

Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Realgymnasiums zu Sprottau.
Ostern 1888.

Über die Bewegung zweier materiellen Punkte,
welche durch eine gewichtslose starre Gerade mit einander
verbunden sind.

Von

Oberlehrer Dr. Heinrich am Ende.



SPROTTAU.

DRUCK VON LOUIS WILDNER.

1888. PROGR. No. 208.

Q/SP (1888)
5

1138, 196



Über die Bewegung zweier materiellen Punkte, welche durch eine gewichtslose starre Gerade mit einander verbunden sind.

Das Problem der Bewegung zweier materiellen Punkte (Massenpunkte), welche durch eine starre Gerade mit einander verbunden sind, ist bereits von Clairaut und Euler¹⁾ gelöst und später von Hrn. Prof. Schellbach²⁾ nach einer eigentümlichen elementaren Methode behandelt worden. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass diese Lösungen sich sämtlich nur auf die Bewegung des Systems in der Ebene beziehen, indem dabei vorausgesetzt wird, dass die Richtungen der wirkenden Momentankräfte ein und derselben Ebene angehören. Da nun die Untersuchungen, welche die Lösung des Problems für die Bewegung im Raume erfordert, zwar schliesslich zu analogen Resultaten führen, aber dennoch sich wesentlich von denen unterscheiden, welche die Bewegung in der Ebene zur Voraussetzung haben, so erschien es mir nicht ohne Interesse, das Problem auch auf den Raum auszudehnen, zumal es diese Erweiterung meines Wissens bisher noch nicht erfahren hat.

Um gleich am Eingange den Gang anzudeuten, welchen die folgenden Untersuchungen nehmen, sei hier noch bemerkt, dass die Lösung des Problems in zwei Teilen erfolgt, von denen der erstere die Lösung unter der Voraussetzung zum Ziele hat, dass auf die beiden materiellen Punkte nur Momentankräfte wirken, während der zweite Teil zu den Momentankräften noch eine konstante Kraft und zwar die Schwerkraft hinzutreten lässt. Demnach lautet die zunächst zu behandelnde Aufgabe: Auf ein System von zwei materiellen Punkten, welche durch eine gewichtslose starre Gerade mit einander verbunden sind, wirken, in beliebigen Richtungen im Raume, momentane Kräfte; es soll die Bewegung des Systems bestimmt werden.

I.

1. Die Lagen der beiden Massenpunkte, welche A und B heissen mögen, seien auf drei zu einander rechtwinklige Koordinatenachsen bezogen, ihre Koordinaten zur Zeit t seien x', y', z' und x'', y'', z'' und ihre konstante Entfernung A B von einander sei $= 1$; ferner seien ihre Massen resp. m_1 und m_2 und die von den momentanen Impulsen herrührenden Geschwindigkeiten, welche die beiden Massenpunkte erhalten würden, wenn sie völlig frei wären, resp. v_1 und v_2 ; endlich seien die Winkel, welche die Richtungen dieser Geschwindigkeiten mit den positiven Achsen bilden, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und die variablen Winkel, welche die Richtung B A mit den positiven Achsen bildet, α, β, γ .

Da dem vorliegenden Probleme gemäss momentane Kräfte am System zur Wirkung kommen, so legen wir der Lösung die für Momentankräfte geltende Form des d'Alembert'schen Prinzips

$$\sum m \left[\left(\int X dt + \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \delta x + \left(\int Y dt + \frac{dy_0}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) \delta y + \left(\int Z dt + \frac{dz_0}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) \delta z \right] = 0$$

zu Grunde, wo mX, mY, mZ — die Momentankräfte und konstanten Kräfte mögen gleichzeitig in

¹⁾ F. Kraft, Samml. v. Probl. der analyt. Mechanik. Bd. I., p. 300. Probl. 15. Stuttgart 1884.

²⁾ Neue Elemente der Mechanik v. K. H. Schellbach. p. 282. Berlin 1860.

Wirkung treten — die Komponenten der an den Massen m angebrachten konstanten Kräfte, mithin die Integrale $m \int X dt$, $m \int Y dt$, $m \int Z dt$, die Komponenten der Quantitäten der Bewegung dieser Kräfte zur Zeit t bezeichnen; $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ bezeichnen die Komponenten der Geschwindigkeiten der Massen m , welche diese Massenpunkte, wenn sie frei wären, von den Momentankräften allein erhalten würden, und endlich bedeuten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Komponenten der Geschwindigkeiten derjenigen Momentankräfte, welche, auf das freie System zur Zeit t wirkend, genau dieselbe Bewegung hervorbringen würden, welche das System wirklich befolgt.

2. Der Aufgabe gemäss ist dann

$$X' = X'' = 0; Y' = Y'' = 0; Z' = Z'' = 0;$$

ferner

$$m_1 \frac{dx'_0}{dt} = m_1 v_1 \cos \alpha_1; m_2 \frac{dx''_0}{dt} = m_2 v_2 \cos \alpha_2;$$

$$m_1 \frac{dy'_0}{dt} = m_1 v_1 \cos \beta_1; m_2 \frac{dy''_0}{dt} = m_2 v_2 \cos \beta_2;$$

$$m_1 \frac{dz'_0}{dt} = m_1 v_1 \cos \gamma_1; m_2 \frac{dz''_0}{dt} = m_2 v_2 \cos \gamma_2.$$

Man erhält daher die Gleichung:

$$\begin{aligned} & m_1 \left(v_1 \cos \alpha_1 - \frac{dx'}{dt} \right) \delta x' + m_2 \left(v_2 \cos \alpha_2 - \frac{dx''}{dt} \right) \delta x'' \\ & + m_1 \left(v_1 \cos \beta_1 - \frac{dy'}{dt} \right) \delta y' + m_2 \left(v_2 \cos \beta_2 - \frac{dy''}{dt} \right) \delta y'' \\ & + m_1 \left(v_1 \cos \gamma_1 - \frac{dz'}{dt} \right) \delta z' + m_2 \left(v_2 \cos \gamma_2 - \frac{dz''}{dt} \right) \delta z'' = 0, \end{aligned}$$

zu welcher noch die die Verbindung des Systems ausdrückende Relation

$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 = l^2$$

tritt. Aus dieser letzten Gleichung folgt

$$(x' - x'') \delta x' + (x'' - x') \delta x'' + (y' - y'') \delta y' + (y'' - y') \delta y'' + (z' - z'') \delta z' + (z'' - z') \delta z'' = 0$$

und nach Multiplikation mit dem noch unbestimmten Faktor λ :

$$\begin{aligned} & \lambda (x' - x'') \delta x' + \lambda (y' - y'') \delta y' + \lambda (z' - z'') \delta z' \\ & + \lambda (x'' - x') \delta x'' + \lambda (y'' - y') \delta y'' + \lambda (z'' - z') \delta z'' = 0. \end{aligned}$$

Addiert man diese Gleichung zu der obigen und setzt, wozu man bekanntlich berechtigt ist, den Koeffizienten jeder Variation gleich Null, so hat man:

$$1. \quad m_1 v_1 \cos \alpha_1 - m_1 \frac{dx'}{dt} + \lambda (x' - x'') = 0$$

$$2. \quad m_2 v_2 \cos \alpha_2 - m_2 \frac{dx''}{dt} + \lambda (x'' - x') = 0$$

$$3. \quad m_1 v_1 \cos \beta_1 - m_1 \frac{dy'}{dt} + \lambda (y' - y'') = 0$$

$$4. \quad m_2 v_2 \cos \beta_2 - m_2 \frac{dy''}{dt} + \lambda (y'' - y') = 0$$

$$5. \quad m_1 v_1 \cos \gamma_1 - m_1 \frac{dz'}{dt} + \lambda (z' - z'') = 0$$

$$6. \quad m_2 v_2 \cos \gamma_2 - m_2 \frac{dz''}{dt} + \lambda (z'' - z') = 0,$$

und hieraus

$$\lambda = m_1 \frac{\frac{dx'}{dt} - v_1 \cos \alpha_1}{x' - x''}$$

$$\lambda = m_2 \frac{\frac{dx''}{dt} - v_2 \cos \alpha_2}{x'' - x'}$$

$$\lambda = m_1 \frac{\frac{dy'}{dt} - v_1 \cos \beta_1}{y' - y''}$$

$$\lambda = m_2 \frac{\frac{dy''}{dt} - v_2 \cos \beta_2}{y'' - y'}$$

$$\lambda = m_1 \frac{\frac{dz'}{dt} - v_1 \cos \gamma_1}{z' - z''}$$

$$\lambda = m_2 \frac{\frac{dz''}{dt} - v_2 \cos \gamma_2}{z'' - z'}$$

folglich auch

$$m_1 \frac{dx'}{dt} + m_2 \frac{dx''}{dt} = m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2$$

$$m_1 \frac{dy'}{dt} + m_2 \frac{dy''}{dt} = m_1 v_1 \cos \beta_1 + m_2 v_2 \cos \beta_2$$

$$m_1 \frac{dz'}{dt} + m_2 \frac{dz''}{dt} = m_1 v_1 \cos \gamma_1 + m_2 v_2 \cos \gamma_2$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt:

$$m_1 x' + m_2 x'' = (m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2) t + A$$

$$m_1 y' + m_2 y'' = (m_1 v_1 \cos \beta_1 + m_2 v_2 \cos \beta_2) t + B$$

$$m_1 z' + m_2 z'' = (m_1 v_1 \cos \gamma_1 + m_2 v_2 \cos \gamma_2) t + C$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2 = a$$

$$m_1 v_1 \cos \beta_1 + m_2 v_2 \cos \beta_2 = b$$

$$m_1 v_1 \cos \gamma_1 + m_2 v_2 \cos \gamma_2 = c$$

setzt:

$m_1 x' + m_2 x'' = at + A$; $m_1 y' + m_2 y'' = bt + B$; $m_1 z' + m_2 z'' = ct + C$,
wo A, B, C die Integrationskonstanten bezeichnen.

Wir bezeichnen nun mit x, y, z die Koordinaten des Massenmittelpunktes (Schwerpunktes) des Systems; alsdann hat man

$$x = \frac{m_1 x' + m_2 x''}{m_1 + m_2} \quad y = \frac{m_1 y' + m_2 y''}{m_1 + m_2} \quad z = \frac{m_1 z' + m_2 z''}{m_1 + m_2}$$

und man erhält mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{at}{m_1 + m_2} + \frac{A}{m_1 + m_2} \\ y &= \frac{bt}{m_1 + m_2} + \frac{B}{m_1 + m_2} \\ z &= \frac{ct}{m_1 + m_2} + \frac{C}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\}$$

durch welche Zeitgleichungen die Bewegung des Massenmittelpunktes nach Berechnung der Integrationskonstanten A, B, C völlig bestimmt ist. Eliminiert man vermittelst der dritten Gleichung t, so resultiert für die Bahn des Massenmittelpunktes die Gleichung der Geraden:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{c} z + \frac{Ac - Ca}{(m_1 + m_2) c} \\ y &= \frac{b}{c} z + \frac{Bc - Cb}{(m_1 + m_2) c} \end{aligned} \right\}$$

Aus denselben Gleichungen folgt ferner:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{m_1 + m_2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{b}{m_1 + m_2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c}{m_1 + m_2}.$$

Demnach ergibt sich für die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{m_1 + m_2} \text{ oder,}$$

wenn man für a , b und c die Werte einsetzt und dabei beachtet, dass sowohl $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1$ als auch $\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$ ist:

$$v = \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)}$$

oder, wenn man den Winkel, welchen die beiden Richtungen v_1 und v_2 mit einander bilden, kurz mit w bezeichnet:

$$v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos w}}{m_1 + m_2}.$$

Man sieht, dass die Bewegung des Massenmittelpunktes genau dieselbe sein würde, wenn zwei parallel den gegebenen Momentankräften direkt auf ihn wirkende Momentankräfte ihm resp. die Geschwindigkeiten $\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$ und $\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2$ erteilen.

Bezeichnet man die Winkel, welche die Gerade, auf der sich der Massenmittelpunkt bewegt, mit den Koordinatenachsen bildet, mit $(1,x)$, $(1,y)$, $(1,z)$, so hat man noch die Beziehungen:

$$\cos(1,x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos(1,y) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos(1,z) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

oder, wenn man für a , b und c die Werte substituiert,

$$\begin{aligned} \cos(1,x) &= \frac{m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2}{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos w}} \\ \cos(1,y) &= \frac{m_1 v_1 \cos \beta_1 + m_2 v_2 \cos \beta_2}{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos w}} \\ \cos(1,z) &= \frac{m_1 v_1 \cos \gamma_1 + m_2 v_2 \cos \gamma_2}{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos w}}. \end{aligned}$$

3. Zur Bestimmung der Bewegungen der beiden Punkte A und B hat man zunächst die Beziehungen:

$$x' - x'' = l \cos \alpha, \quad y' - y'' = l \cos \beta, \quad z' - z'' = l \cos \gamma,$$

folglich

$$m_2 x'' = m_2 (x' - l \cos \alpha); \quad m_2 y'' = m_2 (y' - l \cos \beta); \quad m_2 z'' = m_2 (z' - l \cos \gamma).$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} m_1 x' + m_2 x'' &= (m_1 + m_2) x' - m_2 l \cos \alpha \\ m_1 y' + m_2 y'' &= (m_1 + m_2) y' - m_2 l \cos \beta \\ m_1 z' + m_2 z'' &= (m_1 + m_2) z' - m_2 l \cos \gamma. \end{aligned}$$

Es war aber auch

$$\begin{aligned} m_1 x' + m_2 x'' &= at + A \\ m_1 y' + m_2 y'' &= bt + B \\ m_1 z' + m_2 z'' &= ct + C, \end{aligned}$$

folglich auch

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) x' - m_2 l \cos \alpha &= at + A \\(m_1 + m_2) y' - m_2 l \cos \beta &= bt + B \\(m_1 + m_2) z' - m_2 l \cos \gamma &= ct + C\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}x' - \frac{at + A}{m_1 + m_2} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \alpha \\y' - \frac{bt + B}{m_1 + m_2} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \beta \\z' - \frac{ct + C}{m_1 + m_2} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \gamma.\end{aligned}$$

Entsprechend findet man:

$$\begin{aligned}x'' - \frac{a}{m_1 + m_2} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \alpha \\y'' - \frac{b}{m_1 + m_2} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \beta \\z'' - \frac{c}{m_1 + m_2} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \gamma.\end{aligned}$$

Durch Quadrierung und Addition resultiert:

$$\left(x' - \frac{at + A}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(y' - \frac{bt + B}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(z' - \frac{ct + C}{m_1 + m_2}\right)^2 = \left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\right)^2$$

und

$$\left(x'' - \frac{a}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(y'' - \frac{b}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(z'' - \frac{c}{m_1 + m_2}\right)^2 = \left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Man sieht, dies sind die Gleichungen zweier Kugeln, deren gemeinschaftliches Centrum, der Massenmittelpunkt des Systems, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn bewegt. Demnach bewegen sich die beiden materiellen Punkte A und B auf den Oberflächen von geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitenden Kugeln, deren Radien resp. $\frac{m_2}{m_1 + m_2} l$ und $\frac{m_1}{m_1 + m_2} l$ sind.

4. Da durch die bloße Kenntnis der Oberflächen, auf denen sich die beiden materiellen Punkte A und B bewegen, die Bewegungen derselben durchaus noch nicht bestimmt sind, so wird es unsere nächste Aufgabe sein, diejenigen Rechnungen auszuführen und die Beziehungen aufzusuchen, durch welche wir in den Stand gesetzt werden, sowohl den Ort als auch die Geschwindigkeit jedes der beiden Punkte zu jeder beliebigen Zeit t ermitteln zu können. Zu diesem Zweck differenzieren wir die letzten sechs Gleichungen, aus denen sich die beiden Kugeln ergaben, nach t , und man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dt} &= \frac{a - m_2 l \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{m_1 + m_2}; & \frac{dx''}{dt} &= \frac{a + m_1 l \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{m_1 + m_2}; \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{b - m_2 l \sin \beta \frac{d\beta}{dt}}{m_1 + m_2}; & \frac{dy''}{dt} &= \frac{b + m_1 l \sin \beta \frac{d\beta}{dt}}{m_1 + m_2}; \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{c - m_2 l \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{m_1 + m_2}; & \frac{dz''}{dt} &= \frac{c + m_1 l \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{m_1 + m_2}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte ein in den aus den Ausdrücken für λ sich ergebenden Gleichungen:

$$\frac{\frac{dx'}{dt} - v_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha} = \frac{\frac{dy'}{dt} - v_1 \cos \beta_1}{\cos \beta} = \frac{\frac{dz'}{dt} - v_1 \cos \gamma_1}{\cos \gamma},$$

so resultiert

$$\frac{v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1 - 1 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{\cos \alpha} = \frac{v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1 - 1 \sin \beta \frac{d\beta}{dt}}{\cos \beta} = \frac{v_2 \cos \gamma_2 - v_1 \cos \gamma_1 - 1 \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{\cos \gamma}$$

und hieraus:

$$A, \quad \sin \alpha \cos \beta \frac{d\alpha}{dt} - \sin \beta \cos \alpha \frac{d\beta}{dt} = \frac{v_1 (\cos \alpha \cos \beta_1 - \cos \beta \cos \alpha_1) - v_2 (\cos \alpha \cos \beta_2 - \cos \beta \cos \alpha_2)}{1}$$

$$B, \quad \sin \alpha \cos \gamma \frac{d\alpha}{dt} - \sin \gamma \cos \alpha \frac{d\gamma}{dt} = \frac{v_1 (\cos \alpha \cos \gamma_1 - \cos \gamma \cos \alpha_1) - v_2 (\cos \alpha \cos \gamma_2 - \cos \gamma \cos \alpha_2)}{1}.$$

Aus $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ folgt:

$$C, \quad \sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \sin \beta \cos \beta \frac{d\beta}{dt} + \sin \gamma \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

also

$$- \sin \gamma \cos \alpha \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \frac{d\beta}{dt}}{\cos \gamma}.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung B. ein, multipliziert A. mit $\cos \beta$ und addiert, so erhält man

$$1 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = v_1 \left\{ (\cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1) \cos \alpha - (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cos \alpha_1 \right\} \\ - v_2 \left\{ (\cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2) \cos \alpha - (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cos \alpha_2 \right\}.$$

Entsprechend findet man:

$$1 \sin \beta \frac{d\beta}{dt} = v_1 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1) \cos \beta - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \cos \beta_1 \right\} \\ - v_2 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2) \cos \beta - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \cos \beta_2 \right\}$$

und

$$1 \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} = v_1 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1) \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos \gamma_1 \right\} \\ - v_2 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2) \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos \gamma_2 \right\}.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$1 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = v_1 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1) \cos \alpha - \cos \alpha_1 \right\} \\ - v_2 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2) \cos \alpha - \cos \alpha_2 \right\} \\ 1 \sin \beta \frac{d\beta}{dt} = v_1 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1) \cos \beta - \cos \beta_1 \right\} \\ - v_2 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2) \cos \beta - \cos \beta_2 \right\}$$

$$1 \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} = v_1 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1) \cos \gamma - \cos \gamma_1 \right\} \\ - v_2 \left\{ (\cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2) \cos \gamma - \cos \gamma_2 \right\}$$

oder, wenn man $\cos w_1$ statt $\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1$ und $\cos w_2$ statt $\cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2$ setzt und zugleich durch 1 dividiert:

$$\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_1 (\cos \alpha \cos w_1 - \cos \alpha_1) - v_2 (\cos \alpha \cos w_2 - \cos \alpha_2)}{1} \\ \sin \beta \frac{d\beta}{dt} = \frac{v_1 (\cos \beta \cos w_1 - \cos \beta_1) - v_2 (\cos \beta \cos w_2 - \cos \beta_2)}{1} \\ \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{v_1 (\cos \gamma \cos w_1 - \cos \gamma_1) - v_2 (\cos \gamma \cos w_2 - \cos \gamma_2)}{1}.$$

5. Demgemäss ist nun auch

$$\frac{dx'}{dt} = v_1 \cos \alpha_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha (v_1 \cos w_1 - v_2 \cos w_2)$$

$$\frac{dy'}{dt} = v_1 \cos \beta_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \beta (v_1 \cos w_1 - v_2 \cos w_2)$$

$$\frac{dz'}{dt} = v_1 \cos \gamma_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \gamma (v_1 \cos w_1 - v_2 \cos w_2)$$

und

$$\frac{dx''}{dt} = v_2 \cos \alpha_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \alpha (v_2 \cos w_2 - v_1 \cos w_1)$$

$$\frac{dy''}{dt} = v_2 \cos \beta_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \beta (v_2 \cos w_2 - v_1 \cos w_1)$$

$$\frac{dz''}{dt} = v_2 \cos \gamma_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \gamma (v_2 \cos w_2 - v_1 \cos w_1).$$

Für den Wert von λ , welcher die anfängliche Spannung der starren Geraden zur Zeit $t=0$ ausdrückt, ergibt sich daher, wenn man mit $\cos w_1^0$ und $\cos w_2^0$ die den Anfangswerten der Winkel α, β, γ entsprechenden Werte von $\cos w_1$ und $\cos w_2$ bezeichnet:

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) l} (v_1 \cos w_1^0 - v_2 \cos w_2^0).$$

6. Wie man sieht, sind die obigen Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeiten bezüglich der Koordinatenachsen noch nicht geeignet, die Werte dieser Grössen für jede beliebige Zeit t zu bestimmen. Um zu solchen Beziehungen zu gelangen, welche, wie die vollständige Lösung des Problems es erfordert, die Drehungswinkel der Verbindungsgeraden AB als eine bestimmte Funktion der Zeit t darstellen und die Winkelgeschwindigkeit für jede beliebige Zeit berechnen lassen, verfahren wir, wie folgt. Wir berechnen zunächst die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 x'}{dt^2}, \dots, \frac{d^2 x''}{dt^2}, \dots$. Man erhält:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2$$

und

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 z''}{dt^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2.$$

Bezeichnet man die Spannung der Geraden AB zu einer beliebigen Zeit t mit T , so ergeben sich auch nach dem Prinzip von d'Alembert die Relationen:

$$2T(x' - x'') - m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0; \quad 2T(x' - x'') + m_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} = 0;$$

$$2T(y' - y'') - m_1 \frac{d^2 y'}{dt^2} = 0; \quad 2T(y' - y'') + m_2 \frac{d^2 y''}{dt^2} = 0;$$

$$2T(z' - z'') - m_1 \frac{d^2 z'}{dt^2} = 0; \quad 2T(z' - z'') + m_2 \frac{d^2 z''}{dt^2} = 0;$$

oder

$$m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} = 2Tl \cos \alpha; \quad m_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} = -2Tl \cos \alpha;$$

$$m_1 \frac{d^2 y'}{dt^2} = 2Tl \cos \beta; \quad m_2 \frac{d^2 y''}{dt^2} = -2Tl \cos \beta;$$

$$m_1 \frac{d^2 z'}{dt^2} = 2Tl \cos \gamma; \quad m_2 \frac{d^2 z''}{dt^2} = -2Tl \cos \gamma;$$

oder

$$\frac{m_1}{l \cos \alpha} \cdot \frac{d^2 x'}{dt^2} = 2T; \quad \frac{m_2}{l \cos \alpha} \cdot \frac{d^2 x''}{dt^2} = -2T;$$

$$\frac{m_1}{l \cos \beta} \cdot \frac{d^2 y'}{dt^2} = 2T; \quad \frac{m_2}{l \cos \beta} \cdot \frac{d^2 y''}{dt^2} = -2T;$$

$$\frac{m_1}{l \cos \gamma} \cdot \frac{d^2 z'}{dt^2} = 2T; \quad \frac{m_2}{l \cos \gamma} \cdot \frac{d^2 z''}{dt^2} = -2T.$$

Hieraus folgt, wenn man für $\frac{d^2 x'}{dt^2}, \dots$ die Werte einsetzt,

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \operatorname{tg} \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \operatorname{tg} \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2$$

$$\operatorname{tg} \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2,$$

und aus $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ nach zweimaliger Differentiation:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \\ & + \sin \beta \cos \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \\ & + \sin \gamma \cos \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Substituiert man in dieser Gleichung die aus den beiden vorhergehenden Gleichungen für $\sin \beta \cos \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2}$ und $\sin \gamma \cos \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2}$ durch Multiplikation mit $\cos^2 \beta$ resp. $\cos^2 \gamma$ erhaltenen Ausdrücke, nämlich

$$\begin{aligned} \sin \beta \cos \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \beta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \cos^2 \beta \left(\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right) \\ \sin \gamma \cos \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \gamma \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \cos^2 \gamma \left(\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

so resultiert nach einigen einfachen Reduktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 &= \sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \sin^2 \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \\ \operatorname{tg} \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 &= \sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \sin^2 \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \\ \operatorname{tg} \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 &= \sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \sin^2 \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber die Summe der lebendigen Kräfte des Systems

$$L = \frac{1}{2} \left\{ m_1 \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + m_1 \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + m_1 \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2 + m_2 \left(\frac{dx''}{dt} \right)^2 + m_2 \left(\frac{dy''}{dt} \right)^2 + m_2 \left(\frac{dz''}{dt} \right)^2 \right\}.$$

Wir differenzieren beiderseits und dividieren durch dt , so wird

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= m_1 \left\{ \frac{d^2 x'}{dt^2} \frac{dx'}{dt} + \frac{d^2 y'}{dt^2} \frac{dy'}{dt} + \frac{d^2 z'}{dt^2} \frac{dz'}{dt} \right\} \\ &+ m_2 \left\{ \frac{d^2 x''}{dt^2} \frac{dx''}{dt} + \frac{d^2 y''}{dt^2} \frac{dy''}{dt} + \frac{d^2 z''}{dt^2} \frac{dz''}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Wir ersetzen hier die Werte $m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2}, \dots, m_2 \frac{d^2 x''}{dt^2}, \dots$ durch die gleichen Werte $2Tl \cos \alpha, \dots, -2Tl \cos \alpha, \dots$, dann geht diese Differentialgleichung über in die folgende:

$$\frac{dL}{dt} = 2Tl \left\{ \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt} \right) \cos \alpha + \left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy''}{dt} \right) \cos \beta + \left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz''}{dt} \right) \cos \gamma \right\}$$

oder, da $\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt} = -l \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{dy'}{dt} - \frac{dy''}{dt} = -l \sin \beta \frac{d\beta}{dt}$, $\frac{dz'}{dt} - \frac{dz''}{dt} = -l \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}$,

$$\frac{dL}{dt} = -2Tl^2 \left\{ \sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \sin \beta \cos \beta \frac{d\beta}{dt} + \sin \gamma \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} \right\}.$$

Es ist aber $\sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \sin \beta \cos \beta \frac{d\beta}{dt} + \sin \gamma \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$,

mithin auch

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

und

$$L = \text{Const.}$$

wie nach dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte zu erwarten war.

Wir setzen nun für $\frac{dx'}{dt}, \dots, \frac{dx''}{dt}, \dots$ die gleichen Werte ein, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left\{ (a^2 + b^2 + c^2) + m_1 m_2 l^2 \left(\sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \sin^2 \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right) \right\}.$$

Da nun sowohl L als auch a, b und c konstante Grössen sind, so schliessen wir, dass auch $\sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \sin^2 \beta \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2$ gleich einer konstanten Grösse ist. Man findet ihren Wert aus den Winkelgrössen der Anfangslage des Systems. Bezeichnet man denselben mit k^2 , so hat man also:

$$\text{tg } \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \text{tg } \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 = \text{tg } \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = k^2.$$

7. Die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes war

$$v = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{m_1 + m_2},$$

folglich ist

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(m_1 + m_2)},$$

daher auch

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} l^2 k^2.$$

Bezeichnet man daher die lebendige Kraft der im Massenmittelpunkte vereinigt gedachten Masse $(m_1 + m_2)$ mit L_1 , so hat man auch die Relation:

$$k^2 = 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 l^2} (L - L_1).$$

8. Zur Integration der Differentialgleichung

$$\text{tg } \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = k^2$$

bemerken wir, dass dieselbe identisch ist mit der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -k^2 u,$$

wo $u = \cos \alpha$. Die Integration dieser Gleichung ergiebt

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{C - k^2 u^2}} + C_1 = \frac{1}{k} \text{arc. sin } \frac{k u}{\sqrt{C}} + C_1$$

und umgekehrt

$$u = \frac{\sqrt{C}}{k} \sin k(t - C_1)$$

oder, wenn man auflöst und die Konstanten ändert,

$$u = A_1 \cos kt + A_2 \sin kt.$$

Ebenso ergeben die Integrationen der Differentialgleichungen

$$\operatorname{tg} \beta \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 = k^2 = \operatorname{tg} \gamma \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2,$$

wenn man entsprechend v statt $\cos \beta$ und w statt $\cos \gamma$ setzt:

$$v = B_1 \cos kt + B_2 \sin kt$$

und

$$w = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Hieraus folgt nun auch, dass die Spannung T einen konstanten Wert hat. Denn es ist

$$T = \frac{m_1}{2 l \cos \alpha} \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

und

$$\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{d^2 x'}{dt^2} = - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left(\operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right),$$

daher

$$T = - \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} k^2.$$

9. Bestimmung der Konstanten. Die Integrationskonstanten sind durch die Anfangslage des Systems bestimmt. Wir berechnen zunächst die mit A, B, C bezeichneten Konstanten. Aus den Relationen

$$m_1 x' + m_2 x'' = at + A; \quad m_1 y' + m_2 y'' = bt + B; \quad m_1 z' + m_2 z'' = ct + C$$

folgt, wenn für $t = 0$

$$x' = x_0', \quad y' = y_0', \quad z' = z_0' \quad \text{und} \quad x'' = x_0'', \quad y'' = y_0'', \quad z'' = z_0''$$

ist:

$$A = m_1 x_0' + m_2 x_0''$$

$$B = m_1 y_0' + m_2 y_0''$$

$$C = m_1 z_0' + m_2 z_0''.$$

Ferner erhält man, wenn man die für $t = 0$ sich ergebenden Werte von $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ beziehungsweise mit ω_0' , ω_0'' , ω_0''' , und die Winkel, welche l am Anfange der Bewegung mit den Koordinatenachsen bildet, mit α_0 , β_0 und γ_0 bezeichnet:

$$k^2 = \omega_0'^2 \sin^2 \alpha_0 + \omega_0''^2 \sin^2 \beta_0 + \omega_0'''^2 \sin^2 \gamma_0.$$

Für die Konstante A_1 resultiert aus der Gleichung

$$\cos \alpha = u = A_1 \cos kt + A_2 \sin kt$$

für $t = 0$:

$$u_0 = \cos \alpha_0 = A_1.$$

Entsprechend findet man:

$$v_0 = \cos \beta_0 = B_1$$

$$w_0 = \cos \gamma_0 = C_1.$$

Zur Bestimmung der Konstanten A_2 differenzieren wir die Gleichung $\cos \alpha = \cos \alpha_0 \cos kt + A_2 \sin kt$ nach t und erhalten:

$$-\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -k \cos \alpha_0 \sin kt + A_2 k \cos kt,$$

also für $t = 0$:

$$-\omega_0' \sin \alpha_0 = A_2 k,$$

mithin

$$A_2 = - \frac{\omega_0'}{k} \sin \alpha_0.$$

Ebenso ergibt sich

$$B_z = -\frac{\omega_0''}{k} \sin \beta_0$$

$$C_z = -\frac{\omega_0'''}{k} \sin \gamma_0.$$

10. Da der Ort des Schwerpunktes und desgleichen die Lage der die beiden materiellen Punkte verbindenden Geraden für jede beliebige Zeit völlig bestimmt ist, so ist das Problem nunmehr im wesentlichen als gelöst anzusehen. Es bleibt noch übrig, die Bahnen der beiden Punkte A und B zu finden.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} &= 2Tl \cos \alpha, & m_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} &= -2Tl \cos \alpha, \\ m_1 \frac{d^2 y'}{dt^2} &= 2Tl \cos \beta, & m_2 \frac{d^2 y''}{dt^2} &= -2Tl \cos \beta, \\ m_1 \frac{d^2 z'}{dt^2} &= 2Tl \cos \gamma, & m_2 \frac{d^2 z''}{dt^2} &= -2Tl \cos \gamma \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2l} z' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{m_2}{2l} z'' \frac{d^2 y''}{dt^2} &= T(z' - z'') \cos \beta = Tl \cos \beta \cos \gamma \\ \frac{m_1}{2l} y' \frac{d^2 z'}{dt^2} + \frac{m_2}{2l} y'' \frac{d^2 z''}{dt^2} &= T(y' - y'') \cos \gamma = Tl \cos \beta \cos \gamma \\ \frac{m_1}{2l} x' \frac{d^2 z'}{dt^2} + \frac{m_2}{2l} x'' \frac{d^2 z''}{dt^2} &= T(x' - x'') \cos \gamma = Tl \cos \alpha \cos \gamma \\ \frac{m_1}{2l} z' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{m_2}{2l} z'' \frac{d^2 x''}{dt^2} &= T(z' - z'') \cos \alpha = Tl \cos \alpha \cos \gamma \\ \frac{m_1}{2l} y' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{m_2}{2l} y'' \frac{d^2 x''}{dt^2} &= T(y' - y'') \cos \alpha = Tl \cos \alpha \cos \beta \\ \frac{m_1}{2l} x' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{m_2}{2l} x'' \frac{d^2 y''}{dt^2} &= T(x' - x'') \cos \beta = Tl \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

folglich auch

$$\begin{aligned} m_1 \left(z' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) + m_2 \left(z'' \frac{d^2 y''}{dt^2} - y'' \frac{d^2 z''}{dt^2} \right) &= 0 \\ m_1 \left(x' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) + m_2 \left(x'' \frac{d^2 z''}{dt^2} - z'' \frac{d^2 x''}{dt^2} \right) &= 0 \\ m_1 \left(y' \frac{d^2 x'}{dt^2} - x' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) + m_2 \left(y'' \frac{d^2 x''}{dt^2} - x'' \frac{d^2 y''}{dt^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d \left(z' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dz'}{dt} \right)}{dt} + m_2 \frac{d \left(z'' \frac{dy''}{dt} - y'' \frac{dz''}{dt} \right)}{dt} &= 0 \\ m_1 \frac{d \left(x' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dx'}{dt} \right)}{dt} + m_2 \frac{d \left(x'' \frac{dz''}{dt} - z'' \frac{dx''}{dt} \right)}{dt} &= 0 \\ m_1 \frac{d \left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt} \right)}{dt} + m_2 \frac{d \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right)}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Integration resultiert hieraus, wenn c' , c'' , c''' die zugehörigen Integrationskonstanten bedeuten:

$$m_1 \left(z' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dz'}{dt} \right) + m_2 \left(z'' \frac{dy''}{dt} - y'' \frac{dz''}{dt} \right) = c'$$

$$m_1 \left(x' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dx'}{dt} \right) + m_2 \left(x'' \frac{dz''}{dt} - z'' \frac{dx''}{dt} \right) = c''$$

$$m_1 \left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt} \right) + m_2 \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = c'''$$

Setzt man für x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' , $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$, $\frac{dz''}{dt}$, ... die gleichen Werte ein, so gehen diese Gleichungen über in die folgenden:

$$\frac{Cb - Bc}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \left(\cos \beta \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \sin \beta \cos \gamma \frac{d\beta}{dt} \right) = c'$$

$$\frac{Ac - Ca}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \left(\sin \alpha \cos \gamma \frac{d\alpha}{dt} - \cos \alpha \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} \right) = c''$$

$$\frac{Ba - Ab}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \left(\cos \alpha \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - \sin \alpha \cos \beta \frac{d\alpha}{dt} \right) = c'''$$

Wir multiplicieren die erste dieser Gleichungen mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\cos \beta$ und die dritte mit $\cos \gamma$, so erhalten wir durch Addition der Produkte:

$$\begin{aligned} & \left\{ (m_1 + m_2) c' + Bc - Cb \right\} \cos \alpha + \left\{ (m_1 + m_2) c'' + Ca - Ac \right\} \cos \beta \\ & + \left\{ (m_1 + m_2) c''' + Ab - Ba \right\} \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\cos \alpha = \frac{(m_1 + m_2) x' - (at + A)}{m_2 l} = \frac{-(m_1 + m_2) x'' + at + A}{m_1 l}$$

$$\cos \beta = \frac{(m_1 + m_2) y' - (bt + B)}{m_2 l} = \frac{-(m_1 + m_2) y'' + bt + B}{m_1 l}$$

$$\cos \gamma = \frac{(m_1 + m_2) z' - (ct + C)}{m_2 l} = \frac{-(m_1 + m_2) z'' + ct + C}{m_1 l}$$

Demgemäss ergibt sich nach einigen leichten Reduktionen:

$$\begin{aligned} & \left\{ (m_1 + m_2) c' + Bc - Cb \right\} x' \\ & + \left\{ (m_1 + m_2) c'' + Ca - Ac \right\} y' = (at + A) c' + (bt + B) c'' + (ct + C) c''' \\ & + \left\{ (m_1 + m_2) c''' + Ab - Ba \right\} z' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left\{ (m_1 + m_2) c' + Bc - Cb \right\} x'' \\ & + \left\{ (m_1 + m_2) c'' + Ca - Ac \right\} y'' = (at + A) c' + (bt + B) c'' + (ct + C) c''', \\ & + \left\{ (m_1 + m_2) c''' + Ab - Ba \right\} z'' \end{aligned}$$

wo die Werte von c' , c'' , c''' aus der obigen Gleichung für $t = 0$ gefunden werden, nämlich:

$$c' = \frac{Cb - Bc}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega_0''' \cos \beta_0 \sin \gamma_0 - \omega_0'' \sin \beta_0 \cos \gamma_0)$$

$$c'' = \frac{Ac - Ca}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega_0' \sin \alpha_0 \cos \gamma_0 - \omega_0''' \cos \alpha_0 \sin \gamma_0)$$

$$c''' = \frac{Ba - Ab}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega_0'' \cos \alpha_0 \sin \beta_0 - \omega_0' \sin \alpha_0 \cos \beta_0)$$

oder, wenn man p statt $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega_0''' \cos \beta_0 \sin \gamma_0 - \omega_0'' \sin \beta_0 \cos \gamma_0)$ und q und r statt der übrigen beiden entsprechenden Ausdrücke setzt und zugleich mit $m_1 + m_2$ multipliziert:

$$(m_1 + m_2) c' = Cb - Bc + p (m_1 + m_2)$$

$$(m_1 + m_2) c'' = Ac - Ca + q (m_1 + m_2)$$

$$(m_1 + m_2) c''' = Ba - Ab + r (m_1 + m_2).$$

Substituiert man diese Werte in den beiden vorhergehenden Gleichungen, so erhalten dieselben die einfachere Form:

$$px' + qy' + rz' = \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ (at + A) p + (bt + B) q + (ct + C) r \right\}$$

$$px'' + qy'' + rz'' = \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ (at + A) p + (bt + B) q + (ct + C) r \right\}.$$

Beide Gleichungen sind identisch; wir erblicken in ihnen die Gleichung einer parallel mit sich selbst sich bewegendes Ebene, in welcher die Bewegung der beiden materiellen Punkte A und B stattfindet. Die Gleichung dieser Ebene in Verbindung mit den Gleichungen der früher gefundenen Kugeln bestimmt zwei Kreise im Raume. Somit ersieht man aus den gefundenen Resultaten, dass die beiden Massenpunkte A und B, welche Grösse und Richtung auch die am Anfange wirkenden Momentankräfte haben mögen, sich auch im Raume im allgemeinen in Kreisen bewegen.

Der Neigungswinkel der Geraden, auf welcher sich der Massenmittelpunkt bewegt, gegen diese Ebene ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin \vartheta = \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

11. Für die Winkelgeschwindigkeiten hat man:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{k \cos \alpha_0 \sin kt + \omega_0' \sin \alpha_0 \cos kt}{N_1}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{k \cos \beta_0 \sin kt + \omega_0'' \sin \beta_0 \cos kt}{N_2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{k \cos \gamma_0 \sin kt + \omega_0''' \sin \gamma_0 \cos kt}{N_3},$$

wo

$$N_1 = \sqrt{1 - (\cos \alpha_0 \cos kt - \frac{\omega_0'}{k} \sin \alpha_0 \sin kt)^2}$$

$$N_2 = \sqrt{1 - (\cos \beta_0 \cos kt - \frac{\omega_0''}{k} \sin \beta_0 \sin kt)^2}$$

$$N_3 = \sqrt{1 - (\cos \gamma_0 \cos kt - \frac{\omega_0'''}{k} \sin \gamma_0 \sin kt)^2}$$

ist.

Da

$$\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = k \cos \alpha_0 \sin kt + \omega_0' \sin \alpha_0 \cos kt$$

$$\sin \beta \frac{d\beta}{dt} = k \cos \beta_0 \sin kt + \omega_0'' \sin \beta_0 \cos kt$$

$$\sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} = k \cos \gamma_0 \sin kt + \omega_0''' \sin \gamma_0 \cos kt,$$

so kann man die Werte von $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}, \frac{dx''}{dt}, \dots$ d. h. die Geschwindigkeiten der Punkte A und B im Raume berechnen. Für die relativen Geschwindigkeiten derselben in der Ebene ihrer Bewegung ergibt sich, da für diesen Fall $a = b = c = 0$ ist:

$$V_1 = \sqrt{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sqrt{k^2 + k(\omega_0' \sin 2\alpha_0 + \omega_0'' \sin 2\beta_0 + \omega_0''' \sin 2\gamma_0) \sin kt \cos kt}$$

oder

$$V_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sqrt{k^2 + \frac{k}{2} (\omega_0' \sin 2\alpha_0 + \omega_0'' \sin 2\beta_0 + \omega_0''' \sin 2\gamma_0) \sin 2kt}$$

und

$$V_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sqrt{k^2 + \frac{k}{2} (\omega_0' \sin 2\alpha_0 + \omega_0'' \sin 2\beta_0 + \omega_0''' \sin 2\gamma_0) \sin 2kt}.$$

Es lassen sich also sämtliche Grössen berechnen, durch welche die Bewegung des Systems bestimmt ist.

12. Es falle nun l mit der x -Achse am Anfange der Bewegung zusammen, und Punkt B liege zur Zeit $t = 0$ im Anfangspunkte der Koordinaten. Alsdann ist:

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ; \text{ folglich } A_1 = 1, B_1 = 0, C_1 = 0.$$

Ferner ist

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0, \quad \omega_0'' \sin \beta_0 = \frac{v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1}{1}, \quad \omega_0''' \sin \gamma_0 = \frac{v_2 \cos \gamma_2 - v_1 \cos \gamma_1}{1}$$

demnach

$$k = \frac{1}{l} \sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2}.$$

Nun ist

$$A_2 = 0$$

$$B_2 = \frac{v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2}{\sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2}}$$

$$C_2 = \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{\sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2}},$$

mithin

$$\cos \alpha = \cos kt$$

$$\cos \beta = \frac{v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2}{\sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2}} \sin kt = \frac{v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2}{kl} \sin kt$$

$$\cos \gamma = \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{\sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2}} \sin kt = \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{kl} \sin kt.$$

Aus $\cos \alpha = \cos kt$ folgt:

$$\alpha = kt$$

folglich

$$\frac{d\alpha}{dt} = k.$$

Aus diesem Resultate erkennen wir, dass die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der x-Achse konstant ist, dass also überhaupt das System sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der Ebene seiner Bewegung dreht. Dabei geben die Gleichungen für $\cos \beta$ und $\cos \gamma$ zugleich an, nach welcher Richtung hin der Winkel α mit der Zeit t wächst. Ist nämlich $v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2$ positiv, so wächst in dem Ausdruck für $\cos \beta$ die rechte Seite mit t von $kt = 0$ bis $\frac{\pi}{2}$, folglich nimmt in diesem Falle $\angle \beta$ von $\frac{\pi}{2}$ an ab. Ist dagegen $v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2$ negativ, so wächst der Ausdruck für $\cos \beta$ mit t von 0 an negativ, folglich nimmt dann $\angle \beta$ von $\frac{\pi}{2}$ an zu. Die gleichen Betrachtungen ergeben sich selbstverständlich für den $\angle \gamma$.

Die Gleichung der Bahn des Schwerpunktes ist jetzt, da

$$A = m_1 l, B = 0 \text{ und } C = 0$$

ist:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{c} z + \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \\ y &= \frac{b}{c} z. \end{aligned} \right\}$$

Da ferner jetzt

$$p = 0$$

$$q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)$$

$$r = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)$$

ist, so hat man für die Gleichung der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt:

$$\begin{aligned} & (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) y - (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) z \\ &= \frac{l}{m_1 + m_2} \left\{ (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) b - (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) c \right\} t. \end{aligned}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit resultiert:

$$\frac{da}{dt} = k$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{k(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) \cos kt}{\sqrt{k^2 l^2 - (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 \sin^2 kt}} = -\frac{k(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) \cos kt}{\sqrt{(v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2 + (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 \cos^2 kt}}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{k(v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) \cos kt}{\sqrt{k^2 l^2 - (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2 \sin^2 kt}} = -\frac{k(v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) \cos kt}{\sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2 \cos^2 kt}}.$$

Die gewonnenen Resultate lassen sich demnach in folgende Worte zusammenfassen: Wirken auf das System nur Momentankräfte, so schreitet sein Massenmittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn fort. Die Bewegung des Systems ist dabei eine schraubenförmige, welche dadurch charakterisiert ist, dass es ebenfalls mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einer parallel mit sich selbst fortschreitenden Ebene um seinen Massenmittelpunkt rotiert.

13. Nicht überflüssig dürfte hier die Bemerkung erscheinen, dass diejenigen Bewegungsgrößen unserer Lösung, welche von der fortschreitenden Bewegung des Systems unabhängig sind, wie die Winkelgeschwindigkeit der die beiden materiellen Punkte verbindenden Geraden und überhaupt die aus der relativen Bewegung sich ergebenden Resultate, eine nicht unwesentliche Vereinfachung der Lösung gestatten würden. Wir würden daher bezüglich dieser Teile des Problems berechtigt gewesen sein, unsere Betrachtung einem System zuzuwenden, dessen Bewegung sich nur dadurch von der Bewegung des bisher betrachteten Systems unterscheidet, dass sein Massenmittelpunkt an der Bewegung nicht teilnimmt.

Diese Befestigung des Massenmittelpunktes kann man sich dadurch hervorgerufen denken, dass am Beginn der Bewegung entweder dem Massenmittelpunkte selbst oder jedem der beiden Massenpunkte A und B noch ein momentaner Impuls erteilt wird, dessen Geschwindigkeitskomponenten $-\frac{a}{m_1+m_2}$, $-\frac{b}{m_1+m_2}$ und $-\frac{c}{m_1+m_2}$ sind.

Zu den gleichen Resultaten wird man gelangen, wenn man die Bewegung des Systems in bezug auf ein bewegliches mit dem bewegten Massenmittelpunkt gleichen Schritt haltendes Koordinatensystem betrachtet. Denkt man sich nämlich die drei rechtwinkligen Achsen parallel mit sich selbst und ihren Anfangspunkt parallel mit der Bahn des Massenmittelpunktes fortschreiten, und betrachtet man die Bewegung des Systems nunmehr in bezug auf diese Achsen, so hat man, wenn ξ, η, ζ die variablen Koordinaten des Anfangspunktes des bewegten Koordinatensystems und x, y, z , resp. x'', y'', z'' die Koordinaten der beiden Punkte A und B bezüglich des bewegten Koordinatensystems bezeichnen:

$$x' = x + \xi; \quad y' = y + \eta; \quad z' = z + \zeta;$$

$$x'' = x'' + \xi; \quad y'' = y'' + \eta; \quad z'' = z'' + \zeta;$$

mithin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} - \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} - \frac{d\zeta}{dt};$$

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{dx''}{dt} - \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{dy''}{dt} = \frac{dy''}{dt} - \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dz''}{dt} = \frac{dz''}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}.$$

Es ist aber

$$\xi = \frac{at}{m_1+m_2}, \quad \eta = \frac{bt}{m_1+m_2}, \quad \zeta = \frac{ct}{m_1+m_2},$$

folglich

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a}{m_1+m_2}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{b}{m_1+m_2}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{c}{m_1+m_2}.$$

Setzt man diese Werte oben ein, so resultiert:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{m_2}{m_1+m_2} l \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}; & \frac{dx''}{dt} &= \frac{m_1}{m_1+m_2} l \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{m_2}{m_1+m_2} l \sin \beta \frac{d\beta}{dt}; & \frac{dy''}{dt} &= \frac{m_1}{m_1+m_2} l \sin \beta \frac{d\beta}{dt}; \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{m_2}{m_1+m_2} l \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}; & \frac{dz''}{dt} &= \frac{m_1}{m_1+m_2} l \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \end{aligned}$$

welche Gleichungen die Grössen a, b und c nicht mehr enthalten und daher die Rechnung nicht unwesentlich vereinfachen.

14. Spezielle Fälle.

1) Die beiden Massenpunkte A und B liegen zur Zeit $t=0$ auf der xAchse und zwar falle B mit dem Anfangspunkte der Koordinaten zusammen. Ferner sei v_1 parallel der positiven yAchse und v_2 parallel der positiven zAchse. Dann ist:

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ; \quad \alpha_1 = 90^\circ, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 90^\circ; \quad \alpha_2 = 90^\circ, \beta_2 = 90^\circ, \gamma_2 = 0.$$

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0, \quad \omega_0'' \sin \beta_0 = -\frac{v_1}{l}, \quad \omega_0''' \sin \gamma_0 = +\frac{v_2}{l}, \quad k^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{l^2} \text{ und } k = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{l}.$$

Ausserdem ist

$$x_0' = l, y_0' = 0, z_0' = 0; \quad x_0'' = 0, y_0'' = 0, z_0'' = 0.$$

$$A = m_1 l, B = 0, C = 0; \quad a = 0, b = m_1 v_1, c = m_2 v_2.$$

Mithin bewegt sich der Massenmittelpunkt auf der Geraden:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \\ y &= \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} z \end{aligned} \right\}$$

und es ist seine Geschwindigkeit $v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}$.

Es ist ferner

$$A_1 = 1, B_1 = 0, C_1 = 0; \quad A_2 = 0, B_2 = + \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, C_2 = - \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Daher

$$\cos \alpha = \cos kt$$

$$\cos \beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \sin kt$$

$$\cos \gamma = - \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \sin kt, \quad \text{wo } k = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{l}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\alpha}{dt} = k$$

$$\frac{d\beta}{dt} = - \frac{k v_1 \cos kt}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cos^2 kt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = + \frac{k v_2 \cos kt}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cos^2 kt}.$$

Die Gleichung der parallel mit sich fortschreitenden Ebene, in welcher die Bewegung des Systems erfolgt, ist

$$v_2 y + v_1 z = v_1 v_2 t.$$

Ferner ist

$$\lambda = 0 \text{ und } T = - \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \frac{v_1^2 + v_2^2}{l^2}.$$

Für den noch specielleren Fall, wo $m_1 = m_2 = m$ und $v_1 = v_2 = v$ ist, hat man $k = \frac{v\sqrt{2}}{l}$, für die Bahn des Massenmittelpunktes

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \\ y &= z \end{aligned} \right\}$$

und für die Ebene, in welcher das System sich bewegt:

$$y + z = vt.$$

Da die Bahn des Massenmittelpunktes auf dieser Ebene senkrecht steht, so sieht man, dass die Bahn desselben im letzteren Falle zugleich die Rotationsachse der Verbindungslinie l ist.

Ist die Anfangslage der Verbindungslinie AB dieselbe, die Richtung von v_1 aber parallel der negativen y -Achse, so ist $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ; \alpha_1 = 90^\circ, \beta_1 = 180^\circ, \gamma_1 = 90^\circ; \alpha_2 = 90^\circ, \beta_2 = 90^\circ, \gamma_2 = 0$; mithin

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0, \omega_0'' \sin \beta_0 = + \frac{v_1}{l}, \omega_0''' \sin \gamma_0 = + \frac{v_2}{l} \text{ und } k^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{l^2}.$$

Ferner ergibt sich

$$x_0' = 1, y_0' = 0, z_0' = 0; x_0'' = y_0'' = z_0'' = 0; a = 0, b = -m_1 v_1, c = +m_2 v_2.$$

$$A = m_1 l, B = C = 0; A_1 = l, B_1 = C_1 = 0; A_2 = 0, B_2 = \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, C_2 = \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Daher bewegt sich der Massenmittelpunkt auf der Geraden:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \\ y &= -\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} z \end{aligned} \right\}.$$

Ausserdem ergibt sich:

$$\cos \alpha = \cos kt; \cos \beta = -\frac{v_1}{kl} \sin kt; \cos \gamma = -\frac{v_2}{kl} \sin kt.$$

Hieraus folgt

$$\frac{da}{dt} = k = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{l}; \frac{d\beta}{dt} = \frac{k v_1 \cos kt}{\sqrt{k^2 l^2 - v_1^2 \sin^2 kt}} = \frac{k v_1 \cos kt}{\sqrt{v_1^2 \cos^2 kt + v_2^2}}; \frac{d\gamma}{dt} = \frac{k v_2 \cos kt}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 \cos^2 kt}}.$$

Die Gleichung der parallel mit sich fortschreitenden Bewegungsebene ist

$$-v_2 y + v_1 z = v_1 v_2 t.$$

Ist $m_1 = m_2 = m$ und $v_1 = v_2 = v$, so hat man für diesen Fall:

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= 2 \frac{v^2}{l^2}; & x &= \frac{1}{2} \\ & & y &= -z \end{aligned} \right\}; \quad -y + z = vt.$$

2) Die Lage der Verbindungslinie AB sei am Beginn der Bewegung wieder dieselbe wie in der vorigen Aufgabe, aber die Richtung von v_1 bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel $\alpha_1 = 90^\circ$, β_1 und $\gamma_1 = 90^\circ - \beta_1$, und die Richtung von v_2 die Winkel $\alpha_2 = 90^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ und $\gamma_2 = 90^\circ - \beta_1$. Alsdann hat man

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0, \omega_0'' \sin \beta_0 = -\frac{v_1 + v_2}{l} \cos \beta_1, \omega_0''' \sin \gamma_0 = -\frac{v_1 - v_2}{l} \sin \beta_1$$

also

$$k^2 = \frac{(v_1 + v_2)^2 - 4 v_1 v_2 \sin^2 \beta_1}{l^2}.$$

$$A_2 = 0, B_2 = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{(v_1 + v_2)^2 - 4 v_1 v_2 \sin^2 \beta_1}} \cos \beta_1, C_2 = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{(v_1 + v_2)^2 - 4 v_1 v_2 \sin^2 \beta_1}} \sin \beta_1.$$

$$\cos \alpha = \cos kt; \cos \beta = \frac{(v_1 + v_2) \cos \beta_1}{N} \sin kt; \cos \gamma = \frac{(v_1 - v_2) \sin \beta_1}{N} \sin kt,$$

wo

$$N = \sqrt{(v_1 + v_2)^2 - 4 v_1 v_2 \sin^2 \beta_1}.$$

Für die Bahn des Massenmittelpunktes findet man

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \\ y &= \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2) \cotg \beta_1}{m_1 v_1 + m_2 v_2} z \end{aligned} \right\}$$

und für die Bewegungsebene:

$$(v_1 - v_2) y - \cotg \beta_1 \cdot (v_1 + v_2) z = -2 v_1 v_2 t \cos \beta_1.$$

Für den noch specielleren Fall, wo $m_1 = m_2 = m$ und $v_1 = v_2 = v$ ist, gehen die letzten beiden Resultate über in:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

und

$$z = vt \sin \beta_1.$$

3. Die Richtungen von v_1 und v_2 fallen in dieselbe Ebene und zwar sei v_2 parallel v_1 in entgegengesetzter Richtung. Unter der Voraussetzung

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ; \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1, \beta_2 = 180^\circ + \beta_1, \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

ergibt sich

$$\frac{da}{dt} = \frac{v_1 + v_2}{l} \sin \alpha_1;$$

$$a = (m_1 v_1 - m_2 v_2) \cos \alpha_1; \quad b = (m_1 v_1 - m_2 v_2) \cos \beta_1; \quad c = (m_1 v_1 - m_2 v_2) \cos \gamma_1;$$

folglich bewegt sich der Massenmittelpunkt auf der Geraden:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos \alpha_1}{\cos \gamma_1} z + \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \\ y &= \frac{\cos \beta_1}{\cos \gamma_1} z. \end{aligned} \right\}$$

Die Gleichung der Bewegungsebene ist

$$y = \frac{\cos \beta_1}{\cos \gamma_1} z,$$

und die beiden Punkte A und B bewegen sich resp. auf den Peripherien der Kreise:

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(x - \left(pt \cos \alpha_1 + \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \right) \right)^2 + \left(y - pt \cos \beta_1 \right)^2 + \left(z - pt \cos \gamma_1 \right)^2 = \left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \right)^2 \\ &y = \frac{\cos \beta_1}{\cos \gamma_1} z \\ &\left(x - \left(pt \cos \alpha_1 + \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \right) \right)^2 + \left(y - pt \cos \beta_1 \right)^2 + \left(z - pt \cos \gamma_1 \right)^2 = \left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

wo $p = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ ist.

Ist $m_1 = m_2$ und $v_1 = v_2$, so sind die Koordinaten des ruhenden Massenmittelpunktes $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = 0$; ferner $\frac{da}{dt} = \frac{2v}{l} \sin \alpha_1$, und die beiden Punkte A und B bewegen sich auf der Peripherie des Kreises

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &y = \frac{\cos \beta_1}{\cos \gamma_1} z. \end{aligned} \right.$$

4) Zu denselben Voraussetzungen bezüglich der Lage von AB am Anfange der Bewegung trete noch die hinzu, dass die Richtungen von v_1 und v_2 in die xz -Ebene fallen. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ; \quad \alpha_1 = \alpha_1, \beta_1 = 90^\circ, \gamma_1 = 90^\circ - \alpha_1;$$

$$\alpha_2 = \alpha_2, \beta_2 = 90^\circ, \gamma_2 = 90^\circ - \alpha_2.$$

Hieraus folgt

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0, \omega_0'' \sin \beta_0 = 0, \omega_0''' \sin \gamma_0 = - \frac{v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2}{1},$$

$$\text{also } k^2 = \frac{(v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2)^2}{1^2} \text{ und } k = \frac{v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2}{1}.$$

Da $\cos \alpha = \cos kt$, also $\alpha = kt$ ist, so hat man

$$\frac{d\alpha}{dt} = k = \frac{v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2}{1}.$$

Ferner ist

$$\frac{d\beta}{dt} = 0, \frac{d\gamma}{dt} = -k = - \frac{v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2}{1}.$$

Man erkennt aus diesen Resultaten, dass unter obigen Voraussetzungen die Bewegung des Systems in der xz-Ebene stattfindet.

Es sei hier noch erwähnt, dass man zur Lösung dieser Aufgabe die letzten Resultate der allgemeinen Lösung entbehren konnte. Denn für den Fall, dass die Richtungen von v_1 und v_2 in die xz-Ebene fallen, ist $\sin \gamma = \cos \alpha$, also $\sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma = 1$, folglich

$$\sin \gamma \cdot \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} = - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

mithin

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{d\alpha}{dt}.$$

Demnach ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \text{ oder } \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \cos^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \cos^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = 0:$$

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0,$$

woraus folgt, dass $\frac{d\alpha}{dt} = c$ d. h. gleich einer konstanten Grösse ist. Da nun $\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{d\gamma}{dt} = - \omega_0'''$ ist, so hat man also

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2}{1}.$$

II.

15. Ausser den Momentankräften seien die Massenpunkte des Systems nun noch den Wirkungen der Schwerkraft unterworfen. Da alsdann $X' = X'' = 0$, $Y' = Y'' = 0$, $Z' = Z'' = -g$ ist, so lautet unter der Voraussetzung, dass die momentanen Impulse am Anfange der Bewegung des Systems erfolgen, die Grundgleichung nach dem d'Alembert'schen Princip:

$$\begin{aligned} & m_1 \left(v_1 \cos \alpha_1 - \frac{dx'}{dt} \right) \delta x' + m_2 \left(v_2 \cos \alpha_2 - \frac{dx''}{dt} \right) \delta x'' \\ & + m_1 \left(v_1 \cos \beta_1 - \frac{dy'}{dt} \right) \delta y' + m_2 \left(v_2 \cos \beta_2 - \frac{dy''}{dt} \right) \delta y'' \\ & + m_1 \left(v_1 \cos \gamma_1 - \frac{dz'}{dt} - gt \right) \delta z' + m_2 \left(v_2 \cos \gamma_2 - \frac{dz''}{dt} - gt \right) \delta z'' = 0, \end{aligned}$$

welche in Verbindung mit den Variationen der Gleichung $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 = 1^2$ zu den Beziehungen führt:

$$m_1 \frac{dx'}{dt} + m_2 \frac{dx''}{dt} = a; \quad m_1 \frac{dy'}{dt} + m_2 \frac{dy''}{dt} = b;$$

$$m_1 \frac{dz'}{dt} + m_2 \frac{dz''}{dt} = c - (m_1 + m_2)gt.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt:

$$m_1 x' + m_2 x'' = at + A; \quad m_1 y' + m_2 y'' = bt + B; \quad m_1 z' + m_2 z'' = ct + C - \frac{m_1 + m_2}{2} g t^2$$

Bezeichnen x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes, so ist

$$x = \frac{a}{m_1 + m_2} t + \frac{A}{m_1 + m_2}; \quad y = \frac{b}{m_1 + m_2} t + \frac{B}{m_1 + m_2}; \quad z = \frac{c}{m_1 + m_2} t + \frac{C}{m_1 + m_2} - \frac{g}{2} t^2.$$

Wir eliminieren t mittelst der zweiten dieser Gleichungen, so resultiert

$$\begin{cases} bx - ay = \frac{Ab - Ba}{m_1 + m_2} \\ bz = \frac{bc + Bg(m_1 + m_2)}{b} y - \frac{(m_1 + m_2)^2}{2b} g y^2 + \frac{2b(Cb - Bc) - B^2 g(m_1 + m_2)}{2b(m_1 + m_2)}. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ist die einer Ebene, welche auf der xy -Ebene senkrecht steht, während die zweite Gleichung die eines parabolischen Cylinders ist, welcher auf der yz -Ebene senkrecht steht. Mithin bewegt sich der Schwerpunkt auf der durch diese beiden Gleichungen bestimmten Parabel.

16. Ferner ist

$$x' = \frac{at + A}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \alpha; \quad y' = \frac{bt + B}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \beta;$$

$$z' = \frac{ct + C}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \gamma - \frac{g}{2} t^2;$$

$$x'' = \frac{a}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \alpha; \quad y'' = \frac{b}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \beta;$$

$$z'' = \frac{c}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \gamma - \frac{g}{2} t^2,$$

folglich

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{a - m_2 l \omega' \sin \alpha}{m_1 + m_2}; \quad \frac{dx''}{dt} = \frac{a + m_1 l \omega' \sin \alpha}{m_1 + m_2};$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{b - m_2 l \omega'' \sin \beta}{m_1 + m_2}; \quad \frac{dy''}{dt} = \frac{b + m_1 l \omega'' \sin \beta}{m_1 + m_2};$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{c - m_2 l \omega''' \sin \gamma - (m_1 + m_2) g t}{m_1 + m_2}; \quad \frac{dz''}{dt} = \frac{c + m_1 l \omega''' \sin \gamma - (m_1 + m_2) g t}{m_1 + m_2}.$$

Substituiert man diese Werte in den Gleichungen

$$\frac{\frac{dx'}{dt} - v_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha} = \frac{\frac{dy'}{dt} - v_1 \cos \beta_1}{\cos \beta} = \frac{\frac{dz'}{dt} - v_1 \cos \gamma_1 + g t}{\cos \gamma},$$

welche sich aus den Ausdrücken für λ ergeben, so findet man, dass das Glied $g t$ sich hebt, woraus folgt, dass die Schwerkraft ohne Einfluss auf die Winkelgeschwindigkeit ist.

17. Nach dem d'Alembert'schen Princip hat man auch

$$m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} = 2 T l \cos \alpha, \quad m_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} = - 2 T l \cos \alpha$$

$$m_1 \frac{d^2 y'}{dt^2} = 2 T l \cos \beta, \quad m_2 \frac{d^2 y''}{dt^2} = - 2 T l \cos \beta$$

$$m_1 \frac{d^2 z'}{dt^2} = 2 T l \cos \gamma - m_1 g, \quad m_2 \frac{d^2 z''}{dt^2} = - 2 T l \cos \gamma - m_2 g.$$

Demgemäss resultiert

$$\frac{dL}{dt} = 2Tl \left\{ \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt} \right) \cos \alpha + \left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy''}{dt} \right) \cos \beta + \left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz''}{dt} \right) \cos \gamma \right\} - \left(m_1 \frac{dz'}{dt} + m_2 \frac{dz''}{dt} \right) g.$$

Da aber

$$\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt} = -l \omega' \sin \alpha, \quad \frac{dy'}{dt} - \frac{dy''}{dt} = -l \omega'' \sin \beta,$$

$$\frac{dz'}{dt} - \frac{dz''}{dt} = -l \omega''' \sin \gamma, \quad m_1 \frac{dz'}{dt} + m_2 \frac{dz''}{dt} = c - (m_1 + m_2) g t,$$

so ist

$$\frac{dL}{dt} = -2Tl^2 (\omega' \sin \alpha \cos \alpha + \omega'' \sin \beta \cos \beta + \omega''' \sin \gamma \cos \gamma) - \{ c - (m_1 + m_2) g t \} g,$$

also

$$\frac{dL}{dt} = (m_1 + m_2) g^2 t - c g$$

und

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} g^2 t^2 - c g t + \text{const.}$$

$$\left(\text{const.} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + m_1 m_2 l^2 k^2}{2(m_1 + m_2)} \right)$$

18. Ferner findet man:

$$m_1 z' \frac{d^2 y'}{dt^2} + m_2 z'' \frac{d^2 y''}{dt^2} = 2Tl (z' - z'') \cos \beta = 2Tl^2 \cos \beta \cos \gamma,$$

$$m_1 y' \frac{d^2 z'}{dt^2} + m_2 y'' \frac{d^2 z''}{dt^2} = 2Tl (y' - y'') \cos \gamma - (m_1 y' + m_2 y'') g = 2Tl^2 \cos \beta \cos \gamma - (bt + B) g$$

$$m_1 z' \frac{d^2 x'}{dt^2} + m_2 z'' \frac{d^2 x''}{dt^2} = 2Tl (z' - z'') \cos \alpha = 2Tl^2 \cos \alpha \cos \gamma,$$

$$m_1 x' \frac{d^2 z'}{dt^2} + m_2 x'' \frac{d^2 z''}{dt^2} = 2Tl (x' - x'') \cos \gamma - (m_1 x' + m_2 x'') g = 2Tl^2 \cos \alpha \cos \gamma - (at + A) g,$$

$$m_1 y' \frac{d^2 x'}{dt^2} + m_2 y'' \frac{d^2 x''}{dt^2} = 2Tl (y' - y'') \cos \alpha = 2Tl^2 \cos \alpha \cos \beta,$$

$$m_1 x' \frac{d^2 y'}{dt^2} + m_2 x'' \frac{d^2 y''}{dt^2} = 2Tl (x' - x'') \cos \beta = 2Tl^2 \cos \alpha \cos \beta,$$

folglich

$$m_1 \left(z' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) + m_2 \left(z'' \frac{d^2 y''}{dt^2} - y'' \frac{d^2 z''}{dt^2} \right) = (bt + B) g$$

$$m_1 \left(x' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) + m_2 \left(x'' \frac{d^2 z''}{dt^2} - z'' \frac{d^2 x''}{dt^2} \right) = -(at + A) g$$

$$m_1 \left(y' \frac{d^2 x'}{dt^2} - x' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) + m_2 \left(y'' \frac{d^2 x''}{dt^2} - x'' \frac{d^2 y''}{dt^2} \right) = 0$$

oder

$$m_1 d \left(z' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dz'}{dt} \right) + m_2 d \left(z'' \frac{dy''}{dt} - y'' \frac{dz''}{dt} \right) = (bt + B) g dt$$

$$m_1 d \left(x' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dx'}{dt} \right) + m_2 d \left(x'' \frac{dz''}{dt} - z'' \frac{dx''}{dt} \right) = -(at + A) g dt$$

$$m_1 d \left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt} \right) + m_2 d \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = 0.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$m_1 \left(z' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dz'}{dt} \right) + m_2 \left(z'' \frac{dy''}{dt} - y'' \frac{dz''}{dt} \right) = \left(\frac{b}{2} t + B \right) g t + c'$$

$$m_1 \left(x' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dx'}{dt} \right) + m_2 \left(x'' \frac{dz''}{dt} - z'' \frac{dx''}{dt} \right) = - \left(\frac{a}{2} t + A \right) g t + c''$$

$$m_1 \left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt} \right) + m_2 \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = c'''$$

und nach Einsetzung der Werte für $x', y', z', x'', \dots, \frac{dx'}{dt}, \dots$:

$$\frac{Cb - Bc}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega''' \cos \beta \sin \gamma - \omega'' \sin \beta \cos \gamma) = c'$$

$$\frac{Ac - Ca}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega' \sin \alpha \cos \gamma - \omega''' \cos \alpha \sin \gamma) = c''$$

$$\frac{Ba - Ab}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 (\omega'' \cos \alpha \sin \beta - \omega' \sin \alpha \cos \beta) = c'''.$$

Wir multiplicieren die erste dieser Gleichungen mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\cos \beta$, die dritte mit $\cos \gamma$ und addieren die Produkte, so ist, wenn wir zugleich beachten, dass

$$\cos \alpha = \frac{(m_1 + m_2) x' - (at + A)}{m_2 l}, \quad \cos \beta = \frac{(m_1 + m_2) y' - (bt + B)}{m_2 l},$$

$$\cos \gamma = \frac{(m_1 + m_2) z' - (ct + C)}{m_2 l} + \frac{(m_1 + m_2)}{2 m_2 l} g t^2 \text{ ist:}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (m_1 + m_2) c' + Bc - Cb \right\} x' + \left\{ (m_1 + m_2) c'' + Ca - Ac \right\} y' + \left\{ (m_1 + m_2) c''' + Ab - Ba \right\} z' \\ &= (at + A) c' + (bt + B) c'' + (ct + C) c''' - \left\{ (m_1 + m_2) c''' + Ab - Ba \right\} \frac{g}{2} t^2. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer parallel mit sich selbst sich fortbewegenden Ebene. Man sieht also, dass die Verbindungslinie AB auch in diesem Falle in einer Ebene rotiert, welche parallel mit sich selbst fortschreitet. Man erkennt zugleich, dass diese Ebene parallel der „Bewegungsebene“ ist, welche man für den Fall erhält, wo nur Momentankräfte auf das System wirken. Demnach bewegt sich der Schwerpunkt des Systems im allgemeinen auf einer Parabel nach den Gesetzen des schiefen Wurfs, während die Verbindungslinie l mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einer parallel mit sich selbst fortschreitenden Ebene rotiert.

19. Wir berechnen zum Schluss noch die Resultate für den einfachsten Fall der Anfangslage des Systems, wo AB mit der xAchse und B mit dem Anfangspunkte der Koordinaten zusammenfällt. Für diesen Fall ist zur Zeit $t = 0$:

$$x_0' = l, y_0' = z_0' = 0; x_0'' = y_0'' = z_0'' = 0; \alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ;$$

$$A = m_1 l, B = C = 0; A_1 = 1, B_1 = C_1 = 0.$$

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0; \omega_0'' \sin \beta_0 = - \frac{v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2}{l}; \omega_0''' \sin \gamma_0 = - \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{l};$$

daher

$$k^2 = \frac{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2}{l^2} \text{ und}$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$m_1 \left(z' \frac{dy'}{dt} - y' \right)$$

$$m_1 \left(x' \frac{dz'}{dt} - z' \right)$$

$$m_1 \left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \right)$$

und nach Einsetzung der Werte

$$\frac{Cb - Bc}{m_1 + m_2} +$$

$$\frac{Ac - Ca}{m_1 + m_2} +$$

$$\frac{Ba - Ab}{m_1 + m_2} +$$

Wir multiplizieren die $\cos \gamma$ und addieren die Produkte

$$\cos \alpha = \frac{(m_1 + m_2) x'}{m_2 l}$$

$$\cos \gamma =$$

$$\left\{ (m_1 + m_2) c' + Bc - Cb \right\} x'$$

$$= (at + A) c' + (bt +$$

Dies ist die Gleichung also, dass die Verbindungslinie A sich selbst fortschreitet. Man e welche man für den Fall erhält, sich der Schwerpunkt des S. des schiefen Wurfes, wä geschwindigkeit in einer pa

19. Wir berechnen zun des Systems, wo AB mit der x. Für diesen Fall ist zur Zeit t =

$$x_0' = l, y_0' = z_0' =$$

$$A =$$

$$\omega_0' \sin \alpha_0 = 0; \omega_0'' \sin \beta_0 =$$

daher

$$k^2 = \frac{(v_1 \cos$$

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

M

Y

C

K

G

W

B

G

R

$$(t + B) gt + c'$$

$$(t + A) gt + c''$$

$$\cos \gamma) = c'$$

$$\sin \gamma) = c''$$

$$\cos \beta) = c'''$$

zweite mit $\cos \beta$, die dritte mit dass

$$- m_2) y' - (bt + B) \frac{m_2 l}{m_2 l}$$

$$gt^2 \text{ ist:}$$

$$(m_1 + m_2) c''' + Ab - Ba \} z'$$

$$c''' + Ab - Ba \} \frac{g}{2} t^2.$$

ortbewegenden Ebene. Man sieht bene rotiert, welche parallel mit rallel der „Bewegungsebene“ ist, em wirken. Demnach bewegt Parabel nach den Gesetzen mit konstanter Winkel sitenden Ebene rotiert.

einfachsten Fall der Anfangslage der Koordinaten zusammenfällt.

$$\gamma_0 = 90^\circ, \gamma_0 = 90^\circ;$$

$$= 0.$$

$$= - \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{1};$$

$$\cos \gamma_2)^2 \text{ und}$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2}{N}, \quad C_2 = \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{N}$$

$$\left(N = \sqrt{(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2)^2} \right).$$

Man findet weiter:

$$\cos \alpha = \cos kt, \text{ also } \alpha = kt.$$

$$\cos \beta = \frac{v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2}{N} \sin kt$$

$$\cos \gamma = \frac{v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2}{N} \sin kt.$$

Ferner ist

$$c' = 0,$$

$$c'' = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \left\{ c + m_2 (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) \right\},$$

$$c''' = -\frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \left\{ b + m_2 (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) \right\};$$

demgemäss hat man für die „Bewegungsebene“ die Gleichung:

$$\begin{aligned} & (v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) y - (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) z \\ & = \frac{(v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2) b - (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) c}{m_1 + m_2} \cdot t + (v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) \frac{g}{2} t^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Parabel lautet

$$\left. \begin{aligned} bx - ay - \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \cdot b \\ 2cy - (m_1 + m_2)^2 \frac{g}{b} y^2 = 2bz \end{aligned} \right\}$$

und die Gleichungen der beiden Kreise, auf deren Peripherien sich die beiden Punkte A und B bewegen:

$$\left. \begin{aligned} \left(x - \frac{at + m_1 l}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(y - \frac{bt}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(z - \frac{ct}{m_1 + m_2} - \frac{g}{2} t^2 \right)^2 &= \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l^2 \\ qy - pz &= \frac{bq - cp}{m_1 + m_2} t + \frac{g}{2} pt^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(x - \frac{at + m_1 l}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(y - \frac{bt}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(z - \frac{ct}{m_1 + m_2} - \frac{g}{2} t^2 \right)^2 = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} l^2,$$

$$\text{wo } p = v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2 \text{ und } q = v_1 \cos \gamma_1 - v_2 \cos \gamma_2.$$



Berichtigung.

Pag. 17, Z. 7 von oben: Da $\sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \sin \beta \cos \beta \frac{d\beta}{dt} + \sin \gamma \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$ ist, so ist auch $\omega_0' \sin 2\alpha_0 + \omega_0'' \sin 2\beta_0 + \omega_0''' \sin 2\gamma_0 = 0$, mithin

$$V_1 = \frac{m_2 k}{m_1 + m_2} l \text{ und } V_2 = \frac{m_1 k}{m_1 + m_2} l.$$