DAS VERALLGEMEINERTE

MALFATTISCHE PROBLEM.

Von

Prof. Dr. ANDREAS PAMPUCH.

BEILAGE

zum

Jahresbericht des Bischöflichen Gymnasiums

zu Strassburg i. Els.

1900. Jahresbericht Nr. 557.

Strassburg,

Buchdruckerei des „Elsässer", St. Leostrasse 5.

1900.

95 t
33
(1900)
557

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

DAS VERALLGEMEINERTE

MALFATTISCHE PROBLEM.

Von

Prof. Dr. ANDREAS PAMPUCH.

BEILAGE

zum

Jahresbericht des Bischöflichen Gymnasiums

zu Strassburg i. Els.

1900. Jahresbericht Nr. 557.

Strassburg,

Buchdruckerei des „Elsässer", St. Leostrasse 5.

1900.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

DAS VERALLGEMEINERTE

MALFATTISCHE PROBLEM.

Einleitung.

Die zu lösende Aufgabe lautet: „Auf einer reellen Ebene oder Kugel sind 3 Kreise a b c gegeben, die keinen Punkt sämtlich gemein haben. Drei Kreise x y z sind so zu zeichnen, dass die Kreise eines jeden der 3 Tripel a y z, b z x, c x y einander paarweise berühren. Dabei sollen keine 3 unter den 6 Kreisen a b c x y z ein Büschel bilden.“ Die Lösung soll eine vollständige sein, bestehend aus Analysis, Konstruktion, Beweis und einer erschöpfenden Determination. Ausserdem sollen nicht nur sämtliche reellen, sondern auch sämtliche imaginären Lösungen — letztere ersetzt durch reelle Substrate — geliefert werden, und zwar unter Voraussetzung nicht nur reeller, sondern auch imaginärer gegebener Kreise. Nebenbei wird noch unter dem Striche die Konstruktion und eine kurze Determination zu den 2 Aufgaben gebracht, die sich von der obigen dadurch unterscheiden, dass bei der einen die Kreise a y z und nur diese, und bei der anderen die Kreise b z x und c x y und nur diese je ein Büschel bilden sollen. Zur Verwendung gelangen dabei im wesentlichen nur Sätze über Kreisverwandtschaften.

Diese Abhandlung kann als Fortsetzung der 1897 als Beilage zu den Schulnachrichten dieser Anstalt erschienenen gelten; beide Arbeiten sind jedoch von einander unabhängig, und die darin gelieferten Lösungen von einander verschieden.

I. Abschnitt.

Die von Steiner gestellte Aufgabe* lautet, abgesehen von unwesentlichen Abänderungen: „Drei beliebige Kreise a b c, die in einerlei Ebene liegen, sind der Grösse und Lage nach gegeben; man soll drei andere Kreise x y z beschreiben, die einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt, jedoch so, dass auch jeder der drei gegebenen Kreise zwei von den zu suchenden Kreisen berührt.“

* Crelles Journal, Bd. I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Aufgabe zerfällt in mehrere wesentlich von einander verschiedene Aufgaben. Von den 6 Kreisen a b c x y z können nämlich 1. keine drei ein Büschel bilden, 2. etwa die Kreise a y z einem Büschel angehören und sonst keine drei, 3. sowohl die Kreise b z x als auch die Kreise c x y je ein Büschel bilden und sonst keine drei*, 4. die Kreise der 3 Tripel a y z, b z x, c x y je einem Büschel angehören, 5. die Kreise x y z ein Büschel bilden und sonst keine drei. Hierher gehört ausserdem noch eine Gruppe leicht zu lösender Aufgaben, bei denen mindestens einer der drei gesuchten Kreise x y z alle drei gegebenen Kreise a b c berührt. Steiner hat nur zu der ersten dieser Aufgaben die Konstruktion geliefert. Auf die zweite Aufgabe weist Steiner nur nebenbei hin, indem er ihre Lösungen als „spezielle Fälle" bezeichnet. Die Aufgaben 3 und 4 waren Steiner jedenfalls bekannt. Die fünfte Aufgabe dürfte Steiner übersehen haben. Dieselbe lässt sich nämlich, wie der Verfasser (Progr. des Bischöfl. Gymn. Strassburg 1897) nachgewiesen hat, mit Hülfe von Zirkel und Lineal allein überhaupt nicht lösen, so dass ihre Lösungen keineswegs als „spezielle Fälle" der zur ersten Aufgabe gehörigen bezeichnet werden können.

Die Steinersche Konstruktion (I).

1. „Man suche die drei äusseren Ähnlichkeitspunkte A, B, C, welche zu den drei gegebenen Kreisen a, b, c, paarweise genommen, gehören, und konstruiere die zu diesen Ähnlichkeitspunkten gehörigen Potenzkreise d, e, f, und welche Kreise sich in einem bestimmten Punkt D schneiden werden."

2. „Hierauf beschreibe man die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste die drei Kreise a, e, f, der zweite die drei Kreise b, f, d, und der dritte die drei Kreise c, d, e berührt."

3. „Ferner beschreibe man einen Kreis, dessen Peripherie $b_1 B_1 \beta_1$ durch den Berührungspunkt B_1 der Kreise a und μ_1 geht, und welcher die Kreise μ_2, μ_3 berührt, jedoch so, dass er den Kreis μ_3, welcher von dem kleineren (c) der beiden Kreise b, c abhängig ist, einschliessend berührt:"

4. „So ist endlich derjenige Kreis y, welchen man so beschreibt, dass er die Kreise a, c und den Kreis $(b_1 B_1 \beta_1)$ berührt, einer der drei gesuchten Kreise."

„Die beiden übrigen gesuchten Kreise x, z findet man auf ähnliche Weise. Z. B. der Kreis z kann aus der vorstehenden Konstruktion unmittelbar gefunden werden, wenn man statt des Kreises y einen Kreis z beschreibt, welcher die Kreise a, b und den Kreis $(b_1 B_1 \beta_1)$ berührt. Es ist zu bemerken, dass die beiden Kreise y und z den Hülfskreis $(b_1 B_1 \beta_1)$ in einem und demselben Punkt b_1 berühren."

* Die ursprüngliche Malfattische Aufgabe über das ebene Dreieck hat in ähnlicher Weise Binder (Programm des württemb. Seminars Schönthal 1868) in mehrere Aufgaben zerlegt. Vergl. auch Sachs (Programm des Realgymnasiums Durlach 1885).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zu dieser Konstruktion ist folgendes zu bemerken:

Zu 1. Steiner will damit offenbar sagen, man solle zu b c, c a, a b drei ein Büschel bildende Potenzkreise d, e, f bestimmen. Dabei ist, wenn die imaginären Lösungen ausser Betracht zu lassen und nur die reellen herzustellen sind, von reellen Kreisen d, e, f auszugehen.

Zu 2. Jeder der Kreise μ_1, μ_2, μ_3 kann im allgemeinen auf 8 verschiedene Arten erhalten werden. Dies giebt 8 . 8 . 8 oder 512 Kombinationen. Wie aus den Schlussbemerkungen Steiners zu dem Problem über das geradlinige Dreieck hervorgeht, weiss er wohl, dass nicht alle diese Kombinationen zum Ziele führen; er sagt jedoch nichts darüber, wie die brauchbaren von den unbrauchbaren zu sondern sind. Thatsächlich sind von den 512 Kombinationen nur 64 zweckdienlich, wobei 8 mal je 8 zu denselben 2 Lösungen gehören.

Zu 3. Hier giebt es 4 Kreise $(b_1 B_1 \beta_1)$. Von diesen ist nur einer brauchbar. Steiners Bemerkung, der Kreis $(b_1 B_1 \beta_1)$ solle den Kreis μ_3 einschliessend berühren, reicht im allgemeinen, wenn es sich nicht um die spezielle, von ihm gezeichnete Figur handelt, offenbar zur Entscheidung dieser Frage nicht aus.

Zu 4. Es giebt 8 Kreise y, die die Kreise a, c, $(b_1 B_1 \beta_1)$ berühren. Im günstigsten Falle sind nur 2 derselben zu einer Lösung verwendbar.

Steiners Behauptung, dass y einer der 3 gesuchten Kreise sei, ist mithin, streng genommen, im allgemeinen unrichtig. Der Kreis y ist nur dann einer der verlangten, wenn die Auswahl 1. der Kreise μ_1, μ_2, μ_3, 2. die des Kreises $(b_1 B_1 \beta_1)$ und 3. die von y selbst richtig getroffen wurde. Verfährt man beim Konstruieren streng nach Steiners Angaben, so ist die Wahrscheinlichkeit, zu einer richtigen Lösung zu gelangen, nur $\frac{1}{128}$, also gering.

Die Steinersche Konstruktion enthält demnach eine Lücke, und zwar insofern, als bei ihr die Angaben darüber fehlen, welche unter den Kreisen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, (b_1 B_1 \beta_1)$ etc. zu einer Lösung brauchbar sind.* Diese Lücke lässt sich auf folgende Art ausfüllen.

Bezeichnet man bei 3 grössten Kugelkreisen a b c oder bei 3 reellen Kreisen a b c einer Ebene mit einem imaginären Orthogonalkreise die Seiten derselben mit $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$, so liegen die 8 Kreise x, die die Kreise a b c berühren, der Reihe nach auf den Seiten $a' b' c'$, $a'' b' c'$, $a' b'' c'$, $a' b' c''$, $a' b'' c''$, $a'' b' c''$, $a'' b'' c'$, $a'' b'' c''$ der Kreise a b c. Jeder unter diesen 8 Berührungskreisen x ist mithin durch die Angabe der Seiten von a b c, an denen er liegen soll, eindeutig bestimmt. So gehört zu den Seiten $a' b' c'$ ein und nur ein Berührungskreis x. Dadurch ist ferner bei 3 grössten Kugelkreisen dasjenige der 8 sphärischen Dreiecke und bei 3 reellen auf einer Ebene liegenden Kreisen mit imaginärem Orthogonalkreise dasjenige der 8 Bogendreiecke, in dem der zu $a' b' c'$ (oder zu einer anderen Seitenkombination) gehörige

* Bei dem auf 3 Gerade beschränkten Malfattischen Probleme hat bereits Binder in seiner oben angeführten Abhandlung diesem Übelstande abzuhelfen gesucht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Berührungskreis x liegt, in eindeutiger Weise definiert, und infolgedessen auch das zu b c, c a, a b und zu diesem Kreise x gehörige Tripel von Potenzkreisen und endlich auch noch die zu letzteren gehörige Ähnlichkeitsaxe von a b c. Dabei ist noch zu bemerken, dass zu den Seiten a′ b′ c′ und a″ b″ c″ (etc.) nur ein Tripel von Potenzkreisen und nur eine Ähnlichkeitsaxe gehört.

In ähnlicher Weise lassen sich bei 3 reellen Kreisen a b c einer Ebene oder Kugel mit einem reellen Orthogonalkreise t durch Bezeichnung der Seiten der Kreise a b c die 8 (reellen oder imaginären) Berührungskreise x und die dazu gehörigen Potenzkreise und Ähnlichkeitsaxen von a b c eindeutig im voraus angeben. Dabei müssen jedoch die Seiten der Kreise a b c anders definiert werden. Jede der Kreislinien a b c wird durch den Orthogonalkreis t in zwei Bogen zerlegt. Drei dieser Bögen liegen auf der einen Seite von t (alle etwa innerhalb t). Bei diesen Bögen bezeichne man die Seiten beliebig mit a′ a″, b′ b″, c′ c″. Die Seiten der 3 auf der anderen Seite von t liegenden Bögen sind dann entgegengesetzt zu bezeichnen, also mit a″ a′, b″ b′, c″ c′. Durchläuft man dann etwa die Kreislinie a im Sinne des Uhrzeigers und hat anfänglich die Seite a′ zur Linken, so liegt diese Seite a′, sobald man den davorliegenden Schnittpunkt von a mit t überschritten hat, zur Rechten. Durch irgend eine Seitenkombination, etwa durch a′ b′ c′, sind dann eindeutig bestimmt 1. derjenige Kreis x, der die Kreise a b c an diesen Seiten a′ b′ c′ berührt, 2. die zu x gehörigen Potenzkreise von a b c und 3. die zu x gehörige Ähnlichkeitsaxe von a b c. Man bezeichne zu dem Zwecke die Schnittpunktepaare A D, B E, C F des Kreises t mit den Kreisen a, b, c so, dass einem Figürchen die Punkte A, B, C nach vorn zu und die Punkte D, E, F im Rücken erscheinen, wenn es sich nach einander auf den Kreislinien a, b, c so aufstellt, dass es die mit a′, b′, c′ bezeichneten Seiten jedesmal zur linken Hand hat. Die zu a′ b′ c′ und zu x gehörigen Potenzkreise haben dann die Schnittpunkte der Geraden der Paare B F, C E, ferner C D, A F und A E, B D bezüglich zu Mittelpunkten, und die zu a′ b′ c′ und zu x gehörige Ähnlichkeitsaxe von a b c ist die Pascalsche Gerade des Sechsecks A F B D C E.

Konstruktion (II).

1. Bestimme zu a b c den (imaginären oder reellen) Orthogonalkreis t, bezeichne in der oben angegebenen Weise die Seiten der gegebenen Kreise a, b, c mit a′ a″, b′ b″, c′ c″ (8 Kombinationen), bestimme die zu a′ b′ c′ gehörigen Potenzkreise d, e, f und bezeichne auch bei diesen die Seiten derselben, und zwar mit d′ d″, e′ e″, f′ f″ (8 Kombinationen).

2. Beschreibe die 3 Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste a′ e′ f″, der zweite b′ f′ d″ und der dritte c′ d′ e″ berührt (eindeutige Operationen).

3. Zeichne diejenigen zu t rechtwinkligen 3 Kreise u, v, w, die bezüglich von den Kreisen $\mu_2 \mu_3, \mu_3 \mu_1, \mu_1 \mu_2$ auf entgegengesetzten Seiten berührt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichne dabei die Seiten der Kreise u, v, w, auf denen die Kreise μ_3, μ_1, μ_2 bezüglich liegen, mit u′, v′, w′, und die entgegengesetzten mit u″, v″, w″. Von den Kreisen d, e, f, die denselben Bedingungen genügen, ist hier abzusehen (eindeutige Operationen).

4. Die 3 Kreise x, y, z, die bezüglich die Kreise b′ c′ w′ v″, c′ a′ u′ w″, a′ b′ v′ u″ berühren, bilden eine Lösung (eindeutige Operationen).

Aus dieser Konstruktion ersieht man sofort, dass die Aufgabe im allgemeinen $8 . 8 . 1 . 1 . 1 = 64$ Lösungen hat.*

Der Steinerschen Konstruktion (I), sowie auch der obigen abgeänderten (II) haftet noch der Mangel an, dass durch sie in vielen Fällen nicht alle reellen Lösungen erhalten werden können, falls zugegeben wird, dass bei Zwischenkonstruktionen komplex imaginäre Kreise auszuschliessen sind. Dass dem so ist, soll einfach durch den Hinweis auf die Figuren 1, 2, 3, 4, 7 bewiesen werden. Bei allen diesen Figuren sind einige der von Steiner mit $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ bezeichneten Kreise komplex imaginär, obwohl die dazu gehörige aus den Kreisen x y z bestehende Lösung reell ist. Um jeden Zweifel hierbei auszuschliessen, sind bei den Figuren 1 und 2 die wichtigsten Elemente nicht nur durch Zeichnung, sondern auch durch Rechnung festgelegt, sodass jedermann die Lösung auf ihre Richtigkeit hin leicht prüfen kann. Bei der Fig. 1 liegen die Mittelpunkte $A_1 B_1 C_1$ der gleichen Kreise a b c auf einer Geraden. Die Radien sind $a = b = c = 30$; $d = e = f = \infty$; $x = 36$; $y = 420$; $z = 270$; $u = 6$; $v = 70$; $w = 7{,}5$; $\mu_2 = 90$; die von μ_3 und μ_1 sind komplex imaginär. Die Koordinaten, vom Punkte F aus gerechnet, sind $A = 420$; $B = 180$; $C = 60$; $D = 360$; $E = 120$; $F = 0$; $G = 90$; $H = 210$; $J = 270$; $\alpha = 240$; $\beta = 140$; $\gamma = 90$; $\delta = 252$; $\varepsilon = 0$; $\zeta = 105$; $GX = 6\sqrt{21}$; $HY = -90\sqrt{21}$; $JZ = 60\sqrt{21}$. Bei Fig. 2 ist, von O aus gerechnet, $A = 25$; $B = 49$; $C = 81$;

---

* Aufgabe (α). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die Kreise u b c gegeben sind.

Konstruktion. 1. Bezeichne auf die oben angegebene Art die Seiten der Kreise u, b, c, deren Orthogonalkreis t sein möge, mit u′ u″, b′ b″, c′ c″ (8 Kombinationen) und zeichne zu b′ c′ den Potenzkreis d (eindeutig). Seine Seiten seien d′ d″ (zweideutig). 2. Zeichne 2 Kreise $\mu_3 \mu_2$, die b′ u″ d″ und c′ u′ d′ bezüglich berühren (eindeutig). 3. Lege durch den Berührungspunkt B_2 von b und μ_2 einen zu t rechtwinkligen Kreis v, der den Kreis μ_3 berührt (zweideutig). 4. Zeichne den Kreis w, der dem von u v gebildeten Büschel angehört und den Kreis μ_2 berührt (eindeutig). 5. Die 3 Kreispaare x x′, y y′, z z′, welche die Kreise b c v w, c w u x, b u v x bezüglich berühren, liefern, gehörig geordnet, 2 Lösungen x y z und x′ y′ z′ der Aufgabe. Diese hat $(8 . 2 . 1 . 2 . 1 . 2) : 2 = 32$ Lösungen.

Aufgabe (β). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die Kreise a v w gegeben sind.

Konstruktion. 1. Zeichne den Orthogonalkreis t von a v w und bezeichne auf die oben angegebene Art die Seiten von a, v, w mit a′ a″, v′ v″, w′ w″ (8 Kombinationen). 2. Konstruiere den Kreis μ_1, der a′ v′ w″ berührt (eindeutig). 3. Lege durch den Berührungspunkt B_1 von a und μ_1 den Kreis u, der dem von v w bestimmten Büschel angehört (eindeutig). Die Seiten dieses Kreises seien u′ u″ (2 Kombinationen). 4. Derjenige Kreis z, der a′ v′ u″ berührt, ist einer der 3 gesuchten Kreise (eindeutig). Der zweite gesuchte Kreis y berührt die Kreise a u w, und zwar u in demselben Punkte wie z. Der dritte gesuchte Kreis x berührt die 4 Kreise v w y z (eindeutig). Die Aufgabe hat $8 . 2 = 16$ Lösungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$D = 36$; $E = 70{,}56$; $F = 116{,}64$; $G = -K = 75{,}6$; $H = -L = 54$; $J = -M = 42$; $\alpha = 58{,}5$; $\beta = 60\frac{18}{55}$; $\gamma = 61\frac{5}{7}$; $\delta = 43\frac{13}{17}$; $\varepsilon = 126$; $\zeta = 73\frac{23}{40}$. Die Kreise μ_1 und μ_3 sind hier komplex imaginär, während μ_2 reell ist. Bei der Figur 7 werden die gegebenen Kreise a b c und ihr Orthogonalkreis t von einem und demselben Kreise sämtlich berührt. Die Herstellung von 12 unter den 64 Lösungen ist hier von verblüffender Einfachheit. So ist der zu t rechtwinkelige durch C und E gehende Kreis x einer der gesuchten. Derselbe gehört 2 Lösungen an. Hier sind die Kreise μ_2 und μ_3 reell, während μ_1 komplex imaginär ist.

Frei von dem angeführten Übelstande ist die

Konstruktion (III).

1. Wie bei der Konstruktion (II). (S. Fig. 4.)

2. Zeichne zu a′ e′ f″, ferner zu b′ f′ d″ und zu c′ d′ e″ die Ähnlichkeitsaxen. Dieselben mögen das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ bilden (eindeutige Operationen).

3. Schlage um die Punkte $A_1 B_1 C_1$ drei zu t rechtwinkelige Kreise $t_1 t_2 t_3$ und bestimme zu d e f in Bezug auf diese Kreise $t_1 t_2 t_3$ der Reihe nach die inversen Kreise u v w und bezeichne die Seiten derselben, die bei diesen Inversionen den Seiten d′ e′ f′ d″ e″ f″ entsprechen, mit u′ v′ w′ u″ v″ w″ (eindeutige Operationen).

4. Wie bei der Konstruktion (II).

1. Anmerkung. Diese Konstruktion lässt uns dann im Stich, wenn die zu a′ e′ f″, b′ f′ d″ und c′ d′ e″ gehörigen Ähnlichkeitsaxen auf einander fallen, indem dann die Punkte $A_1 B_1 C_1$ und die Kreise $t_1 t_2 t_3$ unbestimmt werden. In diesem Falle lässt sie sich leicht auf folgende Art abändern:

2. Stelle zu a′ e′ f″, b′ f′ d″ und zu c′ d′ e″ die 3 Tripel von Potenzkreisen T_1, T_2, T_3 bezüglich her.

3. Zeichne, was hier ohne inneren Widerspruch möglich ist, 3 Kreise $t_1 t_2 t_3$, von denen t_1 den 2 Büscheln $T_2 T_3$, t_2 den Büscheln $T_3 T_1$ und t_3 den Büscheln $T_1 T_2$ angehört. Alles Übrige wie bei (III).*

2. Anmerkung. Auch bei dieser Konstruktion (III) kann es vorkommen, dass unter den Kreisen $t_1 t_2 t_3$ einige imaginär werden. So ist bei der Figur 4 der Kreis t_2 thatsächlich imaginär. Dieser Kreis ist aber rein und nicht komplex imaginär mit einem reellen Centrum (B_1). Derselbe kann daher in allgemein bekannter Weise durch eine reelle Kreislinie, die B_1 zum Centrum hat und von t halbiert wird, vertreten werden. Der in Bezug auf t_2 inverse Kreis v des Kreises e ist somit auch in diesem Falle reell und durch reelle Operationen herstellbar.

3. Anmerkung. Nach dieser Konstruktion (III) erhält man stets, mögen die Kreise $t_1 t_2 t_3$ reell oder imaginär sein, zu reellen Kreisen d e f auch reelle

* Bei dem auf 3 Gerade beschränkten Probleme ist die abgeänderte Konstruktion (III) allein anwendbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreise u v w. Die Steinerschen Kreise $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$, deren Herstellung übrigens mühsam und zeitraubend ist, sind somit unter allen Umständen entbehrlich und in vielen Fällen sogar zweckwidrig.

Die Konstruktion (III) lässt noch wesentliche Vereinfachungen zu. Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Orthogonalkreis t der gegebenen reellen Kreise a b c reell oder imaginär ist.

Konstruktion (IV, A).

Die Kreise a b c t sind reell.*

(Fig. 3 und 4.)

1. Stelle zu den Kreisen a b c den Orthogonalkreis t (mit dem Centrum T) her. Die Schnittpunktepaare desselben mit den Kreisen a b c seien bezüglich A D, B E, C F.

2. Zeichne bei dem Orthogonalkreise t zu den Punkten $(\overline{B\,F}, \overline{C\,E})$; $(\overline{C\,D}, \overline{A\,F})$; $(\overline{A\,E}, \overline{B\,D})$ die Polaren. Die Schnittpunktepaare derselben mit dem Kreise t seien G K; H L; J M.

---

* Aufgabe (α). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die Kreise u b c gegeben sind. Nach Annahme sind hier die Kreise u b c nebst ihrem Orthogonalkreise t reell.

Konstruktion. (Fig. 3 und 4.) 1. Die Schnittpunkte des Orthogonalkreises t von u b c mit diesen 3 Kreisen seien $\alpha\,\delta$, B E, C F. 2. Stelle beim Kreise t zu dem Punkte $(\overline{B\,F}, \overline{C\,E})$ die Polare und deren Schnittpunkte G K mit t her. 3. Zeichne zu dem Sechsecke B G δ E K α die Pascalsche Gerade g und bestimme zu dem Schnittpunkte P dieser Geraden mit B E denjenigen Punkt P′, der von P durch B und E harmonisch getrennt wird. Die Geraden C P′, G P′, α P′ mögen den Kreis t zum zweitenmal bezüglich in den Punkten F′, K′, δ' schneiden. 4. Stelle die Pascalsche Gerade des Sechsecks F K′ δ F′ K δ', deren Schnittpunkte $\beta\,\beta_1$ mit dem Kreise t und den zweiten Schnittpunkt ε der Geraden β P′ mit t her. Die Verbindungsgerade von B mit $(\overline{E\,F}, \overline{G\,\beta})$ und die von G mit $(\overline{B\,C}, \overline{F\,\varepsilon})$ schneide zum zweitenmal den Kreis t bezüglich in den Punkten ζ und γ. 5. Zeichne zu den 3 Sechsecken B β C E ε F, C δ ζ F α γ, B ε δ E β α die Pascalschen Geraden B′ C′, C′ A′, A′ B′. Bestimme zu den Punkten A′, L′ = $(\overline{B\,E}, \overline{B'\,C'})$, M′ = $(\overline{C\,F}, \overline{C'\,A'})$, S′ = $(\overline{B\,E}, \overline{A'\,B'})$, T′ = $(\overline{C\,F}, \overline{B'\,C'})$ 5 Punkte A″, L″, M″, S″, T″ so, dass die Involutionen $\alpha^2 . \delta^2 . A'\,A''$; $B^2 . E^2 . L'\,L''$. S′ S″; $C^2 . F^2 . M'\,M''$. T′ T″ bestehen. Die Geraden T A″, T L″, T M″, T S″, T T″ mögen der Reihe nach die Kreise u, b, c, b, c in den Punktepaaren $\alpha'\,\alpha''$, $\lambda\,\lambda'$, $\mu\,\mu'$, $\sigma\,\sigma'$, $\tau\,\tau'$ treffen (hierbei ist T das Centrum von t). Diese Punkte lassen sich so anordnen, dass die Geraden $\alpha'\,\sigma$, B α, E δ, ferner $\alpha'\,\mu$, F α, C δ und $\lambda\,\tau$, B F, C E durch je einen Punkt gehen. 6. Lege durch die Punktepaare $\lambda\,\tau$, $\alpha'\,\mu$, $\alpha'\,\sigma$ bezüglich 3 Kreise x y z, die bezüglich die Kreise b c u berühren. Diese sind bei richtiger Auswahl des Punktepaares $\lambda\,\tau$ die gesuchten Kreise. — Die Aufgabe hat 32 Lösungen.

Aufgabe (β). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die Kreise a v w gegeben sind. Nach Annahme sind hier die Kreise a v w nebst ihrem Orthogonalkreise t reell.

Konstruktion. (Fig. 3 und 4.) 1. Die Schnittpunkte von t mit a, v, w seien A D, $\beta\,\varepsilon$, $\gamma\,\zeta$ und das Centrum von t sei T. 2. Zeichne zu dem Sechsecke A ε ζ D β γ die Pascalsche Gerade g. 3. Bestimme zu dem Schnittpunkte P von g mit A D denjenigen Punkt P′, der von P durch A und D harmonisch getrennt wird. Die Verbindungsgerade des Punktes $(\beta\,\varepsilon, \gamma\,\zeta)$ mit P′ schneide

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Konstruiere zu den 3 Sechsecken A L M D H J, B M K E J G, C K L F G H die Pascalschen Geraden. Die Ecken des von letzteren gebildeten Dreiecks seien A_1, B_1, C_1.

4. Stelle die zweiten Schnittpunkte des Kreises t mit den Geraden A_1 K; B_1 L; C_1 M; A_1 G; B_1 H; C_1 J her. Dieselben seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$.

5. Zeichne zu den 3 Sechsecken C E γ F B ζ, A F α D C δ, B D β E A ε die Pascalschen Geraden. Dieselben mögen das Dreieck A′ B′ C′ bilden.

6. Stelle zu den Punkten $(\overline{A D}, \overline{A' B'}) = K'$, $(\overline{B E}, \overline{B' C'}) = L'$, $(\overline{C F}, \overline{C' A'}) = M'$, $(\overline{A D}, \overline{C' A'}) = R'$, $(\overline{B E}, \overline{A' B'}) = S'$, $(\overline{C F}, \overline{B' C'}) = T'$ 6 Punkte K″ L″ M″ R″ S″ T″ so her, dass die Punktepaare A D, B E, C F, A D, B E, C F von den Punktepaaren K′ K″, L′ L″, M′ M″, R′ R″, S′ S″, T′ T″ bezüglich harmonisch getrennt werden. Die Geraden T K″, T L″, T M″, T R″, T S″, T T″ mögen die Kreise a, b, c, a, b, c bezüglich in den Punkten $\varkappa\varkappa', \lambda\lambda', \mu\mu', \rho\rho', \sigma\sigma', \tau\tau'$ schneiden. Dabei sei, was hier möglich ist, die Bezeichnung der Punkte so gewählt, dass die Geraden B F, C E, $\lambda\tau$, ferner C D, A F, $\mu\rho$ und A E, B D, $\varkappa\sigma$ durch je einen Punkt gehen.

7. Lege durch die Punktepaare $\lambda\tau, \mu\rho, \varkappa\sigma$ bezüglich 3 Kreise x, y, z, die der Reihe nach die Kreise b, c, a berühren. Diese Kreise sind bei richtiger Auswahl der Punktepaare $\lambda\tau, \mu\rho, \varkappa\sigma$ die verlangten.*

Anmerkungen. Bei der ganzen Zwischenkonstruktion ist nur ein einzigesmal (bei der Herstellung des Kreises t) vom Zirkel Gebrauch gemacht worden; sonst ist nur das Lineal zur Verwendung gelangt. Diese Lösung (IV, A) dürfte mithin

---

den Kreis t in den Punkten α und δ. Die Verbindungsgerade von $(\overline{D\alpha}, \overline{A\delta})$ und $(\overline{\gamma\alpha}, \overline{\zeta\delta})$ sei p und die von $(\overline{D\beta}, \overline{A\varepsilon})$ und $(\overline{\alpha\beta}, \overline{\delta\varepsilon})$ sei q. 4. Stelle zu den Punkten $B' = (\overline{\beta\varepsilon}, q)$, $C' = (\overline{\gamma\zeta}, p)$, $K' = (\overline{A D}, q)$, $R' = (\overline{A D}, p)$ 4 Punkte B″ C″ K″ R″ so her, dass die Involutionen $\beta^2 . \varepsilon^2 . B' B''$; $\gamma^2 . \zeta^2 . C' C''$; $A^2 . D^2 . K' K'' . R' R''$ bestehen. Die Schnittpunkte der Geraden T B″, T C″, T K″, T R″ bezüglich mit v, w, a, a seien $\beta'\beta'', \gamma'\gamma'', \varkappa\varkappa', \rho\rho'$. Diese Punkte lassen sich so anordnen, dass die Geraden $\beta'\gamma', \beta\gamma, \varepsilon\zeta$, ferner $\rho\gamma', A\gamma, D\zeta$ und $\varkappa\beta', A\varepsilon, D\beta$ durch je einen Punkt gehen. 5. Lege bezüglich durch die Punktepaare $\beta'\gamma', \gamma'\rho, \beta'\varkappa$ 3 Kreise x y z, die der Reihe nach die Kreise v, w, a berühren. Diese sind die verlangten. — Die Aufgabe hat 16 Lösungen.

Bei dieser wie bei der vorhergehenden Aufgabe wurde bei der Zwischenkonstruktion ein einzigesmal der Zirkel und sonst nur das Lineal benutzt.

* Diese Konstruktion lässt sich unmittelbar auch auf die folgende Aufgabe übertragen: „In einer Ebene sind 3 Kegelschnitte a b c gegeben, die sämtlich 2 und nur 2 Punkte P und Q gemein haben. Drei Kegelschnitte x y z sind durch die Punkte P und Q so zu legen, dass die Kegelschnitte eines jeden der vier Tripel x y z, a y z, b z x, c x y einander, ohne ein Büschel zu bilden, paarweise berühren."

Beispielsweise können a b c x y z homothetische gleichseitige Hyperbeln sein.

Lösung. Sind die Schnittpunkte bei b c, c a, a b, abgesehen von P und Q die Punkte A″ D″, B″ E″, C″ F″, so lege durch P und Q denjenigen Kegelschnitt t, der A″ und D″, ferner B″ und E″ und endlich C″ und F″ zu Paaren konjugierter Punkte hat. Die übrige Konstruktion stimmt wörtlich mit der oben angegebenen überein, wenn überall „Kegelschnitt" statt „Kreis" gesetzt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

als ein geeignetes Beispiel der „Konstruktionen mittels Lineals und eines festen Kreises“ (Steiner, Gesammelte Werke, I. Bd., S. 461—522) anzusehen sein.

Zu 1. Es kann A mit D, B mit E und C mit F vertauscht werden. Dies giebt 8 verschiedene Kombinationen. Hier kommt es aber, falls es sich um die Herstellung aller möglichen Lösungen handelt, nur auf 4 Kombinationen an, indem viermal je zwei der 8 Kombinationen (wie A D, B E, C F und D A, E B, F C) dieselben Punkte G K, H L, J M liefern. Es findet mithin bei 1. eine vierfache Verzweigung des Konstruktionsweges statt.

Zu 2. Es kann G mit K, H mit L und J mit M vertauscht werden. Jede der 8 möglichen Kombinationen liefert ein anderes Dreieck $A_1 B_1 C_1$. Es findet somit bei 2. eine achtfache Verzweigung statt. Die durch die Punktepaare G K, H L, J M senkrecht zu t gelegten Kreise sind einem Büschel angehörige Potenzkreise d, e, f der Kreispaare b c, c a, a b.

Zu 3. Die 3 Punktetripel $(\overline{A L}, \overline{D H})$, $(\overline{L M}, \overline{H J})$, $(\overline{D M}, \overline{A J})$; $(\overline{B M}, \overline{E J})$, $(\overline{M K}, \overline{I G})$, $(\overline{E K}, \overline{B G})$ und $(\overline{C K}, \overline{F G})$, $(\overline{K L}, \overline{G H})$, $(\overline{E L}, \overline{C H})$ liegen auf je einer (Pascalschen) Geraden. Die Konstruktion ist hier linear; eine Verzweigung findet hier nicht statt.

Zu 4. Die Konstruktion ist auch an dieser Stelle linear, sodass eine Verzweigung nicht stattfindet. Zur Kontrolle und etwaiger Abänderung der Konstruktion, wie sie zuweilen erwünscht ist, diene die Bemerkung, dass B C, C A, A B, E F, F D, D E bezüglich bei den Sechsecken $\gamma E F \varepsilon K G$, $\alpha F D \zeta L H$, $\beta D E \delta M J$, $\zeta B C \beta G K$, $\delta C A \gamma H L$, $\varepsilon A B \alpha J M$ die Pascalschen Geraden sind. Die Geraden $\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\zeta$ gehen durch einen Punkt. Die durch die Punktepaare $\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\zeta$ senkrecht zu t gelegten Kreise bilden ein Büschel und sind mit den Steinerschen Kreisen $u = (b_1 B_1 \beta_1)$, $v = (b_2 B_2 \beta_2)$, $w = (b_3 B_3 \beta_3)$ identisch. Die Punktepaare A D; B E und C F werden von den Strahlenpaaren $\alpha\delta, B_1 C_1$; $\beta\varepsilon, C_1 A_1$ und $\gamma\zeta, A_1 B_1$ bezüglich harmonisch getrennt.

Zu 5. Die Konstruktion ist linear; eine Verzweigung findet nicht statt. Zur Kontrolle oder etwaiger Abänderung der Konstruktion dienen folgende Bemerkungen. Statt der angeführten Sechsecke kann man auch die Sechsecke $C E \varepsilon F B \beta$, $A F \zeta D C \gamma$, $B D \delta E A \alpha$ oder die Sechsecke $\gamma \beta C \zeta \varepsilon F$, $\alpha \gamma A \delta \zeta D$, $\beta \alpha B \varepsilon \delta E$ oder die Sechsecke $\beta \gamma E \varepsilon \zeta B$, $\gamma \alpha F \zeta \delta C$, $\alpha \beta D \delta \varepsilon A$ setzen. Es liegen nämlich die Punkte $(\overline{E C}, \overline{B F})$, $(\overline{E \gamma}, \overline{B \zeta})$, $(\overline{F \gamma}, \overline{C \zeta})$, $(\overline{E \varepsilon}, \overline{B \beta})$, $(\overline{F \varepsilon}, \overline{C \beta})$, $(\overline{\beta \gamma}, \overline{\varepsilon \zeta})$ auf der Geraden B′ C′, die Punkte $(\overline{F A}, \overline{C D})$, $(\overline{F \alpha}, \overline{C \delta})$, $(\overline{D \alpha}, \overline{A \delta})$, $(\overline{F \zeta}, \overline{C \gamma})$, $(\overline{D \zeta}, \overline{A \gamma})$, $(\overline{\gamma \alpha}, \overline{\zeta \delta})$ auf der Geraden C′ A′ und die Punkte $(\overline{D B}, \overline{A E})$, $(\overline{D \beta}, \overline{A \varepsilon})$, $(\overline{E \beta}, \overline{B \varepsilon})$, $(\overline{D \delta}, \overline{A \alpha})$, $(\overline{E \delta}, \overline{B \alpha})$, $(\overline{\alpha \beta}, \overline{\delta \varepsilon})$ auf der Geraden A′ B′. Die 9 Geradenquadrupel $\beta\gamma; \varepsilon\zeta$; B′ C′; $B_1 C_1 — \gamma\alpha$; $\zeta\delta$; C′ A′; $C_1 A_1 — \alpha\beta$; $\delta\varepsilon$; A′ B′; $A_1 B_1 — E\gamma$; $B\zeta$; B′ C′; $C_1 A_1 — F\alpha$; $C\delta$; C′ A′; $A_1 B_1 — D\beta$; $A\varepsilon$; A′ B′; $B_1 C_1 — C\beta$; $F\varepsilon$; B′ C′; $A_1 B_1 — A\gamma$; $D\zeta$; C′ A′, $B_1 C_1 — B\alpha$; $E\delta$; A′ B′; $C_1 A_1$ gehen durch je einen Punkt.

Zu 6. Zur Kontrolle oder etwaiger Abänderung der Konstruktion dienen folgende Sätze. Stellt man zu den Geraden B′ C′, C′ A′, A′ D′ in Bezug auf die Kreispaare b c, c a, a b die Pole her, so liegen sie bezüglich auf den Geraden T L″

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und T T″, T M″ und T R″, T K″ und T S″. Die Orthogonalkreise von $\overline{A'D'}$, a, t, von $\overline{B'C'}$, b, t, von $\overline{C'A'}$, c, t, von $\overline{A'D'}$, b, t, von $\overline{B'C'}$, c, t und von $\overline{C'A}$, a, t gehen bezüglich durch die Punktepaare $\varkappa\varkappa'$, $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\rho\rho'$ $\sigma\sigma'$, $\tau\tau'$. Die zu t rechtwinkligen Kreise mit den Mittelpunkten A′, B′, C′ gehen bezüglich durch die Punkte α', β', γ', in denen sich die gesuchten Kreise x, y, z paarweise berühren, und schneiden daselbst die Steinerschen Kreise $u = (b_1 B_1 \beta_1)$, $v = (b_2 B_2 \beta_2)$, $w = (b_3 B_3 \beta_3)$ bezüglich rechtwinklig. Die Polaren der Punkte A′ B′ C′ in Bezug auf die Kreise u v w schneiden bezüglich diese Kreise in denselben Punkten α' β' γ'. Die Punkte A′ α δ, ferner B′ β ε und C′ γ ζ liegen auf je einer Geraden. Wie die Punkte $\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ eine Lösung liefern, so erhält man auch aus den Punkten $\varkappa'\lambda'\mu'\rho'\sigma'\tau'$ eine zweite Lösung. Die Verzweigung ist hier eine zweifache.

Zu 7. Die Konstruktion ist eindeutig; eine Verzweigung findet nicht statt.

Nach den Punkten 1. bis 7. der Konstruktion hat die Aufgabe im allgemeinen $4.8.1.1.1.2.1 = 64$ Lösungen.

Liegen die Kreise a, b, c auf einer Kugel, so bedarf die Konstruktion (IV, A) einer kleinen Abänderung. Man projiziere dann von einem der beiden Pole des Kreises t die Kreise a b c auf die Ebene, in der t liegt, führe in dieser Ebene die obige Konstruktion (IV, A) durch und projiziere rückwärts auf die Kugel.

Ist t eine Gerade, so versagt die Konstruktion (IV, A). In diesem Falle führe man die Konstruktion (IV, A) an irgend einer inversen Figur von a b c t durch, bei der das neue t keine Gerade ist, und stelle zu der so erhaltenen Hülfsfigur rückwärts das inverse Gebilde her.

Ist der Orthogonalkreis t der reellen Kreise a b c imaginär, so ist es zwar nicht notwendig, jedoch zweckmässig, zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem a b c grösste Kugelkreise sind oder nicht.

Konstruktion (IV, B).

a b c sind reelle grösste Kugelkreise.

(Fig. 5.)

1. Stelle zu den Kreisen a, b, c die Pole A D, B E, C F her. Die Punktequadrupel B C E F, C A F D, A B D E liegen der Reihe nach auf 3 grössten Kugelkreisen a′ b′ c′.

2. Halbiere auf den Kreisen a′, b′, c′ die Bogen B F, C D, A E bezüglich durch die Punkte G, H, J und stelle die Kugeldurchmesser G K, H L, J M her. Dabei ist es gleichgültig, welcher der beiden Bogen bei jedem der 3 Kreise gehälftet wird.

3. Bezeichne die zweiten Schnittpunkte der durch C L G und E M G, durch A M H und F K H, durch B K J und D L J, durch F H K und B J K, durch D J L und C G L, durch E G M und A H M gehenden Kreise bezüglich mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$.

4. Zeichne die Polarkreise x x′, y y′, z z′ zu den durch die Punktequadrupel B C γ ε, C A α ζ, A B β δ bezüglich gehenden Kreisen. Die Polarkreise lassen sich so anordnen, dass die Kreise x y z und die Kreise x′ y′ z′ je eine Lösung bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung. Unter den Polarkreisen eines Kugelkreises k sollen hier diejenigen 2 Kreise k_1 und k_2 verstanden werden, die durch die beiden Pole eines beweglichen, den Kreis k berührenden, grössten Kugelkreises erzeugt werden.*

Konstruktion (IV, C).

Die Kreise a b c sind reell, liegen in einer Ebene und haben einen imaginären Orthogonalkreis.**

(Fig. 5.)

1. Zeichne diejenige Kreislinie t', die von jedem der 3 Kreise a, b, c halbiert wird.

* Durch diese polare Umkehrung des Malfattischen Problems gelangt man zu folgenden 3 interessanten Aufgaben: „In einer Ebene schneiden sich drei Strecken A D, B E, C F in einem Punkte O derart, dass $AO \cdot DO = BO \cdot EO = CO \cdot FO$ ist. Sechs Kreise $u_0, v_0, w_0, x_0, y_0, z_0$ sind so zu zeichnen, dass die Kreise eines jeden der Paare $v_0 z_0, w_0 x_0, u_0 y_0, y_0 w_0, z_0 u_0, x_0 v_0$ einander berühren, und dass ausserdem die obigen 6 Kreise der Reihe nach durch die Punktepaare

1. B C, C A, A B, E F, F D, D E, oder
2. B C, C A, D B, E F, F D, A E, oder
3. E C, F A, A B, B F, C D, D E gehen."

Lösungen (Fig. 6). Zu 1. 1. Lege, was hier möglich ist, der Reihe nach durch die Punktequadrupel B C E F, C A F D, A B D E 3 Kreise a, b, c. 2. Bestimme zu den Punkten (B F, C E), (C D, A F), (A E, B D) bezüglich bei den Kreisen a, b, c die Polaren. Die Schnittpunktepaare derselben mit den diesbezüglichen Kreisen seien G K, H L, J M (8 Kombinationen). 3. Lege durch die Punktetripel A H M, B J K, C G L, D J L, E G M, F H K bezüglich 6 Kreise u' v' w' x' y' z'. Die Kreise der Paare w' y', u' z', v' x', v' z', w' x', u' y' schneiden einander ausser in den Punkten G H J K L M noch in 6 neuen Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$. 4. Lege, was hier möglich ist, durch die Punktequadrupel $B\,C\,\gamma\,\varepsilon$, $C\,A\,\alpha\,\zeta$, $A\,B\,\beta\,\delta$, $E\,F\,\zeta\,\beta$, $F\,D\,\delta\,\gamma$, $D\,E\,\varepsilon\,\alpha$ der Reihe nach 6 Kreise $u_0\,v_0\,w_0\,x_0\,y_0\,z_0$. Diese sind die verlangten Kreise. — 8 durchweg reelle Lösungen.

Zu 2. Um keine völlig neue Figur entwerfen zu müssen, setze, was hier erlaubt ist, bei Fig. 6 α und δ für A und D. Demnach gelten hier die Punkte $\alpha\,B\,C\,\delta\,E\,F$ und nur diese als bekannt. 1. Lege durch das Punktequadrupel B C E F einen Kreis a und bestimme bei ihm zu dem Punkte (B F, C E) die Polare, die a in den Punkten G und K schneiden möge. 2. Lege der Reihe nach durch die Punktetripel $B\,\delta\,K$, $C\,\alpha\,G$, $E\,\alpha\,G$, $F\,\delta\,K$ 4 Kreise v' w' y' z'. 3. Lege durch die Punkte B E einen Kreis b'', der v' (und gleichzeitig y') berührt. Dieser Kreis schneidet den Kreis w' in zwei Punkten ε und ε'. 4. Der durch $\alpha\,\delta\,\varepsilon$ gehende Kreis t schneidet die Kreise v' y' z' ausser in den Punkten $\delta\,\alpha\,\delta$ noch in 3 ferneren Punkten $\gamma\,\zeta\,\beta$. 5. Lege durch die Punkte $B\,C\,\varepsilon\,\gamma$, $C\,\alpha\,\zeta$, $B\,\delta\,\beta$, $E\,F\,\beta\,\zeta$, $F\,\delta\,\gamma$, $E\,\alpha\,\varepsilon$ der Reihe nach 6 Kreise $u_0\,v_0\,w_0\,x_0\,y_0\,z_0$. Diese sind die verlangten. — 4 Lösungen, da G mit K vertauschbar und ε zweideutig ist.

Zu 3. Betrachte hier als bekannt $A\,\beta\,\gamma\,D\,\varepsilon\,\zeta$, indem $\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\zeta$ für B C E F tritt (Fig. 6). 1. Zeichne die Kreise u' $(A\,\beta\,\zeta)$, x' $(D\,\varepsilon\,\gamma)$, t $(\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\zeta)$. 2. Lege durch A D einen Kreis a'', der u' (und gleichzeitig x') berührt. Die Schnittpunkte von t und a'' seien $\alpha\,\delta$. 3. Zeichne die Kreise $v_0\,(A\,\zeta\,\alpha)$, $w_0\,(A\,\beta\,\delta)$, $y_0\,(D\,\gamma\,\delta)$, $z_0\,(D\,\varepsilon\,\alpha)$ und lege durch $\varepsilon\,\gamma$ und $\beta\,\zeta$ 2 Kreise $u_0\,x_0$, die bezüglich die Kreise y v berühren. Die Kreise $u_0\,v_0\,w_0\,x_0\,y_0\,z_0$ sind die verlangten. — 2 Lösungen, da α mit δ vertauschbar ist.

Die polaren Umkehrungen dieser 3 Aufgaben führen rückwärts zum Malfattischen Problem, und zwar die der ersten zu dem Problem in der Seite 1 gegebenen Fassung.

** Aufgabe (α). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die (reellen) Kreise u b c mit dem imaginären Orthogonalkreise t gegeben sind.

Konstruktion (Fig. 5 und 6, u fehlt). 1. Zeichne die Kreislinie t', die von jedem der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Stelle 3 Kreise $a' b' c'$ her, die die Kreispaare $b c, c a, a b$ bezüglich rechtwinklig schneiden und sämtlich die Kreislinie t' halbieren. Die Schnittpunktepaare von $b' c', c' a', a' b'$ seien bezüglich $A D, B E, C F$.

3. Bestimme zu den Punkten $(\overline{B F}, \overline{C E})$, $(\overline{C D}, \overline{A F})$, $(\overline{A E}, \overline{B D})$ bezüglich bei den Kreisen a, b, c die Polaren. Die Schnittpunktepaare derselben mit den diesbezüglichen Kreisen seien $G K, H L, J M$.

4. Lege durch die Punktetripel $A H M, B J K, C G L, D J L, E G M, F H K$ bezüglich 6 Kreise $u' v' w' x' y' z'$. Die Kreise der Paare $w' y', u' z', v' x', v' z', w' x', u' y'$ schneiden einander ausser in den Punkten $G H J K L M$ noch in 6 neuen Punkten $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$.

5. Lege, was hier möglich ist, durch die Punktequadrupel $B C \gamma \varepsilon, C A \alpha \zeta$, $A B \beta \delta, E F \zeta \beta, F D \delta \gamma, D E \varepsilon \alpha$ der Reihe nach 6 Kreise $u_0 v_0 w_0 x_0 y_0 z_0$.

6. Konstruiere die bezüglich den Büscheln $u_0 x_0, v_0 y_0, w_0 z_0$ angehörigen Kreise $x x_1, y y_1, z z_1$, die der Reihe nach die Kreise b, c, a berühren. Bei gehöriger Anordnung der Kreise bilden die Kreise $x y z$ eine und die Kreise $x_1 y_1 z_1$ eine zweite Lösung.

Anmerkungen. Die 6 Punkte $G H J K L M$ liegen auf einem Kreise. Dasselbe gilt von den 6 Punkten $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$. Die Kreise a'', b'', c'', die bezüglich durch die Punktequadrupel $A D \alpha \delta, B E \beta \varepsilon, C F \gamma \zeta$ gehen, berühren der Reihe nach die Kreispaare $u' x', v' y', w' z'$ (Fig. 6). Auch die Kreise der Paare $u_0 y_0, y_0 w_0, w_0 x_0$, $x_0 v_0, v_0 z_0, z_0 u_0$ berühren sich. Die Orthogonalkreise der 6 Kreistripel $a w_0 z_0$, $b u_0 x_0, c v_0 y_0, a v_0 y_0, b w_0 z_0, c u_0 x_0$ gehen bezüglich durch die Berührungspunkte $\varkappa, \lambda, \mu, \rho, \sigma, \tau$ der 6 Kreispaare $a z, b x, c y, a y, b z, c x$. Sind $u_2 v_2 w_2$ diejenigen die Kreislinie t halbierenden Kreise, die bezüglich die Kreispaare $v_0 w_0, w_0 u_0, u_0 v_0$ rechtwinklig schneiden, und $u_3 v_3 w_3$ diejenigen die Kreislinie t hälftenden und zu dem Kreise $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$ orthogonalen Kreise, die bezüglich die Kreise $u_2 v_2 w_2$ recht-

---

3 Kreise $u b c$ halbiert wird. 2. Stelle 3 Kreise $s b' c'$ her, die die Kreispaare $b c, c s, s b$ bezüglich rechtwinklig schneiden und sämtlich die Kreislinie t' halbieren. Die Schnittpunkte von $b' c', c' s, s b'$ seien bezüglich $\alpha \delta, B E, C F$ (8 Kombinationen). 3. Führe die zu 2. gehörige Konstruktion (s. oben) durch (vierdeutig). 4. Konstruiere die bezüglich den Büscheln $u_0 x_0, v_0 y_0, w_0 z_0$ angehörigen Kreise $x x', y y', z z'$, die der Reihe nach die Kreise b, c, u berühren. Bei gehöriger Anordnung bilden die Kreise $x y z$ und $x' y' z'$ 2 Lösungen. — Die Aufgabe hat $(8 . 4 . 2) : 2 = 32$ Lösungen.

Aufgabe (β). Die Kreise $x y z$ sind herzustellen, wenn die (reellen) Kreise $a v w$ mit dem (imaginären) Orthogonalkreise t gegeben sind.

Konstruktion (Fig. 5 und 6, die Kreise $v w$ sind zu ergänzen). 1. Zeichne die Kreislinie t', die von jedem der 3 Kreise $a v w$ halbiert wird. 2. Stelle 3 Kreise $a' r s$ her, die die Kreispaare $v w, w a, a v$ bezüglich rechtwinklig schneiden und sämtlich die Kreislinie t' halbieren. Die Schnittpunkte von $r s, s a', a' r$ seien bezüglich $A D, \beta \varepsilon, \gamma \zeta$ (8 Kombinationen). 3. Führe die zu 3. gehörige Konstruktion (s. oben) durch (2 Kombinationen). 4. Zeichne die bezüglich den Büscheln $u_0 x_0, v_0 y_0, w_0 z_0$ angehörigen Kreise $x x', y y', z z'$, die der Reihe nach die Kreise v, w, a berühren. Bei gehöriger Anordnung bilden die Kreise $x y z$ und $x' y' z'$ 2 Lösungen. — Die Aufgabe hat $(8 . 2 . 2) : 2 = 16$ Lösungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

winklig treffen, so geschieht letzteres in den Punkten $\alpha'\beta'\gamma'$ (und in den diesen diametral gegenüber liegenden Punkten $\alpha''\beta''\gamma''$).

Nun soll noch die allgemeinste Konstruktion, die die bereits gelieferten als besondere Fälle umfasst, durchgeführt werden. Die gegebenen Kreise sollen dabei als beliebig, also nicht nur als reell, sondern auch als imaginär vorausgesetzt werden. Ausserdem sollen nicht nur die reellen, sondern auch die imaginären Lösungen insgesamt geliefert werden. Einige Erklärungen über das Imaginäre müssen dieser Konstruktion vorausgeschickt werden.

Erklärungen. Ein imaginärer Punkt einer reellen Ebene oder Kugel ist ein Paar reeller, mit einander nicht vertauschbarer Punkte. Von diesen möge der eine als Nord- und der andere als Südpol des imaginären Punktes bezeichnet werden. Ist A der Nord- und B der Südpunkt, so soll der imaginäre Punkt $\left(\frac{A}{B}\right)$ heissen.

Zwei Punkte sind konjugiert imaginär, wenn der Nordpol des einen der Südpol des anderen ist, und umgekehrt.

Unter dem unendlich entfernten imaginären Nord- oder Süd-Kreispunkte soll jeder imaginäre Punkt verstanden werden, dessen Nord- bezüglich Südpol unendlich weit entfernt ist.

Ein imaginärer Punkt artet in einen reellen aus, wenn sein Nordpol auf seinen Südpol zu liegen kommt.

Eine (imaginäre oder reelle) Gerade einer reellen Ebene ist der Träger aller imaginären und reellen Punkte, deren Nord- und Südpole zwei auf einander liegende, ungleichwendige, ähnliche oder kongruente Punktfelder bilden (das Nord- und das Südfeld).

Zwei Gerade sind konjugiert imaginär, wenn der konjugierte Punkt eines jeden Punktes der einen stets ein Punkt der anderen ist.

Unter einer imaginären Nord- oder Süd-Kreisgeraden soll jede imaginäre Gerade verstanden werden, bei der jene Ähnlichkeit derart ausgeartet ist, dass einem bestimmten im Endlichen gelegenen Süd- oder Nordpole jeder Punkt der Ebene als Nord- oder Südpol entspricht.

Eine Gerade ist reell, wenn sie mit der ihr konjugierten identisch ist.

Ein (imaginärer oder reeller) Kreis einer reellen Ebene oder Kugel ist der Träger aller (imaginären und reellen) Punkte, deren Nord- und Südpole zwei auf einander liegende, in ihren kleinsten Teilen ungleichwendige, reell kreisverwandte ($\curlyvee$) Punktfelder (das Nord- und Südfeld) bilden.

Zwei Kreise sind konjugiert imaginär, wenn der konjugierte Punkt eines jeden Punktes des einen stets ein Punkt des anderen ist.

Ein Kreis artet in einen Nullkreis aus, wenn jene Kreisverwandtschaft derart ausartet, dass einem bestimmten, im Endlichen gelegenen Punkte des Nordfeldes jeder Punkt des Südfeldes, und ferner einem zweiten bestimmten im Endlichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gelegenen Punkte des Südfeldes jeder Punkt des Nordfeldes entspricht. Ein Nullkreis zerfällt stets in eine imaginäre Nord- und Südkreisgerade.

Ein Kreis ist komplex imaginär, wenn er von dem ihm konjugierten Kreise verschieden ist. Ein Kreis ist reell oder rein imaginär, wenn er mit dem ihm konjugierten identisch ist und reelle oder keine reellen Punkte enthält. (Diese Definition eines reellen Kreises ist insofern allgemeiner als die in der Elementargeometrie gebräuchliche, dass sie auch die imaginären Peripheriepunkte liefert. Ein Punkt dieser Art hat zum Nord- und Südpole stets 2 konjugierte Pole des reellen Kreises im gebräuchlichen Sinne.)

Zwei oder mehrere reell ähnliche oder reell kreisverwandte Punktfelder sollen kohärent ($\curlywedge$) heissen, wenn sie auf einer reellen Ebene oder Kugel so auf einander liegen, dass sie in ihren kleinsten Teilen gleichwendig sind.

Zwei kohärente Punktfelder haben stets zwei gemeinschaftliche entsprechende Punkte: die Grund- oder Schnittpunkte der Felder. Diese Schnittpunkte sind stets reell.

Zwei kohärente Punkte berühren sich, wenn ihre zwei Grundpunkte auf einander fallen, sie schneiden sich, wenn ihre Grundpunkte von einander verschieden sind, und ausserdem im letzteren Falle dann rechtwinklig (involutorisch), wenn die Punkte des Nord- und Südfeldes sich wechselseitig entsprechen (wenn sie eine Involution bilden).

Zwei kohärente Punktfelder arten aus, wenn ihre Kreisverwandtschaft wie bei einem Nullkreise ausartet.

Drei oder mehrere kohärente Punktfelder bilden ein Büschel, wenn sie sich sämtlich in denselben zwei Punkten schneiden oder in einem und demselben Punkte berühren.

Konstruktion (V).

a b c sind beliebige, reelle oder imaginäre Kreise einer reellen Ebene oder Kugelfläche.*

(Fig. 1—7.)

1. Stelle zu 3 beliebigen reellen Punkten $S_1\, S_2\, S_3$ der Ebene oder Kugel,

---

* Aufgabe (α). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die Kreise u b c gegeben sind. Die Kreise u b c sind beliebig, reell oder imaginär.

Konstruktion. 1. Stelle zu den Kreisen u b c in bekannter Weise die ihnen entsprechenden kohärenten Punktfelder u b c her. 2. Bestimme das Orthogonalfeld t der Felder u b c und die Schnittpunkte $\alpha\, \delta$, B E, C F dieses Feldes t mit u b c (8 Kombinationen). Bestimme die Punkte 3. $G\, K\, B_2\, E_2\, B_3\, E_3$ aus $G^2 . K^2 . B\, F . C\, E$ (2 Kombinationen); $B_2\, E_2\, B\, K\, \delta \curlywedge B_2\, E_2\, E\, G\, \alpha$; $B_3^2 . E_3^2 . B\, F . B_2\, E_2$; 4. $\beta\, \varepsilon$ aus $\beta\, \varepsilon . B\, E . B_3\, E_3$ und $\beta\, \delta\, K\, F \curlywedge \varepsilon\, \alpha\, G\, C$ (2 Kombinationen); 5. $\gamma\, \zeta\, U\, X\, V\, Y\, W\, Z\, U_1\, X_1$ $\beta'\, \lambda\, \tau\, \gamma'\, \mu\, \alpha'\, \sigma$ aus $\gamma\, B\, C\, F\, K \curlywedge \varepsilon\, B\, C\, G\, E$; $\zeta\, E\, F\, G\, C \curlywedge \beta\, E\, F\, B\, K$; $U\, X\, B\, C\, \gamma\, \varepsilon \curlywedge U\, X\, E\, F\, \zeta\, \beta$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die als Südpole von Peripheriepunkten der Kreise a b c gelten sollen, die dazu gehörigen Nordpole $N_1 N_2 N_3$ (bei a), $O_1 O_2 O_3$ (bei b) und $P_1 P_2 P_3$ (bei c) her.

Bestimme die Punkte $A_0 B_0 C_0 D_0$ etc. folgenden Bedingungen gemäss·

V Y C α ζ ⋀ V Y F ϑ γ; W Z B β ϑ ⋀ W Z E ε α; $U_1^2 . X_1^2 . \beta\varepsilon . U X$; $\beta'^2 . \beta\varepsilon . U_1 X_1$ (zweideutig) λ τ γ′ β′ U X ⋀ B C γ ε U X; μ α′ γ′ V Y ⋀ C α ζ V Y; σ α′ W Z ⋀ B ϑ W Z. 6. Aus den Punkten B E C F G K α β γ ϑ ε ζ α′ β′ γ′ λ σ μ τ lässt sich auf die oben angegebene Art alles übrige herstellen. Die Aufgabe hat (8 . 2 . 2 . 2) : 2 = 32 Lösungen.

Aufgabe (β). Die Kreise x y z sind herzustellen, wenn die Kreise a v w gegeben sind. Die Kreise a v w sind beliebig, reell oder imaginär.

Konstruktion. 1. Stelle zu den Kreisen a v w die ihnen entsprechenden kohärenten Punktfelder a v w her. 2. Bestimme die Schnittpunkte A D, β ε, γ ζ des Orthogonalfeldes t von a v w mit diesen Feldern (8 Kombinationen). Bestimme die Punkte 3. $A_2 D_2 A_3 D_3$ aus $A_2 D_2$ A ζ β ⋀ $A_2 D_2$ D γ ε; $A_3^2 . D_3^2 .$ A D . $A_2 D_2$; 4. α ϑ aus α ϑ . A D . $A_3 D_3$ und α ϑ . β ε . γ ζ (2 Kombinationen); 5. V Y W Z $V_1 Y_1$ γ′ ρ α′ κ β′ aus V Y A α ζ ⋀ V Y D ϑ γ; W Z A β ϑ ⋀ W Z D ε α; $V_1^2 . Y_1^2 .$ γ ζ . V Y; γ′² . γ ζ . $V_1 Y_1$ (2 Kombinationen); ρ α′ γ′ V Y ⋀ A α ζ V Y; κ β′ α′ W Z ⋀ A β ϑ W Z. 6. Aus den Punkten A D α β γ ϑ ε ζ α′ β′ γ′ κ ρ ergiebt sich leicht alles übrige. — Die Aufgabe hat (8 . 2 . 2) : 2 = 16 Lösungen.

Bei den 2 Aufgaben: „Zu 3 gegebenen Kreisen a b c drei Kreise x y z so zu zeichnen, dass die Kreise eines jeden der 4 Tripel x y z, a y z, b z x, c x y einander paarweise berühren; wobei die Kreise entweder γ) von einem und nur von einem, oder ϑ) von zweien und nur von zweien der 3 letzten Tripel je ein Büschel bilden sollen", hat die erste dreimal so viele Lösungen, als die Aufgabe (α), und die letzte dreimal so viele, als die Aufgabe (β). Demnach hat die Aufgabe (γ) 32 . 3 = 96 und die Aufgabe (ϑ) 16 . 3 = 48 Lösungen. Diese Zahlen stimmen mit den vom Verfasser in seiner Programmarbeit (1897) auf andere Art gefundenen überein. Bei dem auf 3 Gerade beschränkten Probleme müssen hiernach die (γ) und (ϑ) entsprechenden Aufgaben (γ′) und (ϑ′) 48 bezüglich 24 Lösungen zulassen. Bei der Aufgabe (ϑ′) sind Sachs und Binder in ihren oben erwähnten Abhandlungen zu demselben Resultate gelangt. Für die Aufgabe (γ′) giebt Steiner die Anzahl 48, Binder die Anzahl 30 bis 40 und Sachs die Anzahl 32 an. Die Angaben Steiners, Binders und des Verfassers widersprechen sich nicht, indem von Steiner und vom Verfasser alle Lösungen, mögen dieselben reell oder imaginär sein, gezählt werden, während es Binder nur mit reellen Lösungen zu thun hat. Unvereinbar ist aber damit die von Sachs gefundene Zahl 32, die alle Lösungen, die reellen wie die imaginären, angeben soll. Dass diese Zahl 32 nicht die richtige sein kann, geht schon daraus hervor, dass die richtige Zahl ihrer Natur nach durch 3 ohne Rest teilbar ist. Sachs hat diese Zahl 32 als Rest erhalten, indem er von der von ihm gefundenen Gesamtanzahl 128 die Anzahlen der Lösungen anderer Art abzog. Dabei sind ihm aber 2 Fehler unterlaufen. Er hat den Minuend 128 und den Subtrahend unrichtig bestimmt; beide sind zu klein.

Der Verfasser findet für die Lösungen der verschiedenen Unteraufgaben, in die das verallgemeinerte Malfattische Problem: „Zu 3 Kreisen a b c 3 Kreise x y z so herzustellen, dass die Kreise eines jeden der 3 Tripel a y z, b z x, c x y einander paarweise berühren" zerfällt, folgende Anzahlen: 1. N (0) = 64; 2. N (a y z) = 32; 3. N (b z x) = 32; 4. N (c x y) = 32; 5. N (b z x, c x y) = 16; 6. N (c x y, a y z) = 16; 7. N (a y z, b z x) = 16; 8. N (a y z, b z x, c x y) = 8; 9. N (x y z) = 32; 10. N (a x y z) = 8; 11. N (b x y z) = 8; 12. N (c x y z) = 8; 13. N (y = z) = 16; 14. N (z = x) = 16; 15. N (x = y) = 16; 16. N (y = z, b x y z) = 8; 17. N (z = x, c x y z) = 8; 18. N (x = y, a x y z) = 8; 19. N (y = z, c x y z) = 8; 20. N (z = x, a x y z) = 8; 21. N (x = y = z) = 8. Es bedeutet das Zeichen (0) bei 1., dass unter den 6 Kreisen a b c x y z keine 3 ein Büschel bilden, (a y z) bei 2., dass von diesen 6 Kreisen die Kreise a y z und nur diese einem Büschel angehören, (b z x, c x y) bei 3., dass unter den 6 Kreisen die Kreise b z x und c x y und nur

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. I. $O_1 O_2 O_3 A_0 D_0 \curlywedge P_1 P_2 P_3 A_0 D_0$; $P_1 P_2 P_3 B_0 E_0 \curlywedge N_1 N_2 N_3 B_0 E_0$; $N_1 N_2 N_3 C_0 F_0 \curlywedge O_1 O_2 O_3 C_0 F_0$ (Doppelpunkte kohärenter Punktefelder);**

II. $B_0 E_0 . C_0 F_0 . A^2 . D^2$; $C_0 F_0 . A_0 D_0 . B^2 . E^2$; $A_0 D_0 . B_0 E_0 . C^2 . F^2$ (Doppelpunkte bei Involutionen);*

3. $BF . CE . G^2 . K^2$; $CD . AF . H^2 . L^2$; $AE . BD . J^2 . M^2$ (Doppelpunkte bei Involutionen);*

4. I. $AHM A_1 D_1 \curlywedge DLJ A_1 D_1$; $BJK B_1 E_1 . \curlywedge EMG B_1 E_1$; $CGL C_1 F_1 \curlywedge FKH C_1 F_1$ (Grundpunkte kohärenter Felder);**

II. $B_1 E_1 . C_1 F_1 . K\alpha . G\delta$; $C_1 F_1 . A_1 D_1 . L\beta . H\varepsilon$; $A_1 D_1 . B_1 E_1 . M\gamma . J\zeta$;

5. I. $BC\gamma\varepsilon UX \curlywedge EF\zeta\beta UX$; $CA\alpha\zeta VY \curlywedge FD\delta\gamma VY$; $AB\beta\delta WZ \curlywedge DE\varepsilon\alpha WZ$ (Schnittpunkte kohärenter Felder);**

II. $\beta\varepsilon . UX . U_1^2 . X_1^2$ (Doppelpunkte einer Involution);*

III. $\beta\varepsilon . U_1 X_1 . \beta'^2$ (Doppelpunkt einer Involution);*

IV. $BC\gamma\varepsilon UX \curlywedge \lambda\tau\gamma'\beta' UX$; $CA\alpha\zeta VY \curlywedge \mu\rho\alpha'\gamma' VY$; $AB\delta WZ \curlywedge \varkappa\sigma\alpha' WZ$;

---

diese je ein Büschel bilden, (a x y z) bei 10., dass die 4 Kreise a x y z und nur diese einem Büschel angehören, (y = z) bei 13., dass die Kreise y und z auf einander fallen, und dass sonstige Singularitäten nicht vorkommen, (y = z, b x y z) bei 16., dass die Kreise y und z von einander nicht verschieden sind, und dass ausserdem noch die Kreise b x y z ein Büschel bilden, und (x = y = z) bei 22., dass die Kreise x y z auf einander liegen. Die Anzahlen bei 1.—7. sind oben bestimmt worden. Dass N (x y z) = 32 ist, geht aus des Verfassers Programmarbeit (1897), Seite 39 und 40, hervor. Die Ableitung der übrigen Anzahlen verursacht keinerlei Schwierigkeit.

Hiernach hat das verallgemeinerte Malfattische Problem *a*) 272 Lösungen, bei denen die 3 gesuchten Kreise von einander verschieden sind, *b*) 96 Lösungen, bei denen 2 und nur 2 der 3 gesuchten Kreise zusammen fallen, und *c*) 8 Lösungen, bei denen die 3 gesuchten Kreise identisch sind, insgesamt also 376 Lösungen. Werden aber, wie billig, die Lösungen der zweiten Art doppelt, und die der dritten Art sechsfach gezählt, indem die auf einander liegenden Kreise 2 bezüglich 6 Permutationen zulassen, so erhält man als Gesamtanzahl der Lösungen $272 + 96 . 2 + 8 . 6 = 512 = 2^9$.

Bei dem auf 3 Gerade beschränkten Malfattischen Probleme giebt es in dem ersten Sinne 184 und im letzten $256 = 2^8$ Lösungen. Dabei wird im ersten Falle die unendlich entfernte Gerade als Lösung nicht mitgezählt, wohl aber im letzten, und zwar vierfach, indem im ersten Falle N (a y z, b z x, c x y) = 0 und im letzten N (a y z, b z x, c x y) = 4 gesetzt wird.

Sachs hat die Fälle 8., 9., 13., 14., 15. übersehen.

* Aufgabe. Bei zwei involutorischen Punktfeldern, bei denen zwei Paare konjugierter Punkte $A A_1$ und $B B_1$ gegeben sind, die Doppelpunkte G H zu bestimmen.

Konstruktion. Zeichne zu den 2 Kreispaaren $A A_1 B$, $A A_1 B_1$ und $B B_1 A$, $B B_1 A_1$ bezüglich diejenigen Potenzkreise $A A_1 X$ und $B B_1 Y$, welche die von den Kreisbogen $A B A_1$, $A B_1 A_1$ bezüglich $B A B_1$, $B A_1 B_1$ gebildeten Winkel halbieren. Diese Potenzkreise schneiden sich in den verlangten Punkten G H. — Die Punkte G H sind der Konstruktion nach stets reell.

** Aufgabe. Zu zwei kohärenten Punktfeldern, bei denen A B C und D E F zwei Tripel entsprechender Punkte sind, die Doppelpunkte N O zu bestimmen.

Konstruktion. Bestimme die Punkte $C_1 C_2 F_1 F_2 N O$ folgenden Bedingungen gemäss: 1. $ABC_1 CF \curlywedge DEC F F_1$; 2. $C_1^2 . F^2 . C C_2$; 3. $C^2 . F_1^2 . F F_2$; 4. $C C_2 . F F_2 . N^2 . O^2$. — Der Konstruktion nach sind auch hier die Doppelpunkte N O stets reell.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. I. $A^2 . D^2 . \varkappa \varkappa' . \rho \rho' . U U' . V V' . W W' . X X' . Y Y' . Z Z'$; $B^2 . E^2 . \lambda \lambda' . \sigma \sigma'$; $C^2 . F^2 . \mu \mu' . \tau \tau'$; $\alpha^2 . \delta^2 . \alpha' \alpha''$; $\beta^2 . \varepsilon^2 . \beta' \beta''$; $\gamma^2 . \zeta^2 . \gamma' \gamma''$;

II. $N_1 N_2 N_3 \varkappa \rho U' V' W' X' Y' Z' \perp S_1 S_2 S_3 \varkappa'' \rho'' U'' V'' W'' X'' Y'' Z''$; $O_1 O_2 O_3 \lambda \sigma \perp S_1 S_2 S_3 \lambda'' \sigma''$; $P_1 P_2 P_3 \mu \tau \perp S_1 S_2 S_3 \mu'' \tau''$;

III. $U V W \alpha'' \beta'' \gamma'' \perp U'' V'' W'' \alpha''' \beta''' \gamma'''$. Der Kreis x mit den Peripheriepunkten $\binom{X}{X''} \binom{U}{U''} \binom{\lambda}{\lambda''} \binom{\tau}{\tau''} \binom{\beta'}{\beta'''} \binom{\gamma'}{\gamma'''}$, der Kreis y mit den Punkten $\binom{Y}{Y''} \binom{V}{V''} \binom{\mu}{\mu''} \binom{\rho}{\rho''} \binom{\gamma'}{\gamma'''} \binom{\alpha'}{\alpha'''}$ und der Kreis z mit den Punkten $\binom{Z}{Z''} \binom{W}{W''} \binom{\varkappa}{\varkappa''} \binom{\sigma}{\sigma''} \binom{\alpha'}{\alpha'''} \binom{\beta'}{\beta'''}$ bilden eine Lösung der Aufgabe.

Anmerkungen. Sämtliche Konstruktionen sind hier unter allen Umständen reell. Die eine Lösung bildenden Kreise x y z sind mithin selbst dann, wenn sie imaginär sind, durch reelle Gebilde dargestellt.

Durch die eindeutigen Konstruktionen 1. wird das vorgelegte Problem auf die ihm äquivalente Aufgabe übergeführt: „Zu 3 kohärenten Punktfeldern a b c, die keinen Punkt sämtlich gemein haben, sind 3 kohärente Felder x y z so herzustellen, dass die Felder eines jeden der 4 Tripel x y z, a y z, b z x, c x y einander, ohne ein Büschel zu bilden, berühren."

Durch die Operationen 2. wird das der Aufgabe: „Die Schnittpunkte von 3 gegebenen Kreisen a b c mit ihrem Orthogonalkreise t zu bestimmen" gleichwertige Problem gelöst: „Die Schnittpunkte von 3 gegebenen kohärenten Punktfeldern a b c mit ihrem Orthogonalfelde t zu bestimmen." Der Übersichtlichkeit wegen ist oben das Problem, das in die 2 Aufgaben zerfällt: 1. „Zu a b c das Orthogonalfeld t festzulegen" und 2. „Die Schnittpunkte A D, B E, C F von t mit a b c zu bestimmen" durch 6 quadratische Operationen gelöst worden, obwohl 3 davon durch lineare ersetzt werden können. Es lässt nämlich die vorletzte Aufgabe, die auch folgendermassen lauten kann: „Zu 9 gegebenen Punkten $N_1 N_2 N_3 O_1 O_2 O_3 P_1 P_2 P_3$ 3 Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ so zu bestimmen, dass die 3 Involutionen $N_1 Q_1 . N_2 Q_2 . N_3 Q_3$; $O_1 Q_1 . O_2 Q_2 . O_3 Q_3$; $P_1 Q_1 . P_2 Q_2 . P_3 Q_3$ bestehen" nur eine Lösung zu. Sie ist mithin durch lauter lineare Operationen lösbar, und zwar etwa auf folgende Art. Man bestimme die Punkte a b c etc. den Bedingungen gemäss: $P_1 P_2 a P_3 N_3 \times N_1 N_2 P_3 N_3 b$; $N_1 N_2 c N_3 O_3 \times O_1 O_2 N_3 O_3 d$; $N_3^2 . a^2 . P_3 e$; $O_3^2 . c^2 . N_3 f$; $P_3^2 . b^2 . N_3 g$; $N_3^2 . d^2 . O_3 h$; $P_3 e . N_3 g . O_3 i$; $N_3 f . O_3 h . P_3 k$; $g i l e k \times f h e k m$; $l^2 . k^2 . e n$; $e^2 . m^2 . k p$; $e n . k p . N_1 Q_1 . N_2 Q_2 . N_3 Q_3$. Die Lösung der letzten Aufgabe erfordert 3 quadratische Operationen: $e n . k p . A^2 . D^2$; $O_1 Q_1 . O_2 Q_2 . B^2 . E^2$; $P_1 Q_1 . P_2 Q_2 . C^2 . F^2$ (Doppelpunkte bei Involutionen).* Die Operationen 2. der Konstruktion (V) können demnach auf 3 quadratische reduziert werden. Da hier A mit D, B mit E, und C mit F vertauschbar ist, so erhält man an dieser Stelle 8 Kombinationen.

Durch die 3 quadratischen Operationen 3. ist diejenige Aufgabe über kohärente Punktfelder gelöst, die dem Problem entspricht: „Bei 3 gegebenen Kreisen a b c 3 ein Büschel bildende Potenzkreise d, e, f der Kreispaare b c, c a, a b zu zeichnen." Auch hier giebt es 8 Kombinationen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch die Operationen 4. werden die Schnittpunkte $\alpha\,\delta$, $\beta\,\varepsilon$, $\gamma\,\zeta$ des Orthogonalfeldes t mit denjenigen 3 damit kohärenten Punktfeldern festgelegt, die den Steinerschen Kreisen $u = (b_1\ B_1\ \beta_1)$, $v = (b_2\ B_2\ \beta_2)$, $w = (b_3\ B_3\ \beta_3)$ entsprechen. Die Operationen 4. II sind linear, während die Operationen 4. I quadratischer Natur sind. Die letzteren lassen sich jedoch sämtlich durch lineare ersetzen. Das dann einzuschlagende Verfahren ist das folgende: B J a K G $\curlywedge$ E M K G b; F H c K G $\curlywedge$ C L K G d; $a^2 . G^2 . K e$; $K^2 . b^2 . G f$; $c^2 . G^2 . K g$; $K^2 . d^2 . G h$; K g . G h . e i; e f k K $\curlywedge$ g h K i; $k^2 . i^2 . K \alpha$; D E A $\alpha \curlywedge$ D E J ε; C A D $\alpha \curlywedge$ C A H ζ; B C G $\varepsilon \curlywedge$ B C F γ; E F G ζ $\curlywedge$ E F B β; F D C $\gamma \curlywedge$ F D H δ. Die Punkte $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$ ergeben sich demnach eindeutig (linear) aus den Punkten A B C D E F G H J K L M. Werden die Punkte $A_3\ D_3\ B_3$ etc. den Bedingungen gemäss $A_3^2 . D_3^2 . A D . A_1 D_1$, $B_3^2 . E_3^2 . B E . B_1 E_1$, $C_3^2 . F_3^2 . C F . C_1 F_1$, $A_4^2 . D_4^2 . A D . \alpha\,\delta$, $B_4^2 . E_4^2 . B E . \beta\,\varepsilon$, $C_4^2 . F_4^2 . C F . \gamma\,\zeta$ bestimmt, so bestehen die Involutionen $A D . \alpha\,\delta . A_3 D_3$, $B E . \beta\,\varepsilon . B_3 E_3$, $C F . \gamma\,\zeta . C_3 F_3$, $A D . A_1 D_1 . A_4 D_4$, $B E . B_1 E_1 . B_4 E_4$, $C F . C_1 F_1 . C_4 F_4$.

Durch die Operationen 5. werden die Nordpole der 9 Berührungspunkte der 3 gesuchten Kreise x y z unter einander und mit den 3 gegebenen Kreisen a b c und mit den Steinerschen Kreisen $u = (b_1\ B_1\ \beta_1)$, $v = (b_2\ B_2\ \beta_2)$, $w = (b_3\ B_3\ \beta_3)$, sowie die der 6 Schnittpunkte des Orthogonalkreises t mit x y z festgelegt. Dabei kommt dreimal die dem Taktionsproblem des Apollonius äquivalente Aufgabe: „Ein Punktfeld so zu bestimmen, dass es drei gegebene kohärente Punktfelder berührt“ zur Anwendung. Der Übersichtlichkeit wegen wurden oben mehr Punkte, als erforderlich ist, bestimmt und 5 quadratische Operationen ausgeführt, obwohl eine einzige ausreichend ist. Die Konstruktionen 5. lassen sich nämlich auch durch folgende ersetzen. Werden die den Kreisen a b c d e f, $u = (b_1\ B_1\ \beta_1)$, $v = (b_2\ B_2\ \beta_2)$, $w = (b_3\ B_3\ \beta_3)$ t x y z entsprechenden Punktfelder mit a b c d e f u v w t x y z bezeichnet, so sind die Abhängigkeiten der 9 ersten Felder von t gegeben durch die Involutionen: $A^2 . D^2 . a t$; $B^2 . E^2 . b t$; $C^2 . F^2 . c t$; $G^2 . K^2 . d t$; $H^2 . L^2 . e t$; $J^2 . M^2 . f t$; $\alpha^2 . \delta^2 . u t$; $\beta^2 . \varepsilon^2 . v t$; $\gamma^2 . \zeta^2 . w t$. Es mögen, wie oben, die Berührungspunkte bei den Felderpaaren y z, z x, x y, a z, b x, c y, a y, b z, c x mit $\alpha', \beta', \gamma', \varkappa, \lambda, \mu, \rho, \sigma, \tau$ bezeichnet werden. Zunächst die Lösung der Aufgabe: „Die Berührungspunkte $\lambda\,\tau\,\beta'$ des Feldes x mit den Feldern b c v zu bestimmen“. B C a $\varepsilon\,\beta \curlywedge$ E F $\varepsilon\,\beta$ b; $a^2 . \beta^2 . \varepsilon c$; $\varepsilon^2 . b^2 . \beta d$; $\varepsilon^2 . \beta^2 . c e$; d c ε e $\curlywedge\,\beta\,\varepsilon$ e f; $\varepsilon^2 . f^2 . e g$; $\beta\varepsilon . g c . \beta'^2$ (Doppelpunkt einer Involution)*; $\varepsilon c . \beta d . \beta' i$; $\beta'^2 . i^2 . \varepsilon k$; $\varepsilon c . \beta d . k l$; $k^2 . l^2 . \beta' m$; $\varepsilon\beta' k B C \curlywedge \beta' k m \lambda \tau$. Die übrigen Berührungspunkte ergeben sich auf folgende Art: $\lambda\,\tau\,\gamma'\,\beta' \curlywedge$ B C $\gamma\,\varepsilon$; C A $a_1\ \zeta\,\gamma \curlywedge$ F D $\zeta\,\gamma\ b_1$; $a_1^2 . \gamma^2 . \zeta c_1$; $\zeta^2 . b_1^2 . \gamma d_1$; $\zeta c_1 . \gamma d_1 . \gamma' i_1$; $\gamma'^2 . i_1^2 . \zeta k_1$; $\zeta i_1 . \gamma d_1 . k_1 b_1$; $k_1^2 . l_1^2 . \gamma' m_1$; $\zeta\,\gamma' k_1$ C A $\alpha \curlywedge \gamma' k_1 m_1\ \mu\,\rho\,\alpha'$; A B $a_2\ \delta\,\alpha \curlywedge$ D E $\alpha\ b_2$; $a_2^2 . \alpha^2 . \delta c_2$; $\delta^2 . b_2^2 . \alpha d_2$; $\delta c_2 . \alpha d_2 . \alpha' i_2$; $\alpha'^2 . i_2^2 . \delta k_2$; $\beta\,\delta\,\alpha'$ A B $\curlywedge \beta'\,\alpha'\,k_2\,\varkappa\,\sigma$. Der Punkt β' kann mithin aus den früher bestimmten Punkten mittels einer einzigen quadratischen Operation festgelegt werden. Es bestehen die Involutionen: V Y . W Z . $\alpha\,\delta$; W Z . U X . $\beta\,\varepsilon$; U X . V Y . $\gamma\,\zeta$. Die übrigen Berührungspunkte $\alpha'\,\gamma'\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\rho\,\sigma\,\tau$ sind dann eindeutig bestimmt. Demnach giebt es hier 2 Kombinationen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch die eindeutigen Operationen 6. wird die Aufgabe über kohärente Punktfelder in das ihr äquivalente Malfattische Problem rückwärts verwandelt.

Durch Verknüpfung der bei 1.—6. vorkommenden Kombinationen erhält man scheinbar 1.8.8.1.2.1 oder 128 Lösungen, in Wirklichkeit jedoch nur halb so viele, und zwar aus dem Grunde halb so viele, weil je zwei Kombinationen von 2., wie A B, B E, C F und B A, E B, F C, dieselben Punkte G H J K L M bei 3. liefern.

Die Anzahl der Lösungen, die diese Konstruktion liefert, ist demnach im allgemeinen 64. Diese 64 Lösungen werden bei der Konstruktion (V), falls noch die dazu gehörigen obigen Bemerkungen berücksichtigt werden, durch wiederholte Anwendung von nur zwei elementaren Operationen hergestellt, nämlich mittels der linearen Operation: „Zu einem gegebenen Punkte eines Feldes den ihm bei einem zweiten kreisverwandten Felde zugeordneten Punkt herzustellen“ und mittels der quadratischen Operation: „Zu zwei involutorischen Punktfeldern die Doppelelemente zu bestimmen.“ Dabei sind zur Herstellung einer Lösung 7 und zu der aller 64 Lösungen 41 $(=3+6+32)$ quadratische Operationen im ganzen erforderlich. Diese Anzahlen dürften Minima sein; durch geringere Anzahlen von quadratischen Operationen dürfte sich das verallgemeinerte Malfattische Problem schwerlich lösen lassen.

II. Abschnitt.

1. Die Beziehung zweier kohärenten Punktfelder x y ist $(x\,a):(x\,\alpha)=(y\,b):(y\,\beta)$, falls $a_2 x_1 - a_1 x_2$ mit $(x\,a)$ etc. bezeichnet wird.

2. Die Grundpunkte G H zweier involutorischen (orthogonalen) Punktfelder x y werden durch jedes Paar entsprechender Punkte harmonisch getrennt.

Beweis. Die Beziehung der Felder x y lässt sich stets auf die Form: $x+y=o$ bringen. Dann ist $G=o, H=\infty, y=-x$ und somit $(G\,x\,H\,y)=-1$.

3. Schneidet ein Punktfeld t zwei Punktfelder x y rechtwinklig, so sind die Schnittpunkte P Q der kohärenten Felder x y das gemeinschaftliche Paar konjugierter Punkte der 2 Involutionen x t und y t.

Beweis. Ist P von Q verschieden, so ist $a\,x=b\,y=c:t$, sodass $P=o$ und $Q=\infty$ ist. Ferner sind diese Punkte sowohl bei $a\,t\,x=c$ als auch bei $b\,t\,y=c$ entsprechende Punkte. Ist P mit Q identisch, so ist $x+a=y+b=-t+c$, sodass $P=Q=\infty$ ist. Dabei sind die Punkte P Q sowohl bei $x+t=c-a$ als auch bei $y+t=c-b$ entsprechende Punkte; es ist nämlich $P=Q$ auch Doppelpunkt bei jeder der beiden Involutionen.

4. Schneidet ein Punktfeld t zwei Punktfelder x y rechtwinklig, so schneidet es jedes Feld z des durch x y bestimmten Büschels rechtwinklig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Dies geht aus den leicht herstellbaren Beziehungen $a\,x = b\,y = c\,z = d : t$ und $x + a = y + b = z + c = -t + d$ hervor.

5. Drei kohärente, kein Büschel bildende Punktfelder $x\,y\,z$ werden stets von einem und nur von einem Felde t rechtwinklig geschnitten. (Es ist t das Orthogonalfeld von $x\,y\,z$.)

Beweis. Bei $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma) = (t\,e) : (t\,\varepsilon)$ sind die Grössen $a_1\,a_2\,b_1\,b_2\,c_1\,c_2\,\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2\,\gamma_1\,\gamma_2$ bekannt und die Grössen $e_1\,e_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ unbekannt. Soll $(x\,a)\,(t\,\varepsilon) - (x\,\alpha)\,(t\,e) = o$ eine Involution sein, so müssen die Koefficienten $-a_2\,\varepsilon_1 + \alpha_2\,e_2$ und $-a_1\,\varepsilon_2 + \alpha_1\,e_2$ von $x_1\,t_2$ und $x_2\,t_1$ gleich sein. Es muss dann sein $(e\,\alpha) = (\varepsilon\,a)$ und ebenso $(e\,\beta) = (\varepsilon\,b)$ und $(e\,\gamma) = (\varepsilon\,c)$. Aus diesen 3 in $e_1\,e_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ linearen und homogenen Gleichungen ergiebt sich eindeutig $e_1 : e_2 : \varepsilon_1 : \varepsilon_2$. Das Orthogonalfeld t artet aus, wenn die Felder $x\,y\,z$ einen Punkt sämtlich gemein haben.

Erklärung. Bei 3 kohärenten Punktfeldern $x\,y\,w$ mit gemeinschaftlichen Grundpunkten heisst w dann ein Potenzfeld von $x\,y$, wenn eine und dieselbe Kreisverwandtschaft das Felderpaar $x\,w$ in das Felderpaar $w\,y$ überführt.

6. Zu zwei kohärenten Punktfeldern $x\,y$ gehören zwei Potenzfelder $u\,v$. Dieselben schneiden sich rechtwinklig. Berühren sich die Felder $x\,y$, so artet das eine der beiden Potenzfelder $u\,v$ aus.

Beweis. Haben die Felder $x\,y$ getrennte Doppelpunkte, so lassen sich die Beziehungen zwischen $x\,y\,u\,v$ leicht auf die Form: $x = a^2 y = a\,u = -a\,v$ bringen, woraus sich sofort die Behauptung ergiebt. Fallen die Doppelpunkte von $x\,y$ auf einander, so ist $x = 2\,a + y = a + u = \infty + v$.

7. Ist $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = (z\,c) : (z\,\gamma) = [(u\,b)\,\lambda - (u\,c)\,\mu] : [(u\,\beta)\,\lambda - (u\,\gamma)\,\mu] = [(v\,c)\,\mu - (v\,a)\,\varkappa] : [(v\,\gamma)\,\mu - (v\,\alpha)\,\varkappa] = [(w\,a)\,\varkappa - (w\,b)\,\lambda] : [(w\,\alpha)\,\varkappa - (w\,\beta)\,\lambda]$, so bilden, wie auch die Zahlen $\varkappa\,\lambda\,\mu$ gewählt sein mögen, die Felder $u\,v\,w$ ein Büschel.

Der Beweis ist leicht zu führen.

8. Ist $(x\,a) : (x\,\alpha) = (y\,b) : (y\,\beta) = [(w\,a) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,b) : \sqrt{(\beta\,b)}] : [(w\,\alpha) : \sqrt{(\alpha\,a)} - (w\,\beta) : \sqrt{(\beta\,b)}]$, so ist w ein Potenzfeld von $x\,y$.

9. Ist bei 7. $\varkappa = 1 : \sqrt{(\alpha\,a)}$, $\lambda = 1 : \sqrt{(\beta\,b)}$, $\mu = 1 : \sqrt{(\gamma\,c)}$, wobei die Vorzeichen bei den Quadratwurzeln beliebig zu wählen und dann überall festzuhalten sind, so sind die Felder u, v, w bei den Felderpaaren $y\,z, z\,x, x\,y$ bezüglich Potenzfelder und bilden ein Büschel. Die Potenzfelder, die zu 3 kohärenten Feldern paarweise gehören, lassen sich demnach in 4 Tripel so anordnen, dass die Potenzfelder jedes Tripels ein Büschel bilden.

10. Bei n kohärenten Punktfeldern lässt sich zu jedem Paar derselben je ein Potenzfeld so auswählen, dass die zu 3 beliebigen gegebenen Feldern gehörigen 3 Potenzfelder stets ein Büschel bilden. Bei einmal getroffener Auswahl ist die Anzahl der Potenzfelder $\binom{n}{2}$ und die der Büschel $\binom{n}{3}$. Die Auswahl der Potenzfelder dieser

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Art kann auf 2^{n-1} verschiedene Weisen getroffen werden. Man numeriere etwa die n gegebenen Felder beliebig und greife zu je zwei auf einander folgenden beliebig je eines der jedesmaligen 2 Potenzfelder heraus. Auf diese Art erhält man n—1 („unabhängige“) Potenzfelder. Die übrigen $\binom{n-1}{2}$ („abhängigen“) Potenzfelder erhält man durch $\binom{n-1}{2}$fache Anwendung der Vorschrift, dass zu je 3 gegebenen Feldern je 3 ein Büschel bildende Potenzfelder auszuwählen sind. Die derartig ausgesuchten $(n-1)+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{2}$ Potenzfelder bilden der Auswahl nach zu je dreien $\binom{n-1}{2}$ Büschel und ausserdem, ohne dass es beabsichtigt war, von selbst noch $\binom{n-1}{3}$ weitere Büschel.

Beweis (für $n=6$). Die gegebenen Felder seien u v w x y z. Die zu u v oder zu w y etc. gehörigen Potenzfelder mögen mit (u v) oder (w z) etc. bezeichnet werden. Die Beziehungen aller dieser 21 Felder denke man sich auf die bei 7. und 8. durchgeführte Weise gegeben. Die zu den Feldern u v w x y z gehörigen Zahlen, die bei 9. $1:\sqrt{(\alpha\,a)}$, $1:\sqrt{(\beta\,b)}$, $1:\sqrt{(\gamma\,c)}$, hiessen, seien hier mit u′ v′ w′ x′ y′ z′ bezeichnet. Jede dieser 6 Zahlen ist der Grösse nach, nicht aber dem Vorzeichen nach von vornherein bestimmt. Die Reihenfolge der gegebenen Felder sei etwa die natürliche: u v w x y z. Man wähle aus den 2 zu u v gehörigen Potenzfeldern eines (u v) aus, und in gleicher Weise je ein Potenzfeld (v w), (w x), (x y), (y z) und halte diese 5 Potenzfelder fest. Wählt man bei der Zahl u′ das Vorzeichen beliebig und hält es dann fest, so ist nach 8. durch die Zahl u′ und durch die 3 Felder u, v, (u v) auch die Zahl v′ ihrem Vorzeichen nach bestimmt. In gleicher Weise sind durch die festen Potenzfelder (v w), (w x), (x y), (y z) die Zahlen w′ x′ y′ z′ eindeutig bestimmt. Verwendet man die so erhaltenen Zahlen u′ v′ w′ x′ y′ z′, so erhält man unter Berücksichtigung von 7. die Behauptung.

11. Werden 2 kohärente Punktfelder x y von einem Felde z berührt und sind u v die nicht ausgearteten Potenzfelder von y z und x z, so schneidet dasjenige Potenzfeld w von x y, das mit u v ein Büschel bildet, das Feld z rechtwinklig.

Beweis. Die Beziehungen der fraglichen Felder lassen sich leicht auf die Form bringen: $x+2b=a\,y:(-y+a)=z=2\,a\,u:(-u+2\,a)=v+b=2\,a\,b:w$. Hieraus ergiebt sich alles.

12. Sind x y z drei aneinander paarweise in 3 verschiedenen Punkten berührende kohärente Punktfelder, so bilden die 3 nicht ausgearteten Potenzfelder u, v, w der Paare y z, z x, x y ein Büschel.

Beweis. Aus der leicht herstellbaren Form der Beziehungen der Felder: $x-4\,a=a\,y:(-y+a)=z=2\,a\,u:(-u+2\,a)=v-2\,a=-4\,a^2:w$ geht sofort die Behauptung hervor.

13. Berühren bei 6 kohärenten Punktfeldern u v w x y z die Felder eines jeden der 4 Tripel u v w, x v w, y w u, z u v einander paarweise, jedoch ohne ein Büschel zu bilden, so gehören diejenigen Potenzfelder (y z), (z x), (x y), die die Felder u, v, w bezüglich rechtwinklig schneiden, einem Büschel an.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Es seien (v w), (w u), (u v), (x v), (x w), (y w), (y u), (z u), (z v) lauter nicht ausgeartete Potenzfelder. Nach 12. bilden die Felder eines jeden der 4 Tripel 1. (v w), (w u), (u v), 2. (v w), (w x), (x v), 3. (w u), (u y), (y w), 4. (u v), (v z), (z u) und nach 11. die eines jeden der 3 Tripel 1. (y z), (z u), (u y), 2. (z x), (x v), (v z), 3. (x y), (y w), (w x) je ein Büschel. Mithin bilden nach 10. auch die Potenzfelder (y z), (z x), (x y) ein Büschel. Die Vorbedingungen zu dem Satze 10. sind nämlich hier durchweg erfüllt. Man betrachte etwa (u v), (v w), (w x), (x y), (y z) als die „n — 1 unabhängigen" Potenzfelder und geselle ihnen nach und nach die übrigen oben aufgezählten Potenzfelder als „abhängige" zu, was wegen der Sätze 11. und 12. statthaft ist.

14. Werden 2 gegebene kohärente Punktfelder x y mit getrennten Schnittpunkten und ihre beiden Potenzfelder z z' von irgend einem kohärenten Punktfelde t der Reihe nach in den Punktepaaren A D, B E, J M, J' M' rechtwinklig geschnitten, so bestehen zwischen den Doppelverhältnissen dieser Punkte die Relationen: 1. (A B E J) $=$ (E D A J) $=$ (D E B M) $=$ (B A D M) $=-$ (A B E M) $=-$ (E D A M) $=-$ (D E B J) $=-$ (B A D J) $=\sqrt{(A\,B\,E\,D)}$, 2. (D B E J') $=$ (E A D J') $=$ (A E B M') $=$ (B D A M') $=-$ (D B E M') $=-$ (E A D M') $=-$ (A E B J') $=-$ (B D A J') $=\sqrt{(D\,B\,E\,A)}$ und die 3 Involutionen 1. A D . B E . J M . J' M', 2. A E . B D . J' M' . J^2 . M^2, 3. A B . D E . J M . J'^{2} . M'^{2}.

Beweis. Die Abhängigkeiten der fraglichen Felder lassen sich stets auf folgende Art darstellen: $x = e^4 y = e^2 z = -e^2 z' = e^4 \sigma^2 : t$, wenn e eine bestimmte und σ eine beliebige Konstante bedeutet. Hieraus folgt: $A = -e^2\sigma$; $B = \sigma$; $J = e\sigma$; $J' = ie\sigma$; $D = e^2\sigma$; $E = -\sigma$; $M = -e\sigma$; $M' = -ie\sigma$. Demnach hat jedes der 9 Doppelverhältnisse bei 1. den Wert $(1+e^2):2e$ und bei 2. den Wert $(1-e^2):2ie$. Die 3 obigen Involutionen sind unmittelbare Folgen der Gleichungen zwischen den Doppelverhältnissen.

Anmerkung, betreffend die Anordnung der Punkte A B D E zum Potenzfelde z. Für $x = A\,(= -e^2\sigma)$ wird $z = E\,(= -\sigma)$.

15. Der vorhergehende Satz 14. bleibt auch dann noch bestehen, wenn die gegebenen kohärenten Punktfelder sich nicht schneiden, sondern einander berühren. Es treten dann noch folgende Vereinfachungen ein: Die Punkte B, D, J, J', M' fallen auf einander, so dass (A B E D) $= 1$, (D B E A) $= 0$ und (A B E M) $= -1$ wird.

Beweis. Die Beziehungen der Felder sind hier: $x = y + 4a = z + 2a = -t + 2\sigma$; $(x-\infty)(z'+\infty) = 0$, so dass $A = \sigma$; $B = \infty$; $J = \infty$; $J' = \infty$; $D = \infty$; $E = \sigma - 2a$; $M = \sigma - a$; $M' = \infty$ ist.

Anmerkung, betreffend die Anordnung der Punkte A B D E zum Potenzfelde z. Für $x = A\,(= \sigma)$ wird $z = E\,(= \sigma - 2a)$.

16. Berührt bei 6 kohärenten Punktfeldern t u w x y z das Feld u die Felder x y in den Punkten $\alpha\,\beta$, ist z das zu u rechtwinklige Potenzfeld von x y, schneidet w das Feld u in $\alpha\,\beta$ rechtwinklig und die Felder x y ausserdem noch in $\gamma\,\delta$, und ist t ein zu x y rechtwinkliges, diese 2 Felder in den Punkten A D, B E schneidendes

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Feld, so ist: 1. $u = [(a-\alpha)x+\alpha^2] : [-x+a+\alpha] = [(b-\beta)y+\beta^2] : [-y+b+\beta] = [(a\beta-b\alpha)z+(b\alpha^2-a\beta^2)] : [(a-b)z+(b\alpha-a\beta)] = [(\alpha+\beta)w-2\alpha\beta] : [2w-(\alpha+\beta)]$; 2. $(\alpha-\beta)^2 = -4ab(\alpha\,\delta\,\beta\,\gamma) = -4ab(ABED)$.

Beweis. Aus den leicht herzuleitenden Beziehungen 1. folgt $\gamma = \alpha - 2a(\alpha-\beta) : [2a-(\alpha-\beta)]$; $\delta = \beta + 2b(\alpha-\beta) : [2b+(\alpha-\beta)]$ und hieraus $(\alpha\,\delta\,\beta\,\gamma) = (\alpha-\delta)\cdot(\beta-\gamma) : (\alpha-\gamma)(\beta-\delta) = -(\alpha-\beta)^2 : 4ab$ oder $(\alpha-\beta)^2 = -4ab(\alpha\,\delta\,\beta\,\gamma)$. Für $(\alpha\,\delta\,\beta\,\gamma)$ kann man aber nach 14. und 15. auch $(ABED)$ setzen.

Anmerkung, betreffend die Anordnung der Punkte ABDE zum Potenzfelde z. Für $x = \alpha$ wird $z = \beta$, und somit wird $z = E$ für $x = A$.

17. Berühren bei 7 kohärenten Punktfeldern s t u v w x y die Felder eines jeden der 3 Tripel u v w, x v w, y w u, ohne ein Büschel zu bilden, einander paarweise, ist s das zu w orthogonale Potenzfeld von x y, und werden die Felder x y s von irgend einem Felde t in den Punktepaaren A D, B E, J M rechtwinklig geschnitten, so ist, falls die Berührungspunkte bei den Felderpaaren v w, u w, x w, y w bezüglich $\alpha', \beta', \rho, \lambda$ sind, bei gehöriger Anordnung der Punkte A D B E J M stets $(\alpha'\beta'\lambda\rho) = (ABEJ) = (EDAJ) = (DEBM) = (BADM) = -(ABEM) = -(EDAM) = -(DEBJ) = -(BADJ) = \sqrt{(ABED)}$. Die Anordnung der Punkte A B D E J M ist dabei, was stets möglich ist, so vorzunehmen, dass die Involution A E . B D die Schnittpunkte von t und s zu Doppelpunkten hat, wobei letztere entweder mit J M oder mit M J zu bezeichnen sind.

Beweis. Die Beziehungen der Felder w v u y x lassen sich leicht auf die Form bringen: $w = [(a-\alpha')v+\alpha'^2] : [-v+a+\alpha'] = [(b-\beta')u+\beta'^2] : [-u+b+\beta] = [(c-\lambda)y+\lambda^2] : [-y+c+\lambda] = [(d-\rho)x+\rho^2] : [-x+d+\rho]$. Mithin ist nach 16. $(\lambda-\rho)^2 = -4cd(ABED)$ und nach 16. und 15. $(\alpha'-\beta')^2 = -4ab$, $(\alpha'-\rho)^2 = -4ad$, $(\lambda-\beta)^2 = -4bc$, so dass $(\alpha'\beta'\lambda\rho)^2 = (\alpha'-\beta')^2(\lambda-\rho)^2 : (\alpha'-\rho)^2(\lambda-\beta')^2 = (ABED)$ wird. Alles übrige folgt aus 14.

18. Ein Büschel kohärenter Felder x y z wird von jedem dazu orthogonalen Punktfelde t in Punkten einer Involution geschnitten. Wird umgekehrt ein Punktfeld t von dazu orthogonalen Punktfeldern x y z in Punkten einer Involution geschnitten, so bilden diese Felder x y z ein Büschel.

Beweis. Die Beziehungen der Felder lassen sich auf die Form bringen $x : \rho^2 = y : \sigma^2 = z : \tau^2 = \varkappa^2 : t$. Sind $X_1 X_2, Y_1 Y_2, Z_1 Z_2$ die Schnittpunkte von t mit x, y, z, so ist $X_1 = \rho\varkappa$; $X_2 = -\rho\varkappa$; $Y_1 = \sigma\varkappa$; $Y_2 = -\sigma\varkappa$; $Z_1 = \tau\varkappa$; $Z_2 = -\tau\varkappa$. Mithin ist $X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2 = Z_1 + Z_2 = O$. Die Richtigkeit der Umkehrung ist leicht nachzuweisen.

19. Sind A B C D E F 6 beliebige reelle Punkte einer Ebene oder Kugel, und werden die Punkte G H J K L M so bestimmt, dass die 3 Involutionen $BF.CE.G^2K^2$; $CD.AF.H^2.L^2$; $AE.BD.J^2.M^2$ gelten, so besteht die Involution G K . H L . J M.

Beweis. Genügen 2 Punkte N O der Bedingung $ABCNO \curlywedge DEFNO$, so ist $BCNO \curlywedge FEON$. Es besteht also die Involution B F . C E . N O. Da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ausserdem noch auch die Involution $BF.CE.G^2.K^2$ gilt, so gilt auch die Involution $G^2.K^2.NO$ oder $N^2.O^2.GK$. In gleicher Weise leitet man die Involutionen $N^2.O^2.HL$ und $N^2.O^2.JM$ ab. Die 3 letzten Involutionen bilden aber nur eine: $N^2.O^2.GK.HL.JM$.

Anmerkung. Wie leicht zu sehen ist, gilt der Satz auch in dem besonderen Falle, wenn N identisch mit O ist.

20. Sind t u 2 gegebene feste kohärente Punktfelder und ist w ein damit kohärentes veränderliches Punktfeld, das u in einem veränderlichen Punkte α berührt und t in 2 veränderlichen Punkten $\delta\,\varepsilon$ rechtwinklig schneidet, so kommen den Gebilden folgende Eigenschaften zu. 1. Das veränderliche Feld w berührt ausser u noch ein zweites festes Punktfeld v in einem veränderlichen Punkte β, und t ist ein Potenzfeld von u v. Dabei sind die Punkte $\alpha\,\beta$ stets entsprechende Punkte, sowohl von u t als auch von t v. 2. Die 4 veränderlichen Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ erzeugen 4 unter sich kohärente, einem Büschel angehörige Felder, dessen Grundpunkte gleichzeitig Grundpunkte des Büschels t u v sind, wobei die 2 ersten Punkte stets von den 2 letzten harmonisch getrennt werden. 3. Ist z dasjenige veränderliche Punktfeld, das t in $\alpha\,\beta$ rechtwinklig schneidet, so berührt dasselbe 2 fernere feste zu t kohärente Felder x y, und zwar in den Punkten $\delta\,\varepsilon$. Dabei bilden die Felder t u v x y ein Büschel, und t ist ein Potenzfeld von x y. Die Punkte $\delta\,\varepsilon$ sind stets entsprechende Punkte von t x wie von y t. 4. Die Gebilde t u v hängen von t x y in derselben Weise ab, wie t x y von t u v; u v und x y sind polare Gebilde, deren Punkte einander kreisverwandt sind.*

Beweis. Schneiden sich die Felder t u, so ist ihre Beziehung, wenn c eine Konstante ist, $u = -c^2 t$. Da u von w in α berührt wird, so ist, falls a einen noch zu bestimmenden Parameter bedeutet, $u\,w - (\alpha + a)\,u - (\alpha - a)\,w + \alpha^2 = 0$. Die Beziehung der Felder t w ist somit $-c^2\,t\,w + (a + \alpha)\,c^2\,t + (a - \alpha)\,w + \alpha^2 = 0$.

---

* Dieser Satz führt zu einer interessanten geometrischen Verwandtschaft. Auf einer Ebene oder Kugel soll ein fester Kreis t als Basis dienen. Wird durch einen veränderlichen Punkt $\binom{\alpha}{\alpha_1}$ eine beliebige Kurve u beschrieben, sind $\binom{\alpha}{\beta_1}$ und $\binom{\beta}{\alpha_1}$ veränderliche Punkte von t, die von $\binom{\alpha}{\alpha_1}$ auf die durch die angewandte Bezeichnungsweise angedeutete Art abhängen, schneidet ferner ein beweglicher die Kurve u in $\binom{\alpha}{\alpha_1}$ berührender Kreis w die Basis t in den Punkten $\binom{\delta}{\varepsilon_1}$ und $\binom{\varepsilon}{\delta_1}$ rechtwinklig, und ist z der die Basis t in $\binom{\alpha}{\beta_1}$ und $\binom{\beta}{\alpha_1}$ rechtwinklig schneidende Kreis, so erzeugen die Punkte $\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\delta}{\delta_1}\binom{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ 3 Kurven v x y, die gleichzeitig als Enveloppen aufgefasst werden können, indem v durch den beweglichen Kreis w, der v in $\binom{\beta}{\beta_1}$ berührt, und x y durch den beweglichen Kreis z erzeugt werden, der diese Kurven bezüglich in den Punkten $\binom{\delta}{\delta_1}$ und $\binom{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ berührt. Die Abhängigkeit der Kurvenpaare u v und x y von einander ist eine polare. Ist eine der 4 Kurven u v x y ein Kreis, so sind die 3 übrigen auch Kreise. Die Verwandtschaft zwischen u und v und ebenso die zwischen x und y ist dann die bekannte, von Moebius aufgestellte Kreisverwandtschaft, die zwischen u und x (oder y) dagegen ist eine Verwandtschaft anderer Art, aber insofern auch eine Kreisverwandtschaft, dass jedem Kreise wieder ein Kreis zugeordnet ist. Beide Kreisverwandtschaften stimmen ferner noch darin überein, dass bei beiden entsprechende

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da diese Felder orthogonal sind (eine Involution bilden), so ist $(a+\alpha)e^2 = a-\alpha$, oder $a = (1+e^2)\alpha : (1-e^2)$. Demnach ist $e^2(e^2-1)tw + 2e^2\alpha(t+w) - (e^2-1)\alpha^2 = 0$. Setzt man willkürlich $t = -e^2 v$, so ist t wegen $u = -e^2 t = e^4 v$ ein Potenzfeld der festen Felder u v. Ferner ist dann $e^4(e^2-1)vw + 2e^2\alpha(e^2 v - w) + \alpha^2(e^2-1) = 0$. Wird hier $v = w = \beta$ gesetzt, so ist $(e^2\beta+\alpha)^2 = 0$ oder $\beta = -\alpha : e^2$. Da somit die beiden Wurzeln von β einander gleich sind, so berühren sich die Felder v w. Die Gebilde $v\beta$ haben mithin die bei 1. angegebene Bedeutung. Sind bei $e^2(e^2-1)tw + 2e^2\alpha(t+w) - (e^2-1)\alpha = 0$ die beiden Doppelpunkte $\delta\varepsilon$, so ergiebt die Rechnung $\delta = \alpha(e-1) : e(e+1)$; $\varepsilon = \alpha(1+e) : e(1-e)$. Aus diesen und den früheren Formeln ergiebt sich die Behauptung 2. Geht man von $x = -g^2 t$ aus und leitet davon 4 Punkte $\delta_1\varepsilon_1\alpha_1\beta_1$ und 2 Felder z y in derselben Weise ab, wie oben $\alpha\beta\delta\varepsilon$ und w v aus u t, so erhält man die Formeln $x = -g^2 t = g^4 y$; $\varepsilon_1 = -\delta_1 : g^2$; $\alpha_1 = \delta_1(g-1) : g(g+1)$; $\beta_1 = \delta_1(1+g) : g(1-g)$. Setzt man $\alpha_1 = \alpha$ und $eg + e + g = 1$, so erhält man aus den 3 letzten Formeln $\delta_1 = \alpha(e-1) : e(e+1) = \delta$; $\varepsilon_1 = \alpha(1+e) : e(1-e) = \varepsilon$; $\beta_1 = -\alpha : e^2 = \beta$. Damit sind die Behauptungen 3. und 4. als richtig nachgewiesen. Berühren sich die Felder t u, so ist $u = t + 2e$; $uw - (\alpha+e)w - (\alpha-e)u + \alpha^2 = 0$; $tw - (\alpha-e)(t+w) + \alpha^2 - 2\alpha e + 2e^2 = 0$; $\beta = \alpha - 2e$; $\delta = \alpha - e(1+i)$; $\varepsilon = \alpha - e(1-i)$; $(\alpha\gamma\beta\delta) = -1$; $t = v + 2e$; $vw + w(3e-\alpha) + (e-\alpha)v + (2e-\alpha)^2 = 0$. Geht man von $x = t + 2g$ aus und leitet wieder davon 4 Punkte $\delta_1\varepsilon_1\beta_1\alpha_1$ und 2 Felder z y in derselben Weise ab, wie oben $\alpha\beta\delta\varepsilon$ und w v von u t, so erhält man: $x = t + 2g = y - 2g$; $\varepsilon_1 = \delta_1 - 2g$; $\beta_1 = \delta_1 - g(1+i)$; $\alpha_1 = \delta_1 - g(1-i)$. Für $\alpha_1 = \alpha$ und $g = -ei$ wird $\beta_1 = \alpha - 2e = \beta$; $\delta_1 = \alpha - e(1+i) = \delta$; $\varepsilon_1 = \alpha - e(1-i) = \varepsilon$. Damit ist der Satz auch für den Fall bewiesen, wenn sich die Felder u t berühren.

21. Wird ein festes Punktfeld t von einem damit kohärenten veränderlichen Felde w in 2 veränderlichen Punkten $\delta\varepsilon$, die 2 gegebene kohärente Felder erzeugen, rechtwinklig geschnitten, so berührt das veränderliche Feld w beständig

---

Punkte entsprechender Kreise einander projektiv zugeordnet sind, indem die Pole $\alpha\beta\delta$ 3 kohärente Punktfelder erzeugen. Sind auf einer Kugel A B die Endpunkte eines veränderlichen Durchmessers, so erzeugt der imaginäre Punkt $\left(\frac{A}{B}\right)$ bekanntlich einen rein imaginären Kreis t. Wird dieser als Basis genommen und ist u der nördliche Wendekreis, so ist v der südliche Wendekreis, und x y sind die beiden Polarkreise, während w z veränderliche grösste Kugelkreise sind, die u v bezüglich x y berühren. Ist die Basis t reell, so entspricht jedem reellen Kreise u ein imaginärer Kreis x. Von Nutzen ist diese Kreisverwandtschaft bei Aufgaben, bei denen es sich um Kreise und Gerade handelt, die einander berühren oder unter gegebenen Winkeln schneiden sollen. So geht durch diese Kreisverwandtschaft das Taktionsproblem des Apollonius in die Aufgabe: „Einen Kreis durch 3 Punkte zu legen", das Problem: „Einen Kreis zu zeichnen, der 3 gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet", in die Aufgabe: „Zu 3 Kreisen den Orthogonalkreis herzustellen", und das Malfattische Problem in die Aufgabe über: „Drei Kreise a b c und ihre inversen Spiegelbilder d e f in Bezug auf einen Kreis t sind gegeben. Sechs Kreise u v w x y z sind so zu zeichnen, dass sie der Reihe nach die Kreispaare b c, c a, a b, e f, f d, d e berühren und die Kreise eines jeden der Paare v z, w x, u y, y w, z u, x v einander berühren".

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2 feste mit t kohärente Felder u v, bei denen t ein Potenzfeld ist, bezüglich in 2 veränderlichen Punkten $\alpha\beta$ derart, dass die von $\alpha\beta\delta\varepsilon$ erzeugten Felder kohärent sind und ein Büschel bilden, das mit dem Büschel u v t in den Grundpunkten übereinstimmt. Dabei sind $\alpha\delta\beta\varepsilon$ stets 4 harmonische Punkte.

Dieser Satz folgt als Umkehrung aus dem vorhergehenden.

22. Haben die Gebilde $t\,u\,v\,w\,x\,y\,z\,\alpha\,\beta\,\delta\,\varepsilon$ hier dieselbe Bedeutung wie bei 20, und die Gebilde $t\,u_1\,v_1\,w_1\,x_1\,y_1\,z_1\,\alpha_1\,\beta_1\,\delta_1\,\varepsilon_1$ die analoge, so gilt bei richtiger Anordnung der Gebilde jeder der folgenden 6 Sätze, sobald nur einer von ihnen gilt: Es berühren sich 1. u und u_1, 2. v und v_1, 3. x und x_1, 4. y und y_1. Es findet sich ein gemeinschaftliches Paar und nur ein Paar entsprechender Punkte 5. bei den kohärenten Felderpaaren $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$, nämlich $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$, und 6. bei den kohärenten Felderpaaren $\delta\varepsilon$ und $\delta_1\varepsilon_1$, nämlich $\delta = \delta_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Beweis. Wird t sowohl von u als auch von u_1 geschnitten, so können die Beziehungen der Felder auf die Form gebracht werden: $u = -e^2 t = e^4 v$; $x = -e_1{}^2 t = e_1{}^4 y$; $e\,e_1 + e + e_1 = 1$; $(u_1 - g) : (u_1 - h) = -f^2 (t - g) : (t - h) = f^4 (v_1 - g) : (v_1 - h)$; $(x_1 - g) : (x_1 - h) = -f_1{}^2 (t - g) : (t - h) = f_1{}^4 (y_1 - g) : (y_1 - h)$; $f\,f_1 + f + f_1 = 1$. Für $u = u_1$ ist $(u - g) : (u - h) = -f^2 (u + g\,e^2) : (u + h\,e^2)$, oder $u^2 (1 + f^2) + u\,[g\,(e^2 f^2 - 1) + h\,(e^2 - f^2)] - g\,h\,e^2 (1 + f^2) = 0$. Die Felder u und u_1 berühren einander, wenn die Diskriminante dieser Gleichung verschwindet, also dann, wenn $0 = [g\,(e^2 f^2 - 1) + h\,(e^2 - f^2)]^2 + 4\,g\,h\,e^2 (1 + f^2)^2 = [g(ef+1)^2 + h(e-f)^2].[g(ef-1)^2 + h(e+f)^2]$, oder wenn entweder I. $g(ef+1)^2 + h(e-f)^2 = 0$ oder II. $g(ef-1)^2 + h(e+f)^2 = 0$ ist. Ebenso ergiebt sich als Bedingung dafür, dass die Felder x und x_1 einander berühren, dass entweder III. $g\,(e_1 f_1 + 1)^2 + h\,(e_1 - f_1)^2 = 0$ oder IV. $g\,(e_1 f_1 - 1)^2 + h\,(e_1 + f_1)^2 = 0$ sein muss. Gilt aber I., so gilt wegen $e\,e_1 + e + e_1 = 1$ und $f\,f_1 + f + f_1 = 1$, wie eine leichte Rechnung ergiebt, auch III. Gilt II., so setze man, was erlaubt ist, $-f$ statt f. Dadurch wird x_1 mit y_1 vertauscht, und sonst im ganzen nichts geändert. Die Bedingung II. nimmt dann die Form I. an, und aus dieser Form I. geht III. hervor. Damit ist bewiesen, dass sich die Felder $x\,x_1$ oder $x\,y_1$ berühren, wenn die Felder $u\,u_1$ einander berühren. Was jetzt noch zum vollständigen Beweise fehlt, ist leicht zu ergänzen.

23. (Taktionsproblem des Apollonius.) Sind A B C D E F 6 beliebige reelle Punkte einer Ebene oder Kugel, und werden die Punkte $G\,H\,P\,Q\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ und die kohärenten Felder $t\,u\,v\,x\,y\,z$ den Bedingungen gemäss: 1. G H A B C $\curlywedge$ G H D E F; 2. $P^2 . Q^2 . A\,D . G\,H$; 3. $\alpha^2 . \delta^2 . A\,D . P\,Q$; 4. G H A B C $\curlywedge$ G H $\alpha\,\beta\,\gamma$ $\curlywedge$ G H $\delta\,\varepsilon\,\zeta$; 5. $A^2 . D^2 . t\,x$; 6. $B^2 . E^2 . t\,y$; 7. $C^2 . F^2 . t\,z$; 8. $t(G\,H\,\delta)$ $\curlywedge$ $u(G\,H\,\alpha)$; 9. $t(G\,H\,\alpha)$ $\curlywedge$ $v(G\,H\,\delta)$ festgelegt, so werden die 3 Felder x y z von jedem der 2 Felder u v berührt, und zwar von u in den Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma$ und von v in $\delta\,\varepsilon\,\zeta$.

Beweis. Denkt man sich, was hier erlaubt ist, $G = 0, H = \infty, A = a, B = b, C = c, D = a\,n^2$, so ist wegen 1. $E = b\,n^2, F = c\,n^2$, wegen 2. $P = a\,n, Q = -a\,n$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wegen 3. $\alpha = a\,i\,n\,(n+i) : (n-i)$; $\delta = -a\,i\,n\,(n-i) : (n+i)$, wegen 4. $\beta = b\,i\,n . (n+i) : (n-i)$; $\varepsilon = -b\,n\,i\,(n-i) : (n+i)$; $\gamma = c\,i\,n\,(n+i) : (n-i)$; $\zeta = -c\,i\,n . (n-i) : (n+i)$, wegen 5.—7. $2\,x\,t - a\,(n^2+1)\,(x+t) + 2\,a^2 n^2 = 0$; $2\,y\,t - b\,(n^2+1)\,(y+t) + 2\,b^2 n^2 = 0$; $2\,z\,t - c\,(n^2+1)\,(z+t) + 2\,c^2 n^2 = 0$ und wegen 8. und 9. $u\,(n-i)^2 + t\,(n+i)^2 = 0$; $v\,(n+i)^2 + t\,(n-i)^2 = 0$. Eliminiert man t aus den 2 Gleichungen x t und u t und setzt dann $x = u$, so erhält man $(n-i) . x^2 + 2\,n\,i\,a\,(n^2+1)\,x - a^2 n^2 (n+i)^2 = 0$. Diese Gleichung hat 2 gleiche Wurzeln, weil ihre Diskriminante verschwindet. Die Doppelwurzel derselben ist $x = a\,i\,n\,(n+i) : (n-i) = \alpha$. Das Feld x wird mithin vom Felde t berührt, und zwar in α. Alles übrige ergiebt sich auf die gleiche Weise.

Anmerkung. Man kann die Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ aus den Punkten A B C D E F auch mittels einer einzigen quadratischen und mehrerer linearen Operationen auf folgende Art erhalten. C B d A D $\curlywedge$ F E A D e; $d^2 . D^2 . A\,f$; $A^2 . e^2 . D\,g$; $A^2 . D^2 . f\,h$; $g\,f\,A\,h \curlywedge D\,A\,h\,i$; $A^2 . i^2 . h\,k$; $A\,D . k\,f . \alpha^2 . \delta^2$; $A\,f . D\,g . \alpha\,m$; $\alpha^2 . m^2 . A\,p$; $A\,f . D\,g . p\,q$; $p^2 . q^2 . \alpha\,r$; $A\,\alpha\,p\,B\,C \curlywedge \alpha\,p\,r\,\beta\,\gamma$; $B^2 . E^2 . \beta\,\varepsilon$; $C^2 . F^2 . \gamma\,\zeta$.

Beweis. Aus G H A B C $\curlywedge$ G H D E F und C B d A D $\curlywedge$ F E A D e folgt G H A B C D d $\curlywedge$ G H D E F e A. Hieraus und aus $d^2 . D^2 . A\,f$ und $A^2 . e^2 . D\,g$ ergiebt sich $G^2 . H^2 . A\,f . D\,g$. Für $P^2 . Q^2 . A\,D . G\,H$ kann man auch $A^2 . D^2 . P\,Q$ und $G^2 . H^2 . P\,Q$ setzen. Hieraus, aus $G^2 . H^2 . A\,f . D\,g$ und aus $A^2 . D^2 . f\,h$ folgt $G^2 . H^2 . A\,f . D\,g . P\,Q$ und $A^2 . D^2 . P\,Q . f\,h$, hieraus D A f Q P $\curlywedge$ D A h P Q $\curlywedge$ g f A P Q, und hieraus und aus g f A h $\curlywedge$ D A h i endlich g f A h P Q $\curlywedge$ D A h i P Q. Verbindet man damit $A^2 . D^2 . f\,h$, wofür auch $f^2 . h^2 . A\,D$ treten kann, und $A^2 . i^2 . k\,h$, so erhält man $P^2 . Q^2 . A\,D . h\,k$, und wegen $P^2 . Q^2 . A\,D . G\,H$ und $\alpha^2 . \delta^2 . A\,D . P\,Q$, das durch $A^2 . D^2 . \alpha\,\delta$ und $P^2 . Q^2 . \alpha\,\delta$ ersetzt werden darf, $P^2 . Q^2 . A\,D . G\,H . h\,k . \alpha\,\delta$ und $A^2 . D^2 . P\,Q . f\,h . \alpha\,\delta$. Demnach ist P Q A D h $\alpha\,\delta \curlywedge$ P Q D A k $\delta\,\alpha \curlywedge$ Q P A D f $\delta\,\alpha$, oder $\alpha^2 . \delta^2 . A\,D . P\,Q . f\,k$. Damit ist bewiesen, dass die Punkte $\alpha\,\delta$ des Satzes mit den gleich benannten der Anmerkung identisch sind. Aus $A\,f . D\,g . \alpha\,m$; $A\,f . D\,g . p\,q$ und $G^2 . H^2 . P\,Q . A\,f . D\,g$ folgt $G^2 . H^2 . A\,f . D\,g . P\,Q . \alpha\,m . p\,q$, und hieraus $\alpha^2 . m^2 . G\,H$ und $p^2 . q^2 . G\,H$. Da ausserdem noch $\alpha^2 . m^2 . A\,p$ und $p^2 . q^2 . \alpha\,r$ ist, so ist $\alpha^2 . m^2 . A\,p . G\,H$ und $p^2 . q^2 . \alpha\,r . G\,H$ oder G H A $\alpha \curlywedge$ H G p $\alpha \curlywedge$ G H $\alpha\,p \curlywedge$ G H $\alpha\,p$ und G H $\alpha\,p \curlywedge$ H G r p $\curlywedge$ G H p r, oder G H A $\alpha\,p \curlywedge$ G H $\alpha\,p\,r$. Hieraus und aus G H A B C $\curlywedge$ G H $\alpha\,\beta\,\gamma$ folgt G H A B C $\alpha\,p \curlywedge$ G H $\alpha\,\beta\,\gamma\,p\,r$, und somit auch $A\,\alpha\,p\,B\,C \curlywedge \alpha\,p\,r\,\beta\,\gamma$. Demnach stimmen die Punkte $\beta\,\gamma$ des Satzes mit den gleich benannten der Anmerkung überein. Dasselbe gilt von den Punkten $\varepsilon\,\zeta$. Es ergeben sich nämlich aus den Koordinaten der Punkte A B C D E F $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$, wie sie beim Beweise des letzten Satzes vorkommen, die Gleichungen $(A\,\alpha\,D\,\delta) = (B\,\beta\,E\,\varepsilon) = (C\,\gamma\,F\,\zeta)$. Wie bereits gezeigt wurde, ist aber $\alpha^2 . \delta^2 . A\,D$ oder $(A\,\alpha\,D\,\delta) = -1$. Mithin ist auch $(B\,\beta\,E\,\varepsilon) = (C\,\gamma\,F\,\zeta) = -1$ oder $B^2 . E^2 . \beta\,\varepsilon$ und $C^2 . F^2 . \gamma\,\zeta$, womit alles bewiesen ist.

24. Sind a b c n vier beliebige reelle oder imaginäre Zahlen, ferner N O P drei beliebige reelle Punkte einer reellen Ebene oder Kugel, und werden die Punkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,J\,K\,L\,M\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ auf der betreffenden Ebene oder Kugel so bestimmt, dass, falls für das Doppelverhältnis $(N\,P\,O\,X)$ einfach X gesetzt wird:

1. $A = a^2$; $B = b^2$; $C = c^2$; $D = a^2 n^2$; $E = b^2 n^2$; $F = c^2 n^2$;
2. $G = -b\,c\,n$; $H = -c\,a\,n$; $J = -a\,b\,n$; $K = b\,c\,n$; $L = c\,a\,n$; $M = a\,b\,n$;
3. $\alpha = a\,n\,[c\,(b-a) + b\,n\,(c-a)] : [c-a+n\,(b-a)]$;
   $\beta = b\,n\,[a\,(c-b) + c\,n\,(a-b)] : [a-b+n\,(c-b)]$;
   $\gamma = c\,n\,[b\,(a-c) + a\,n\,(b-c)] : [b-c+n\,(a-c)]$;
   $\delta = a\,n\,[b\,(a-c) + c\,n\,(b-a)] : [b-a+n\,(a-c)]$;
   $\varepsilon = b\,n\,[c\,(b-a) + a\,n\,(c-b)] : [c-b+n\,(b-a)]$;
   $\zeta = c\,n\,[a\,(c-b) + b\,n\,(a-c)] : [a-c+n\,(c-b)]$, und werden endlich
4. die Involutionen $A^2.D^2$; $B^2.E^2$; $C^2.F^2$; $G^2.K^2$; $H^2.L^2$; $J^2.M^2$; $\alpha^2.\delta^2$; $\beta^2.\varepsilon^2$; $\gamma^2.\zeta^2$ der Reihe nach als durch die kohärenten Punktfelderpaare t a, t b, t c, t d, t e, t f, t u, t v, t w erzeugt gedacht (wobei die Felder a b c mit den gleichbezeichneten Zahlen a b c nicht zu verwechseln sind), so kommen den Punkten $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ und den kohärenten Feldern a b c d e f t u v w folgende Eigenschaften zu:

Es bestehen:

5. die 23 Involutionen:

$B\,F.C\,E.G^2.K^2.O\,N$;	$C\,D.A\,F.H^2.L^2.O\,N$;	$A\,E.B\,D.J^2.M^2.O\,N$;
$B\,E.C\,F.G\,K$;	$C\,F.A\,D.H\,L$;	$A\,D.B\,E.J\,M$;
$B\,C.E\,F.G\,K$;	$C\,A.F\,D.H\,L$;	$A\,B.D\,E.J\,M$;
$B\,C.E\,\gamma.K\,\varepsilon$;	$C\,A.F\,\alpha.L\,\zeta$;	$A\,B.D\,\beta.M\,\delta$;
$B\,C.G\,\gamma.F\,\varepsilon$;	$C\,A.H\,\alpha.D\,\zeta$;	$A\,B.J\,\beta.E\,\delta$;
$E\,F.B\,\zeta.G\,\beta$;	$F\,D.C\,\delta.H\,\gamma$;	$D\,E.A\,\varepsilon.J\,\alpha$;
$E\,F.C\,\beta.K\,\zeta$;	$F\,D.A\,\gamma.L\,\delta$;	$D\,E.B\,\alpha.M\,\varepsilon$;

$N^2.O^2.G\,K.H\,L.J\,M$; $\alpha\,\delta.\beta\,\varepsilon.\gamma\,\zeta$;

die 10 direkt inversen Beziehungen:

6. $A\,H\,M\,\beta\,\zeta \curlywedge D\,L\,J\,\varepsilon\,\gamma$; $B\,J\,K\,\gamma\,\delta \curlywedge E\,M\,G\,\zeta\,\alpha$; $C\,G\,L\,\alpha\,\varepsilon \curlywedge F\,K\,H\,\delta\,\beta$;
7. $B\,C\,F\,K\,\gamma \curlywedge B\,C\,G\,E\,\varepsilon$; $C\,A\,D\,L\,\alpha \curlywedge C\,A\,H\,F\,\zeta$; $A\,B\,E\,M\,\beta \curlywedge A\,B\,J\,D\,\delta$;
   $D\,E\,J\,B\,\varepsilon \curlywedge D\,E\,A\,M\,\alpha$; $E\,F\,G\,C\,\zeta \curlywedge E\,F\,B\,K\,\beta$; $F\,D\,H\,A\,\delta \curlywedge F\,D\,C\,L\,\gamma$;
   $A\,B\,C\,N\,O \curlywedge D\,E\,F\,N\,O$

und die Gleichungen bei den Doppelverhältnissen:

8. $(B\,C\,\gamma\,\varepsilon) = (E\,F\,\zeta\,\beta) = (B\,C\,F\,G) = (F\,E\,B\,G) = (E\,F\,C\,K) = (C\,B\,E\,K)$
   $= -(B\,C\,F\,K) = -(F\,E\,B\,K) = -(E\,F\,C\,G) = -(C\,B\,E\,G) = \sqrt{(B\,C\,F\,E)}$
   $= n\,(b^2-c^2) : (n^2-1)\,b\,c$; $(C\,A\,\alpha\,\zeta) = (F\,D\,\delta\,\gamma) = (C\,A\,D\,H) = (D\,F\,C\,H)$
   $= (F\,D\,A\,L) = (A\,C\,F\,L) = -(C\,A\,D\,L) = -(D\,F\,C\,L) = -(F\,D\,A\,H) = -(A\,C\,F\,H)$
   $= \sqrt{(C\,A\,D\,F)} = n\,(c^2-a^2) : (n^2-1)\,c\,a$; $(A\,B\,\beta\,\delta) = (D\,E\,\varepsilon\,\alpha) = (A\,B\,E\,J)$
   $= (E\,D\,A\,J) = (D\,E\,B\,M) = (B\,A\,D\,M) = -(A\,B\,E\,M) = -(E\,D\,A\,M) = -(D\,E\,B\,J)$
   $= -(B\,A\,D\,J) = \sqrt{(A\,B\,E\,D)} = n\,(a^2-b^2) : (n^2-1)\,a\,b$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. $(CLG\alpha) = (FHK\delta) = (bc - a^2) : (a + b)(c - a)$; $(AMH\beta) = (DJL\varepsilon) = (ca - b^2) : (b + c)(a - b)$; $(BKJ\gamma) = (EGM\zeta) = (ab - c^2) : (c + a)(b - c)$; $(EMG\alpha) = (BJK\delta) = (a^2 - bc) : (c + a)(a - b)$; $(FKH\beta) = (CGL\varepsilon) = (b^2 - ca) : (a + b)(b - c)$; $(DLJ\gamma) = (AHM\zeta) = (c^2 - ab) : (b + c)(c - a)$;

10. $(GHJK) = -(a - b)(c - a) : 2a(b - c)$; $(HJGL) = -(b - c)(a - b) : 2b(c - a)$; $(JGHM) = -(c - a)(b + c) : 2c(a - b)$; $(ADL\alpha) = (AHF\zeta) = (n - 1)a(b - c) : (c - a)(a - bn)$; $(BEM\beta) = (BJD\delta) = (n - 1)b(c - a) : (a - b)(b - cn)$; $(CFK\gamma) = (CGE\varepsilon) = (n - 1)c(a - b) : (b - c)(c - an)$; $(CDL\alpha) = (CHF\zeta) = -(b - c)(c + an) : (c - a)(c + bn)$; $(AEM\beta) = (AJD\delta) = -(c - a)(a + bn) : (a - b)(a + cn)$; $(BFK\gamma) = (BGE\varepsilon) = -(a - b)(b + cn) : (b - c)(b + an)$; $(DAM\alpha) = (DJB\varepsilon) = (n - 1)a(b - c) : (a - b)(c - an)$; $(EBK\beta) = (EGC\zeta) = (n - 1)b(c - a) : (b - c)(a - bn)$; $(FCL\gamma) = (FHA\delta) = (n - 1)c(a - b) : (c - a)(b - cn)$; $(EAM\alpha) = (EJB\varepsilon) = -(b - c)(a + bn) : (a - b)(c + bn)$; $(FBK\beta) = (FGC\zeta) = -(c - a) \cdot (b + cn) : (b - c)(a + cn)$; $(DCL\gamma) = (DHA\delta) = -(a - b)(c + an) : (c - a) \cdot (b + an)$; $(CGL\alpha) = (FKH\delta) = -a(b - c) : (c - a)(a + b)$; $(AHM\beta) = (DLJ\varepsilon) = -b(c - a) : (a - b)(b + c)$; $(BJK\gamma) = (EMG\zeta) = -c(a - b) : (b - c)(c + a)$; $(EGM\alpha) = (BKJ\delta) = -a(b - c) : (a - b)(c + a)$; $(FHK\beta) = (CLG\varepsilon) = -b(c - a) : (b - c)(a + b)$; $(DJL\gamma) = (AMH\zeta) = -c(a - b) : (c - a)(b + c)$; $(AJD\alpha) = (a - b)(c - an)(a + bn) : (c - a)(a - bn)(b + an)$; $(BGE\beta) = (b - c)(a - bn)(b + cn) : (a - b)(b - cn)(c + bn)$; $(CHF\gamma) = (c - a)(b - cn)(c + an) : (b - c)(c - an)(a + cn)$; $(AMD\delta) = (c - a)(a - bn) \cdot (b + an) : (a - b)(b - an)(a + cn)$; $(BKE\varepsilon) = (a - b)(b - ca)(c + bn) : (b - c)(c - bn)(b + an)$; $(CLF\zeta) = (b - c)(c - an)(a + cn) : (c - a)(a - cn) \cdot (c + bn)$; $(AHD\alpha) = (a - b)(c - an)(a + cn) : (c - a)(a - bn)(c + an)$; $(BJE\beta) = (b - c)(a - bn)(b + an) : (a - b)(b - cn)(a + bn)$; $(CGF\gamma) = (c - a)(b - cn)(c + bn) : (b - c)(c - an)(b + cn)$; $(ALD\delta) = (c - a) \cdot (a - cn)(b + an) : (a - b)(c - an)(a + cn)$; $(BME\varepsilon) = (a - b)(b - an) \cdot (c + bn) : (b - c)(a - bn)(b + an)$; $(CKF\zeta) = (b - c)(c - bn)(a + cn) : (c - a)(b - cn)(c + bn)$.

11. Bei den Felderpaaren bc, ca, ab sind d, e, f bezüglich Potenzfelder. Dabei bilden def ein Büschel.

12. Die Felder aefvw, bfdwu und cdeuv berühren der Reihe nach je zwei mit t kohärente Punktfelder $u_1 u_2, v_1 v_2$ und $w_1 w_2$. Dabei ist t Potenzfeld bei jedem der 3 letzten Felderpaare.

13. Ebenso berühren die Felder bcvw, cawu, abuv bezüglich je zwei mit t kohärente Felder xx′, yy′, zz′. Dabei bilden bei gehöriger Anordnung der 6 letzten Felder die folgenden uyz, vzx, wxy, uy′z′, vz′x′, wx′y′ je ein Büschel, und t ist Potenzfeld bei jedem der 3 Paare xx′, yy′ und zz′.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. Durch 1., 2. und 6. und ebenso durch 1., 2. und 7. sind die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ eindeutig bestimmt, und zwar auf dieselbe Weise wie durch 3.

Beweis. Bezeichnet man mit (αA) den Zähler des Bruches, der sich für $\alpha - A$ ergiebt, wenn man für α und A die oben bei 1., 2., 3. angegebenen Werte einsetzt, so erhält man:

$(\alpha A) = -(1+n)\,a\,(c-a)\,(a-bn)$; $(\alpha C) = -(c-a)\,(c-an)\,(c+bn)$;
$(\alpha D) = -n\,(1+n)\,a\,(a-b)\,(c-an)$; $(\alpha E) = -n\,(a-b)\,(c+bn)\,(a-bn)$;
$(\alpha G) = n\,(c+bn)\,(bc-a^2)$; $(\alpha L) = n\,a\,(b-c)\,(c-an)$;
$(\alpha M) = n\,a\,(b-c)\,(a-bn)$; $(\alpha\varepsilon) = -n\,(a-b)^2\,(c-an)\,(c+bn)$;
$(\beta A) = -(a-b)\,(a-bn)\,(a+cn)$; $(\beta B) = -(1+n)\,b\,(a-b)\,(b-cn)$;
$(\beta E) = -n\,(1+n)\,b\,(b-c)\,(a-bn)$; $(\beta F) = -n\,(b-c)\,(a+cn)\,(b-cn)$;
$(\beta H) = n\,(a+cn)\,(ca-b^2)$; $(\beta K) = n\,b\,(c-a)\,(b-cn)$;
$(\beta M) = n\,b\,(c-a)\,(a-bn)$; $(\beta\zeta) = -n\,(b-c)^2\,(a-bn)\,(a+cn)$;
$(\gamma B) = -(b-c)\,(b-cn)\,(b+an)$; $(\gamma C) = -(1+n)\,c\,(b-c)\,(c-an)$;
$(\gamma D) = -n\,(c-a)\,(b+an)\,(c-an)$; $(\gamma F) = -n\,(1+n)\,c\,(c-a)\,(b-cn)$;
$(\gamma J) = n\,(b+an)\,(ab-c^2)$; $(\gamma K) = n\,c\,(a-b)\,(b-cn)$;
$(\gamma L) = n\,c\,(a-b)\,(c-an)$; $(\gamma\delta) = -n\,(c-a)^2\,(b-cn)\,(b+an)$;
$(\delta A) = (1-n)\,a\,(a-b)\,(a+cn)$; $(\delta B) = (a-b)\,(b-cn)\,(b+an)$;
$(\delta D) = -n\,(1-n)\,a\,(c-a)\,(b+an)$; $(\delta F) = -n\,(c-a)\,(b-cn)\,(a+cn)$;
$(\delta H) = n\,a\,(b-c)\,(a+cn)$; $(\delta J) = n\,a\,(b-c)\,(b+an)$;
$(\delta K) = -n\,(b-cn)\,(bc-a^2)$; $(\delta\beta) = n\,(a-b)^2\,(b-cn)\,(a+cn)$;
$(\varepsilon B) = (1-n)\,b\,(b-c)\,(b+an)$; $(\varepsilon C) = (b-c)\,(c-an)\,(c+bn)$;
$(\varepsilon D) = -n\,(a-b)\,(c-an)\,(b+an)$; $(\varepsilon E) = -n\,(1-n)\,b\,(a-b)\,(c+bn)$;
$(\varepsilon G) = n\,b\,(c-a)\,(c+bn)$; $(\varepsilon J) = n\,b\,(c-a)\,(b+an)$;
$(\varepsilon L) = -n\,(c-an)\,(ca-b^2)$; $(\varepsilon\gamma) = n\,(b-c)^2\,(c-an)\,(b+an)$;
$(\zeta A) = (c-a)\,(a-bn)\,(a+cn)$; $(\zeta C) = (1-n)\,c\,(c-a)\,(c+bn)$;
$(\zeta E) = -n\,(b-c)\,(a-bn)\,(c+bn)$; $(\zeta F) = -n\,(1-n)\,c\,(b-c)\,(a+cn)$;
$(\zeta G) = n\,c\,(a-b)\,(c+bn)$; $(\zeta H) = n\,c\,(a-b)\,(a+cn)$;
$(\zeta M) = -n\,(a-bn)\,(ab-c^2)$; $(\zeta\alpha) = n\,(c-a)^2\,(a-bn)\,(c+bn)$.

Aus diesen Formeln und aus 1. und 2. ergeben sich die Gleichungen 8., 9. und 10. und aus diesen die Involutionen 5. und die inversen Beziehungen 6. und 7. Die Gleichungen 8. in Verbindung mit dem Satze 14. und die bei 5. angegebene Involution GK.HL.JM in Verbindung mit dem Satze 18. liefern die Behauptung 11. Wegen 6. gilt der Satz 20. und somit die Behauptung 12. Da nach 8. $BC\gamma\varepsilon \curlywedge EF\zeta\beta$; $CA\alpha\zeta \curlywedge FD\delta\gamma$; $AB\beta\delta \curlywedge DE\varepsilon\alpha$ ist, so berühren nach dem Satze 20. die Felder bevw, cawu, abuv bezüglich je zwei Felder xx', yy', zz'. Die 2 kohärenten Felder $C\alpha A\varphi' \curlywedge F\delta D\psi'$ haben mit den 2 kohärenten Feldern $D\alpha E\varphi' \curlywedge A\delta B\psi'$ ein und nur ein Paar entsprechender Punkte $\varphi' = \alpha$ und $\psi' = \delta$ gemein. Es ist nämlich $(\alpha - C)\,(\delta - D)\,(\varphi' - A)\,(\psi' - F) = (\alpha - A)\,(\delta - F)\,(\varphi' - C)\,(\psi' - D)$ und $(\alpha - D)\,(\delta - B)\,(\varphi' - E)\,(\psi' - A) = (\alpha - E)\,(\delta - A)\,(\varphi' - D)\,(\psi' - B)$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, wenn $\varphi' = \varphi + \alpha$ und $\psi' = \psi + \delta$ gesetzt wird, $[(\alpha - C)(\delta - D) - (\alpha - A).(\delta - F)]\varphi\psi + (A - C)(\delta - D)(\delta - F)\varphi + (F - D)(\alpha - A)(\alpha - C)\psi = 0$, $[(\alpha - D).(\delta - B) - (\alpha - E)(\delta - A)]\varphi\psi + (E - D)(\delta - B)(\delta - A)\varphi + (A - B)(\alpha - D)(\alpha - E)\psi = 0$. Eliminiert man ψ, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} [(\alpha - C)(\delta - D) - (\alpha - A)(\delta - F)]\varphi + (F - D)(\alpha - A)(\alpha - C), & (A - C)(\delta - D)(\delta - F) \\ [(\alpha - D)(\delta - B) - (\delta - E)(\delta - A)]\varphi + (A - B)(\alpha - D)(\alpha - E), & (E - D)(\delta - A)(\delta - B) \end{vmatrix} = 0.$$

Wie aus 1., 2. und 3. hervorgeht, ist aber $(A - C)(\delta - D)(\delta - F)(A - B)(\alpha - D).(\alpha - E) = (E - D)(\delta - A)(\delta - B)(F - D)(\alpha - A)(\alpha - C)$. Die Form der obigen Gleichung ist mithin $Q.\varphi = 0$, oder $\varphi = 0$ oder $\varphi' = \alpha$ etc. Aus diesem Grunde berühren nach dem Satze 21. die Felder yz (und ebenso y'z') einander und bilden mit u ein Büschel. Die Behauptungen 14. lassen sich in ähnlicher Weise als richtig beweisen wie der letzte Teil von 13.

Anmerkung. Werden an Stelle der Zahlen a, b, c, n die Zahlen a, b, c, — n, oder — a, b, c, n, oder — a, b, c, — n, oder a, — b, c, n, oder a, — b, c, — n, oder a, b, — c, n, oder a, b, — c, — n gesetzt, so bleiben nach 1. die Punkte A, B, C, D, E, F vollständig unverändert. Die Punkte G H J K L M erscheinen nach 2. zwar wieder, aber in einer anderen Reihenfolge. Die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ dagegen sind nach 3. jedesmal 6 ganz neue Punkte, wenn die Zahlen a b c n in keiner Abhängigkeit von einander stehen.

25. Sind a b c n vier beliebige reelle oder imaginäre Zahlen und setzt man: I. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = b + c$; $H = c + a$; $J = a + b$; $K = L = M = \infty$; $\alpha = [2a(b - c) + n(b + c - 2a)] : (b - c)$; $\beta = [2b(c - a) + n(c + a - 2b)] : (c - a)$; $\gamma = [2c(a - b) + n(a + b - 2c)] : (a - b)$; $\delta = [2(bc - a^2) - n(b - c)] : (b + c - 2a)$; $\varepsilon = [2(ca - b^2) - n(c - a)] : (c + a - 2b)$; $\zeta = [2(ab - c^2) - n(a - b)] : (a + b - 2c)$, oder II. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = H = J = \infty$; $K = b + c$; $L = c + a$; $M = a + b$; $\alpha = [2(bc - a^2) + n(b - c)] : (b + c - 2a)$; $\beta = [2(ca - b^2) + n(c - a)] : (c + a - 2b)$; $\gamma = [2(ab - c^2) + n(a - b)] : (a + b - 2c)$; $\delta = [2a(b - c) - n(b + c - 2a)] : (b - c)$; $\varepsilon = [2b(c - a) - n(c + a - 2b)] : (c - a)$; $\zeta = [2c(a - b) - n(a + b - 2c)] : (a - b)$, oder III. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = b + c$; $H = J = K = \infty$; $L = c + a$; $M = a + b$; $\alpha = [2a(b - c) - n(b + c + 2a)] : (b - c - 2n)$; $\beta = 2b - n = E$; $\gamma = 2c + n = C$; $\delta = \infty = H = J = K$; $\varepsilon = 2c + n = C$, $\zeta = 2b - n = E$, oder IV. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = L = M = \infty$; $H = c + a$; $J = a + b$; $K = b + c$; $\alpha = \infty = G = L = M$; $\beta = 2c - n = F$; $\gamma = 2b + n = B$; $\delta = [2a(b - c) + n(b + c + 2a)] : (b - c + 2n)$; $\varepsilon = 2b + n = B$; $\zeta = 2c - n = F$, oder V. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = J = L = \infty$; $H = c + a$; $K = b + c$; $M = a + b$; $\alpha = 2a + n = A$; $\beta = [2b(c - a) - n(c + a + 2b)] : (c - a - 2n)$; $\gamma = 2c - n = F$, $\delta = 2c - n = F$; $\varepsilon = \infty$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$= J = G = L$; $\zeta = 2a + n = A$; oder VI. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = b + c$, $H = K = M = \infty$; $J = a + b$; $L = c + a$; $\alpha = 2c + n = C$; $\beta = \infty = H = M = K$; $\gamma = \delta = 2a - n = D$; $\varepsilon = [2b(c - a) + n(c + a + 2b)] : (c - a + 2n)$; $\zeta = 2c + n = C$, oder VII. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$, $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = H = M = \infty$; $J = a + b$; $K = b + c$; $L = c + a$; $\alpha = \varepsilon = 2a - n = D$; $\beta = \delta = 2b + n = B$; $\gamma = [2c(a - b) - n(a + b + 2c)] : (a - b - 2n)$; $\zeta = \infty = G = H = M$, oder VIII. $A = 2a + n$; $B = 2b + n$; $C = 2c + n$; $D = 2a - n$; $E = 2b - n$; $F = 2c - n$; $G = b + c$; $H = c + a$; $J = K = L = \infty$; $M = a + b$; $\alpha = \varepsilon = 2b - n = E$; $\beta = \delta = 2a + n = A$; $\gamma = \infty = J = K = L$; $\zeta = [2c(a - b) + n(a + b + 2c)] : (a - b + 2n)$, so gelten von den Punkten A B C D E F G H J K L M $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ und den davon abhängigen Punktfeldern a b c d e f t u v w u_1 u_2 v_1 v_2 w_1 w_2 x y z in jedem der 8 Fälle im wesentlichen dieselben Sätze wie von den gleich benannten Gebilden in 23.

Beweis. Derselbe kann für jeden der 8 Fälle in derselben Weise wie bei 24. geführt werden. Besser ist es jedoch, 25. als einen besonderen Fall von 24. und der dazu gehörigen Anmerkung anzusehen. Bei 24. haben die kohärenten Felder A B C N O $\curlywedge$ D E F N O zwei getrennte Doppelpunkte N und O, bei 25. dagegen auf einander fallende $N = O$. Ist X irgend ein Punkt bei 24. und X′ der diesem entsprechende bei 25., und setzt man $a = \sigma + (2d + p) : 2\sigma$; $b = \sigma + (2e + p) : 2\sigma$; $c = \sigma + (2f + p) : 2\sigma$; $n = -1 + p : \sigma^2$, $X' = \mathrm{Lim}\,(X - \sigma^2)_{\sigma = \infty}$, so erhält man I. $A' = \mathrm{Lim}\,(A - \sigma^2) = \mathrm{Lim}\,(a^2 - \sigma^2) = \mathrm{Lim}\,[(\sigma + \frac{2d + p}{2\sigma})^2 - \sigma^2] = 2d + p$; $B' = \mathrm{Lim}\,(B - \sigma^2) = 2e + p$; $C' = \mathrm{Lim}\,(C - \sigma^2) = 2f + p$ etc. Ersetzt man d e f p A′ B′ C′ etc. hinterdrein durch a b c n A B C etc., so erhält man die Formeln I von 25. In gleicher Weise sind die Formeln II—VIII von 25. erhältlich, wenn man die auf 24. folgende Bemerkung berücksichtigt.

26. Sind $\binom{X}{S}\binom{Y}{S}\binom{Z}{S}\binom{U}{S}$ bei 4 Kreisen a b c d bezüglich veränderliche Peripheriepunkte, so erzeugen die Pole X Y Z U 4 kohärente Punktfelder, die mit a′ b′ c′ d′ bezeichnet werden mögen. Berühren sich die Felder a′ und b′, oder schneiden sie sich rechtwinklig, so soll dasselbe auch von den Kreisen a und b ausgesagt werden; bilden die Felder a′ b′ c′ d′ ein Büschel, so sollen auch die Kreise a b c d als solche eines Büschels bezeichnet werden; ist c′ ein Potenzfeld von a′ b′, so soll c ein Potenzkreis von a b heissen, und ist d′ das Orthogonalfeld von a′ b′ c′, so soll d als der Orthogonalkreis von a b c gelten. Diese Definitionen stimmen mit den gebräuchlichen überein, wenn a b c d reelle Kreise sind; sie sind Erweiterungen der letzteren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Abschnitt.

Analysis zur Konstruktion (V). Bilden bei den Kreisen a b c die Kreise x y z eine Lösung, und wird ein veränderlicher reeller Punkt S als Südpol von je 6 Punkten $\binom{a}{S}\binom{b}{S}\binom{c}{S}\binom{x}{S}\binom{y}{S}\binom{z}{S}$ dieser Kreislinien angesehen, so erzeugen die veränderlichen Nordpole a b c x y z, mögen die gleich benannten 6 Kreise reell oder imaginär sein, 6 kohärente Punktfelder a b c x y z, bei denen a und y, a und z, b und z, b und x, c und x, c und y, y und z, z und x und endlich x und y einander berühren, und zwar etwa in den Punkten $\rho, \varkappa, \sigma, \lambda, \tau, \mu, \alpha', \beta', \gamma'$. Dabei bilden keine 3 unter den 6 Feldern ein Büschel. Das Orthogonalfeld t (Satz 5) der bekannten Felder a b c möge von diesen in den Punktepaaren A D, B E, C F geschnitten werden. Diejenigen Potenzfelder d, e, f von b c, c a, a b, die gleichzeitig die Felder x, y, z bezüglich rechtwinklig schneiden, bilden ein Büschel (Satz 13) und mögen das Orthogonalfeld t in den Punktepaaren G K, H L, J M treffen. Die 3 kohärenten Felder u, v, w, die mit t je eine Involution bilden und mit den Felderpaaren y z, z x, x y bezüglich je einem Büschel angehören, mögen von t in den Punktepaaren $\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\zeta$ geschnitten werden. Damit ist die Bezeichnung der Punkte A B C D E F G H J K L M $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ noch nicht eindeutig festgelegt, indem A mit D, B mit E, C mit F, G mit K, H mit L, J mit M, α mit δ, β mit ε und γ mit ζ vertauschbar ist. Ein beliebiger der beiden Schnittpunkte von a und t sei A. Diese Bezeichnungsweise werde von nun ab beständig festgehalten. Der zweite Schnittpunkt von a und t ist dann D. Nach II, 14 besteht eine von den 2 Involutionen A E . B D . J M und A B . D E . J M. Man denke sich nun die Schnittpunkte B und E des Feldes b mit dem Orthogonalfelde t so gewählt, dass die erste dieser 2 Involutionen besteht. Es gilt gleichfalls nach II, 14 eine der 2 Involutionen B F . C E . G K und B C . E F . G K. Man bezeichne die Schnittpunkte C und F von t mit c so, dass wieder die erste dieser 2 Involutionen gültig ist. Nach II, 14 in Verbindung mit II, 13 und 19 besteht dann die Involution C D . A F . H^2 . L^2. Auf diese Art lassen sich die Schnittpunkte von t mit a b c eindeutig bezeichnen. Nach II, 17 ist $(\lambda\tau\gamma'\beta') = (BCFG) = (EFCK)$ oder $(\lambda\tau\gamma'\beta') = (BCFK) = (EFCG)$, ferner entweder $(\mu\rho\alpha'\gamma') = (CADH) = (FDAL)$ oder $(\mu\rho\alpha'\gamma) = (CADL) = (FDAH)$ und entweder $(\varkappa\sigma\beta'\alpha') = (ABEJ) = (DEBM)$ oder $(\varkappa\sigma\beta'\alpha') = (ABEM) = (DEBJ)$. Die Punkte $\alpha'\beta'\gamma'\varkappa\lambda\mu\rho\sigma\tau$ sind von vornherein eindeutig bestimmt. Man wähle, um auch die Schnittpunkte von t mit d e f in eindeutiger Weise bezeichnet zu erhalten, dieselben so, dass von den obigen Bedingungen die jedesmaligen ersten gelten. Nach II, 20 ist bei richtiger Bezeichnung der Schnittpunkte von t mit u v w $(\lambda\tau\gamma'\beta') = (BC\gamma\varepsilon) = (EF\zeta\beta)$; $(\mu\rho\alpha'\gamma') = (CA\alpha\zeta) = (FD\delta\gamma)$; $(\varkappa\sigma\beta'\alpha') = (AB\beta\delta) = (DE\varepsilon\alpha)$. Hierdurch sind auch die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ eindeutig festgelegt. Hieraus und aus den obigen Beziehungen folgt $(BC\gamma\varepsilon) = (EF\zeta\beta) = (BCFG)$; $(CA\alpha\zeta) = (FD\delta\gamma) = (CADH)$; $(AB\beta\delta) = (DE\varepsilon\alpha) = (ABEJ)$, und hieraus, unter Berücksich-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tigung von II, 14: 2. BCFK$\gamma\curlywedge$BCGEε; DEJB$\varepsilon\curlywedge$DEAMα; CADL$\alpha\curlywedge$CAHFζ; EFGC$\zeta\curlywedge$EFBKβ; ABEM$\beta\curlywedge$ABJDδ; FDHA$\delta\curlywedge$FDCLγ. Damit ist, streng genommen, die Analysis beendet. Denn aus den Kreisen abc ergeben sich die gleichbenannten Punktfelder samt ihrem Orthogonalfelde t und den Schnittpunkten ABCDEF. Aus letzteren folgen die Punkte GHJKLM als Doppelpunkte der obigen Involutionen 1. BF.CE.G^2.K^2; CD.AF.H^2.L^2; AE.BD.J^2.M^2 und aus den Beziehungen 2. die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$. Denkt man sich nämlich die Punkte $\gamma\varepsilon\alpha\zeta\beta\delta\gamma$ veränderlich, bezeichnet sie mit $\gamma'\varepsilon'\alpha'\zeta'\beta'\delta'\gamma''$ und lässt sie den Bedingungen 2. der Reihe nach unterworfen sein, so ist $\gamma'\curlywedge\varepsilon'\curlywedge\alpha'\curlywedge\zeta'\curlywedge\beta'\curlywedge\delta'\curlywedge\gamma''$, oder $\gamma'\curlywedge\gamma''$. Jeder der beiden (hier übrigens auf einander fallenden) Doppelpunkte der leicht herstellbaren kohärenten Felder $\gamma'\curlywedge\gamma''$ ist der gesuchte Punkt γ. Aus γ ergeben sich nach 2. linear die Punkte $\varepsilon\alpha\zeta\beta\delta$. Mittels der Punkte ABCDEFGH JKLM$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ lassen sich dann die Felder uvwxyz und damit auch die gesuchten Kreise xyz herstellen. Die angedeutete Konstruktion der Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ lässt sich jedoch bedeutend vereinfachen. Sind nämlich die Doppelpunkte NO der kohärenten Felder ABCNO$\curlywedge$DEFNO zwei von einander verschiedene Punkte, was im allgemeinen der Fall ist (ist N=O, so ändert sich wegen II, 25 im wesentlichen nichts an der folgenden Betrachtung), und setzt man ihre Koordinaten gleich ∞ bezüglich gleich Null und die von A, B, C, D gleich a^2, b^2, c^2, a^2n^2, so wird wegen ABCNO$\curlywedge$DEFNO:E$=b^2n^2$ und F$=c^2n^2$ und ferner wegen 1., bei gehöriger Auswahl der Vorzeichen von a, b, c, n, G$=-$bcn; H$=-$can; J$=-$abn; K=bcn; L=can; M=abn. Aus den Beziehungen 2., die mit denen von II, 24, Nr. 7 identisch sind, folgen aber nach II, 24, Nr. 14 in eindeutiger Weise die bei II, 24 unter Nr. 3 angegebenen Koordinaten von $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und aus letzteren die bei II, 24 unter Nr. 6 angeführten Relationen, die sich auch folgendermassen schreiben lassen: 3. CLG$\alpha\curlywedge$FHKδ; EMG$\alpha\curlywedge$BJKδ; AMH$\beta\curlywedge$DJLε; FKH$\beta\curlywedge$CGLε; BKJ$\gamma\curlywedge$EGMζ; DLJ$\gamma\curlywedge$AHMζ. Hiernach lassen sich die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ leichter als auf die oben angegebene Art konstruieren.

Beweis zur Konstruktion (V). Sind abc veränderliche Punkte, die den Beziehungen $N_1\,N_2\,N_3\,a\curlywedge O_1\,O_2\,O_3\,b\curlywedge P_1\,P_2\,P_3\,c$ genügen, so sind dadurch 3 kohärente Punktfelder, die gleichfalls abc heissen mögen, bestimmt. Nach 2, I der Konstruktion (V) ist $O_1\,O_2\,O_3\,A_0\,D_0\,b\curlywedge P_1\,P_2\,P_3\,A_0\,D_0\,c$; $P_1\,P_2\,P_3\,B_0\,E_0\,c\curlywedge N_1\,N_2\,N_3\,B_0\,E_0\,a$; $N_1\,N_2\,N_3\,C_0\,F_0\,a\curlywedge O_1\,O_2\,O_3\,C_0\,F_0\,b$. Nach II, 5 gehört zu den 3 Feldern abc ein und nur ein Orthogonalfeld; dasselbe heisse t. Nach dem Satze II, 3 ist $A_0\,D_0$.ct; $A_0\,D_0$.bt und $B_0\,E_0$.ct; $B_0\,E_0$.at. Daraus ergiebt sich $B_0\,E_0$.$C_0\,F_0$.at und in gleicher Weise $C_0\,F_0$.$A_0\,D_0$.bt und $A_0\,D_0$.$B_0\,E_0$.ct. Hieraus und aus 2, II der Konstruktion (V) folgt A^2.D^2.at; B^2.E^2.bt; C^2.F^2.ct. Wegen 3. der Konstruktion (V) sind nach der Umkehrung des Satzes II, 14 die durch G^2.K^2.dt; H^2.L^2.et; I^2.M^2.ft bestimmten 3 kohärenten Punktfelder d, e, f bezüglich bei den Felderpaaren bc, ca, ab Potenzfelder und bilden nach dem Satze II, 18 ein Büschel, indem nach II, 19 die Involution GK.HL.JM besteht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach 4, II der Konstruktion (V) ist $B_1 E_1 . C_1 F_1 . K\alpha . G\delta$. Hieraus folgt $G\alpha C_1 F_1 \curlywedge \delta K F_1 C_1 \curlywedge K\delta C_1 F_1$. Da ausserdem noch nach 4, I der Konstruktion (V) $CGLC_1 F_1 \curlywedge FKHC_1 F_1$, so ist $CGLC_1 F_1 \alpha \curlywedge FKHC_1 F_1 \delta$, oder $CGL\alpha \curlywedge FKH\delta$. In gleicher Weise lässt sich die Relation $CGL\varepsilon \curlywedge FKH\beta$ ableiten. Mithin ist, wenn man ausserdem noch cyklisch weitergeht, $CGL\alpha\varepsilon \curlywedge FKH\delta\beta$; $AHM\beta\zeta \curlywedge DLJ\varepsilon\gamma$; $BJK\gamma\delta \curlywedge EMG\zeta\alpha$. Genau so wie bei der Analysis kann man hier zeigen, dass bei richtiger Wahl der Zahlen a b c n die hier vorkommenden Punkte A B C D E F G H J K L M mit den gleich bezeichneten von II, 24 resp. II, 25 identisch sind. Die zuletzt entwickelten Relationen stimmen mit denen der Nummer 6 von II, 24 vollständig überein. Somit sind nach II, 24, Nr. 14 auch die obigen Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ mit den gleich bezeichneten Punkten von II, 24 identisch. Demnach gilt von unseren Punkten A B C D E F G H J K L M $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ alles unter II, 24 Gesagte. Nach II, 24 Nr. 8 ist $BC\gamma\varepsilon \curlywedge EF\zeta\beta$; $CA\alpha\zeta \curlywedge FD\delta\gamma$; $AB\beta\delta \curlywedge DE\varepsilon\alpha$. Es findet sich also bei 5, I der Konstruktion (V) kein Widerspruch vor. Ferner sind nach II, 24 Nr. 4 die durch $\alpha^2 . \delta^2 . tu$; $\beta^2 . \varepsilon^2 . tv$; $\gamma^2 . \zeta^2 . tw$ bestimmten Felder mit den gleichbezeichneten von II, 24 identisch. Somit berühren nach II, 24, Nr. 13 die Felder b c v w, c a w u, a b u v bezüglich je 2 mit t kohärente Felder x x', y y', z z', und zwar bei gehöriger Anordnung der letzteren so, dass u die Felder y z, v die Felder z x, und w die Felder x y in je einem und demselben Punkte berührt. Durch die Operationen 5, I—IV der Konstruktion (V) sind nach II, 23, II, 21 und II, 20 die bezüglichen Berührungspunkte $\alpha', \beta', \gamma', \varkappa, \lambda, \mu, \rho, \sigma, \tau$ von u y z, v z x, w x y, a z, b x, c y, a y, b z, c x und die Schnittpunktepaare U X, V Y, W Z von t mit x, y, z hergestellt. Wegen 6, I der Konstruktion (V) ist $B^2 . E^2 . \lambda\lambda' . bt$; $C^2 . F^2 . \tau\tau' . ct$; $\gamma^2 . \zeta^2 . \gamma'\gamma'' . wt$; $\beta^2 . \varepsilon^2 . \beta'\beta'' . vt$. Es entsprechen also den Punkten $\lambda'\tau'\gamma''\beta''$ des Feldes t bezüglich die Punkte λ von b, τ von c, γ' von w und β' von v. Die 4 letzten Punkte sind aber nach dem Obigen gleichzeitig Punkte des Feldes x. Ferner sind U X die Schnittpunkte von t mit x. Die Beziehung der Felder x und t ist damit (mehr als ausreichend) festgelegt: $\lambda\tau\gamma'\beta' U X x \curlywedge \lambda'\tau'\gamma''\beta'' U X t$. Ebenso ist $\mu\rho\alpha'\gamma' V Y y \curlywedge \mu'\rho'\alpha''\gamma'' V Y t$ und $\varkappa\sigma\beta'\alpha' W Z z \curlywedge \varkappa'\sigma'\beta''\alpha'' W Z t$. Den kohärenten Punktfeldern a b c t x y z sollen nun gleich benannte Kreise zugeordnet werden, und zwar den Feldern a b c auf die bereits erwähnte Weise die gegebenen Kreise a b c; die entsprechenden Punkte der Felder a b c t x y z sollen bei den gleichbenannten Kreisen als Nordpole von Peripheriepunkten gelten, deren Südpole jedesmal zusammenfallen. Wegen 1 und 6, II der Konstruktion (V) sind $\binom{N_1}{S_1}\binom{N_2}{S_2}\binom{N_3}{S_3}\binom{U'}{U''}\binom{V'}{V''}\binom{W'}{W''}\binom{X'}{X''}\binom{Y'}{Y''}$ $\binom{Z'}{Z''}\binom{\varkappa}{\varkappa''}\binom{\rho}{\rho''}$ Punkte des gegebenen Kreises a. Aus $A^2 . D^2 . at$ und $A^2 . D^2 . \varkappa\varkappa' . \rho\rho' . UU' . VV' . WW' . XX' . YY' . ZZ'$ (6, I der Konstruktion V) folgt $U'V'W'X'Y'Z'\varkappa\rho a \curlywedge U V W X Y Z \varkappa'\rho' t$. Mithin sind $\binom{U}{U''}\binom{V}{V''}\binom{W}{W''}\binom{X}{X''}\binom{Y}{Y''}\binom{Z}{Z''}\binom{\varkappa'}{\varkappa''}\binom{\rho'}{\rho''}$ Punkte des Kreises t. Wegen $O_1 O_2 O_3 \lambda\sigma \curlyvee S_1 S_2 S_3 \lambda''\sigma''$; $P_1 P_2 P_3 \mu\tau \curlyvee S_1 S_2 S_3 \mu''\tau''$ (6, II der Konstruktion V) und wegen 1. der Konstruktion sind $\binom{O_1}{S_1}\binom{O_2}{S_2}\binom{O_3}{S_3}\binom{\lambda}{\lambda''}\binom{\sigma}{\sigma''}$ Punkte des Kreises b und $\binom{P_1}{S_1}\binom{P_2}{S_2}\binom{P_3}{S_3}\binom{\mu}{\mu''}\binom{\tau}{\tau''}$ Punkte des Kreises c. Da ausserdem noch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Involutionen $B^2.E^2.\lambda\lambda'.\sigma\sigma'.bt$ und $C^2.F^2.\mu\mu'.\tau\tau'.ct$ (6, I der Konstruktion V) bestehen, so sind auch $\binom{\lambda'}{\lambda''}\binom{\sigma'}{\sigma''}$ und $\binom{\mu'}{\mu''}\binom{\tau'}{\tau''}$ Punkte des Kreises t. Wegen 6, III der Konstruktion (V) sind $\binom{U}{U''}\binom{V}{V''}\binom{W}{W''}\binom{\alpha''}{\alpha'''}\binom{\beta''}{\beta'''}\binom{\gamma''}{\gamma'''}$ sechs Punkte eines Kreises. Dieser Kreis ist mit t identisch, weil er mit t in 3 Punkten übereinstimmt. Da demnach $\binom{U}{U''}\binom{V}{V''}\binom{W}{W''}\binom{X}{X''}\binom{Y}{Y''}\binom{Z}{Z''}\binom{\varkappa'}{\varkappa''}\binom{\lambda'}{\lambda''}\binom{\mu'}{\mu''}\binom{\rho'}{\rho''}\binom{\sigma'}{\sigma''}\binom{\tau'}{\tau''}\binom{\alpha''}{\alpha'''}\binom{\beta''}{\beta'''}\binom{\gamma''}{\gamma'''}$ Punkte des Kreises t sind und nach dem Obigen die 3 Relationen $\lambda\tau\gamma'\beta'UXx \barwedge \lambda'\tau'\gamma''\beta''UXt$; $\mu\rho\alpha'\gamma'VYy \barwedge \mu'\rho'\alpha''\gamma''VYt$; $\varkappa\sigma\beta'\alpha'WZz \barwedge \varkappa'\sigma'\beta''\alpha''WZt$ bestehen, so sind $\binom{\lambda}{\lambda''}\binom{\tau}{\tau''}\binom{\gamma'}{\gamma'''}\binom{\beta'}{\beta''}\binom{U}{U''}\binom{X}{X''}$ Punkte des Kreises x, $\binom{\mu}{\mu''}\binom{\rho}{\rho''}\binom{\alpha'}{\alpha'''}\binom{\gamma'}{\gamma'''}\binom{V}{V''}\binom{Y}{Y''}$ Punkte des Kreises y und $\binom{\varkappa}{\varkappa''}\binom{\sigma}{\sigma''}\binom{\beta'}{\beta'''}\binom{\alpha'}{\alpha'''}\binom{W}{W''}\binom{Z}{Z''}$ Punkte des Kreises z. Nach dem Satze II, 24 berühren einander die Felder yz (in α'), zx (in β'), xy (in γ'), az (in $\varkappa$), bx (in λ), cy (in μ), ay (in ρ), bz (in σ) und cx (in τ). Dabei bilden die Felder keines der 4 Tripel xyz, ayz, bzx, cxy ein Büschel. Mithin berühren einander (nach II, 26) auch die diesen Feldern entsprechenden Kreise, und zwar yz in dem Punkte $\binom{\alpha'}{\alpha'''}$, zx in $\binom{\beta'}{\beta'''}$, xy in $\binom{\gamma'}{\gamma'''}$, az in $\binom{\varkappa}{\varkappa''}$, bx in $\binom{\lambda}{\lambda''}$, cy in $\binom{\mu}{\mu''}$, ay in $\binom{\rho}{\rho''}$, bz in $\binom{\sigma}{\sigma''}$ und cx in $\binom{\tau}{\tau''}$. Dabei bilden die Kreise keines der 4 Tripel xyz, ayz, bzx, cxy ein Büschel.

Determination. Aus der Analysis und dem Beweise geht hervor, dass die Konstruktion (V) alle Lösungen der gestellten Aufgabe liefert. Diese Konstruktion liefert aber nach dem Obigen im allgemeinen, wenn keine 2 unter den 3 gegebenen Kreisen sich berühren, 64 Lösungen. In besonderen Fällen sinkt diese Anzahl auf 16, 4 oder 2 herab. Werden nämlich die Zahlen abcn von II, 24 so gewählt, dass folgende und nur folgende Beziehungen zwischen ihnen bestehen: 1. $a = bn$, 2. $a = bn = cn^2$, 3. $a = bn = cn^2 = an^3$ (n: dritte Einheitswurzel), ferner für $\lim \sigma = 0$, 4. $a = \sigma$, $n = 1:\sigma$, 5. $a = \sigma, b = 1, n = 1:\sigma$, 6. $a = \sigma, b = \sigma^2, n = 1:\sigma^2$, 7. $a = \sigma, b = \sigma^2, c = 1$, $n = 1:\sigma^2$, so berühren sich unter den zu diesen Zahlen gehörigen gegebenen 3 Kreisen bei 1. oder 4. die eines einzigen Paares, bei 2. oder 5. oder 6. die zweier und nur zweier Paare, und bei 3. oder 7. die aller Paare. Auch das Umgekehrte findet statt. Zu 3 gegebenen Kreisen gehören im Sinne von II, 24 (oder 25) stets 4 Zahlentripel a:b:c,n. Berühren sich 2 der Kreise, so besteht bei 2 der Tripel die Relation 1. und bei den 2 übrigen die Relation 4.; findet bei den Kreisen ein zweimaliges Berühren statt, so gilt bei einem der 4 Zahlentripel die Beziehung 2., bei einem zweiten die Beziehung 5. und bei den 2 übrigen die Beziehung 6.; kommen endlich 3 Berührungspunkte bei den Kreisen vor, so besteht bei einem der Tripel die Relation 3. und bei den 3 übrigen die Relation 7. Berücksichtigt man die zu II, 24 gehörige Anmerkung und berechnet nach II, 24 die Werte von ABCDEFG HJKLM$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$, so ergiebt sich, dass zu einem Zahlentripel a:b:c,n mit der Bedingung 1., 2. oder 3. bezüglich 8, 4 oder 2 gewünschte Lösungen, also Lösungen von der Eigenschaft gehören, dass unter den 6 Kreisen abcxyz keine 3 ein Büschel

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bilden. Die Fälle 4., 5., 7. und ausserdem noch diejenigen, in denen unter den gegebenen 3 Kreisen einer, zwei oder alle in Nullkreise ausarten, liefern keine gewünschte allgemeine, sondern nur besondere, übrigens durchweg leicht herstellbare Lösungen. Demnach hat das in der oben angegebenen Fassung gestellte verallgemeinerte Malfattische Problem 64, 16, 4 oder 2 Lösungen, je nachdem bei den 3 gegebenen Kreisen ein paarweises Berühren keinmal, ein-, zwei- oder dreimal stattfindet.

Zusätze. In den auf die Konstruktion (V) folgenden Bemerkungen werden Abänderungen derselben ohne Beweis angegeben. Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass die nach 2. der Konstruktion (V) bestimmten Punkte ABCDEF identisch sind mit den gleichbezeichneten der Anmerkungen. Bei dem folgenden Beweise sind unter ABCDEF... stets die auf die erste Art bestimmten Punkte gemeint. Nach 1. und 2. der Konstruktion (V), nach den dazu gehörigen Anmerkungen und nach dem soeben geführten Beweise ist: $P_1 P_2 P_3 B_0 E_0 \curlywedge N_1 N_2 N_3 B_0 E_0$; $P_1 P_2 a P_3 N_3 \curlywedge N_1 N_2 P_3 N_3 b$. Hieraus folgt $P_1 P_2 a P_3 N_3 B_0 E_0 \curlywedge N_1 N_2 P_3 N_3 b B_0 E_0$ und hieraus $N_3 P_3 E_0 B_0 \curlywedge N_3 b B_0 E_0$ oder $N_3{}^2 . P_3 b . B_0 E_0$. Statt $P_3{}^2 . b^2 . N_3 g$ kann auch $N_3{}^2 . g^2 . P_3 b$ gesetzt werden. Mithin ist $N_3{}^2 . g^2 . P_3 b . B_0 E_0$, und somit $B_0{}^2 . E_0{}^2 . N_3 g$. Aus der obigen Relation folgt noch $P_3 a E_0 B_0 \curlywedge P_3 N_3 B_0 E_0$ oder $P_3{}^2 . N_3 a . B_0 E_0$. Hieraus und aus $N_3{}^2 . a^2 . P_3 e$, wofür auch $P_3{}^2 . e^2 . N_3 a$ treten kann, folgt $P_3{}^2 . e^2 . N_3 a . B_0 E_0$, und hieraus $B_0{}^2 . E_0{}^2 . P_3 e$. Demnach besteht unter Berücksichtigung von $B_0{}^2 . E_0{}^2 . N_3 g$ die Involution $B_0{}^2 . E_0{}^2 . P_3 e . N_3 g$. Da ferner noch die Involutionen $P_3 e . N_3 g . O_3 i$ und $B_0 E_0 . C_0 F_0 . A^2 . D^2$ oder $B_0{}^2 . E_0{}^2 . AD$ gelten, so ist $B_0{}^2 . E_0{}^2 . P_3 e . N_3 g . O_3 i . AD$. Auf dieselbe Weise erhält man aus $N_1 N_2 N_3 C_0 F_0 \curlywedge O_1 O_2 O_3 C_0 F_0$; $N_1 N_2 e N_3 O_3 \curlywedge O_1 O_2 N_3 O_3 d$; $N_3{}^2 . d^2 . O_3 h$; $O_3{}^2 . e^2 . N_3 f$; $N_3 f . O_3 h . P_3 k$; $B_0 E_0 . C_0 F_0 . A^2 . D^2$ die Involution $C_0{}^2 . F_0{}^2 . N_3 f . O_3 h . P_3 k . AD$. Aus den 2 zuletzt abgeleiteten Involutionen folgt $DAN_3 O_3 P_3 \curlywedge ADgie \curlywedge ADfhk$. Da ausserdem noch $gilek \curlywedge fhekm$ ist, so ist $ADgilek \curlywedge ADfhekm$. Hieraus folgt $DAel \curlywedge ADek$ oder $e^2 . AD . kl$. Da ausserdem noch $l^2 . k^2 . en$ oder $e^2 . n^2 . lk$ ist, so ist $e^2 . n^2 . kl . AD$ oder $A^2 . D^2 . en$. Aus der obigen Relation folgt noch $DAke \curlywedge ADkm$ oder $k^2 . AD . em$. Wird ausserdem noch $e^2 . m^2 . kp$ oder $k^2 . p^2 . em$ berücksichtigt, so ist $k^2 . p^2 . em . AD$ und somit auch $A^2 . D^2 . kp$. Demnach ist $A^2 . D^2 . en . kp$. Da ferner noch $A^2 . D^2 . B_0 E_0 . C_0 F_0$; $en . kp . N_1 Q_1 . N_2 Q_2 . N_3 Q_3$; $A^2 . D^2 . at$ (dieses veränderliche a ist mit dem obigen festen Punkte a nicht zu verwechseln) ist, so ist $A^2 . D^2 . B_0 E_0 . C_0 F_0 . en . kp . N_1 Q_1 . N_2 Q_2 . N_3 Q_3 . at$. Da endlich noch die Involutionen $B^2 . E^2 . C_0 F_0 . A_0 D_0 . bt$ und $C^2 . F^2 . A_0 D_0 . B_0 E_0 . bt$ bestehen und den Punkten $N_1 N_2 N_3$ des Feldes a die Punkte $O_1 O_2 O_3$ von b, die Punkte $P_1 P_2 P_3$ von c und die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ von t bezüglich entsprechen, so gelten die 2 Involutionen $B^2 . E^2 . C_0 F_0 . A_0 D_0 . O_1 Q_1 . O_2 Q_2 . O_3 Q_3 . bt$ und $C^2 . F^2 . A_0 D_0 . B_0 E_0 . P_1 Q_1 . P_2 Q_2 . P_3 Q_3 . ct$, womit alles bewiesen ist.

Nun soll der Beweis dafür erbracht werden, dass die nach 4. der Konstruktion (V) erhaltenen Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ mit den gleichbezeichneten Punkten der erwähnten Anmerkung identisch sind. Wie oben, ergiebt sich auch hier aus $BJKB_1 E_1 \curlywedge EMGB_1 E_1$; $BJaKG \curlywedge EMKGb$; $a^2 . G^2 . Ke$; $K^2 . b^2 . Gf$ die Involution $B_1{}^2 . E_1{}^2 . Ke . Gf$ und aus

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$FHKC_1F_1 \curlywedge CLGC_1F_1$; $FHcKG \curlywedge CLKGd$; $c^2.G^2.Kg$; $K^2.d^2.Gh$ die Involution $C_1^2.F_1^2.Kg.Gh$. Sind S und T die Doppelpunkte der Involution $B_1E_1.C_1F_1.S^2.T^2$, so ist, wenn ausserdem noch $Kg.Gh.ei$ berücksichtigt wird, $B_1^2.E_1^2.Ke.Gf.ST$ und $C_1^2.F_1^2.Kg.Gh.ei.ST$. Mithin ist $KGeST \curlywedge efKTS \curlywedge ghiTS$. Hieraus und aus $efkK \curlywedge ghKi$ folgt $efkKTS \curlywedge ghKiTS$, oder $KkST \curlywedge KiTS$, oder $K^2.ki.ST$. Ferner ist noch $S^2.T^2.B_1E_1.C_1F_1.K\alpha$, oder $K^2.\alpha^2.ST$. Mithin ist $K^2.\alpha^2.ST.ki$, oder $k^2.i^2K\alpha$, womit die Identität der beiden α nachgewiesen ist. Die Identität der übrigen Punkte $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ folgt nun unmittelbar aus II, 24, Nr. 7 und Nr. 14.

Ist $A_1D_1AMH \curlywedge A_1D_1DJL$, so ist, wenn für AMHDJL die in II, 24 angegebenen Werte eingesetzt werden, $A_1+D_1 = n[2n(a^2+bc)+a(b-c)(1-n^2)]:(1+n^2)$ und $A_1.D_1 = a^2bcn^2$. Ist ferner $A_3^2.D_3^2.AD.A_1D_1$, so ist $A_3+D_3 = 2a^2.(a^2-bc)n^2(1+n^2):[a^2(1-n^2)^2-a(b-c)n(1-n^2)+2n^2(a^2-bc)]$ und $A_3.D_3 = a^4n^2[2n^2(a^2-bc)+a(b-c)(1-n^2)-bc(1-n^2)]:[a^2(1-n^2)^2-a(b-c)n(1-n^2)+2n^2(a^2-bc)]$. Hieraus und aus den bereits bekannten Werten von $A+D, A.D, \alpha+\beta, \alpha\delta$ ergiebt sich $A_3D_3-AD = -a^4n^2(1-n^2)[(a^2+bc)(1-n^2)-2a(b-c)n]:[a^2(1-n^2)^2-a(b-c)n(1-n^2)+2n^2(a^2-bc)]$, $AD-\alpha\delta = a^2n^2(a-b)(c-a).[(a^2+bc)(1-n^2)-2a(b-c)n]:[(a-b)(c-a)(1-n^2)-(b-c)(b+c-2a)n]$, $\alpha\delta-A_3D_3 = -a^2n^3(a^2-bc)[2n(a-b)(c-a)-a(b-c)(1-n^2)][(a^2+bc)(1-n^2)-2a(b-c)n]:[(a-b)(c-a)(1-n^2)-(b-c)(b+c-2a)n].[a^2(1-n^2)^2-a(b-c).n(1-n^2)+2n^2(a^2-bc)]$. Wird der Nenner des letzten Bruches gleich N gesetzt, so ist $[(A_3D_3-AD)(\alpha+\delta)+(AD-\alpha\delta)(A_3+D_3)+(\alpha\delta-A_3D_3)(A+D)].N:[(a^2+bc)(1-n^2)-2a(b-c)n] = -a^4n^2(1-n^2).an(1+n^2)(b-c)(a^2-bc)+a^2n^2(a-b)(c-a).2a^2(a^2-bc)n^2(1+n^2)-a^2n^3(a^2-bc)[2n(a-b)(c-a)-a(b-c)(1-n^2)].a^2(1+n^2)$. Der letzte Ausdruck ist aber identisch Null. Mithin ist $(A_3D_3-AD)(\alpha+\delta)+(AD-\alpha\delta)(A_3+D_3)+(\alpha\delta-A_3D_3)(A+D) = 0$, d. h. es besteht die Involution $AD.\alpha\delta.A_3D_3$. Hieraus und aus $A_4^2.D_4^2.AD.\alpha\delta$ ergiebt sich die Involution $AD.A_1D_1.A_4D_4$, wenn noch $A_3^2.D_3^2.AD.A_1D_1$ berücksichtigt wird.

Die Punkte $\lambda\tau\beta'$ der Konstruktion (V) stimmen mit den gleich benannten der Anmerkungen nach II, 23 überein.

Dasselbe gilt endlich auch von den Punkten $\varkappa\mu\rho\sigma\alpha'\gamma'$. Zunächst wird nämlich der Punkt γ' in beiden Fällen durch eine und dieselbe Operation $BC\gamma\varepsilon \curlywedge \lambda\tau\gamma'\beta'$ bestimmt. Sodann hängen die Punkte $\beta'\lambda\tau$ von den Punkten $BCEF\beta\varepsilon$ offenbar in derselben Weise ab, wie $\gamma'\mu\rho$ von $CAFD\gamma\zeta$ und $\alpha'\varkappa\sigma$ von $ABDE\alpha\delta$. In den Anmerkungen finden sich die zur Konstruktion von $\beta'\lambda\tau$ nötigen Operationen bei $\gamma'\mu\rho$ und $\alpha'\varkappa\sigma$ wörtlich wiederholt vor, jedoch mit dem Unterschiede, dass eine Reihe von Zwischenkonstruktionen aus dem Grunde fortgelassen werden konnte, weil bei den Punkten $\gamma'\mu\rho$ und $\alpha'\varkappa\sigma$ die Punkte γ' und $\alpha'\beta'$ durch die jedesmal vorhergegangene Konstruktion bereits hergestellt waren.

Ableitung der besonderen Konstruktion (IV, B) aus der allgemeinen Konstruktion (V). Es seien $S_1S_2S_3$ 3 beliebige feste Punkte auf der Kugel, und es sei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

S ein veränderlicher Punkt derselben. Ferner seien $N_1 N_2 N_3 a$; $O_1 O_2 O_3 b$; $P_1 P_2 P_3 c$ bezüglich die konjugierten Pole der Punkte $S_1 S_2 S_3 S$ bei den gegebenen grössten Kugelkreisen a, b, c, sodann AD, BE, CF, wie bei der Konstruktion (IV, B), die Pole der Kreise a, b, c, und endlich $S_1 Q_1, S_2 Q_2, S_3 Q_3, St$ Kugeldurchmesser. Augenscheinlich liegen die Punkte $AD S_1 N_1 Q_1$ auf einem Kreise, und jeder der beiden Pole AD ist von den Punkten $N_1 Q_1$ gleich weit entfernt. Mithin besteht die Involution $A^2.D^2.N_1 O_1$. Schliesst man auf gleiche Art weiter, so erhält man die Involutionen $A^2.D^2.N_1 Q_1 . N_2 Q_2 . N_3 Q_3 . at$; $B^2.E^2.O_1 Q_1 . O_2 Q_2 . O_3 Q_3 . bt$; $C^2.F^2.P_1 Q_1 . P_2 Q_2 . P_3 Q_3 . ct$. Sind $A_0 D_0, B_0 E_0, C_0 F_0$ bezüglich die Schnittpunktepaare bei den Kreispaaren bc, ca, ab, so wird $a = B_0$ und $t = E_0$ für $S = B_0$, und $a = C_0$ und $t = F_0$ für $S = C_0$. Mithin ist $A^2.D^2.B_0 E_0 . C_0 F_0 . N_1 Q_1 . N_2 Q_2 . N_3 Q_3 . at$ und ebenso $B^2.E^2.C_0 F_0 . A_0 B_0 . O_1 Q_1 . O_2 Q_2 . O_3 Q_3 . bt$ und $C^2.F^2.A_0 D_0 . B_0 E_0 . P_1 Q_1 . P_2 Q_2 . P_3 Q_3 . ct$. Hieraus folgt $Q_1 Q_2 Q_3 D_0 A_0 \curlywedge O_1 O_2 O_3 A_0 D_0 \curlywedge P_1 P_2 P_3 A_0 D_0$, ferner $P_1 P_2 P_3 B_0 E_0 \curlywedge N_1 N_2 N_3 B_0 E_0$ und $N_1 N_2 N_3 C_0 F_0 \curlywedge O_1 O_2 O_3 C_0 F_0$. Die Schnittpunkte von bc, ca, ab sind mithin die Punkte $A_0 D_0, B_0 E_0, C_0 F_0$ von 2, I der Konstruktion (V). Hieraus und aus den obigen Involutionen $A^2.D^2.B_0 E_0 . C_0 F_0$; $B^2.E^2.C_0 F_0 . A_0 E_0$; $C^2.F^2.A_0 D_0 . B_0 E_0$ folgt, dass die Pole der Kreise a, b, c mit den Punkten AD, BE, CF von 2, II der Konstruktion (V) identisch sind. Durch die 3 obigen Involutionen $A^2.D^2.at$; $B^2.E^2.bt$; $C^2.F^2.ct$ sind 4 kohärente Punktfelder, die abct heissen mögen, festgelegt. Diese Punktfelder sind mit den gleich lautenden des Beweises der Konstruktion (V) identisch, weil sie sich aus denselben 3 Involutionen ergeben. Mithin ist unser t das Orthogonalfeld der Felder abc. Da nach dem Obigen $N_1 N_2 N_3 a \curlywedge O_1 O_2 O_3 b \curlywedge P_1 P_2 P_3 c \curlywedge Q_1 Q_2 Q_3 t$ ist, und nach Definition $\binom{N_1}{S_1}\binom{N_2}{S_2}\binom{N_3}{S_3}\binom{a}{S}$ Punkte des Kreises a, ferner $\binom{O_1}{S_1}\binom{O_2}{S_2}\binom{O_3}{S_3}\binom{b}{S}$ Punkte des Kreises b und $\binom{P_1}{S_1}\binom{P_2}{S_2}\binom{P_3}{S_3}\binom{c}{S}$ Punkte des Kreises c sind, so müssen nach II, 26 $\binom{Q_1}{S_1}\binom{Q_2}{S_2}\binom{Q_3}{S_3}\binom{t}{S}$ Punkte des Orthogonalkreises t der 3 gegebenen grössten Kugelkreise a, b, c sein. Da nach Konstruktion $S_1 Q_1, S_2 Q_2, S_3 Q_3, St$ lauter Kugeldurchmesser sind, so heisst das, der Orthogonalkreis t dreier und somit aller grössten Kugelkreise ist rein imaginär und ein jeder Peripheriepunkt desselben hat die Endpunkte eines Kugeldurchmessers zum Nord- und Südpol. Wie ein Blick auf die Kugel lehrt, genügen unsere Punkte GHJKLM den Involutionen $BF.CE.G^2.K^2$; $CD.AF.H^2.L^2$; $AE.BD.J^2.M^2$; sie sind daher mit den gleich lautenden Punkten von 3. der Konstruktion (V) identisch. Sind N und O die Pole des durch ABC gehenden Kreises, ist P ein beliebiger reeller Punkt desselben, und wird, wie bei II, 24, für das Doppelverhältnis (NPOX) einfach X gesetzt, so geht aus der Figur 5, die durch stereographische Projektion unserer Figur auf der Kugel von N aus auf die durch O gelegte Tangentialebene der Kugel entsteht, leicht hervor, dass sich 4 positive oder negative reelle Zahlen pqrs so bestimmen lassen, dass, wenn $a = eip, b = eiq, c = eir, n = is$ gesetzt wird, die Gleichungen Nr. 1 und Nr. 2 von II, 24 auch für unsere Punkte ABCDEFGH JKLM bestehen. Nach II, 24, Nr. 9 ist $(CLG\alpha) = (bc - a^2) : (a + b)(c - a)$ und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(EMG\alpha) = (a^2 - bc) : (c + a)(a - b)$. Hier ist mithin $(CLG\alpha) = (eiq.eir - e^2ip) : (eip + eiq)(eir - eip) = \sin\frac{1}{2}(q + r - 2p) : 2\cos\frac{1}{2}(p - q)\sin\frac{1}{2}(r - p)$ und $(EMG\alpha) = (e^2ip - eiq.eir) : (eir + eip)(eip - eiq) = \sin\frac{1}{2}(2p - q - r) : 2\cos\frac{1}{2}(r + p)\sin\frac{1}{2}(p - q)$. Demnach sind hier beide Doppelverhältnisse reell. Aus diesem Grunde liegen die Punkte $CLG\alpha$ und $EMG\alpha$ auf je einem (reellen) Kreise. Der Punkt α kann somit hier auf eine sehr einfache Weise erhalten werden, nämlich als der zweite Schnittpunkt der durch CLG und EMG gehenden Kreise. Da das Analoge von den Punkten $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ gilt, so ist damit die Richtigkeit der Operationen 3. der Konstruktion (IV, B) nachgewiesen. Da CF, LH, GK, EB, MJ lauter Kugeldurchmesser sind, so bildet auch der zweite Schnittpunkt α der Kreise CLG und EMG den einen, und der zweite Schnittpunkt δ der Kreise FHK und BJK den anderen Endpunkt eines Kugeldurchmessers. Ebenso sind $\beta\varepsilon$ und $\gamma\zeta$ Kugeldurchmesser. Mithin ist $BC\gamma\varepsilon \curlyvee EF\zeta\beta$. Da ausserdem noch nach II, 24, Nr. 8 $BC\gamma\varepsilon \curlywedge EF\zeta\beta$, so ist $BC\gamma\varepsilon \curlyvee BC\gamma\varepsilon$. Die Punkte $BC\gamma\varepsilon$ sind also sich selbst indirekt kreisverwandt und liegen daher auf einem Kreise. Ebenso liegen die Punkte $EF\zeta\beta$, $CA\alpha\zeta, FD\delta\gamma, AB\beta\delta$ und $DE\varepsilon\alpha$ auf je einem Kreise. Da $AD, BE, CF, \alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\zeta$ durchweg Kugeldurchmesser sind, so sind die Kreise $BC\gamma\varepsilon$ und $EF\zeta\beta$, ferner $CA\alpha\zeta$ und $FD\delta\gamma$ und endlich $AB\beta\delta$ und $DE\varepsilon\alpha$ bezüglich einander gleich und parallel. Nach dem zur Konstruktion (V) gehörigen Beweise berührt das durch $\alpha^2.\delta^2.tu$ definierte Punktfeld u die gesuchten Punktfelder y und z in einem und demselben Punkte γ'. Der dem Punktfelde u entsprechende Kreis u muss mithin nach II, 26 die gesuchten Kreise y und z in einem und demselben Punkte berühren. Dieser Kreis u ist derjenige grösste Kugelkreis, der α und δ zu Polen hat. Sind nämlich UU', VV', WW' drei Durchmesser des letzten Kreises, so ist offenbar $\alpha^2.\delta^2.UU'.VV'.WW'.tu$, und $\binom{\alpha}{\delta}\binom{U'}{U}\binom{V'}{V}\binom{W'}{W}$ sind Punkte des Orthogonalkreises t. Da entsprechenden Nordpolen der beiden Kreise $(\alpha U'V'W't \curlywedge \alpha UVW)$ dieselben Südpole nach II, 26 zuzuordnen sind, so müssen $\binom{\alpha}{\delta}\binom{U}{U}\binom{V}{V}\binom{W}{W}$ oder $\binom{\alpha}{\delta}UVW$ Punkte des zum Felde u gehörigen Kreises u sein. Ebenso zeigt man, dass diejenigen grössten Kreise v und w, die $\beta\varepsilon$ und $\gamma\zeta$ bezüglich zu Polen haben, die gesuchten Kreise zx und xy bezüglich in je einem Punkte berühren. Der gesuchte Kreis x wird mithin von den Kreisen b, c, v, w, die $BD, CF, \varepsilon\beta, \gamma\zeta$ bezüglich zu Polen haben, berührt. Die Pole aller grössten Kreise, die den Kreis x berühren, erzeugen 2 Kreise, und zwar hier offenbar die Kreise $BC\varepsilon\gamma$ und $EF\beta\zeta$. Folglich müssen umgekehrt die Pole aller grössten Kugelkreise, die den Kreis $BC\varepsilon\gamma$ (und den Kreis $EF\beta\zeta$) berühren, 2 Kreise erzeugen, von denen der eine x ist. Demnach ist der durch die Operation 4. der Konstruktion (IV, B) hergestellte Kreis x einer der gesuchten. Da sich auch von den Kreisen y und z dasselbe zeigen lässt, so ist damit die ganze Konstruktion (IV, B) als richtig nachgewiesen.

Determination zur Konstruktion (IV, B). Wie bereits gezeigt wurde, hat die Aufgabe 64 Lösungen. Diese sind hier sämtlich ausnahmslos reell. Dies folgt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einfach daraus, dass bei der Konstruktion (IV, B) alle Gebilde unter allen Umständen reell sind.

Ableitung der Konstruktion (IV, C). Diese Konstruktion ergiebt sich unmittelbar aus der soeben erörterten, weil die beiden betreffenden Figuren durch räumliche Inversion ineinander übergeführt werden können.

Zusätze zu den auf die Konstruktion (IV, C) folgenden Anmerkungen (Fig 5 und 6). Man denke sich die Figur durch räumliche Inversion so auf eine Kugel projiziert, dass a b c sich in grösste Kugelkreise verwandeln. Dann sind $GK, HL, JM, \alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\zeta$ lauter Kugeldurchmesser. Mithin ist $GHJKLM\,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta \curlyvee KLMGHJ\,\delta\varepsilon\zeta\alpha\beta\gamma$. Nach II, 24, Nr. 5 bestehen die Involutionen $GK.HL.JM$ und $\alpha\delta.\beta\varepsilon.\gamma\zeta$. Aus diesen folgt $GHJKLM \curlywedge KLMGHJ$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta \curlywedge \delta\varepsilon\zeta\alpha\beta\gamma$. Demnach ist $GHJKLM \curlyvee GHJKLM$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta \curlyvee \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$. Mithin müssen sowohl die Punkte $GHJKLM$ als auch die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ auf je einem Kreise liegen. Wie leicht zu sehen ist, gilt der folgende Satz: „Der Schnittwinkel zweier Kreise, die bezüglich durch je 3 reelle Punkte SUV und SXY einer Ebene oder Kugel gehen, ist $am(SUXY) - am(SXUV)$ gleich, wenn $(SUXY)$ und $(SXUV)$ Doppelverhältnisse bedeuten und am die Abkürzung für Amplitude ist". Die Kreise a″ und u′ gehen bezüglich durch die Punkte $AD\alpha\delta$ und $AHM\beta\zeta$. Wie aus II, 24, Nr. 1, 2, 9, aus den Formeln für $(\alpha A), (\alpha D)$ etc. beim Beweise von II, 24 und aus dem zur Konstruktion (IV, B) gehörigen Beweise hervorgeht, ist $(ADHM):(AHD\alpha) = (1-n^2) \cdot a(b+c)(c-a):(a-b)(a+cn)(c-an) = 2(1+s^2)\cos\frac{1}{2}(q+r)\sin\frac{1}{2}(r-p):\sin\frac{1}{2}(p-q) \cdot [1+s^2+2s\sin\frac{1}{2}(r-p)]$, also reell. Mithin ist der Schnittwinkel der Kreise a″ und u′ gleich $am(ADHM) - am(AHD\alpha) \equiv 0, \mathrm{mod}\,\pi$. Die Kreise a″ und u′ berühren sich demnach. Dasselbe lässt sich von den Kreispaaren $a''x', b''v', b''y', c''w', c''z'$ nachweisen. Die Kreise u_0 und y_0 haben $BC\gamma\varepsilon$ und $FD\delta\gamma$ bezüglich zu Peripheriepunkten. Nun ist $(\gamma BDF):(\gamma DBC) = (b-c)(c+a):(b+c)(c-a) = tg\frac{1}{2}(q-r) \cdot \cot\frac{1}{2}(r-p)$, also reell. Nach demselben Kriterium berühren sich demnach auch die Kreise u_0 und y_0. Dasselbe gilt offenbar von den Kreispaaren $y_0w_0, w_0x_0, x_0v_0, v_0z_0, z_0u_0$.

Ableitung der besonderen Konstruktion (IV, A) aus der allgemeinen Konstruktion (V) (Fig. 3 und 4). Die Punkte ABCDEF haben nach II, 26 bei beiden Konstruktionen dieselbe Bedeutung, indem sie hier Schnittpunkte des Orthogonalkreises t mit den Kreisen a b c und gleichzeitig Nordpole dieser Punkte und dort Schnittpunkte des Orthogonalfeldes t mit den Feldern a b c sind. Dasselbe gilt von den Punkten GHJKLM. Da nämlich nach 2. der Konstruktion (IV, A) beim Kreise t der Pol von GK der Schnittpunkt der Geraden BF und CE ist, so besteht bei den Peripheriepunkten BCEFGK bekanntlich die Involution $BF.CE.G^2.K^2$, wie es nach 3. der Konstruktion (V) sein soll. Beide Konstruktionen liefern ferner, wie auf gleiche Art bewiesen werden kann, dieselben Punkte HL und JM. Dasselbe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lässt sich von den Punkten $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ behaupten. Hier wie dort sind nämlich zunächst die Punkte $\alpha\delta$ so hergestellt, dass sie den Bedingungen $CLG\alpha \curlywedge EHK\delta$ und $EMG\alpha \curlywedge BJK\delta$ genügen. Bei der Konstruktion (V) ist dies bereits bewiesen worden (vergl. II, 25, Nr. 9). Hier liegen auf der Pascalschen Geraden $A_1 B_1$ des Sechsecks CKLFGH die Punkte $(\overline{CK}, \overline{FG}) = P_1, (\overline{KL}, \overline{GH}) = P_2, (\overline{A_1 B_1}, \overline{GK}) = P$ und A_1 und auf der Pascalschen Geraden $C_1 A_1$ des Sechsecks BMKEJG die Punkte $(\overline{EK}, \overline{BG}) = Q_1$, $(\overline{MK}, \overline{GJ}) = Q_2, (\overline{C_1 A_1}, \overline{GK}) = Q$ und A_1. Nun sind (Fig. 3) die Peripheriepunkte $CLG\alpha$ den Strahlen des Büschels $K(CLG\alpha)$ mit dem Scheitel K projektiv, diese den Punkten $P_1 P_2 P A_1$ der Geraden $A_1 B_1$, diese den Strahlen des Büschels $G(FHK\delta)$ mit dem Scheitel G und diese den Peripheriepunkten $FHK\delta$. Mithin ist $CLG\alpha \curlywedge FHK\delta$. Ferner ist hier $EMG\alpha \curlywedge K(EMG\alpha) \curlywedge Q_1 Q_2 Q A_1 \curlywedge G(BJK\delta) \curlywedge BJK\delta$. In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die nach beiden Arten hergestellten Punkte $\beta\varepsilon$ und $\gamma\zeta$ gleichfalls übereinstimmen. Nach II, 24, Nr. 8 ist $BC\gamma\varepsilon \curlywedge EF\zeta\beta$. Demnach liegen die Punkte $(\overline{EC}, \overline{BF}), (\overline{E\gamma}, \overline{B\zeta}), (\overline{F\gamma}, \overline{C\zeta}), (\overline{E\varepsilon}, \overline{B\beta})$, $(\overline{F\varepsilon}, \overline{C\beta}), (\overline{\beta\gamma}, \overline{\varepsilon\zeta})$ auf einer Geraden, und zwar auf der Pascalschen Geraden $B'C'$ des Sechsecks $CE\gamma FB\zeta$. Da der Kreis t die Kreise b und c in BE und CF rechtwinklig schneidet, so ist $(\overline{EC}, \overline{BF})$ ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise bc. Sind ferner u, v, w diejenigen Kreise (Fig. 4), die den Kreis t bezüglich in den Punktepaaren $\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\zeta$ rechtwinklig schneiden, so sind ebenso $(\overline{E\gamma}, \overline{B\zeta}), (\overline{F\gamma}, \overline{C\zeta}), (\overline{E\varepsilon}, \overline{B\beta}), (\overline{F\varepsilon}, \overline{C\beta})$, $(\overline{\beta\gamma}, \overline{\varepsilon\zeta})$ bezüglich bei den Kreispaaren bw, cw, bv, cv, vw Ähnlichkeitspunkte. Mithin ist $B'C'$ eine gemeinschaftliche Ähnlichkeitsaxe der 4 Kreise bcvw. Da diese 4 Kreise ausserdem noch einen gemeinsamen Orthogonalkreis haben, nämlich den Kreis t, so werden dieselben sämtlich von 2 Kreisen x und x′ berührt. Ebenso werden die 4 Kreise cawu von gewissen 2 Kreisen y und y′ und die 4 Kreise abuv von 2 Kreisen z und z′ berührt. Die Kreise xyz werden in 6. und 7. der Konstruktion (IV, A) dadurch hergestellt, dass das Taktionsproblem des Apollonius dabei dreimal, und zwar auf die gebräuchliche Weise gelöst wird. Beim Kreise a ist nämlich der Pol der Geraden AD das Centrum T des Kreises t, weil die Kreise a und t einander in den Punkten A und D rechtwinklig schneiden. Beim Kreise a geht mithin die Polare des auf AD liegenden Punktes K′ durch T. Nach Konstruktion sind K′ und K″ 2 konjugierte Punkte des Kreises a. Demnach ist jene Polare die Gerade TK″. Da K′ ein Punkt der Geraden $A'B'$ ist, so geht TK″ auch noch durch den Pol der Geraden $A'B'$ beim Kreise a. Die Gerade TK″ ist somit die Verbindungsgerade des Potenzpunktes T der 4 Kreise abuv mit dem zum Kreise a gehörigen Pole der Ähnlichkeitsaxe $A'B'$ dieser Kreise; ihre Schnittpunkte $\varkappa\varkappa'$ mit a sind also, wie bekannt, Berührungspunkte des Kreises a mit den gesuchten Kreisen z und z′. Da sich dasselbe von den Punkten $\lambda\lambda'\mu\mu'\rho\rho'\sigma\sigma'\tau\tau'$ beweisen lässt, so berühren die auf die angegebene Weise konstruierten Kreise bezüglich die Kreise bcvw, cawu, abuv. Den Kreisen abcuvwt der Konstruktion (IV, A) entsprechen offenbar die durch $A^2.D^2.at, B^2.E^2.bt, C^2.F^2.ct, \alpha^2.\delta^2.ut, \beta^2.\varepsilon^2.vt, \gamma^2.\zeta^2.wt$ definierten kohärenten Felder abcuvwt der Konstruktion (V). Von letzteren wurde bereits

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bewiesen, dass die Felder $bcvw, cawu, abuv$ bezüglich 3 Felderpaare xx', yy', zz' berühren. Mithin müssen nach II, 26 diesen letzteren Feldern Kreise entsprechen, die die Kreise $bcvw, cawu, abuv$ bezüglich berühren, also die obigen Kreise xx', yy', zz'. Die Felder xyz berühren sich aber paarweise, wie oben gezeigt wurde; somit berühren einander nach II, 26 auch die ihnen entsprechenden Kreise paarweise. Dabei bilden die Kreise keines der 4 Tripel xyz, ayz, bzx, cxy ein Büschel, da dasselbe von den entsprechenden Feldern gilt.

Determination. Die Gesamtanzahl der reellen und imaginären Lösungen ist bereits oben bestimmt worden. Hier handelt es sich nur noch um die Scheidung der reellen von den imaginären Lösungen. Nach Voraussetzung sind hier $ABCDEF$ reelle Punkte des Orthogonalkreises t. Zu einer reellen Lösung xyz gehören reelle Kreise uvw, mithin auch reelle auf dem Kreise t liegende Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$. Aus diesem Grunde und wegen der Beziehung $BC\gamma\varepsilon \curlywedge BCFG$ (II, 24, Nr. 8) ist auch G ein reeller Punkt des Kreises t. Dasselbe gilt von den Punkten $HJKLM$. Die 3 zu t rechtwinkligen und bezüglich durch die Punktepaare GK, HL, JM gehenden Kreise def sind mithin bei einer reellen Lösung selbst reell. Es sind das gleichzeitig 3 ein Büschel bildende Potenzkreise der Kreispaare bc, ca, ab. Nach II, 24, Nr. 8 ist $BC\gamma\varepsilon \curlywedge EF\zeta\beta$. Die 4 zu t rechtwinkligen und bezüglich durch die Punktepaare $BE, CF, \gamma\zeta, \varepsilon\beta$ gehenden Kreise b, c, w, v umhüllen offenbar dann und nur dann einen reellen, zur Lösung gehörigen Kreis x, wenn die projektiven Punktreihen $BC\gamma\varepsilon \curlywedge EF\zeta\beta$ gleichlaufend sind. Sind $BC\gamma$ und $EF\zeta$ 6 reelle Punkte einer Geraden, so sind die durch $BC\gamma$ und $EF\zeta$ bestimmten Richtungen gleich oder entgegengesetzt, je nachdem bei Anwendung Cartesischer Koordinaten der Ausdruck $\triangle = (B-C)(C-\gamma)(F-\zeta):(E-F)(\zeta-E)(\gamma-B)$ positiv oder negativ ist. Augenscheinlich gilt dasselbe Kriterium auch dann noch, wenn die Koordinaten Doppelverhältnisse mit reellen Grundpunkten NOP auf derselben Geraden sind, wenn also X an Stelle von $(NPOX)$ steht. Dasselbe Kriterium ist endlich auch dann noch anwendbar, wenn $BC\gamma EF\zeta NOP$ reelle Punkte eines Kreises t sind. Der Sachverhalt ist jedoch ein anderer, sobald nicht alle diese Punkte auf einem Kreise liegen, weil dann jener Ausdruck $\triangle$ im allgemeinen imaginär ist. Nach Voraussetzung sollen nun die reellen Punkte $BC\gamma EF\zeta P$ auf einem Kreise mit dem Centrum O liegen; während N der unendlich entfernte Punkt der Geraden OP sein soll. Auf der Kreislinie t sei ein reeller Punkt S so gewählt, dass $\sphericalangle SOP = 90°$. Von S aus möge nun ein veränderlicher reeller Punkt x der Kreislinie t durch einen veränderlichen Strahl auf die Gerade OP als Punkt y projiziert werden. Die von x und y erzeugten Punktreihen sind offenbar projektiv. Wird auch hier x und y kurz bezüglich für $(NPOx)$ und $(NPOy)$ gesetzt, so ist, falls man den zweiten Schnittpunkt der Geraden OP und des Kreises t mit Q bezeichnet, $(PQSx) = (PQNy)$, oder, da $P=1, Q=-1, S=i, N=\infty$ ist, $(1, -1, i, x) = (1, -1, \infty, y)$, oder $xy + ix - iy - 1 = 0$, oder $y = (1 - ix):(x - i)$. Die den Peripheriepunkten $BC\gamma EF\zeta$ hierbei auf der Geraden OP entsprechenden Punkte seien $B'C'\gamma'E'F'\zeta'$. Dann ist $\triangle' = (B'-C')$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(C'-\gamma')(F'-\zeta'):(E'-F')(\zeta'-E')(\gamma'-B')=(B-C)(C-\gamma)(F-\zeta)(E-i)^2:(E-F).(\zeta-E)(\gamma-B)(C-i)^2$, oder, falls man die bei dem zu II, 24 gehörigen Beweise entwickelten Formeln anwendet, $\triangle'=(1-n^2)c^2(a+cn)(c-an)(b^2n^2-i)^2:n^2(b+an).(a-bn)(c+bn)(b-cn)(c^2-i)^2$, oder, da nach II, 24, Nr. 9 $(c+bn)(b-cn)=bc(1-n^2)(BFCG)$, $(a+cn)(c-an)=ca(1-n^2)(CDAH)$, $(b+an)(a-bn)=ab(1-n^2)(AEBJ)$ ist, $\triangle'=(CDAH)(AJBE)(BGCF)c^2(b^2n^2-i)^2:n^2b^2(c^2-i)^2$. Das von den Potenzkreisen def gebildete Büschel kann nun entweder 2 imaginäre oder 2 getrennte reelle oder 2 auf einander fallende Grundpunkte haben. Liegt der zweite Fall vor, und verwandelt man die ganze Figur um den einen Grundpunkt durch Inversion in eine zweite, so gehen die Potenzkreise def in Gerade, die Kreise abc in 3 unter sich gleiche Kreise und t in einen Kreis mit dem Centrum O über. Bei der neuen Figur ist man darum berechtigt, im Sinne von II, 24 $a=e^{i\alpha}$, $b=e^{i\beta}$, $c=e^{i\gamma}$, $n=e^{i\nu}$ zu setzen, wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist und $\alpha\beta\gamma\nu$ reelle Zahlen sind. Dasselbe gilt auch von der ursprünglichen Figur, da durch Inversion an Doppelverhältnissen nichts geändert wird. Dann ist aber $c(b^2n^2-i):nb(c^2-i)=e^{i\gamma}[e^{2i(\beta+\nu)}-e^{i\pi}]:e^{i(\beta+\nu)}[e^{2i\gamma}-e^{i\pi}]=[e^{i(\beta+\nu-\frac{\pi}{2})}-e^{-i(\beta+\nu-\frac{\pi}{2})}]:[e^{i(\gamma-\frac{\pi}{2})}-e^{-i(\gamma-\frac{\pi}{2})}]=\sin(\beta+\nu-\frac{\pi}{2}):\sin(\gamma-\frac{\pi}{2})$, also reell. Mithin ist $\triangle'$ positiv oder negativ, je nachdem (CDAH)(AJBE)(BGCF) oder (CDAH)(AEBJ)(BFCG) positiv oder negativ ist. Sind die Grundpunkte des Büschels def imaginär, so wird auf der Kreislinie t das Punktepaar GK durch das Punktepaar HL nicht getrennt. Mithin hat die Involution GK.HL 2 reelle auf t gelegene Doppelpunkte. Nach II, 24, Nr. 5 ist aber $N^2.O^2.GK.HL.JM$. Demnach sind hier die Punkte N und O reell und auf t gelegen. Lässt man, was erlaubt ist, den Einheitspunkt P auf A fallen, so sind die Doppelverhältnisse (NPOA), (NPOB), (NPOC) etc., die kurz mit A, B, C etc. bezeichnet wurden, durchweg reell, und ebenso die Zahlen abcn im Sinne von II, 24, wie aus den Gleichungen $A=a^2=1$, $B=b^2$, $C=c^2$, $D=a^2n^2$, $E=b^2n^2$, $F=c^2n^2$, $K=nbc$, $L=nca$, $M=nab$ hervorgeht. Somit gilt in diesem Falle nach dem Obigen das Kriterium: Der Kreis x ist hier dann und nur dann reell, wenn $\triangle=(B-C)(C-\gamma)(F-\zeta):(E-F)(\zeta-E)(\gamma-B)=(1-n^2)\cdot c^2(a+cn)(c-an):n^2(b+an)(a-bn)(c+bn)(b-cn)=(CDAH)(AJBE)(BGCF)c^2:n^2b^2$ positiv ist. Da hier aber $(c:nb)^2$ stets positiv ist, so ist mithin der Kreis x dann reell, wenn (CDAH)(AEBJ)(BFCG) positiv ist. Das Kriterium ist demnach für diesen Fall das nämliche. Berühren die Potenzkreise def einander, so ergiebt sich auch für diesen Fall (vergl. II, 25), der den Grenzübergang zwischen den beiden behandelten bildet, dasselbe Kriterium. Soll ferner der gesuchte Kreis y reell sein, so muss (AEBJ)(BFCG)(CDAH) positiv sein. Diese Bedingung erhält man aus der vorigen einfach durch cyklisches Vertauschen; es ist dies aber dieselbe Bedingung. Ebenso ergiebt sich für die Realität von z keine neue Bedingung.

Soll also hier eine Lösung xyz aus lauter reellen Kreisen bestehen, so muss jedes der 3 Doppelverhältnisse (BFCG), (CDAH), (AEBJ) reell und das Produkt derselben positiv sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Haben die Kreise bc 2 von einander getrennte reelle Punkte gemein, so ist, wie eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, das Doppelverhältnis (BFCG) unter allen Umständen positiv, mag der eine oder der andere der beiden Potenzkreise von bc gewählt, und mögen die Schnittpunkte eines jeden dieser Potenzkreise und des Kreises t beliebig mit GK oder KG bezeichnet werden.

Haben die Kreise bc keinen reellen Punkt gemein, so darf man, wenn man zu reellen Lösungen gelangen will, nur den reellen Potenzkreis d derselben nehmen. Sind GK die Schnittpunkte von d und t, so ist bei einer gewissen Bezeichnungsweise derselben (BFCG) positiv und bei der entgegengesetzten negativ.

Berühren sich endlich die Kreise bc, so hat man, um zu einer reellen Lösung zu gelangen, den nicht in einen Nullkreis ausgearteten Potenzkreis von bc zu wählen, und K mit C identisch sein zu lassen. Dann ist (BCFG) $= -1$ und (BFCG) $= 2$, also positiv.

Analoges gilt von den Kreispaaren ca und ab und den dazu gehörigen Doppelverhältnissen (CDAH) und (AEBJ).

Hieraus ergiebt sich in aller Vollständigkeit die gewünschte Determination. Es sei noch an dieser Stelle daran erinnert, dass hier nach Voraussetzung die 3 gegebenen Kreise abc reell sind und einen reellen Orthogonalkreis t haben. Den eine Lösung bildenden Kreisen xyz kommt die Eigenschaft zu, dass unter den 6 Kreisen abcxyz keine 3 ein Büschel bilden.

Bei dieser Aufgabe sind von den 64 Lösungen

1. alle 64 reell, wenn von den gegebenen 3 Kreisen jeder die beiden übrigen in reellen Punkten schneidet;
2. nur 16 reell, wenn einer der gegebenen 3 Kreise die beiden übrigen in reellen Punkten schneidet, diese selbst aber keinen reellen Punkt gemein haben;
3. nur 8 reell, wenn einer der Kreise mit keinem der beiden übrigen einen reellen Punkt gemein hat, diese selbst aber einander in reellen Punkten schneiden;
4. nur 8 reell, wenn keiner der 3 Kreise mit den beiden übrigen einen reellen Punkt gemein hat, und wenn ausserdem durch keine dieser 3 Kreislinien die beiden übrigen von einander getrennt werden;
5. alle 64 imaginär, wenn keiner der 3 Kreise mit den beiden übrigen einen reellen Punkt gemein hat, und wenn ausserdem durch eine dieser 3 Kreislinien die beiden übrigen von einander getrennt werden.

   Berühren bei den 3 gegebenen Kreisen zwei einander, so sind von den 16 Lösungen der Aufgabe

6. alle 16 reell, wenn der dritte Kreis jeden der beiden ersten in reellen Punkten schneidet;
7. nur 4 reell, wenn der dritte Kreis den ersten in reellen und den zweiten in imaginären Punkten schneidet;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. nur 4 reell, wenn der dritte Kreis mit keinem der beiden ersten einen reellen Punkt gemein hat, und wenn ausserdem durch keine der 3 Kreislinien die beiden übrigen von einander getrennt werden.
9. Alle 16 imaginär, wenn der dritte Kreis mit keinem der beiden ersten einen reellen Punkt gemein hat, und wenn ausserdem durch eine der 3 Kreislinien die beiden übrigen von einander getrennt werden.

Berührt von den 3 gegebenen Kreisen einer die beiden übrigen, so sind von den 4 Lösungen der Aufgabe

10. alle 4 reell, wenn die beiden letzten Kreise einander in reellen Punkten schneiden;
11. nur 2 reell, wenn die beiden letzten Kreise keinen reellen Punkt gemein haben, und wenn ausserdem durch die erste Kreislinie die beiden letzten von einander nicht getrennt werden;
12. alle 4 imaginär, wenn die beiden letzten Kreise keinen reellen Punkt gemein haben, und wenn ausserdem durch die erste Kreislinie die beiden letzten von einander getrennt werden.

Berührt jeder der 3 gegebenen Kreise die beiden übrigen, so sind von den 2 Lösungen der Aufgabe

13. beide reell.

Bequemer ist folgende Gedächtnisregel. Bei dem in obiger Fassung verallgemeinerten Malfattischen Probleme ist die Anzahl der reellen Lösungen 2^n mal grösser, als die der reellen Lösung beim Apollonischen Taktionsproblem, wenn n angiebt, wie oft je 2 unter den 3 gegebenen Kreisen 2 getrennte, reelle Punkte gemein haben. Dabei darf hier konsequenter Weise auch beim Apollonischen Taktionsproblem eine Lösung dann nicht mitgezählt werden, wenn sie eine Lösung besonderer Art ist, wenn der die Lösung bildende Kreis mit 2 der gegebenen Kreise einem Büschel angehört.

Zusätze zu den auf die Konstruktion (IV, A) folgenden Anmerkungen. Die Kreise d e f bilden wegen der Involution G K . H L . J M (II, 24, Nr. 5) ein Büschel. Da B C F K $\gamma \curlywedge$ B C G E ε (II, 24, Nr. 7), so ist B C die Pascalsche Gerade des Sechsecks γ E F ε K g.

Wegen der Involution $\alpha\beta . \gamma\delta . \varepsilon\zeta$ (II, 24, Nr. 5) gehen die Geraden $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\zeta$ durch einen Punkt und bilden die Kreise u v w ein Büschel. Aus $A_1 D_1$ A M H $\beta\zeta \curlywedge A_1 D_1$ D J L $\varepsilon\gamma$; $A_4^2 . D_4^2 . AD . \alpha\delta$ und $AD . A_1 D_1 . A_4 D_4$ (Seite 20) folgt: die Pascalsche Gerade $A_1 D_1 = B_1 C_1$ des Sechsecks A L M D H J, die gleichzeitig die Ähnlichkeitsaxe der Kreise a e f v w ist, die Polare $A_4 D_4$ des Punktes $(\overline{AD}, \overline{\alpha\delta})$ beim Kreise t und die Gerade A D gehen durch einen Punkt, oder die Schnittpunkte $(\overline{AD}, \overline{\alpha\delta})$ und $(\overline{AD}, \overline{B_1 C_1})$ sind konjugierte Punkte des Kreises t, oder die Punkte A D werden von den Geraden $\alpha\delta$ und $B_1 C_1$ harmonisch getrennt. Da die Kreise y und z den Kreis u in einem und demselben Punkte α' berühren, so liegen beim

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreise u die Pole der Ähnlichkeitsaxen A′ B′ und A′ C′ der Kreise a b u v und a c u w mit dem Mittelpunkte T des Kreises t auf einer Geraden. Die 3 Geraden A′ B′, A′ C′ und $\alpha\beta$ gehen daher durch einen Punkt, oder die Punkte A′ $\alpha\beta$ liegen auf einer Geraden. Weiter folgt noch daraus, dass beim Kreise u die Polare von A′ durch den Berührungspunkt α' geht.

Ableitung der Konstruktionen (I), (II) und (III). Bei der Konstruktion (IV, B) lasse man den Durchmessern A D, B E, C F, G K, H L, J M, $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\zeta$ der Reihe nach diejenigen grössten Kugelkreise a, b, c, d, e, f, u, v, w entsprechen, auf deren Ebenen die betreffenden Durchmesser senkrecht stehen, und bezeichne die den Polen A, B, C, G, H, J, α, β, γ bezüglich zugewandten Seiten dieser Kreise mit a′, b′, c′, d′, e′, f′, u′, v′, w′, und die ihnen abgewandten mit a″, b″, c″, d″, e″, f″, u″, v″, w″, (Vergl. Seite 5 und 6). Dann stellt sich heraus, dass die zu den Konstruktionen (IV, B) und (II) gehörigen Figuren polare Gebilde sind. Bei der neuen Figur hat man nämlich nach 2. der Konstruktion (IV, B) die zu b′ c′, c′ a′, a′ b′ gehörigen Potenzkreise d, e, f herzustellen, nach 3. zunächst diejenigen 6 Kreise μ_1, μ_2, μ_3, μ_1', μ_2', μ_3', zu zeichnen, die bezüglich die Kreise a′ e′ f″, b′ f′ d″, c′ d′ e″, a″ e″ f′, b″ f″ d′, c″ d″ e′ berühren und dann die zu t rechtwinkligen Kreise festzulegen, die auf den Seiten u′, v′, w′ von den Kreispaaren $\mu_2'\,\mu_3$, $\mu_3'\,\mu_1$, $\mu_1'\,\mu_2$ und auf den Seiten u″, v″, w″ von den Kreispaaren $\mu_2\,\mu_3'$, $\mu_3\,\mu_1'$, $\mu_1\,\mu_2'$ bezüglich berührt werden. Da die Kreise μ_1 und μ_1', μ_2 und μ_2', μ_3 und μ_3' gleich grosse parallele Kugelkreise sind, also in Bezug auf t invers sind, so können die Kreise μ_1', μ_2', μ_3' entbehrt werden, nur muss dann die Konstruktion eine kleine Abänderung erfahren, wie sie oben thatsächlich durchgeführt worden ist. Nach 4. der Konstruktion (IV, B) hat man endlich die Berührungskreise x, y, z bezüglich von b′ c′ w′ v″, c′ a′ u′ w″, a′ b′ v′ u″ zu zeichnen. Die bei den Konstruktionen (IV, B) und (II) vorkommenden Figuren können mithin, falls der Orthogonalkreis t von a b c imaginär ist, als Polarfiguren gelten.

Bei der Konstruktion (IV, A) lasse man den Punktepaaren A D, B E, C F, G K, H L, J M, $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\zeta$ der Reihe nach diejenigen zu t rechtwinkligen Kreise a, b, c, d, e, f, u, v, w entsprechen, die durch die entsprechenden Punktepaare gehen. Diejenigen Seiten dieser Kreise, die einem nach einander auf den einzelnen Kreislinien befindlichen Figürchen jedesmal zur Linken liegen, wenn es die Punkte A, B, C, G, H, J, α, β, γ vor sich (nicht im Rücken) hat, bezeichne man mit a′, b′, c′, d′, e′, f′, u′, v′, w′, und die anderen Seiten mit a″, b″, c″, d″, e″, f″, u″, v″, w″ (vergl. S. 6). Die neue sich hieraus ergebende Konstruktion ist dann wörtlich die oben angegebene, also die Konstruktion (II) bei r e e l l e m t. Es sind nämlich nach 2. der Konstruktion (IV, A) wieder die Potenzkreise d, e, f von b′ c′, c′ a′, a′ b′ herzustellen. Nach 3. und 4. derselben Konstruktion sind die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ so gezeichnet, dass A H M $\beta\zeta\measuredangle$ D L J $\varepsilon\gamma$, B J K $\gamma\delta\measuredangle$ E M G $\zeta\alpha$, C G L $\alpha\varepsilon\measuredangle$ F K H $\delta\beta$ (II, 24). Demnach werden nach II, 21 die Kreise a′ e′ f″ v′ w″, b f′ d″ w′ u″, c′ d′ e″ u′ v″ bezüglich von 3 Kreisen μ_1, μ_2, μ_3 berührt. Die Kreise u v z und somit auch die Kreise x y z sind also hiernach auf dieselbe Art hergestellt wie oben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

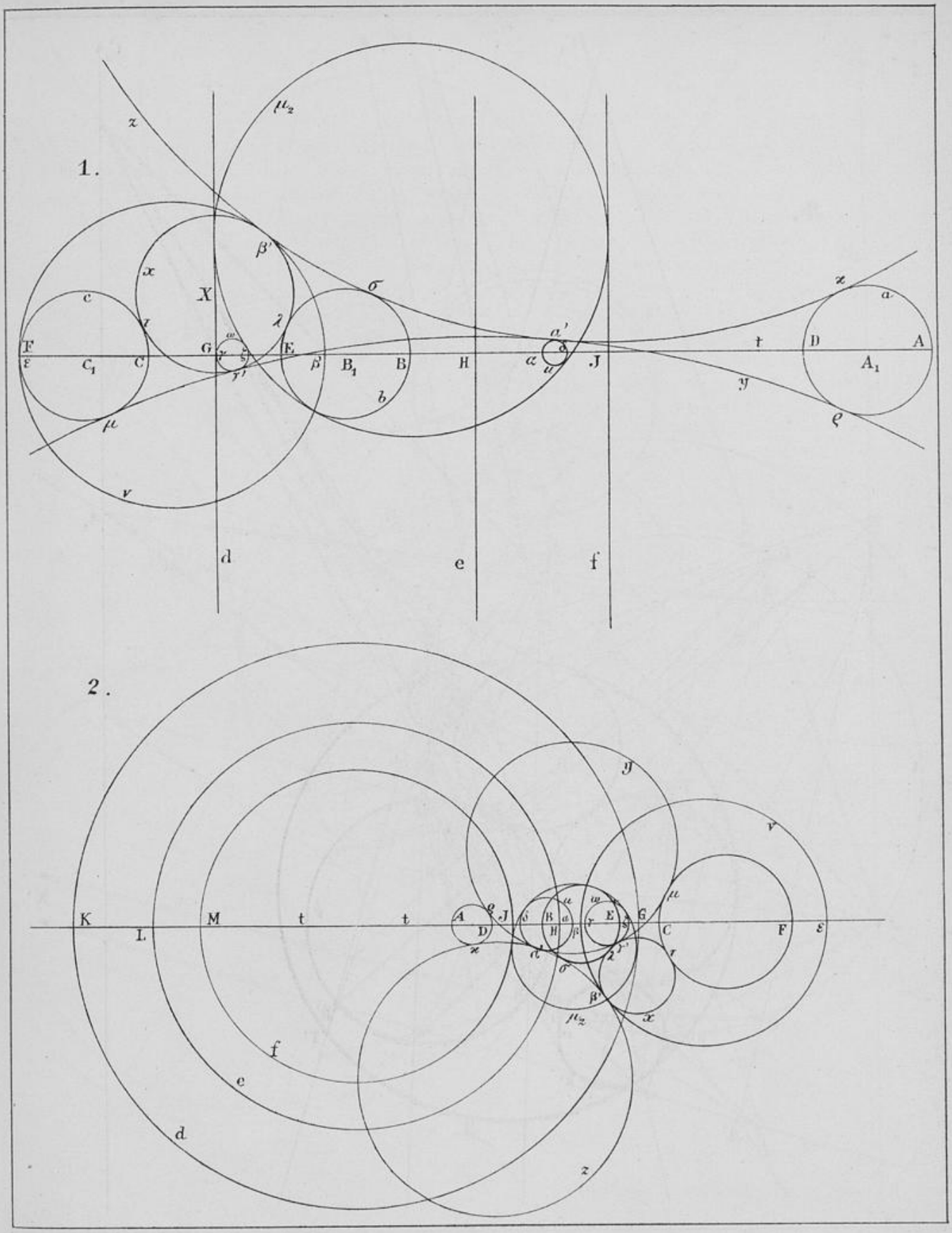
Damit ist die Konstruktion (II) für jeden Fall, mag der Orthogonalkreis t von a b c reell oder imaginär sein, als richtig bewiesen.

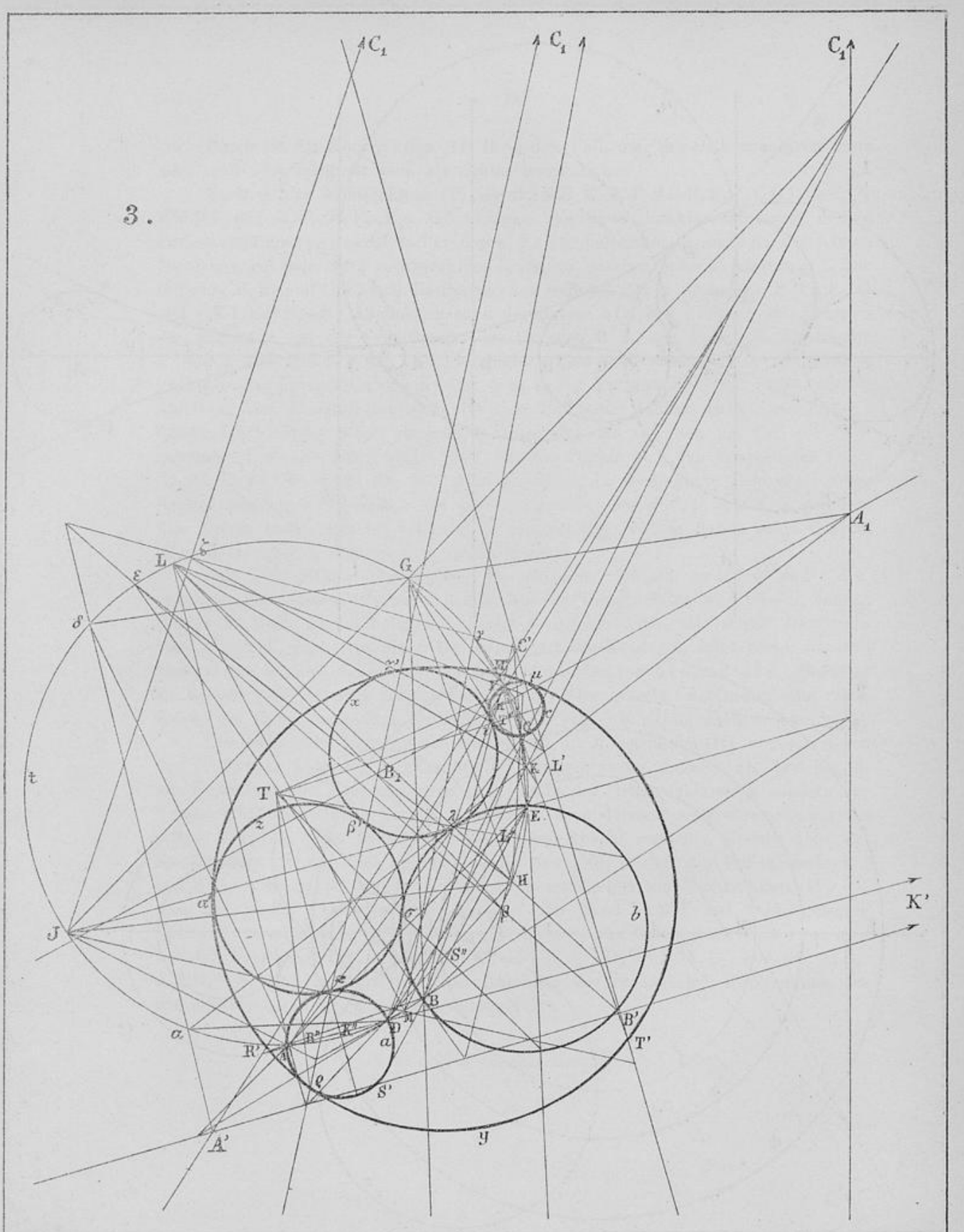
Nach 4. der Konstruktion (V) ist $B J K B_1 E_1 \measuredangle E M G B_1 E_1$; $C G L C_1 F_1 \measuredangle F K H C_1 F_1$; $B_1 E_1 . C_1 F_1 . K\alpha . G\delta$. Liegen alle diese Punkte auf einem reellen Orthogonalkreise t, und ist t_1 der durch die Doppelpunkte G_1 und K_1 der letzten Involution gehende, zu t rechtwinklige Kreis, so besagen jene Relationen: 1. Die Geraden $B_1 E_1$ und $C_1 F_1$ sind die Pascalschen Geraden der 2 Sechsecke B M K E J G und C K L F G H oder Ähnlichkeitsaxen der Kreise b f d und c d e. 2. Das Centrum des Kreises t_1 ist der Schnittpunkt der Geraden $B_1 E_1$ und $C_1 F_1$. 3. Die Punkte K und α und ferner G und δ sind konjugierte Pole des Kreises t_1, oder der Kreis u ist das inverse Spiegelbild des Kreises d in Bezug auf den Kreis t_1. Damit ist die Ableitung der Konstruktion (III) für den Fall eines reellen Orthogonalkreises t durchgeführt. Jeder Kreis desjenigen Büschels, das von den zu f′ d″, d″ b′, b′ f″ gehörigen Potenzkreisen gebildet wird, hat die Punkte $B_1 E_1$ zu konjugierten Polen (II, 23, II, 24, Nr. 5 und II, 18). Ebenso sind $C_1 F_1$ konjugierte Pole eines jeden Kreises desjenigen Büschels, dem die Potenzkreise von d′ e″, e″ c′, c′ d′ angehören. Alle Kreise beider Büschel schneidet t rechtwinklig. Mithin haben beide Büschel einen Kreis gemein, nämlich den obigen Kreis t_1.

Sind a b c grösste Kugelkreise, so schneiden sich die zu b′ f′ d″ und c′ d′ e″ gehörigen Potenzkreise offenbar in den sphärischen Mittelpunkten der Kreise μ_2 und μ_3. Ferner ist dann augenscheinlich t_1 derjenige grösste Kreis, der durch die Centra von μ_2 und μ_3 geht. Aus dieser Herstellungsart des Kreises t_1 folgt leicht die oben angegebene, nämlich die mittelst der Ähnlichkeitsaxen von b f d und c d e. Damit ist die Konstruktion (II) auch für den Fall, in dem a b c grösste Kugelkreise oder reelle Kreise mit einem imaginären Orthogonalkreise sind, als richtig nachgewiesen.

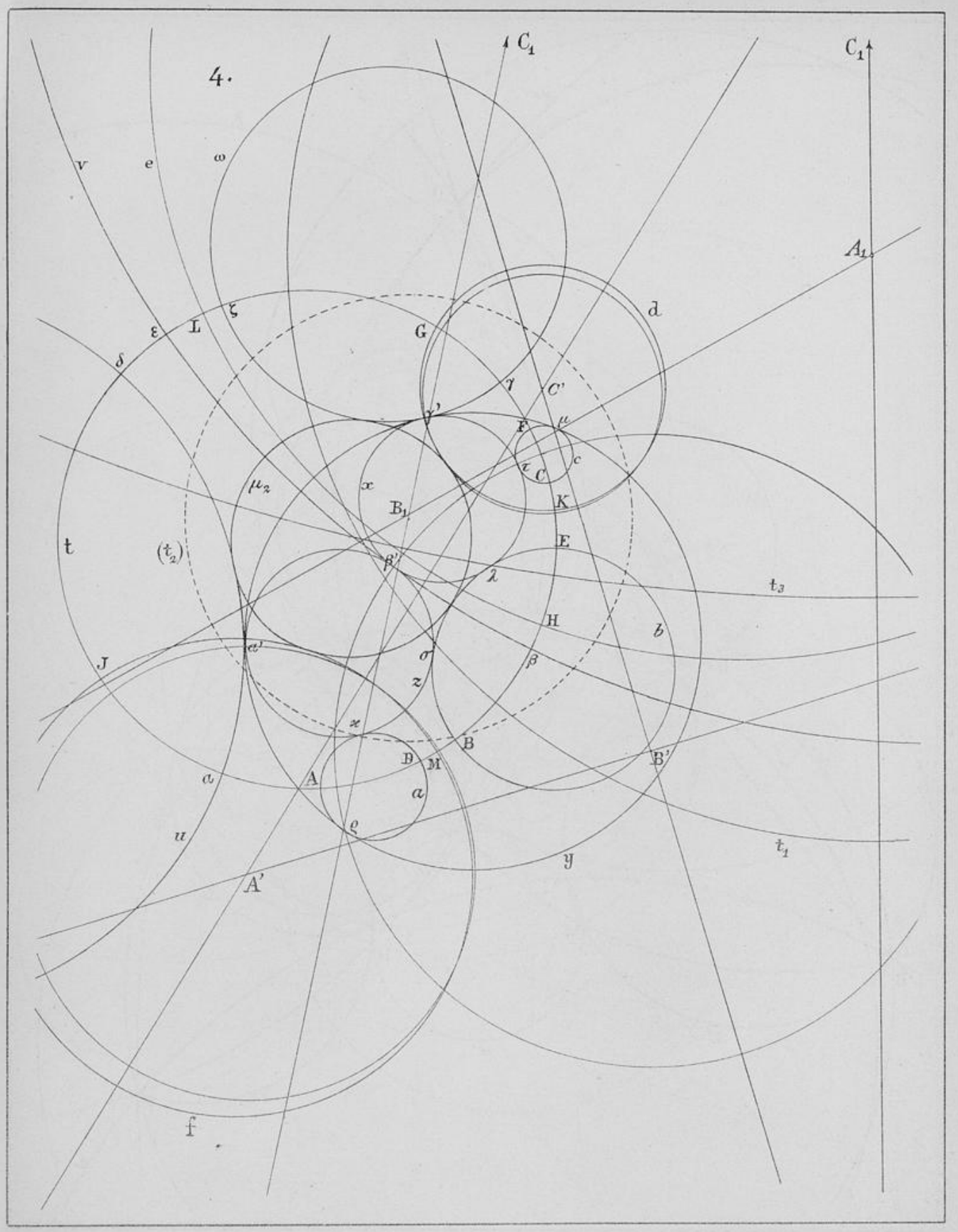
Die Steinersche Konstruktion weicht von der Konstruktion (II), abgesehen von den bei Steiner fehlenden Wegangaben bei Verzweigungen, dadurch ab, dass bei ihr zur Herstellung des Kreises $u \equiv (b_1 B_1 \beta_1)$ nicht der Orthogonalkreis t, sondern der Umstand zur Verwendung kommt, dass der Kreis u durch den Berührungspunkt der Kreise a und μ_1 geht. Diese letzte Eigenschaft kommt auch den Kreisen $a u \mu_1$ der Konstruktion (II) zu. Dies ergiebt sich für den Fall, in dem der Orthogonalkreis t von a b c imaginär ist, aus dem Satze [s. Bemerkungen zur Konstruktion (IV, C)], dass der durch $A D \alpha \delta$ gehende Kreis a″ die durch A M H und D J L gelegten Kreise u′ und x′ berührt, und für den Fall eines reellen Orthogonalkreises t von a b c aus den Beziehungen $A_1 D_1 A M H \measuredangle A_1 D_1 D J L$, $A_3^2 . D_3^2 . A D . A_1 D_1$, $A D . \alpha \delta . A_3 D_3 . A_4^2 . D_4^2$ (S. 20). Damit ist auch die Ableitung der Steinerschen Konstruktion aus der allgemeinen Konstruktion (V) durchgeführt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

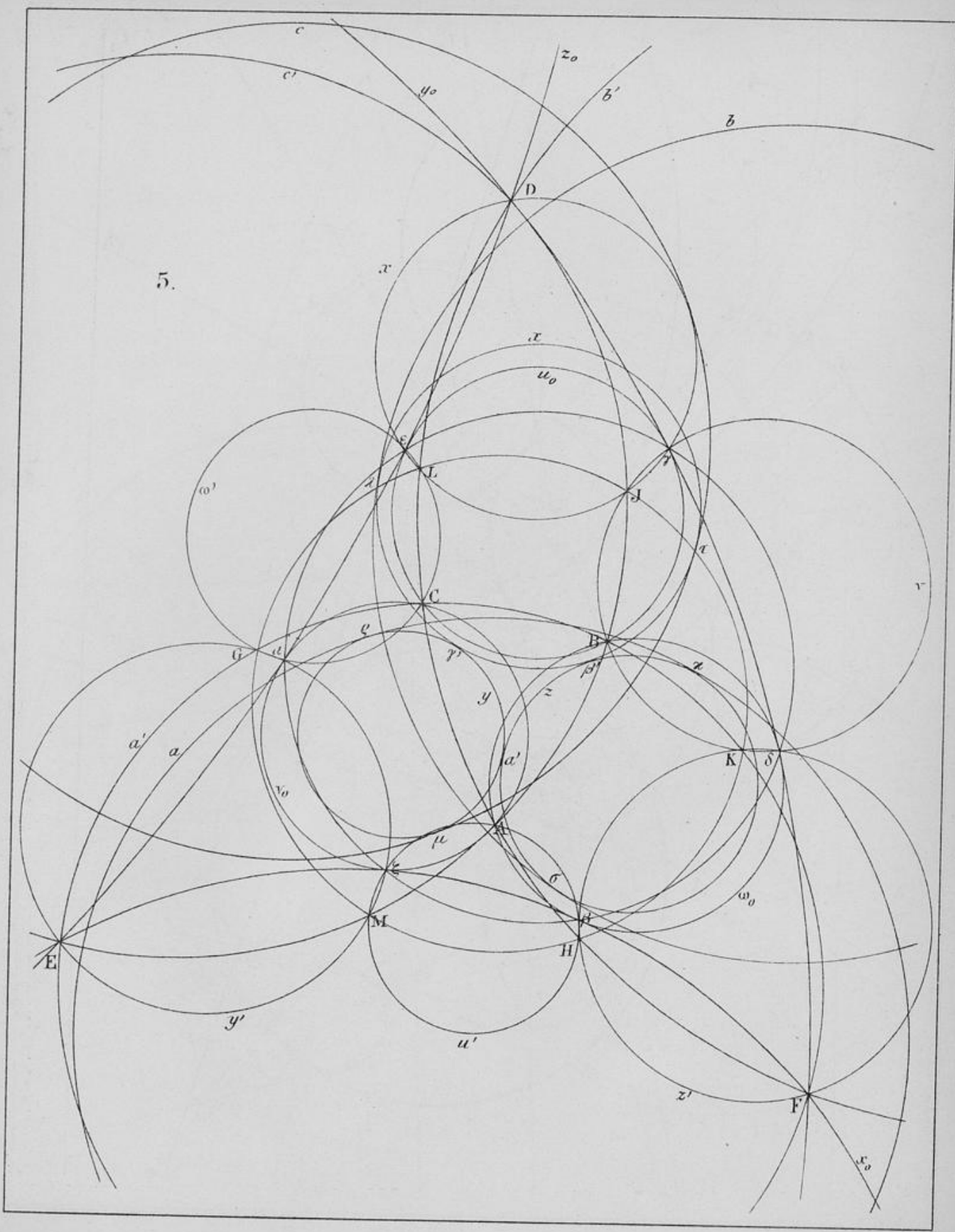

1.
2.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

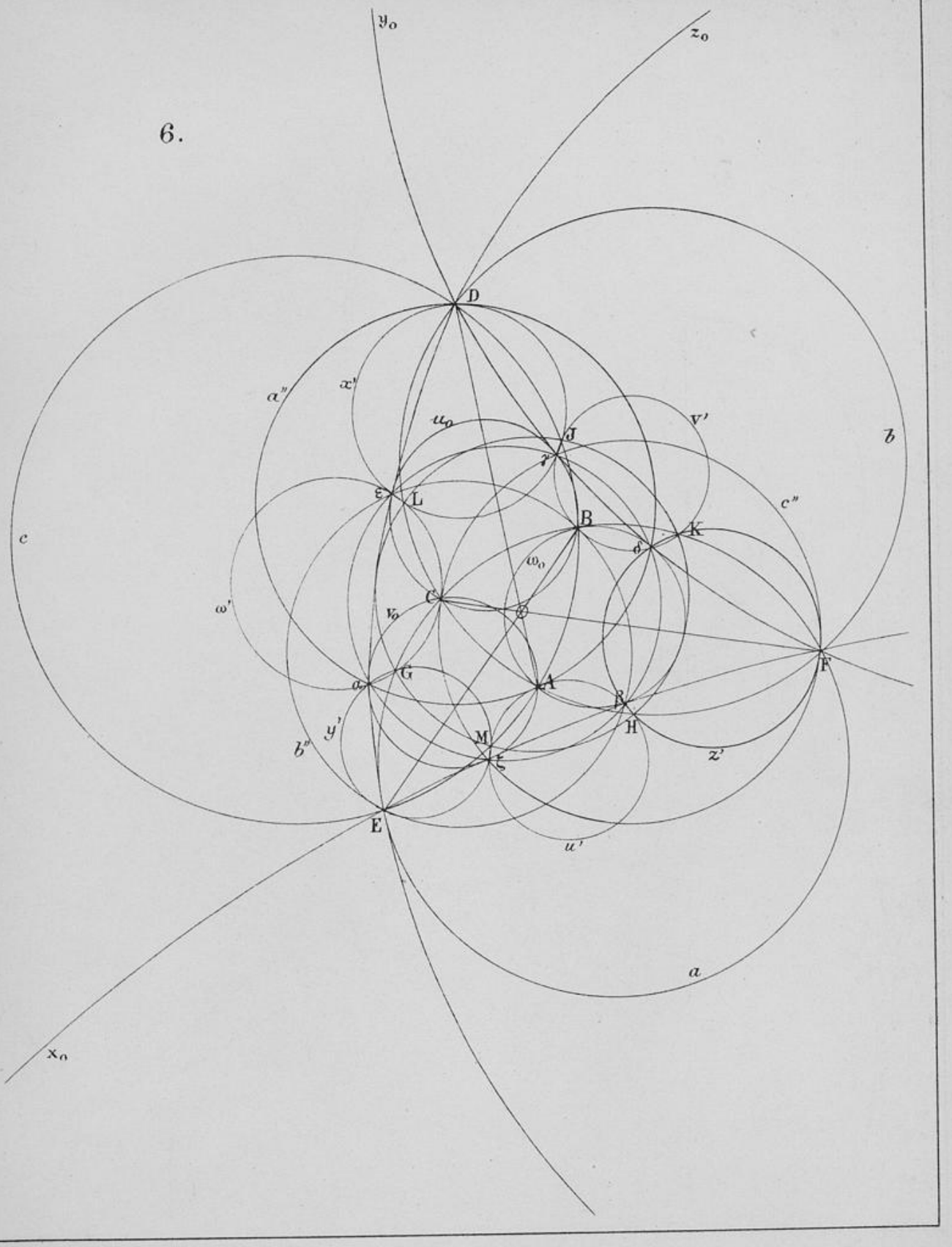


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

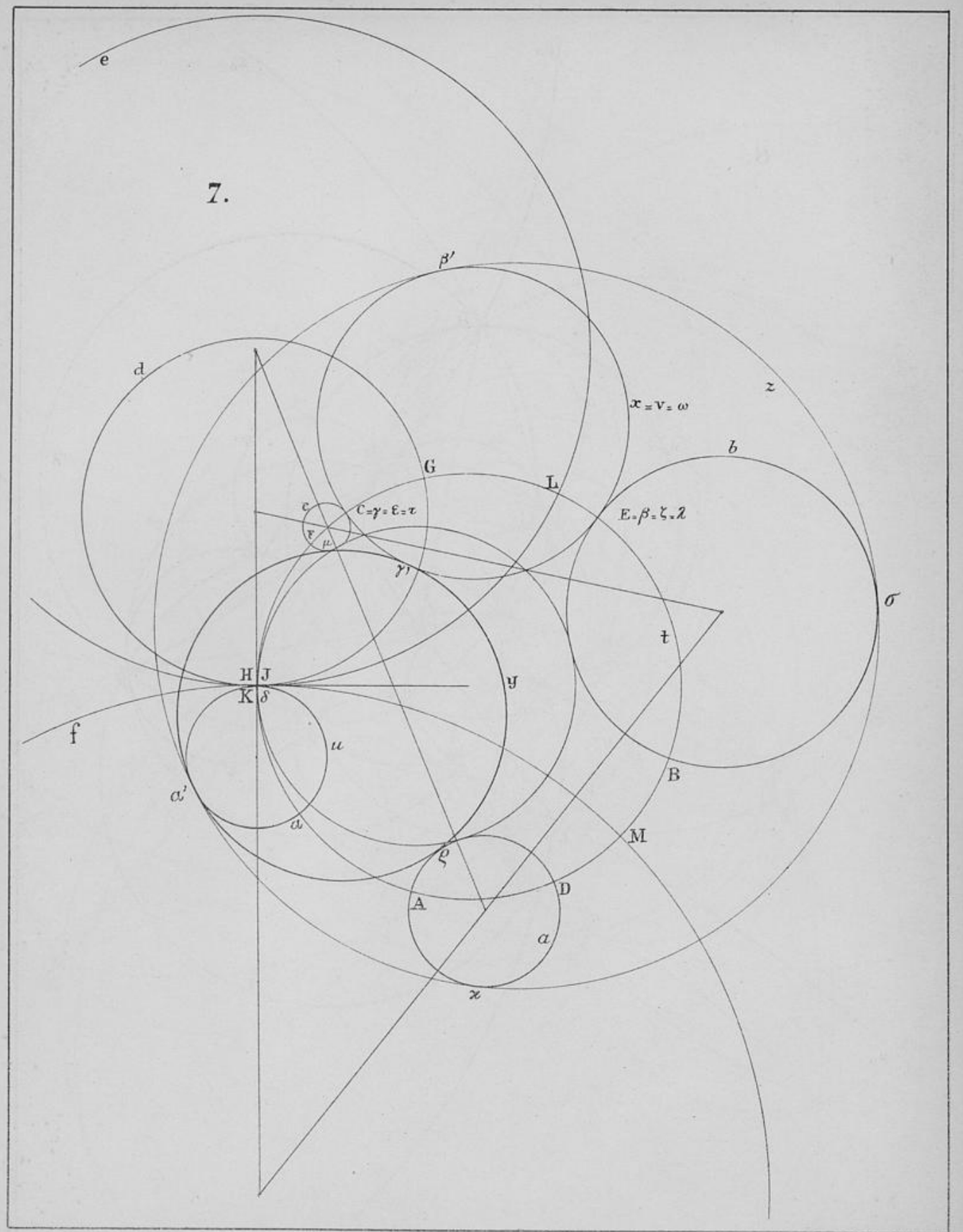


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 R 2 G 3 B 4 5 M 6 W 7 G 8 9 K 10 11 C 12 13 Y 14 15 B 16 17 M 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf