lösen, dass von den Kreisen a b c u v w x y z ausserdem noch vorausgesetzt, respektive verlangt wird, dass keine drei unter ihnen ein Büschel bilden und die Kreise a, b, c keinen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben.

II. Lösung. Die gegebenen Kreise a b c u v w seien zunächst durchweg reell. Sind bei reellen Kreisen (oder Geraden) einer Ebene oder Kugel $K_1 K_2 K_3 \ldots$ die Punktepaare $P Q$, $P_2 Q$, $P_3 Q \ldots$ bezüglich reelle konjugierte Pole, so beschreiben, wenn Q veränderlich ist, die Punkte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ je ein dem von Q erzeugten Felde kreisverwandtes und in den kleinsten Teilen ungleichwendig ähnliches Punktfeld. Die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so von $P_1 P_2 P_3 \ldots$ erzeugten Felder sind mithin unter sich kreisverwandt und in den kleinsten Teilen gleichwendig ähnlich, also kohärent (67). Bei 3 Kreisen $K_1 K_2 K_3$ dieser Art seien A B C die Mittelpunkte $r_1 r_2 r_3$ die Radien und $m_1 m_2 m_3$ die Centralen (Fig. 11). Die Schnittwinkel bei je zweien dieser Kreise sollen durch die Gleichungen $\cos(K_2 K_3) = (m_1^2 - r_2^2 - r_3^2) : 2 r_2 r_3$, $\cos(K_3 K_1) = (m_2^2 - r_3^2 - r_1^2) : 2 r_3 r_1$, $\cos(K_1 K_2) = (m_3^2 - r_1^2 - r_2^2) : 2 r_1 r_2$ definiert sein. Ausserdem wird hier noch festgesetzt, dass jeder der Radien als positiv oder als negativ, jedoch an verschiedenen Stellen der Rechnung stets in demselben Sinne zu nehmen ist. (Dadurch wird den 4 Ähnlichkeitsaxen der Kreise $K_1 K_2 K_3$ je ein Schnittwinkeltripel zugeordnet.) Wird das Kreistripel $K_1 K_2 K_3$ durch irgend eine Inversion in ein anderes $K_1' K_2' K_3'$ verwandelt, so ist, wenn die obige Definition auch hier festgehalten wird, bekanntlich $\cos^2(K_2 K_3) = \cos^2(K_2' K_3')$, $\cos^2(K_3 K_1) = \cos^2(K_3' K_1')$, $\cos^2(K_1 K_2) = \cos^2(K_1' K_2')$, $\cos(K_2 K_3) \cos(K_3 K_1) \cos(K_1' K_2') = \cos(K_2' K_3') \cos(K_3 K_1) \cdot \cos(K_1' K_2')$. Alle bei $K_1 K_2 K_3$ vorkommenden absoluten Invarianten lassen sich mithin durch die auf obige Art definierten Kosinus der Schnittwinkel eindeutig darstellen). (Vergl. 40.) Bekannt ist ferner, dass die auf obige und die gebräuchliche Art bestimmten Schnittwinkel übereinstimmen, wenn die Kreise reelle Punkte gemein haben. Bei den Kreisen $K_1 K_2$ seien $B A_1$ und $A B_1$ bezüglich konjugierte Pole. Sind D E F die Spiegelbilder der Punkte A B C rücksichtlich irgend einer reellen Geraden (S. Fig. 11), so ist unter Benutzung Gaussischer Koordinaten $(B-C)(E-F) = m_1^2$, $(C-A)(F-D) = m_2^2$, $(A-B)(D-E) = m_3^2$, $(E-F) + (F-D) + (D-E) = 0$, oder $m_1^2 : (B-C) + m_2^2 : (C-A) + m_3^2 : (A-B) = 0$ oder 1. $m_1^2 (A-B)(C-A) + m_2^2 (B-C)(A-B) + m_3^2 (C-A)(B-C) = 0$. Ferner ist (Fig. 11) $(A-A_1) : (A-B) = (r_1^2 : m_3) : m_3 = r_1^2 : m_3^2$, oder $A_1 = [m_3^2 A - r_1^2 (A-B)] : m_3^2$. Ebenso ist $B_1 = [m_3^2 B + r_2^2 (A-B)] : m_3^2$. Setzt man bei den Kreisen $K_1 K_2$ für den obigen veränderlichen Punkt Q nach einander ∞, A, B, so erhält man für P_1 die Punkte A, ∞, A_1, und für P_2 die Punkte B, B_1, ∞. Die projektive Beziehung der von $P_1 P_2$ erzeugten kohärenten Punktfelder x y ist durch diese drei Paare entsprechender Punkte $x\ (A\ \infty\ A_1) \barwedge y\ (B\ B_1\ \infty)$ nach 69 und 20 eindeutig bestimmt. Dieselbe ist demnach $x y - B_1 x - A_1 y + A B_1 + B A_1 - A B = 0$, oder 2. $m_3^2 x y - [m_3^2 B + r_2^2 (A-B)] x - [m_3^2 A - r_1^2 (A-B)] y + [m_3^2 A B + (A-B)(r_2^2 A - r_1^2 B)] = 0$. Ebenso ist 3. $m_1^2 y z - [m_1^2 C + r_3^2 (B-C)] y - [m_1^2 B - r_2^2 (B-C)] z + [m_1^2 B C + (B-C)(r_3^2 B - r_2^2 C)] = 0$, 4. $m_2^2 z x - [m_2^2 A + r_1^2 (C-A)] z - [m_2^2 C - r_3^2 (C-A)] x + (m_2^2 C A + (C-A)(r_1^2 C - r_3^2 A)] = 0$.

Bildet man bei diesen 3 kohärenten Punktfeldern x y z, die aus den Kreisen $K_1 K_2 K_3$ hervorgegangen sind und deren projektive Beziehungen symbolisch $a(y z) = b(z x) = c(x y) = 0$ (vergl. 19) sein mögen, nach 22, 23, 37 die Invarianten, so erhält man $a_{12} - a_{21} = (r_2^2 + r_3^2 - m_1^2)(B-C)$, $b_{12} - b_{21} = (r_3^2 + r_1^2 - m_2^2) \cdot (C-A)$, $c_{12} - c_{21} = (r_1^2 + r_2^2 - m_3^2)(A-B)$, $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = r_2^2 r_3^2 \cdot (B-C)^2$, $b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = r_3^2 r_1^2 (C-A)^2$, $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = a b (A-B)^2$, $b_{11} c_{22} + b_{22} c_{11} - b_{12} c_{12} - b_{21} c_{21} = -r_1^2 [m_2^2 (A-B)(B-C) + m_3^2 (C-A) \cdot$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(B - C) + (r_2^2 + r_3^2)\,(A - B)\,(C - A)]$, oder wegen der Relation 1) : $b_{11}\,c_{22} + b_{22}\,c_{11} - b_{12}\,c_{12} - b_{21}\,c_{21} = -r_1^2\,(r_2^2 + r_3^2 - m_1^2)\,(A - B)\,(C - A)$, $\cos^2(y\,z) = (a_{12} - a_{21})^2 : 4\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) = (m_1^2 - r_2^2 - r_3^2)^2 : 4\,r_2^2\,r_3^2$, $\cos^2(z\,x) = (m_2^2 - r_3^2 - r_1^2)^2 : 4\,r_3^2\,r_1^2$, $\cos^2(x\,y) = m_3^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 : 4\,r_1^2\,r_2^2$. Setzt man hier, was mit den 3 letzten Gleichungen verträglich ist, $\cos(y\,z) = (m_1^2 - r_2^2 - r_3^2) : 2\,r_2\,r_3$, $\cos(z\,x) = (m_2^2 - r_3^2 - r_1^2) : 2\,r_3\,r_1$, $\cos(x\,y) = m_3^2 - r_1^2 - r_2^2) : 2\,r_1\,r_2$, und betrachtet auch hier die Radien bald als positiv und bald als negativ, so erhält man hieraus $\cos(z\,x)\cos(x\,y) : \cos(y\,z) = (b_{12} - b_{21}) \cdot (c_{12} - c_{21}) : 2\,(b_{11}\,c_{22} + b_{22}\,c_{11} - b_{12}\,c_{12} - b_{21}\,c_{21})$. Werden andererseits die Schnittwinkel der Reihen $x\,y\,z$ nach 39 definiert, so erhält man für die Quadrate ihrer Kosinus und für $\cos(z\,x)\cos(x\,y) : \cos(y\,z)$ dieselben Werte (vergl. 35, 40). Mithin sind diese Definitionen von $(x\,y)$, $(y\,z)\,(z\,x)$ mit denen in 39 und den obigen von $(K_1\,K_2)$, $(K_2\,K_3)$, $(K_3\,K_1)$ identisch. Das Analoge gilt offenbar auch von mehr als 3 Kreisen und den daraus hervorgehenden kohärenten Reihen. Man hat daher den Satz: „Es lassen sich n reellen Kreisen oder Geraden einer Ebene oder Kugel n kohärente Punktfelder derart eindeutig zuordnen, dass die auf obige Art definierten Schnittwinkel (zweier beliebigen Kreise) gleichzeitig Schnittwinkel der ihnen entsprechenden Punktfelder im Sinne von 39 sind". Diese für reelle Kreise geltenden Resultate bleiben auch für imaginäre Kreise bestehen, wenn folgende Definitionen[1] aufgestellt werden: 1. Ein imaginärer Punkt einer reellen Ebene oder Kugel ist ein Paar reeller mit einander nicht vertauschbarer Punkte. Von diesen möge der eine als Nord- und der andere als Südpol des imaginären Punktes bezeichnet werden. Zwei imaginäre Punkte sind konjugiert, wenn der Nordpol des einen der Südpol des anderen ist und umgekehrt. Ein imaginärer Punkt artet in einen reellen aus, wenn sein Nordpunkt auf seinen Südpunkt fällt. Eine (imaginäre oder reelle) Gerade einer reellen Ebene ist der Träger aller (imaginären und reellen) Punkte, deren Nord- und Südpole zwei ungleichwendig ähnliche Punktfelder bilden. Zwei Gerade sind konjugiert imaginär, wenn der konjugierte Punkt irgend eines Punktes der einen stets ein Punkt der anderen ist. Eine Gerade ist reell, wenn sie mit der ihr konjugierten identisch ist. 3. Ein (imaginärer oder reeller) Kreis einer reellen Ebene oder Kugel ist der Träger aller (imaginären und reellen) Punkte, deren Nord- und Südpole zwei kreisverwandte, in ihren kleinsten Teilen ungleichwendig ähnliche Punktfelder bilden. Zwei Kreise sind konjugiert imaginär, wenn der konjugierte Punkt irgend eines Punktes des einen Kreises stets ein Punkt des anderen ist. Ein Kreis ist reell, wenn er mit dem ihm konjugierten Kreise identisch ist. (Derselbe ist dann auch im gebräuchlichen Sinne ein reeller Kreis, bei dem jeder Peripheriepunkt einen reellen Punkt und jedes Paar konjugierter Pole zwei imaginäre Punkte desselben darstellt. Ist bei n durchweg oder

---

[1] Diese Darstellungsweise des Imaginären, die durch Spezialisierung aus der v. Staudt'schen (*Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856) hervorgeht, hat zuerst Laguerre (*Nouv. Ann. d. Math.*, 1870) gegeben. Der Verfasser ist unabhängig von Laguerre, ohne dessen Arbeiten zu kennen, zu der nämlichen Methode, das Imaginäre zu veranschaulichen, gelangt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zum Teil imaginären oder durchweg reellen Geraden oder Kreisen dieser Art $K_1 K_2 K_3 \ldots Q$ ein beweglicher, allen gemeinsamer Südpol, so erzeugen die dazu gehörigen Nordpole $P_1 P_2 P_3 \ldots$ kohärente Punktfelder.) 4. Die Schnittwinkel der letzteren Punktfelder sollen gleichzeitig als Schnittwinkel der betreffenden Kreise gelten.[1]

Damit ist nicht nur die obige, sondern jede Aufgabe über reelle oder imaginäre Gerade und Kreise, die auf einer reellen Ebene oder Kugel liegen, in eine ihr äquivalente Aufgabe über kohärente Punktfelder im wesentlichen umgewandelt.

Anmerkung. Arten die obigen Kreise $K_1 K_2 K_3$ (Fig. 11) in 3 ein Dreieck bildende reelle Gerade aus (Fig. 14), so haben die ihnen äquivalenten kohärenten Punktfelder einen gemeinschaftlichen (unendlich weit entfernten) Schnittpunkt und mit dem Dreiecke übereinstimmende Winkel. Die projektiven Beziehungen der Reihen $(P_3 - A)(y - A) - (P_2 - A)(z - A) = 0$, $(P_1 - B)(z - B) - (P_3 - B)(x - B) = 0$, $(P_2 - C)(x - C) - (P_1 - C)(y - C) = 0$, aus denen sich diese Behauptung ergiebt, sind leicht abzuleiten.

III. Determination. Eine nähere Untersuchung über die Realität der Lösungen für den Fall, in dem die gegebenen Kreise durchweg oder zum Teil imaginär sind, darf, weil sie zu wenig Interesse bietet, unterbleiben. Die Anzahl der Lösungen ist dann im allgemeinen 64. Sind die gegebenen Kreise sämtlich reell, so ist eine Lösung dann und nur dann reell, wenn der Wert jedes der Würfe $\alpha\beta\gamma\varkappa$, $\beta\gamma\alpha\lambda$, $\gamma\alpha\beta\mu$ (74 II 1, 2, 3) rein imaginär ist. In ausführlichster Weise giebt darüber die X. Tabelle (1—34) Aufschluss. Dieselbe ist wie die vorhergehenden eingerichtet. Ausserdem steht für $\cos\frac{1}{4}(b\,c)$, $\cos\frac{1}{4}[(b\,c)+\pi]$, $\cos\frac{1}{4}[(b\,c)+2\pi]$, $\cos\frac{1}{4}[(b\,c)+3\pi]$ kurz bezüglich eins, zwei, drei, vier, wobei die Ziffer eine römische, eine fett oder klein gedruckte arabische ist, je nachdem der betreffende Kosinus reell, rein oder komplex imaginär ist. Für $\cos\frac{1}{4}(b\,c)$, $\cos\frac{1}{4}(c\,a)$ und $\cos\frac{1}{4}(a\,b)$ steht in einer Vertikale je eine Eins, wenn $(b\,c)$, $(c\,a)$ und $(a\,b)$ irgend ein beliebiges, aber dann festgehaltenes nach 39 bestimmtes Winkeltripel ist, das dann gleichzeitig zu einer der 4 Ähnlichkeitsaxen von $a\,b\,c$ gehört. Dieses Tripel ist jedoch, soweit es möglich ist, ausserdem noch so ausgesucht, dass die betreffenden Kosinus sämtlich reell sind. Eine Lösung ist als reell, als rein oder komplex imaginär bezüglich durch jene Zifferzeichen einschliessende voll ausgezogene, gestrichelte oder punktierte Linien gekennzeichnet. Zwischen je zwei inversen Lösungen fehlt jedoch die betreffende Linie. Komplexe Lösungen sind durch horizontale Striche hervorgehoben. Unterhalb n, N, S stehen die Anzahlen der reellen, rein und komplex imaginären Gruppen und Lösungen und die Gesamtanzahlen der Lösungen. Die Reihen unterhalb ν, σ, τ gehören nicht hierher. Die Nummern 35—46 der X. Tabelle sowie die XI. Tabelle sind als Anhang anzusehen. Dabei bedeutet $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{C}$ den Schnittwinkel der Kreise $a\,b$, wenn einer der

[1] Die Definition 4 sollte als Lehrsatz ausgesprochen werden. Im Falle reeller Kreise ist für den betreffenden Satz oben der Beweis geliefert worden. Für imaginäre Kreise kann hier wegen Raummangels nichts Ausführlicheres gebracht werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreise oder wenn beide punktförmig ausarten. In der XI. Tabelle sind diejenigen Lösungen charakterisiert, bei denen eines oder zwei der Tripel x y w, y z u, z u v ein Büschel bilden, was nur dann vorkommen kann, wenn bei den Kreisen a b c eine oder zwei Berührungen vorkommen.

78. Lässt man bei dem nach 16 formulierten verallgemeinerten Malfattischen Problem die Bedingung fallen, dass die vorkommenden Kreise reell sind, bezüglich reell sein sollen, so kann dasselbe auch dann als Umkehrung der letzten Aufgabe 77 genau in der unter 16, II—IV angegebenen Weise behandelt werden. Die Anzahlen der reellen, rein und komplex imaginären Lösungen und die aller Lösungen enthält die X. Tabelle unterhalb ν und σ (unterhalb τ stehen die Anzahlen aller Lösungen des nicht verallgemeinerten Malfattischen Problems). Das Analoge gilt von den in entsprechender Weise formulierten Aufgaben 2 (s. Tabelle IV und V) und 3 (s. Tabelle VI und VII).

79. Die Aufgabe 4 ist für den Fall zu lösen, dass weder x v w noch y w u, wohl aber das Tripel z u v ein Büschel bilden soll.

Lösung. Die Bezeichnungsweise sei im allgemeinen die frühere. Für z sei ζ gesetzt, der durch $\alpha\beta\gamma$ gehende Kreis t möge den Kreis ζ in ψ schneiden (Fig. 12). Nach 43 ist $2\,(\lambda\,\beta)\,(u\,\sigma)\,(y\,\sigma) - (\sigma\,\lambda)\,(\beta\,\sigma)\,(u\,y) = 0$ und $2\,(\psi\,\beta)\,(u\,\gamma)\,(\zeta\,\gamma) - (\gamma\,\psi)\,(\beta\,\gamma)\,(u\,\zeta) = 0$. Mithin ist nach 42 $\cos^2\frac{1}{2}(y\,\zeta) = -(\sigma\,\gamma)^2\,(\lambda\,\beta)\,(\psi\,\beta) : (\sigma\,\lambda)\,(\beta\,\sigma)\,(\gamma\,\psi)\,(\beta\,\gamma)$. Da nach 47 und 27 $(\beta\,\gamma)\,(\beta\,\alpha)\,(\sigma\,\lambda) = (\beta\,\sigma)\,(\beta\,\lambda)\,(\gamma\,\alpha)$ ist, so ist auch $\cos^2\frac{1}{2}(y\,\zeta) = (\sigma\,\gamma)^2\,(\psi\,\beta)\,(\beta\,\alpha) : (\beta\,\sigma)^2\,(\gamma\,\psi)\,(\gamma\,\alpha)$ oder I. $\cos^2\frac{1}{2}(y\,\zeta) = \cos^2\frac{1}{2}(b\,c) = \cos^2\frac{1}{2}A = -(\beta\,\alpha\,\gamma\,\sigma)^2\,(\gamma\,\alpha\,\beta\,\psi)$. Ebenso ist II. $\cos^2\frac{1}{2}(x\,\zeta) = \cos^2\frac{1}{2}(a\,c) = \cos^2\frac{1}{2}B = -(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa)^2\,(\gamma\,\beta\,\alpha\,\psi)$. Wie oben (74 II) ist auch hier $2\cos^2\frac{1}{4}(x\,y) = 2\cos^2\frac{1}{4}(a\,b) = 2\cos^2\frac{1}{4}C = -(\beta\,\gamma\,\alpha\,\lambda)\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa)$ und $(\beta\,\gamma\,\alpha\,\lambda) = -(\beta\,\alpha\,\gamma\,\sigma)$. Daher ist III. $2\cos^2\frac{1}{4}C = (\beta\,\alpha\,\gamma\,\sigma)\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa)$ und IV. $\cos^2\frac{1}{2}A \,.\, \cos^2\frac{1}{2}B : 4\cos^4\frac{1}{4}C = (\gamma\,\alpha\,\beta\,\psi)\,(\gamma\,\beta\,\alpha\,\psi)$. Die Formeln I—IV geben nicht nur die Werte der Würfe $\gamma\,\alpha\,\beta\,\psi$, $\beta\,\gamma\,\alpha\,\lambda$, $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa$, sondern auch den Weg zur Konstruktion und die Determination an. Dies soll hier nur kurz angedeutet werden. Ein Doppelpunkt der projektiven Reihen $(\gamma\,\alpha\,\beta\,\psi')\,(\gamma\,\beta\,\alpha\,\psi'') = \cos^2\frac{1}{2}A\,\cos^2\frac{1}{2}B : 4\cos^2\frac{1}{4}C$ liefert den Punkt ψ und einer der Reihen $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa')\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa'') = -\cos^2\frac{1}{2}B : (\gamma\,\beta\,\alpha\,\psi)$ den Punkt $\varkappa$ etc. Die Anzahl der Lösungen ist nach diesen Formeln I—IV und nach 55 und 41 im allgemeinen 32. Bei gegebenen reellen Kreisen ist eine Lösung dann und nur dann reell, wenn $(\gamma\,\alpha\,\beta\,\psi)$ reell und jeder der Wurfwerte $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\varkappa)$ und $(\beta\,\alpha\,\gamma\,\sigma)$ rein imaginär ist, also dann, wenn jeder der 4 Ausdrücke $\cos^4\frac{1}{4}C$, $\cos^2\frac{1}{2}A$, $\cos^2\frac{1}{2}B$ und $\cos^4\frac{1}{4}C - \cos^2\frac{1}{2}A\,\cos^2\frac{1}{2}B$ reell und positiv ist. Bei reellen Winkeln A, B, C tritt dies stets ein, wenn die Ungleichung $\cos^2\frac{1}{2}A\,\cos^2\frac{1}{2}B < \cos^4\frac{1}{4}C$ besteht.

80. Die Aufgabe 4 ist für den Fall zu lösen, dass sowohl y w u als auch z u v, nicht aber x v w ein Büschel bilden soll.

Lösung. (Fig. 12.) Für y und z sei η und ζ gesetzt und der durch $\alpha\beta\gamma$ gehende Kreis t möge die Kreise η und ζ in χ und ψ schneiden. Die sonstige Bezeichnungs-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

weise möge die frühere sein. Wie bei 79 ist hier I. $\cos^2\frac{1}{2}B = -(\alpha\beta\gamma\varkappa)^2(\gamma\beta\alpha\psi)$ und II. $\cos^2\frac{1}{2}C = -(\alpha\gamma\beta\rho)^2(\beta\gamma\alpha\chi)$. Nach 74 II ist III. $(\alpha\beta\gamma\varkappa) = -(\alpha\gamma\beta\rho)$. Mithin ist IV. $\cos^2\frac{1}{2}C : \cos^2\frac{1}{2}B = (\beta\gamma\alpha\chi)(\alpha\beta\gamma\psi)$. Nach 52, Ziffer 16, ist $(\gamma\chi\beta\psi) = \cos\frac{1}{2}[-(t\zeta)+(t\eta)+(\eta\zeta)]\cos\frac{1}{2}[(t\zeta)-(t\eta)+(\eta\zeta)] : \sin(t\zeta)\sin(t\eta)$. Da t die Kreise η und ζ rechtwinklig schneidet, so ist $(t\zeta) = (t\eta) = \pm\frac{\pi}{2}$. Mithin ist V. $(\beta\psi\gamma\chi) = (\beta\alpha\gamma\chi)(\gamma\alpha\beta\psi) = \cos^2\frac{1}{2}(\eta\zeta) = \cos^2\frac{1}{2}A$. Aus IV und V ergeben sich χ und ψ, dann aus II und III ρ und $\varkappa$. Die Anzahl der Lösungen ist nach I—V im allgemeinen 16. Dabei ist eine Lösung bei reellen gegebenen Gebilden dann und nur dann reell, wenn $(\alpha\beta\gamma\varkappa)$ rein imaginär und sowohl $(\beta\alpha\gamma\chi)$ als auch $(\gamma\alpha\beta\psi)$ reell ist.

81. Die Aufgabe 4 ist für den Fall zu lösen, dass jedes der Tripel x v w, y w u, z u v ein Büschel bilden soll.

Lösung. (Fig, 12). Für x y z sei $\xi\eta\zeta$ gesetzt und der zweite Schnittpunkt von t und ξ mit φ bezeichnet. Wie bei 80 ist auch hier I. $(\beta\psi\gamma\chi) = \cos^2\frac{1}{2}A$, II. $(\gamma\varphi\alpha\psi) = \cos^2\frac{1}{2}B$, III. $(\alpha\chi\beta\varphi) = \cos^2\frac{1}{2}C$. Setzt man $(\beta\psi'\gamma\chi') = \cos^2\frac{1}{2}A$, $(\gamma\varphi'\alpha\psi') = \cos^2\frac{1}{2}B$, $(\alpha\chi''\beta\varphi') = \cos^2\frac{1}{2}C$, so ist, wenn man χ' als variabel ansieht, $\chi' \curlywedge \psi' \curlywedge \varphi' \curlywedge \chi''$. Offenbar ist χ ein Doppelpunkt der kohärenten Reihen $\chi' \curlywedge \chi''$. Hier giebt es 8 Lösungen.

Zusatz. Sind umgekehrt die Kreise ξ, η, ζ gegeben und u, v, w gesucht, so werden die Kreise ξ, η, ζ von ihrem Orthogonalkreise t in den Punkten $\alpha\beta\gamma\varphi\chi\psi$ geschnitten, aus denen sich sofort die Kreise u, v, w ergeben.

82. Anmerkung. Damit sind die Aufgaben 1—6 im wesentlichen vollständig gelöst. Jede derselben hat im allgemeinen $32+16.3+8.3+0 = 104$ oder $64+32.3+16.3+8 = 216$ Lösungen, je nachdem die Gebilde a, b, c einen oder keinen Punkt gemein haben.

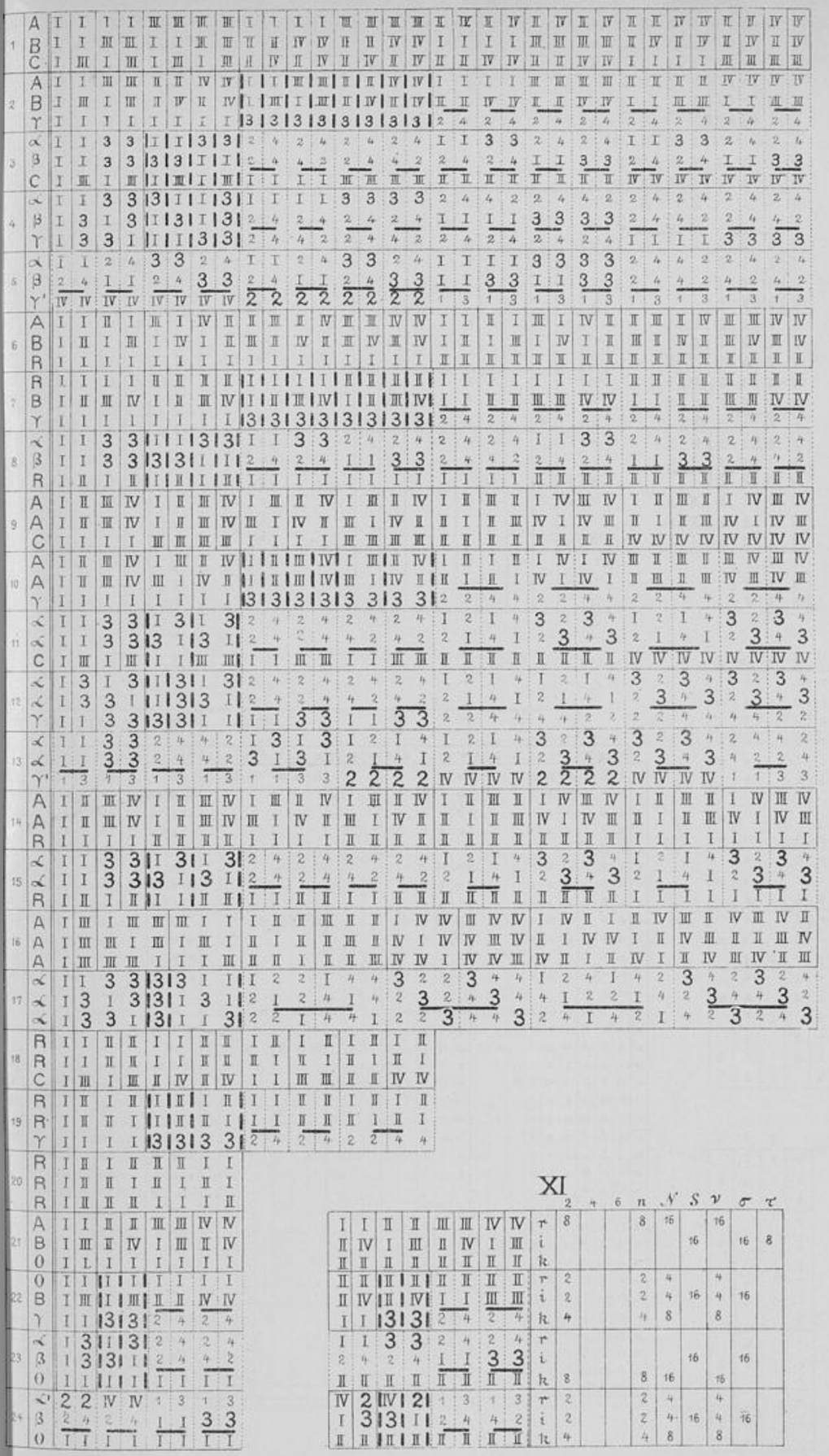
83. Schlussbemerkung. Lässt man bei den Aufgaben 1—6 die Bedingung, dass u, v, w kein Büschel bilden, fallen, so kann dann entweder mindestens eines oder keines der 3 Gebilde x, y, z (oder a, b, c) zugleich mit dem Tripel u v w einem Büschel angehören. Im ersten Falle kommt die Aufgabe auf das Taktionsproblem des Apollonius hinaus. Im zweiten Falle schneide, falls speciell die Aufgabe 4 ins Auge gefasst wird, ein durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt δ von u v w beliebig orthogonal zu diesen Kreisen gelegter Kreis t dieselben ausserdem noch in $\alpha\beta\gamma$. Dann ist (Fig. 13) nach 43 $2(\delta\lambda)(y\sigma)(u\sigma) - (\sigma\delta)(\lambda\sigma)(y u) = 0$, $2(\delta\tau)(z u)(u\mu) - (\mu\delta)(\tau\mu)(z u) = 0$ und nach 42 $\cos^2\frac{1}{2}(y z) = \cos^2\frac{1}{2}(b c) = \cos^2\frac{1}{2}A = (\sigma\mu)^2(\lambda\delta).(\tau\delta) : (\sigma\delta)(\mu\delta)(\lambda\sigma)(\mu\tau)$. Nach 47 bestehen die 3 Involutionen $\delta^2.\alpha\tau.\beta\mu$, $\delta^2.\beta\rho.\gamma\varkappa$, $\delta^2.\gamma\sigma.\alpha\lambda$. Mithin ist nach 27 $(\mu\tau)(\alpha\delta)(\beta\delta) = (\alpha\beta)(\mu\delta)(\tau\delta)$ und $(\lambda\sigma)(\gamma\delta)(\alpha\delta) = (\gamma\alpha)(\lambda\delta)(\sigma\delta)$. Es ist also $(\sigma\mu)^2 : (\mu\delta)^2(\sigma\delta)^2 = (\alpha\beta)(\gamma\alpha)\cos^2\frac{1}{2}A : (\alpha\delta)^2(\beta\delta)(\gamma\delta)$. Ebenso ist $(\tau\varkappa)^2 : (\varkappa\delta)^2(\tau\delta)^2 = (\beta\gamma)(\alpha\beta)\cos^2\frac{1}{2}B : (\beta\delta)^2(\gamma\delta)(\alpha\delta)$ und $(\rho\lambda)^2 :$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(\lambda\delta)^2(\rho\delta)^2 = (\gamma\alpha)(\beta\gamma)\cos^2\frac{1}{2}C : (\gamma\delta)^2(\alpha\delta)(\beta\delta)$. Setzt man $\cos^2\frac{1}{2}A = a$, $\cos^2\frac{1}{2}B = b$, $\cos^2\frac{1}{2}C = c$, $(\alpha\beta)(\gamma\alpha)(\beta\gamma) : (\alpha\delta)(\beta\delta)(\gamma\delta) = e$, $1 : (\alpha\delta)(\beta\gamma) = \xi$, $1 : (\beta\delta)(\gamma\alpha) = \eta$, $1 : (\gamma\delta)(\alpha\beta) = \zeta$, so hat man $(\sigma\mu)^2 : (\mu\delta)^2(\sigma\delta)^2 = e\,a\,\xi$, $(\tau\varkappa)^2 : (\varkappa\delta)^2(\tau\delta)^2 = e\,b\,\eta$, $(\rho\lambda)^2 : (\lambda\delta)^2(\rho\delta)^2 = e\,c\,\zeta$. Aus den Identitäten $(\sigma\mu) : (\mu\delta)(\sigma\delta) = \mu_2 : (\mu\delta)\delta_2 - \sigma_2 : (\sigma\delta)\delta_2$, $(\tau\mu) : (\mu\delta)(\tau\delta) = \mu_2 : (\mu\delta)\delta_2 - \tau_2 : (\tau\delta)\delta_2$ etc. folgt $(\sigma\mu) : (\mu\delta)(\sigma\delta) + (\tau\varkappa) : (\varkappa\delta)(\tau\delta) + (\rho\lambda) : (\lambda\delta)(\rho\delta) = (\tau\mu) : (\mu\delta)(\tau\delta) + (\rho\varkappa) : (\varkappa\delta)(\rho\delta) + (\sigma\lambda) : (\lambda\delta)(\sigma\delta)$. Wegen der obigen Involutionen ist aber nach 27 $(\tau\mu) : (\mu\delta)(\tau\delta) = -(\alpha\beta) : (\alpha\delta)(\beta\delta)$, $(\rho\varkappa) : (\varkappa\delta)(\rho\delta) = -(\beta\gamma) : (\beta\delta)(\gamma\delta)$, $(\sigma\lambda) : (\lambda\delta)(\sigma\delta) = -(\gamma\alpha) : (\gamma\delta)(\alpha\delta)$. Dieserhalb und wegen der Identität $(\beta\gamma)(\alpha\delta) + (\gamma\alpha)(\beta\delta) + (\alpha\beta)(\gamma\delta) = 0$ ist $(\tau\mu) : (\mu\delta)(\tau\delta) + (\rho\varkappa) : (\varkappa\delta)(\rho\delta) + (\sigma\lambda) : (\lambda\delta)(\sigma\delta) = 0$ und somit auch $(\sigma\mu) : (\mu\delta)(\sigma\delta) + (\tau\varkappa) : (\varkappa\delta)(\tau\delta) + (\rho\lambda) : (\lambda\delta)(\rho\delta) = 0$. Bildet man nun $e^2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 2\,a\,b\,\xi\eta - 2\,b\,c\,\eta\zeta - 2\,c\,a\,\zeta\xi)$, so erhält man dafür nach der obigen Gleichung wegen der Identität $p^4 + q^4 + r^4 - 2\,p^2q^2 - 2\,q^2r^2 - 2\,r^2p^2 = -(p+q+r)(-p+q+r)\cdot(p-q+r)(p+q-r)$ stets Null. Folglich ist I. $a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 2\,a\,b\,\xi\eta - 2\,b\,c\,\eta\zeta - 2\,c\,a\,\zeta\xi = 0$. Wegen der Identität $(\alpha\delta))(\beta\gamma) + (\beta\delta)(\gamma\alpha) + (\gamma\delta)(\alpha\delta) = 0$ ist ferner $1 : \xi + 1 : \eta + 1 : \zeta = 0$ oder II. $\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta = 0$. Sind die Winkel A, B, C beliebig, so besteht zwischen a, b, c keinerlei Beziehung. Die Wurzeln der Gleichungen I und II lassen sich daher nur durch Auflösung einer biquadratischen Gleichung bestimmen, die sich im allgemeinen auf quadratische Gleichungen nicht reduzieren lässt. Nun ist $\xi : \eta = (\beta\delta)(\gamma\alpha) : (\alpha\delta)(\beta\gamma) = -(\alpha\gamma\beta\delta)$. Der Wurf $\alpha\gamma\beta\delta$, dessen Wert Wurzel einer nicht reduzierbaren Gleichung 4. Grades ist, lässt sich mithin im allgemeinen mit Zirkel und Lineal allein nicht konstruieren. Somit lässt sich auch von diesem „besonderen“ Falle des Malfattischen Problems und den 5 diesem Falle äquivalenten Aufgaben im allgemeinen keine Lösung mit Hilfe der Postulate allein herstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

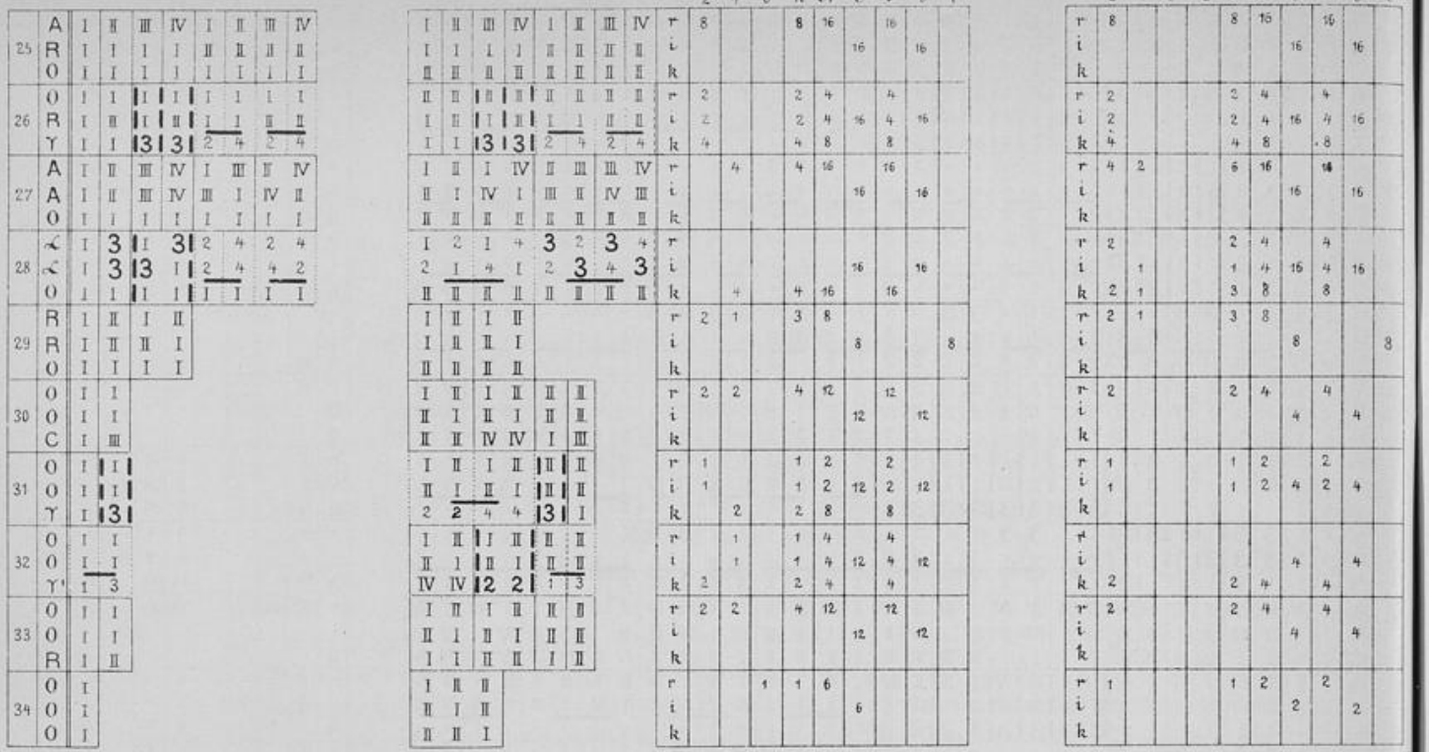
X

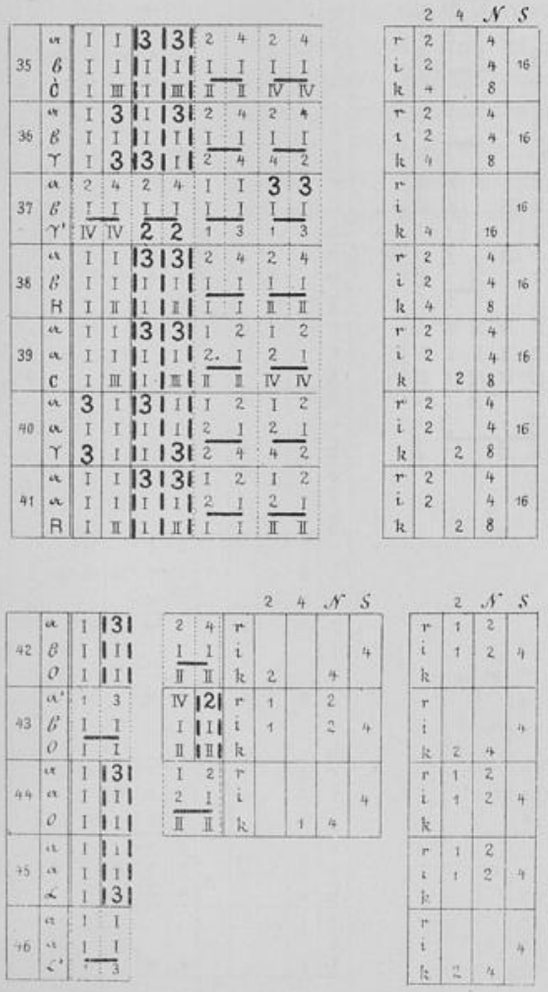


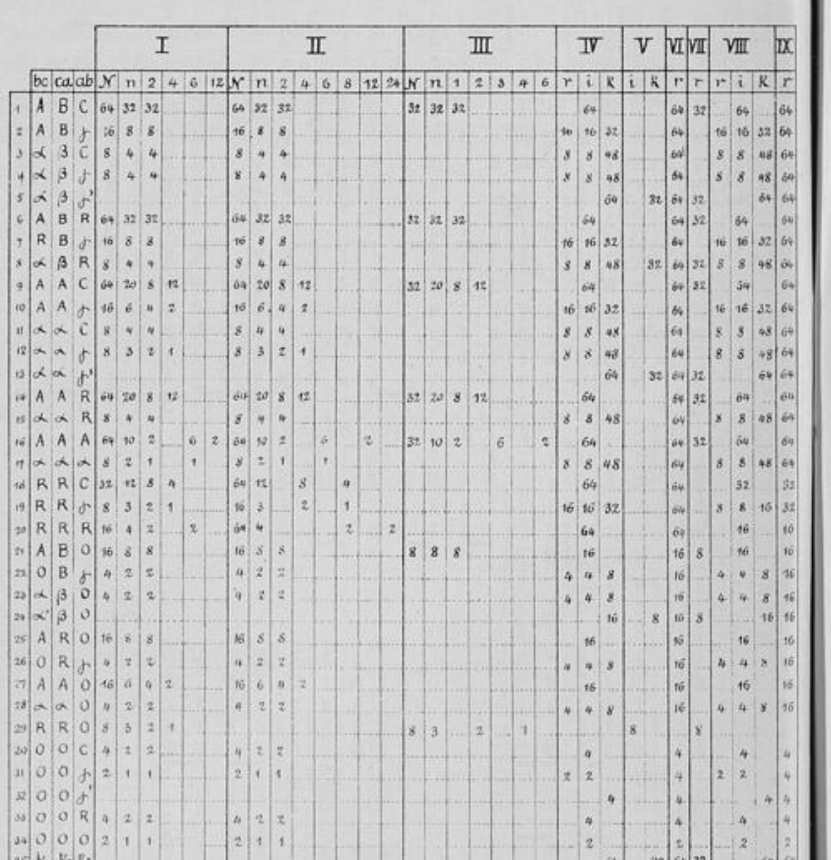
XI

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

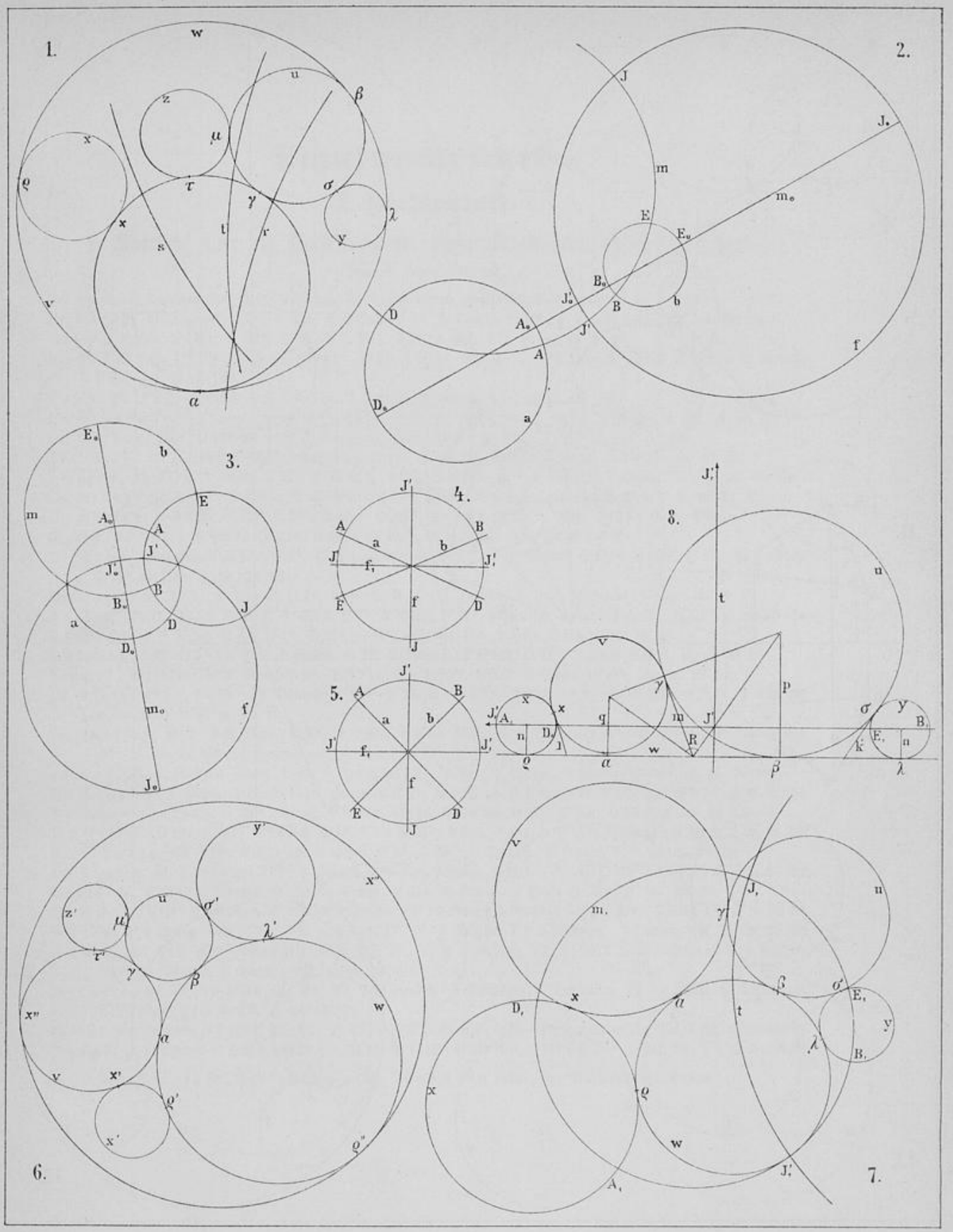
Fortsetzung

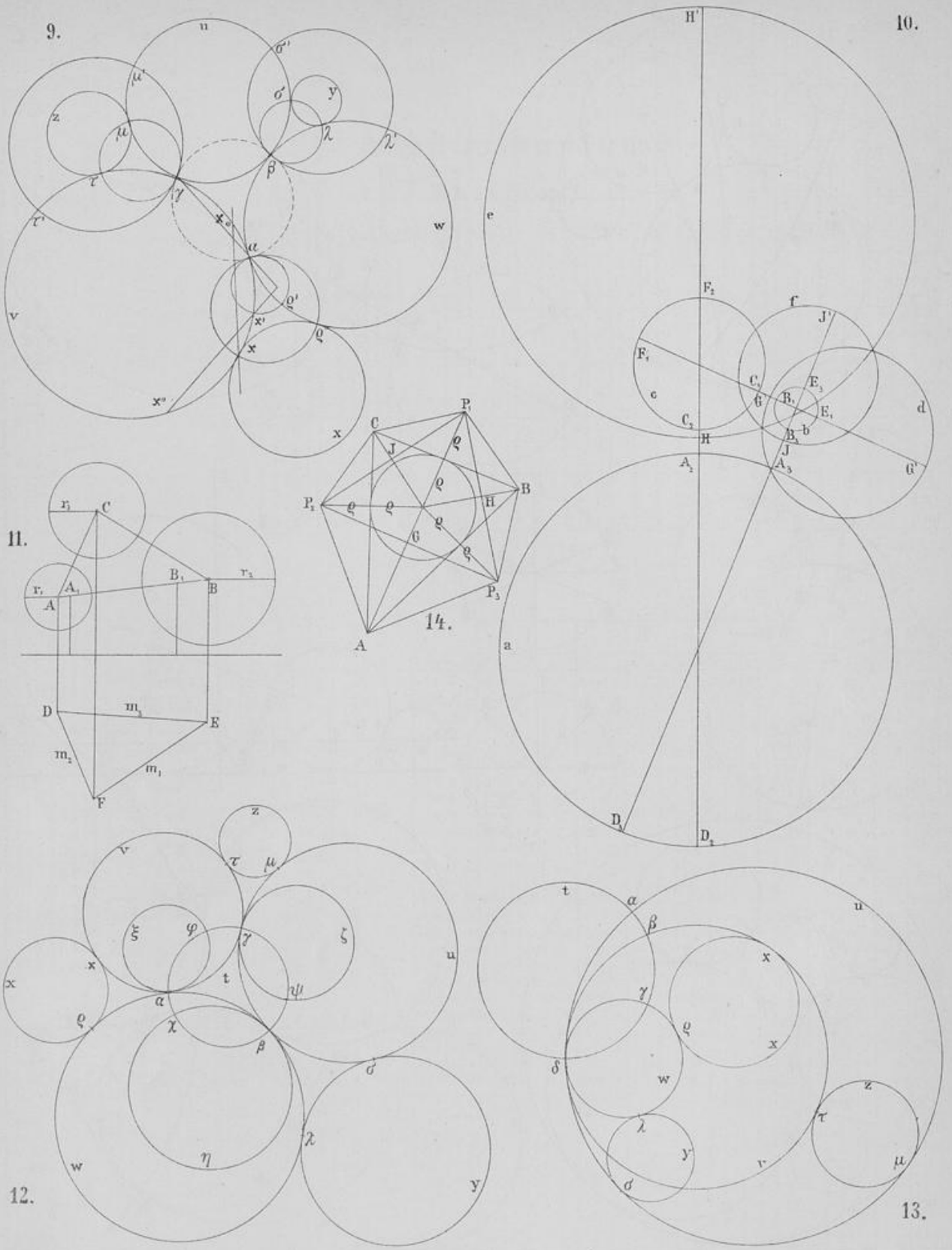






Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.


9.
10.
11.
12.
13.
14.