

PERSPECTIVAE RECTILINEAE

AD JUVANDAS GEOMETRICAS EXERCITATIONES ADOLESCENTIBUS PROPOSITAE.

PARS ALTERA.

Anno **CIDCCCCXXXVIII.** perspectivae rectilineae leges quasdam generales edidimus et inde a §. 1 usque ad §. 23 imprimis docuimus, quae ratione imago et recti et obliqui ope tangentium delineari possit, quaecunque detur planum, in quo angulus designandus reperiatur. Nunc jam angulorum iconicorum crura et plana diligentius considerari, crurum longitudinem, planorum magnitudinem, perpendicularum altitudinem judicari, in his distantiae a tabula d pariter atque a plano verticali e rationem haberi eaque omnia cum oculi distantia D a tabula ejusdemque altitudine A comparari et comparatione facta hic demonstrari opus est.

§. 24. In Fig. I. hujus libelli constat ap esse imaginem lineae ag in plano horizontali infinite protractae et fundamentalem ipsamque tabulam sub angulo $cag = go - v = t$ secantis, cp vero esse imaginem lineae cg .

Quum adc et pRp sint parallelae et quum oculi altitudo $Rd = A$ §. 9. ad eas sit normalis, ap hypotenusam exhibebit linearum Rd et $[ad + Rp]$ tanquam cathetorum anguli rectanguli.

Quodsi gd , sive puncti a distantia a plano verticali per litteram e atque Rp [coll. §. 18.] per formulam D. Tang. v exprimatur, quadratum totius ap , sive z^2 erit $= A^2 + [e + D. \text{Tg. } v]^2$.

Itaque imago $ap = z$ lineae ag in infinitum protractae ex A , e , D et angulo v exputari potest. Simulac $ap = z$ dirigatur in punctum principale R , ex D . Tang. v fiet o et z^2 erit $= A^2 + e^2$.

Exeat puncto g infinitae ag radius luminaris gO per b terminum imaginis $ap = ab$ in oculum O ; quum op et ag sint parallelae § 18, angulus quoque $abg = Obp$ et $pOb = bga$, triangula abg et Obp erunt similia. Itaque erit $Op : ag = pb : ab$ sive $Op + ag : ag = pb + ab : ab$, sive $Op + ag : ag = pa : ab$; ab igitur est ea pars lineae pa , quam fractio $\frac{ag}{Op + ag}$ ostendit.

Sit $Op = D'$, $ag = d$, $pa = z$, $ab = \mathfrak{z}$, erit $D' + d : d = Z : \mathfrak{z}$ et $D' + d : D' = Z : Z - \mathfrak{z}$.

Ergo imago ab sive $\mathfrak{z} = \frac{d}{D' + d} \times Z$ et imago bp sive $Z - \mathfrak{z} = \frac{D'}{D' + d} \times Z$.

Didicimus autem §. 18. oculi distantiam $Op = Z$ esse D . Sec. $v = D$. Cosec. t ; ergo $\mathfrak{z}$ sive imago ab lineae ag erit $= \frac{d}{D \cdot \text{Sec. } v + d} \times Z = \frac{d \oslash v}{D + d \oslash v} \cdot Z$, et quia anguli v et t complent 90 gradus, $ab = \mathfrak{z}$ erit $= \frac{d \text{ Sin. } t}{D + d \text{ Sin. } t} \cdot Z$.

Altera vero pars $bp = Z - \mathfrak{z} = \frac{D \cdot \text{Sec. } v}{D \cdot \text{Sec. } v + d} \cdot Z = \frac{D}{D + d \oslash v} \cdot Z = \frac{D}{D + d \text{ Sin. } t} \cdot Z$.

In his formulis D significat datam oculi distantiam rectam OR , D' autem oculi distantiam obliquam Op , $d = ag$, quae tabulam sub angulo dato t et planum verticale sub angulo v secat.

Si linea objectiva ag ad tabulam normalis, ad planum igitur verticale parallela cogitatur, erunt $\text{Sin. } t$ et $\oslash v = 1$, $\mathfrak{z} = \frac{d}{D + d} \cdot Z$. Qua in formula d designat puncti g distantiam gh rectam, cujus imago est bd . Pari modo $bR = \frac{d}{D + d} \cdot Z$.

Itaque algebraica ratione et arithmetico calculo repertus est locus imaginis b , puncti archetypi g , pariter atque linearum ab et hb , quae sunt imagines crurum archetyporum ag et hg .

§. 25. Idem facili nunc invenitur constructione : Obviam sibi invicem ponantur in tabula lineae Op et ag parallelae Fig. 2 ita, ut in punctis p et a haereant et in suis planis Opp et agc Fig. 1 maneant, et ut radius opticus gO cernatur decurtatus in tabula. Ob servatum projectum et parallelismum linearum Op et ag triangula abg et Obp manebunt similia neque ratio linearum $ap : ab = D' + d : d$ mutabitur. §. 24.

Datis igitur punctis p in terminali Op per Rp [= D . Tang. $v = D$. Tg. t . §. 18] et a in basi per longitudinem ag et ductis ap et Og decussatim, imagines b et ab facili negotio adumbrabuntur.

§. 26. Jam cognita ratione $ap : ab$ et $ap : bp$ similiter reperietur magnitudo perspectiva cujusvis lineae, quae tabulae parallela ab illo puncto g quaquaversum proficiscitur. Cujusmodi imagines sunt in Fig. 3 bf horizontalis et bm verticalis in eodem plano positae.

Si enim lineas archetypas ad , ah imaginum bf , bm puncto tabulae a lineae ap apposueris, vere parallelae ad , bf inter graphice parallelas ap , hp et ap , dp erunt aequales §. 15. d.

Itaque e puncto p ductis pa , pd , ph habebit pictor imagines bf et bm lineae horizontalis ad et perpendicularis ah .

Ceterum patet esse $ad : bf$ et $ah : bm = pa : ph = D' + d : D' = D$. Sec. $v + d : D$. Sec. $v = D$. Cosec. $t + d : D$. Cosec. $t = D + d \text{Cosec. } v : D = D + d \text{Sin. } t : D$.

$$\begin{aligned} \text{Itaque lineae horizontalis } ad \text{ imago } bf &= \frac{D'}{D' + d} \times ad \\ &= \frac{D \cdot \text{Sec. } v}{D \cdot \text{Sec. } v + d} \times ad = \frac{D}{D + d \text{Cosec. } v} \times ad = \frac{D}{D + d \text{Sin. } t} \times ad, \\ \text{et perpendiculari } ah \text{ imago } bm \text{ semper erit} &= \frac{D'}{D' + d} \times ah \\ &= \frac{D \cdot \text{Sec. } v}{D \cdot \text{Sec. } v + d} \times ah = \frac{D \cdot \text{Cosec. } t}{D \cdot \text{Cosec. } t + d} \times ah = \frac{D}{D + d \text{Cosec. } v} \times ah \\ &= \frac{D}{D + d \text{Sin. } t} \times ah. \end{aligned}$$

Si ab , ad quam imagines bf et bm sunt normales, non in p , sed in R dirigatur, h. e. si ab fiat plano verticali parallela sive, quod idem denotat, tabulae normalis, angulus v Secantis et t Cosecantis erit nullus, op , dp , hp convenient in puncto principali R , $\mathcal{S}v$ et $\text{Sin. } t$ aequabuntur unitati et fractio $\frac{D'}{D' + d}$ mutabitur in $\frac{D}{D + d}$ sine virgula cf. §. 24.

Ad inveniendam iconem loci perspectivi b obviam sibi ponebantur in tabula lineae Op et ag ita, ut ipsae parallelae manerent, ap vero et gO decussarentur cf. §. 25 et Fig. 2.

Sed illud punctum O mensurum definiri et construi potest etiam aliis modis: primum ita, ut oculi distantia obliqua xp Fig. 3., quae est Op . Fig. 4. ope circinni transferatur in po horizontalem; deinde per tangentem anguli ROo , qui vel $45^\circ - \frac{1}{2}v$ vel $\frac{1}{2}t$ sumendus est. Nam $2v + 2t = 180$, porro $v + \frac{1}{2}t = 45 + \frac{1}{2}v = 90 - \frac{1}{2}t$, denique $\frac{1}{2}t = 45^\circ - \frac{1}{2}v$. In triangulo igitur aequicruro pOo Fig. 4 OR est $= D$, $Rp = D$. Tang. v , $Ro = D$. Tg. $[45^\circ - \frac{1}{2}v] = D$. Tang. $\frac{1}{2}t$. Ergo $pO = po = D$. Sec. $v = D$. Cosec. $t = D$. Tg. $v + D$. Tang. $[45^\circ - \frac{1}{2}v] = D$. Tg. $v + D$. Tg. $\frac{1}{2}t$.

Omnino ars lineas perspectivae metiendi nititur his fere propositionibus:

- a) *Triangulum perspectivum, in quo habentur duo anguli aequales, erit quoque aequicrurum et vice versa.*
- b) *Graphice parallelae inter graphice parallelas sunt aequales cf. §. 15. d.*
- c) *Graphice parallelarum anguli correspondentes sunt aequales.*

§. 27. Esto ap . Fig. 5. imago lineae amk in verticali plano infinite prolongatae atque tabulam et fundamentalem ac sub angulo $ham = t$, planitiem vero horizontalem sub angulo $hma = h$ secantis, esto etiam cp imago similis lineae cmf in infinitum prolongatae; duce §. 24. erit quadratum totius $ap = Z^2 = ad^2 + [dR + Rp]^2 = e^2 + [A + D \cdot \text{Tang. } h]^2$. Sed si h fuerit angulus nullus, erit $Z^2 = e^2 + A^2$ ut §. 24.

Quoniam ak et Op cogitari debent parallelae, salva triangulorum amb et Opb similitudine crura Op et am [ut §. 25.] in tabulae lineis pp et ac parallelis deponi poterunt. Itaque etiam hic $Op + am : am = ap : ab$ et $Op + am : Op = ap : bp$, id est $D' + d : d = Z : \mathfrak{z}$ et $D' + d : D' = Z : Z - \mathfrak{z}$. Jam vero $Op = D' = D$. Sec. $h = D$. Cosec. t , quod in hac figura $h + t = 90^\circ$.

$$\text{Ergo } ab = z = \frac{d \odot h}{D + d \odot h} \times Z = \frac{d \sin. t}{D + d \sin. t} \times Z$$

$$\text{et } bp = Z - z = \frac{D}{D + d \odot h} \times Z = \frac{D}{D + d \sin. t} \times Z.$$

Si angulus $amh = h$ fiat nullus, am ad tabulam erit normalis atque ita $z = \frac{d}{D + d} \cdot Z$, $Z - z = \frac{D}{D + d} \cdot Z$. Scopi punctum p concidit cum puncto principali R . Quibus rebus ita constitutis imago bm Fig. 3. cum terminali pp Fig. 5. esset parallela et fb Fig. 3. foret in Fig. 5. instar perpendiculi. Mutatis mutandis earundem linearum quantitas erit eadem atque in §. 25.

§. 28. Perlustratis quibusdam lineis perspectivis licebit nunc earum quantitatem ad numeros vocare:

Sit in §§ 24 et 25. $ag = d$ aliqua decimalis pars oculorum distantiae vel obliquae vel rectae. Sit etiam lineae ag Fig. 1, 3, 5, 6, 7, 8 ejusdemque imaginis ap declinatio a plano verticali, sive angulus $v = 60$ graduum ergo declinatio earundem linearum a tabula sive angulus $t = 30$ graduum. Si recta oculi distantia D ad mensuram scalae geometricae relata est 5 pedum, oculi distantia obliqua $Op = D' = D$. Sec. $v = D$. Cosec. $t = D$. Sec. 60° erit 10 pedum. Sit denique oculi altitudo $A = 5$ pedum et $ad = e$ sive puncti a distantia a plano verticali $Rd = \frac{13}{4}$.

Proinde D . Tang. $v = D$. Tg. 60° erit $= 5 \sqrt{3} = \text{circiter } \frac{35}{4}$
et $Z^2 = A^2 + [D \cdot \text{Tang } v \pm e]^2 = \left(\frac{48}{4}\right)^2 + 5^2 = 169$, ergo $ap = Z = 13$ pedum.

Quodsi d sumitur $= 1$ erit $\frac{d}{D' + d} \cdot Z = \frac{1}{11} \cdot 13 = \frac{13}{11}$. Si denique in Figg. 1, 3, 5, 6, 7, 8 ab sit imago archetypae $ag = d$, habebis Fig. 3 ejus profunditatis non solum horizontalem $bf = \frac{10}{11} \times ad$ et $bm = \frac{10}{11} \times ah$, sed etiam geometricam longitudinem primi, secundi, tertii pedis imaginis ab , nimirum $= \frac{10}{(10 + d)(9 + d)} \times Z = \frac{13}{11}$ et ceteros in sequenti tabula:

Pro $ag = d$ Fig. 1, 3, 5, 6, 7, 8 imago ab Pro ad et $ah = d'$ imagines bf
 erat $= \frac{d}{D' + d} \cdot Z = \frac{d}{D. \text{ Sec. v.} + d} \cdot Z$ et bm Fig. 3 erunt $= \frac{D'}{D' + d} \times d'$
 pedes

ergo pro $d = 1$ erit	$= \frac{1}{11} \times 13 = 1, 1$	$\frac{10}{11} \cdot d'$
$d = 2$ — —	$= \frac{2}{12} \times 13 = 2, 1$	$\frac{10}{12} \cdot d'$
$d = 3$ — —	$= \frac{3}{13} \times 13 = 3$	$\frac{10}{13} \cdot d'$
$d = 4$ — —	$= \frac{4}{14} \times 13 = 3, 7$	$\frac{10}{14} \cdot d'$
$d = 5$ — —	$= \frac{5}{15} \times 13 = 4, 3$	$\frac{10}{15} \cdot d'$
$d = 6$ — —	$= \frac{6}{16} \times 13 = 4, 8$	$\frac{10}{16} \cdot d'$
$d = 7$ — —	$= \frac{7}{17} \times 13 = 5, 3$	$\frac{10}{17} \cdot d'$
$d = 8$ — —	$= \frac{8}{18} \times 13 = 5, 8$	$\frac{10}{18} \cdot d'$
$d = 9$ — —	$= \frac{9}{19} \times 13 = 6$	$\frac{10}{19} \cdot d'$
$d = 10$ — —	$= \frac{1}{2} \times 13 = 6, 5$	$\frac{1}{2} \cdot d'$
$d = 20$ — —	$= \frac{2}{3} \times 13 = 8, 6$	$\frac{1}{3} \cdot d'$
$d = 30$ — —	$= \frac{3}{4} \times 13 = 9, 7$	$\frac{1}{4} \cdot d'$

$$\frac{D \cdot Z}{(D' + d)(D' + d - 1)} = \frac{10}{(10 + d)(9 + 9)} \times Z$$

$$\text{pes primus } \frac{10}{11 \times 10} \cdot 13 = 1,1$$

$$\text{— secundus } \frac{10}{12 \times 11} \cdot 13 = 0,98$$

$$\text{— 3tius } \frac{10}{13 \times 12} \cdot 13 = 0,80$$

$$\text{— 4tus } \frac{10}{14 \times 13} \cdot 13 = 0,70$$

$$\text{— 5tus } \frac{10}{15 \times 14} \cdot 13 = 0,60$$

$$\text{— 6tus } \frac{10}{16 \times 15} \cdot 13 = 0,54$$

$$\text{— 7mus } \frac{10}{17 \times 16} \cdot 13 = 0,47$$

$$\text{— 8vus } \frac{10}{18 \times 17} \cdot 13 = 0,42$$

$$\text{— 9nus } \frac{10}{19 \times 18} \cdot 13 = 0,38$$

$$\text{— 10mus } \frac{10}{20 \times 19} \cdot 13 = 0,34$$

$$\text{— 20mus } \frac{10}{30 \times 29} \cdot 13 = 0,15$$

$$\text{— 30mus } \frac{10}{40 \times 39} \cdot 13 = 0,08$$

§. 29. Jam vero esto in Fig. 6. *am* linea ejusmodi, quae in plano non amplius horizontali sed horizontalidio (cf. §. 11.) cubet et a planis directoriis *H*, *V*, *T* ita declinet, ut anguli declinationis sint *h*, *v*, *t*. Planum *amf* cum angulo *m* vel surgat et superet horizontem, vel descendat. Linea terminalis *dpc* cum scopo *p* cogitetur vel infra vel supra punctum oculare *R*, semper *p* erit in verticali *pRz*.

Quodsi planum fundamentale *amf* cum ejusdem plano finali *Odc* sub horizontem angulo *h* descendit, punctum *d* erit sub *q* et *p* sub *R*, lineae *ad* quadratum $= Z^2 = [a\pi + pd]^2 + [\pi R - qd]^2 = [e + D. \text{Sec. } h. \text{Tang } v]^2 + [A - D. \text{Tang. } h]^2$.

Utroque in casu *ad* est imago lineae *am* in infinitum protractae, locus *m* adumbratur puncto *b*, linea vero *am* finita per iconem *ab*. Radius *mO* opticus pertinet ad triangula similia *abm* et *Obd*, ex quibus derivantur proportionales: *Od + am : Od = ad : ab* et *Od + am : Od = ad : db*, hoc est $D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v + d : d = Z : \mathfrak{z}$ et $D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v + d : D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v = Z : Z - \mathfrak{z}$.

$$\text{Unde sequitur } ab = \mathfrak{z} = \frac{d}{D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v + d} \times Z \text{ et } db = Z - \mathfrak{z} = \frac{D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v}{D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v + d} \times Z.$$

$$\text{Si } v = 0, \text{ vel si } ad \text{ cadit in } p, ab = \mathfrak{z} \text{ erit } = \frac{d. Z}{D. \text{Sec. } h + d} \text{ et } db = Z - \mathfrak{z} = \frac{D. \text{Sec. } h}{D. \text{Sec. } h + d} \times Z.$$

§. 30. Linea iconica et aut fundamentali *af* aut terminali *qR* in puncto *b* Fig. 6 parallela, [qualem habes in Fig. 3] et perpendicularum graphicum in eodem puncto *b* plani *abf* Fig. 6. tanta est pars archetypae quanta

$$\frac{D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v}{D. \text{Sec. } h. \text{Sec. } v + d} = \frac{D. \mathfrak{S}h. \mathfrak{S}v}{D + d\mathfrak{S}h. \mathfrak{S}v} \text{ pars est unitatis, et si } ad \text{ cadit in } p, \text{ seu cum fundamentali } af \text{ angulum facit rectum, perpendicularum illud et parallela illa linea erit ad archetypam ut } \frac{D. \mathfrak{S}h}{D + d\mathfrak{S}h} \text{ ad 1.}$$

Ascendens vel descendens planum *abf* cum perpendicularo quodam in puncto *b* Fig. 6. erecto capit angulum rectum. Cujus perpendiculari vel inferni vel superni scopus reperitur in verticali *pz* vel subter vel super horizontali *Rq*, et distat a puncto principali *R* spatio tangentis $= D. \text{Tg. } (90 - h)$. Valor autem ipsius perpendiculari a puncto *b* usque ad scopum *D. Cot. h.* est $= D. \text{Cosec. } h$.

Ceterum planum anguli recti et verticalis est ad abf normale, et habet terminalem $p\pi$, quae et ipsa ad finientem lineam dpc plani abf sive anf normalis est.

Ex sequentibus constabit:

- a) *Plana sibi invicem normalia habent etiam terminales et fundamentales lineas sibi invicem normales et contra §. 6. h.*
- b) *Scopus perpendiculi sumendus est semper in terminali quadam primaria i. e. ea, quae transit punctum R principale. Anguli, quos perpendiculum et planum, cui illud insidet, inter se concludunt, complent 90 gradus cf. §. 45.*

§. 31. Jamiam linea am Fig. 7. non amplius ut §. 27. in verticali, sed in verticalidio plano ame posita cogitetur ita, ut ea non solum angulo h ab horizonte et angulo t a tabula, sed etiam angulo v a verticali plano declinet.

Planum finiens Opp , cui ame est parallelum constituat cum plano vere verticali angulum v , cum tabula angulum t , ejusque sectio tabulae vel ejus linea terminalis pp , non cadat in punctum principale R , a quo remota cernitur sinistrorsum in R , atque linea $R\mathfrak{R}$ sit $= D$. Tang. v , erit ap , tanquam icon lineae infinitae am

$$= Z = \sqrt{[(ad + R\mathfrak{R})^2 + (dR + \mathfrak{R}p)^2]} = \sqrt{[(c + D. \text{Tg. } v)^2 + (A + D. \text{Sec. } v. \text{Tg. } h)^2]}$$

Triangulorum amb et pOb similitudo depositis cruribus in tabula manet eadem ut §. 24 et 27.

Nam etiam hic $D' + d : d = Z : ab (= \mathfrak{z})$ atque $D' + d : D' = Z : bp (= Z - \mathfrak{z})$, aut $D. \text{Sec. } v. \text{Sec. } h + d : d = Z : \mathfrak{z}$ et $D. \text{Sec. } v. \text{Sec. } h + d : D. \text{Sec. } v. \text{Sec. } h = Z : Z - \mathfrak{z}$.

$$\text{Itaque } ab = \mathfrak{z} = \frac{d \mathfrak{S}v. \mathfrak{S}h}{D + d. \mathfrak{S}v. \mathfrak{S}h} \cdot Z \text{ et } bp = Z - \mathfrak{z} = \frac{D}{D + d \mathfrak{S}v. \mathfrak{S}h} \cdot Z.$$

Hac posteriori fractione multiplicanda est etiam linea archetypa, quae per punctum m cum terminali pp vel cum fundamentali ac est parallela, et pariter ea, quae per idem punctum m ad planum ame normalis est ad inveniendas earundem icones.

Observa tamen, si angulus h evanescat, recidendum esse ex illa formula Cosinum h . Porro iconem perpendiculi, quod in loco b ad planum ame verticalidium sit normale, ducendam esse e lineae horizontalis et terminalis puncto, quod ab oculari R est remotum spatio $D. \text{Tg. } [90^\circ - v]$.

§. 32. Esto denique *am* Fig. 8. in ejusmodi plano, quod satis amplificatum tres omnes planities directorias *V*, *H*, *T* obliquo ductu secet. Hujus sectionis erunt quatuor genera: Aut enim linea *am* vel dextrorsum vel ut *cm* sinistrorsum a plano verticali declinante angulus *amc* rectus oblique surgit et terminalem *pp* super puncto principali *R* habet, aut eadem linea *am* utrobique deflectente planum *amc* oblique descendit, ut terminalem infra horizontem habeat.

Disquiramus duntaxat id quod primo loco posuimus:

Linea *am* a plano verticali, sinistrorsum declinet ita, ut declinationis angulus sit $pOR = v$, et planum *amc* surgat ita, ut ejus cum horizonte angulus sit $pOq = h$; similiter ejusdem plani angulus cum tabula sit $ORR = t$. Porro $\overline{ap}^2 = Z^2 = [e + Rp]^2 + A^2$ et $\overline{cp}^2 = [Rq \pm e]^2 + [A + qp]^2$.

Quodsi in sphaerico triangulo, quod pertinet ad angulum solidum *pO*, *pp*, *pq* Fig. 8 et 9. angulus ROq sit $= OpR = v$ et pOq aequalis angulo *h* planorum ad lineam *pO* adjacentium, et ORR aequalis angulo *t* planorum in *pp* convenientium, si porro ponatur $OR = D$ et hujus radii $RR = Cot. t$, $OR = Cosec. t$, $Op = Sec. v$, $Sec. h$, $Oq = Sec. v$, $Op = Cosec. v$, $Cosec. h$, $pq = Sec. v$, $Tg. h$, $Rq = Tang. v$, $Rp = Cot. v$, erit $\overline{ap}^2 = Z^2 = [e + D. Cot. v]^2 + A^2$ et $\overline{cp}^2 = [\pm e + D. Tang. v]^2 + [A + D. Sec. v. Tg. h]^2$.

Quum vero etiam in hac figura 8 ob parallelismum linearum *am* et *Op* triangula *amb* et *Opb* sint constanter similia, erit $Op + am : am = ap : ab$ et $Op + am : Op = ap : pb$, sive $D. Cosec. v. Cosec. h + d : d = Z : 3$ et $D. Cosec. v. Cosec. h + d : D. Cosec. v. Cosec. h = Z : Z - 3$, ergo $ab = 3 = \frac{d. Sin. v. Sin. h}{D + d Sin. v. Sin. h} \times Z$ et $pb = Z - 3 = \frac{D}{D + d Sin. v. Sin. h} \times Z$.

Ut habeas imagines, eadem fractione multiplicanda sunt et perpendicularum in puncto *m* plani obliqui *amc*, et linea quaevis archetypa, quae cum fundamentali *ac* vel terminali *pp* per *m* sit parallela. Attamen hujus perpendiculari scopus petit punctum lineae *RR* deorsum prolongatae ab *R* longitudine *D. Tg. t* $= D. Cot. h$ remotum.

§. 33. Utroque triangulo rectangulo et sphaerico Fig. 9. adumbratur angulus solidus *pOpq* Fig. 8 cum iisdem angulorum literis.

Inde autem consequitur, $Tang. h. Sin. v$ esse $= Tang. tpq$, quem angulum terminales lineae et horizontis et plani obliqui constituunt, deinde $\frac{Sin. v}{Sin. t}$ esse $= sin. hypotenusae$ sive anguli *Opp*.

Ejusdem quoque anguli cosinus est aequalis $\frac{\text{Cot. } h.}{\text{Tg. } t}$. Denique $\frac{\text{Cos. } t}{\text{Sin. } h} =$
 $\text{Cos. } v$, $\text{Sin. } h. \text{ Cos. } v = \text{Cos. } t$ et $\frac{\text{Cos. } t}{\text{Cos. } v} = \text{Sin. } h.$

Quandoquidem hoc loco *am* sive ejus imago *ab* sinistrorsum et sursum declinat, erit $t > v$.

Quum ergo e tribus plani obliqui declinationibus, nominatim ab horizonte, a plano verticali et a tabula factis duas dederis, tertia semper invenietur. Velut si fuerit $t = 61^{\circ} 55'$ et $h = 34^{\circ} 31'$, erit v ad sinistram $= 33^{\circ} 53'$ et ad dextram $56^{\circ} 7'$.

§. 34. Jam facili negotio construentur corpora mathematica eademque rectangula. Cujus ipsius formae, nominatim cuborum, parallelepipedorum, pyramidum tetragonarum, domorum, monumentorum frequens in picturis usus est.

In parallelepipedo rectangulo tria sunt planorum genera, quae parallelo situ inter se respondent. Haec plana sibi invicem normalia ad summum tres tantum lineas terminales habere in tabula pictoris possunt, quibus lineis pariter tria tantum sectionis puncta efficiantur necesse est. Si enim parallelepipedi plana quoad situm cum planis directoriis *H*, *V*, *T* convenient, bina illa plana, quae tabulae sunt parallela, lineam terminalem pictori praebebunt nullam, sed bina horizontalia horizontalem, bina verticalia verticalem dabunt terminalem, quae lineae in puncto uno eodemque principali se invicem secant.

Ad pingendum igitur parallelepipedum sic collocatum duabus modo lineis, nimirum horizontali et verticali. Fig. 10. Se invicem normatim secantibus opus erit.

Sectionis locus est punctum oculare s. principale. Idem punctum imaginem exhibet sectionis plani et horizontalis et verticalis, quae sectio ob oculi situm non lineae, sed puncti instar habere videtur.

§. 35. Si parallelepipedum illud pingendum bina plana tabulae parallela, reliqua vero ad tabulam quidem normalia, sed neque verticalia neque horizontalia habeat, eorum planorum lineae terminales item ut antea in puncto principali sub angulo recto conveniunt, sed cum horizonte et verticali linea punctatis angulos planorum suorum geometricos constituent. cf. Fig. 11.

§. 36. Quodsi idem corpus rectangulum basin quidem habeat in plano horizontali positam, sed nullum latus neque ad tabulam, neque ad planitiem

verticalem parallelum, binae sane bases dabunt terminalem lineam in horizonte *ab* Fig. 12, sed 4 latera praebeunt duas lineas terminales horizontem utrinque et verticaliter in locis *a* et *b* secantes ita, ut *Ra* et *Rb* Fig. 12 sint tangentes radii *D*, quarum anguli $aOR + ROb = 90^\circ$, quod parallelepipedum latera constant normalia.

Ad depingendum igitur corpus rectangulum in fundamento horizontali collocatum tribus lineis Fig. 12 opus erit, nimirum horizontali *ab* et duabus verticalibus, quarum sectionis puncta *a* et *b* cum oculo *O* angulum rectum constituunt. Tres autem binorum planorum lineae terminales semper dabunt tria sectionis loca *a*, *R*, *b*, in linea horizontali.

§. 37. Quando vero ejusmodi parallelepipedon plano horizontali non incumbit, sed in plano verticali haerere videtur, ita ut unum planorum par sit verticale, duo autem paria appareant horizontalia, verticalia illa plana praebeunt terminalem lineam verticalem, reliqua duo planorum paria exhibebunt lineas terminales verticalem superne in *a* et inferne in *b* secantes Fig. 13.

Itaque ad pingendum id corpus quasi pendens iterum 3 linearum auxilio opus erit, verticalis scilicet *ab* et duarum eam horizontaliter in *a* et *b* secantium ita, ut anguli *aOp* utrinsecus sint recti atque ut *Ra* et *Rb* sint tangentes ad radium $RO = D$ et ut anguli *ROa* et *ROb* conficiant in summa 90° .

§. 38. Plana denique corporis parallelepipedum et rectanguli ita comparati ut ejus tria laterum paria ad planities directorias *H*, *V*, *T* obliquam habeant positionem, haec inquam plana neque horizontalem neque verticalem habere possunt lineam terminalem, sed laterum binorum tres terminales per 3 sectionis puncta, *a*, *b*, *c* Fig. 14 15 *triangulum* constituent necesse est. Hujus trianguli bina quaeque latera in oculo rectum conficiunt angulum.

Si per oculi distantiam *OR* ad chartae planum normalem et per trianguli puncta *a*, *b*, *c* alia 3 plana perduxeris, haec plana in tabulae pictoriae puncto principali *R* sese invicem perpendiculariter secant, atque trianguli latera planorum normalium sectionibus *a1*, *b2*, *c3* etiam ad perpendiculi normam penetrantur.

Distantiae oculi obliquae *O3*, *O2*, *O1* ad trianguli latera, sive ad lineas terminales pari modo sunt perpendiculares.

Ceterum *OR* radius est tangentium *R2* et *Rb*, *O3* radius tangentium *3a* et *3b*, item *O2* radius tangentium *2a* et *2c*, denique *O1* radius tangentium *1b* et *1c*. cf. §. 17.

§. 39. Qui duorum planorum [cujus generis tria erant in parallelepipedo] sectionem iconicam designare callet, intelliget quoque, qua ratione et methodo perpendicularum icones in planis erigendae sint. *Ipsa enim planorum duorum sectio erit perpendicularum tertii.*

Qua in re nota bene de perpendicularis graphicis superioris parallelepipedum:

- a) Planum anguli, qui concipitur hoc perpendicularo et plano tertio, ipsi plano tertio et tabulae normale est.
- b) Sectio quam hujus anguli planum cum tabula cooperatur, terminalem plani tertii lineam perpendiculariter secat, et punctum principale percurrit §. 30. a. §. 16. a.
- c) Scopus perpendiculari est sectio punctualis terminalium earum, quarum plana tertio sunt normalia. Scopus in eadem sectione, quam tabula cum anguli plano conficit, inveniri debet.
- d) Illud plani tertii punctum quasi oculare atque hic perpendiculari scopus distant duarum tangentium spatio, quarum radius est distantia oculi principalis $=D$ et quarum anguli in summa 90° conficiunt.

§. 40. *Horizontalium* igitur planorum perpendiculara [loquor autem de iconibus] sunt *verticalia*.

Haec enim perpendiculara haberi possunt sectiones plani tabularis et plani verticalis vel verticalidii, quod utrumque ad horizontem normale est. Quum vero planum tabulare terminalem lineam non habeat, ejus quoque lineae sectio fieri non potest, nisi vis dicere sectionem esse in infinito factam.

§. 41. *Verticalium* vero et graphicorum planorum perpendiculara sunt lineae *horizontales*. Tale enim perpendicularum considerari potest tanquam sectio plani tabularis et horizontalis vel horizontalidii, quae plana plano verticali sunt normalia. Ob tabulare planum terminalis sectio rursus fieri nequit.

§. 42. Porro linea quaevis *neutralis* sive e puncto principali uliquorsum emanans sive huc alicunde recurrens perpendicularis est ad tabulam et ad plana tabulae parallela. Hoc enim perpendicularum format sectionem duorum planorum, quae tabulae sunt normalia et quorum lineae terminales in puncto principali, tanquam perpendiculari scopo, semper conveniunt. §. 6. g.

§. 43. Omnes lineae horizontalidiae ad aliquod horizontis punctum, quod spatio tangentis x graduum ab R horizontaliter distat, directae vel ab illo

puncto deductae sunt perpendiculares planis verticalidiis iis, quae lineis graphice parallelis et e puncto tangentis $90 - x$ graduum ductis comprehenduntur et ab utraque parte finiuntur. Id enim perpendicularum est sectio plani et horizontalis et verticalidii, quod utrumque alteri plano verticalidio normale est, et quorum lineae terminales in illo tangentis x finali se invicem secant.

§. 44. Omnes lineae *verticalidiae* ad ejusmodi horizontis locum, qui ab R spatio tangentis x^0 in verticali distat, directae, vel inde deductae perpendiculares sunt planis horizontalidiis iis, quae lineis graphice parallelis e puncto tangentis correspondente, sc. $90 - x$ graduum, ductis interceptiuntur. Hoc enim perpendicularum est sectio plani verticalis et plani alterius horizontalidii, quod utrumque ad prius planum horizontalidiom normale est, et quorum lineae terminales in puncto tangentis x^0 ab R verticaliter demenso conveniunt.

§. 45. Icon denique lineae normalis 3 plana directoria secantis, ut 10 Fig. 15. 16. e puncto a trianguli a, b, c derivari vel eodem duci debet, ut graphice perpendicularis sit ad planum Obc oppositum, quod lineis e duobus reliquis trianguli punctis b et c exeuntibus interceptitur. Tale enim perpendicularum est sectio planorum contiguorum aob, aoc , quae ad tertium boc sunt normales, et quorum lineae terminales ab, ac in a se invicem secant. Esto autem in Figg. 15. 16 et 14. a angulus quidam solidus (sive convexus sive concavus) a corpore rectangulo ita abscissus, ut ea sectio in plano tabulari facta existimari possit. Cogita porro perpendicularum OR ex angulo solido O in sectionis planum 1, 2, 3 ductum, deinde etiam tria plana per margines O1, O2, O3 locata et eidem sectionis plano normalia, sic habebis directionem 3 linearum Oa, Ob, Oc.

Haec 3 puncta a, b, c iterum sunt sectiones a terminalibus lineis illorum 3 planorum factae. Nam a est sectio e terminalibus lineis planorum 103 et 102 orta, b est sectio terminalium ad plana 102 et 203 pertinentium, locus denique c est sectio e conjugatis lineis planorum 203 et 102 terminalibus profecta.

Quodsi angelum solidum Figg. 15. 16 et 14. a transtuleris in Figg. 17. 18. ita, ut perpendicularum ex O ductum incidat in planum a, b, c et simul in punctum R, planis per perpendicularum demissis trianguli abc latera in 3, 4, 5 secabuntur.

Sectio O1R non solum ad tabulam, sed ad planum quoque 302 normalis erit, propterea quod O, normalis est lineis O2 et O3 in O.

Scilicet triangulum abc in tabula positum et sectionem 1, 2, 3 in plano tabulari factam i.e. tabulae parallelam cogita. Quae parallela plana quum plano

qOc Fig. 15. secantur, sectiones 23 et *bc* erunt quoque parallelae et sectio per *ORa* Fig. 14 facta ad lineas 23 et *bc* erit normalis, h. e. *a3* in Figg. 17. 18 est normalis ad *bc*.

Pari modo demonstratur *b4* esse normalem ad *ac* atque *c5* ad *ab*. Illae lineae *a3*, *b4*, *c5* Figg. 17. 18 conveniunt omnes in puncto *R* perpendiculi *OR* Fig. 14. a.

Jam vero *OR* Fig. 14 sit oculi distantia, et ex illis 3 normalibus una, velut *2b* et in Figg. 17. 18 *4b* sit per oculi horizontem ducta, trianguli *abc* latus unum *ac* erit verticale, *R* exhibebit punctum principale, hujusque trianguli *abc* auxilio parallelepipedum, sive angulus solidus oblique positus facillime designabitur.

Oculi puncta 3, 4, 5 planorum parallelepipedum, et scopi *a*, *b*, *c* ex adverso positi linearum sectionis normalium interjectas habebunt tangentes *Ra* + *R3*, *Rb* + *R4*, *Rc* + *R5*, quarum anguli bini 90° summatim complent et quarum semidiameter = *D*.

Similiter trianguli *abc* latera oculi quasi punctis 3, 4, 5 dissecantur in binas tangentes, quarum radii sunt secantes eorundem angulorum quantitate *D* multiplicandae.

Ceterum oculi distantia principalis *D* est media proportionalis inter tangentium paria linearum terminalium *3a*, *4b*, *5c*, et obliquae oculi distantiae sunt mediae proportionales inter tangentium paria laterum trianguli *3b* + *3c*, *4a* + *4c*, *5a* + *5b*.

Universalis igitur perpendiculorum in plano iconico ducendorum lex haec esse videtur:

Perpendiculi scopus semper dicitur et habetur in terminali quadam linea spatio *D* [*Tgx* + *Tg*. ($90^\circ - x$)] remotus ab eo oculi s. sectionis puncto, quod in eadem terminali per aliam normaliter formatur, in cujus plano illud perpendiculum erigitur.

§. 46. Quum ad designanda plana obliqua tria ejusmodi trianguli puncta et perpendicula multum faciant, operne pretium erit, proportionales et aequationes hoc loco perscribere, ex quibus appareat, quo modo ejus trianguli latera, anguli et laterum partes cum oculi distantia principali *D* et cum planorum obliquorum declinationibus *v*, *h*, *t* (a planis directoriis *V*, *H*, *T*.) cohaereant.

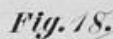
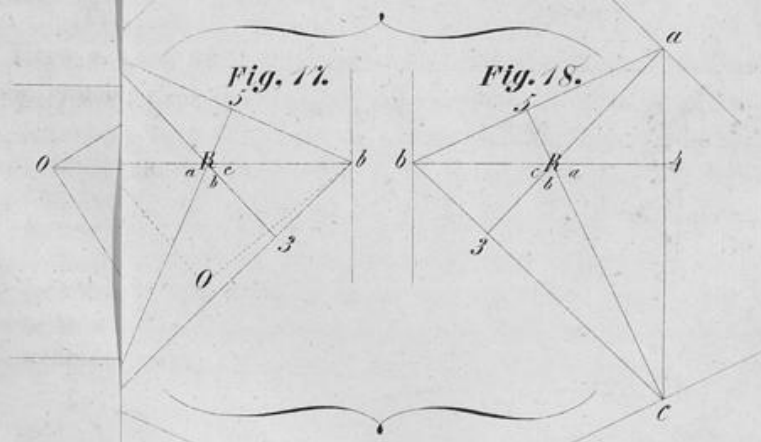
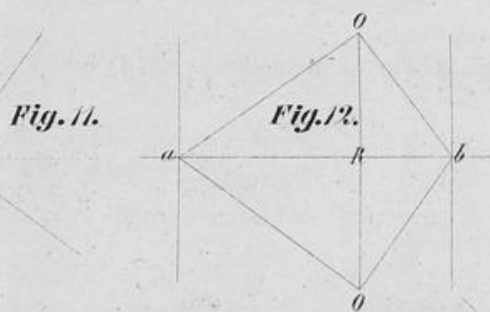
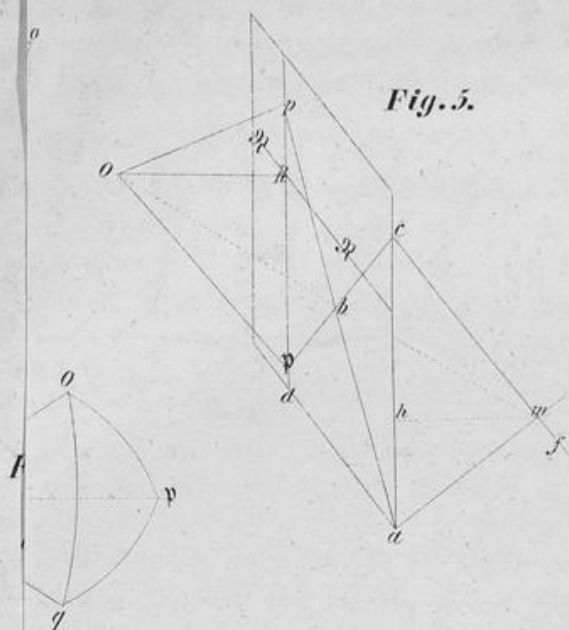
In Figg. 17 et 18 litterae *a*, *b*, *c* trianguli angulos atque etiam latera opposita denotant, *D* autem et *h*, *v*, *t*, *H*, *V*, *T* significatus habent supra memoratos:

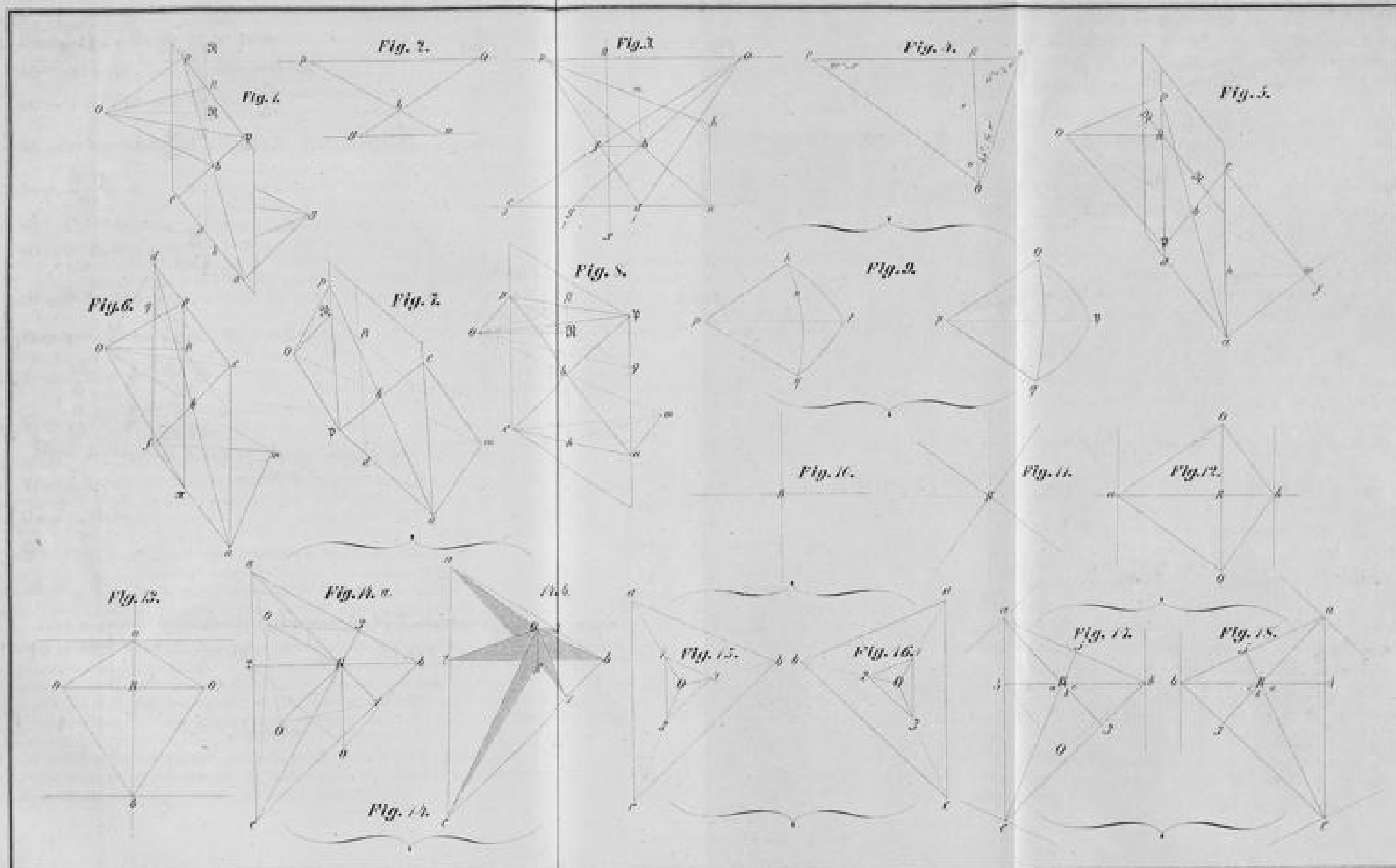
1. $4b = a \sin. c = c \sin. a$
2. $5c = a \sin. b = b \sin. a$
3. $3a = b \sin. c = c \sin. b$

4. $bc:ab=a:c=Sa:Sc.$
5. $ac:bc=b:a=Sb:Sa.$
6. $ac:ab=b:c=Sb:Sc.$
7. $4a=c\oslash a=c\cos. a.$
8. $4c=a\oslash c.$
9. $5a=b\oslash a.$
10. $5b=a\oslash b.$
11. $3b=c\oslash b.$
12. $3c=b\oslash c.$

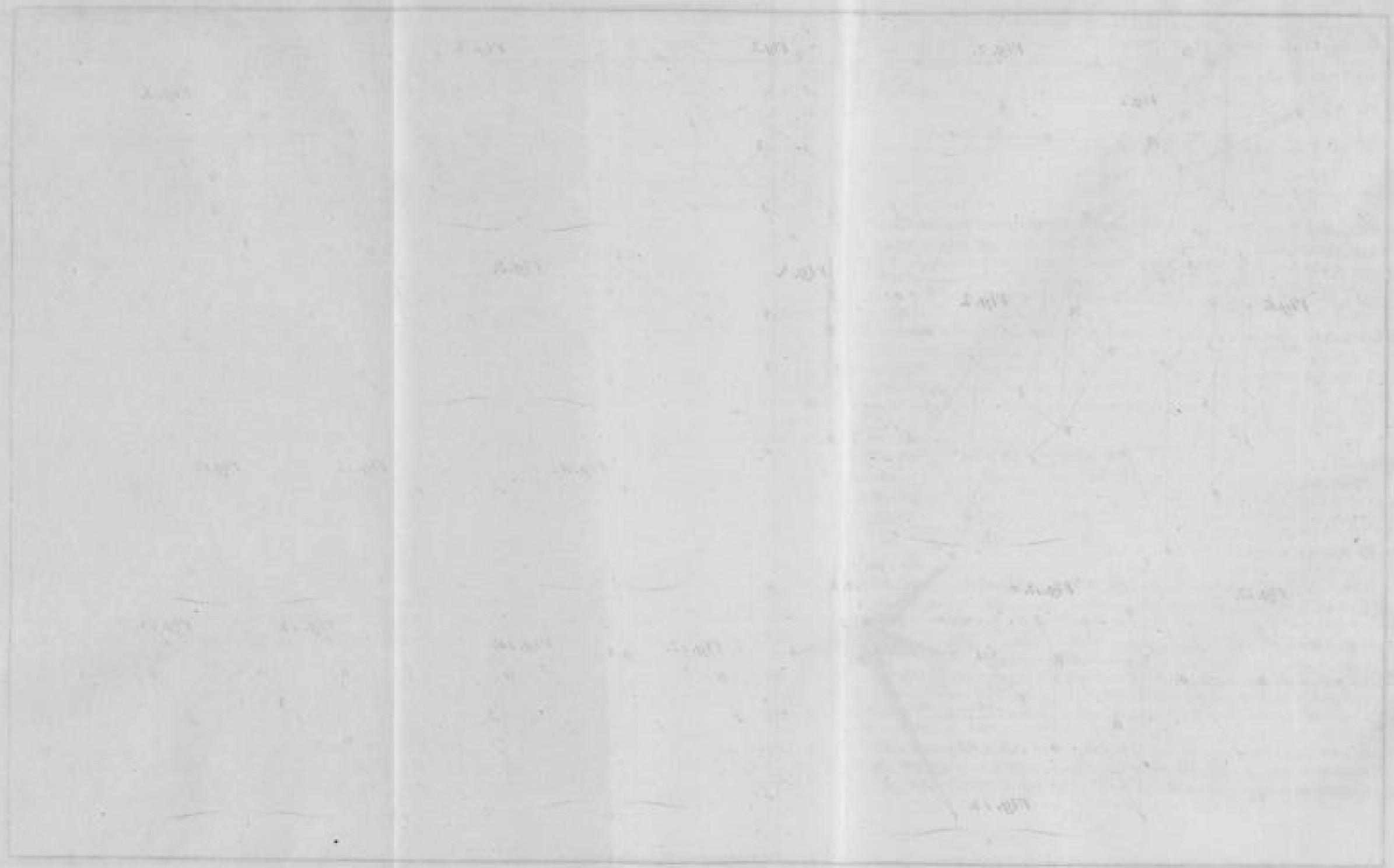
Propter similitudinem triangulorum 4ab et 5Rb

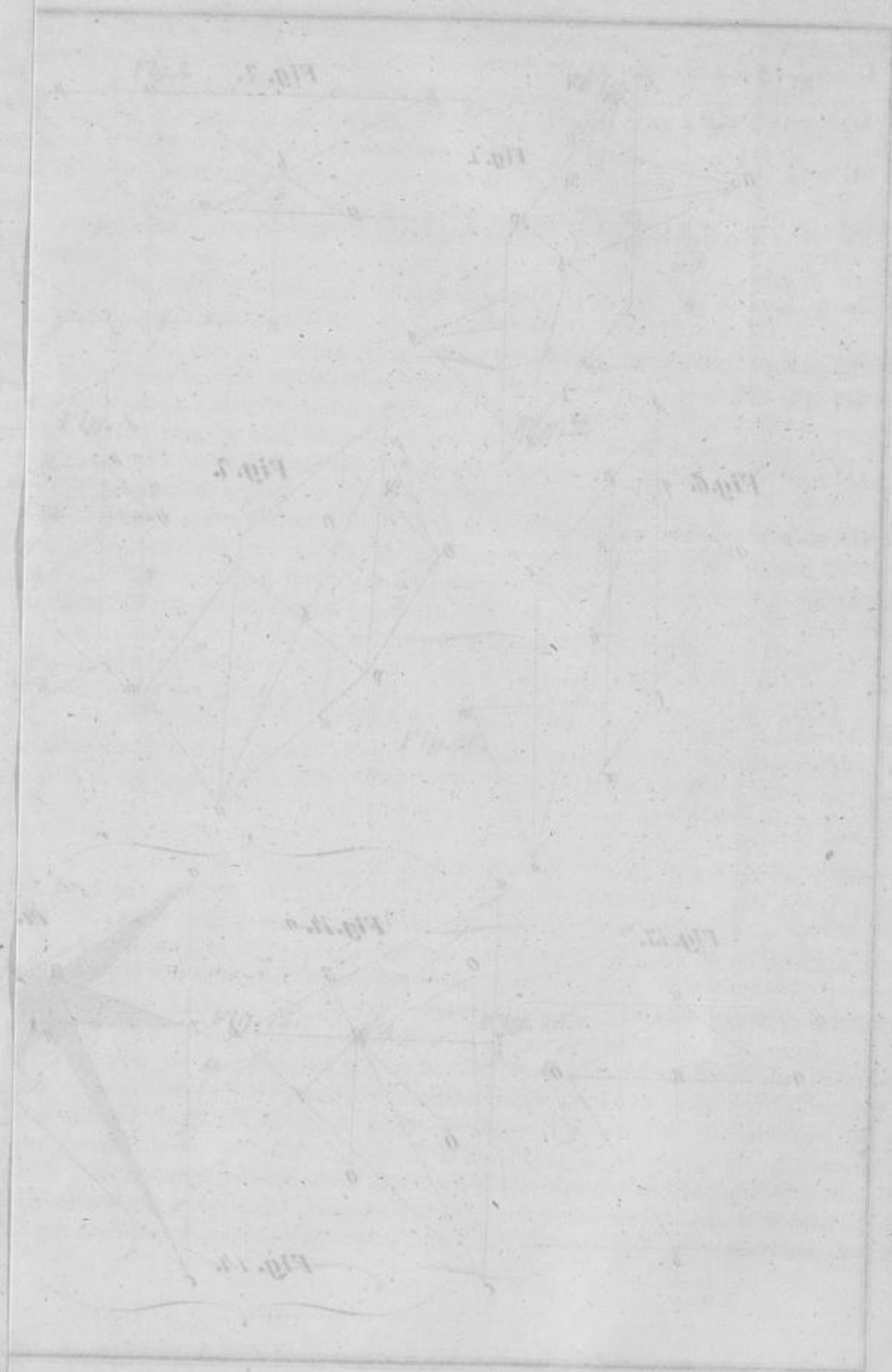
13. $4b:ab=5b:Rb=a\oslash b:Rb$
14. $Rb=\frac{c\oslash b}{Sc}=\frac{a\oslash b}{Sa}.$
15. $5c:ac=4c:Rc$
16. $Rc=\frac{a\oslash c}{Sc}=\frac{b\oslash c}{Sb}$
17. $3a:ab=5a:Ra$
18. $Ra=\frac{c\oslash a}{Sc}=\frac{b\oslash a}{Sb}.$
19. $ac:5a=Rc:4R$
20. $4R=\frac{a\oslash a. \oslash c}{Sa}=\frac{b\oslash a. \oslash c}{Sb}=\frac{c\oslash a. \oslash c}{Sc}.$
21. $4b:4c=3b:3R.$
22. $3R=\frac{a\oslash b\oslash c}{Sa}=\frac{b\oslash b\oslash c}{Sb}=\frac{c\oslash b. \oslash c}{Sc}.$
23. $4b:4a=5b:5R.$
24. $5R=\frac{a\oslash a. \oslash b}{Sa}=\frac{b\oslash a. \oslash b}{Sb}=\frac{c\oslash a. \oslash b}{Sc}.$
25. $Tang. a=\frac{4b}{4a}=\frac{a\oslash c}{c\oslash a}=\frac{5c}{5a}=\frac{a\oslash b}{b\oslash a}.$
26. $Tg. b=\frac{5c}{5b}=\frac{3a}{3b}=\frac{b\oslash a}{a\oslash b}=\frac{b\oslash c}{c\oslash b}.$
27. $Te=\frac{3a}{3c}=\frac{4b}{4c}=\frac{c\oslash b}{b\oslash c}=\frac{c\oslash a}{a\oslash c}.$
28. $D^2=4R \times Rb=3R \times Ra=5R \times Re.$
29. $D^2=\frac{a^2\oslash a. \oslash b. \oslash c}{\sin.^2 a}=\frac{b^2\oslash a. \oslash b. \oslash c}{\sin.^2 b}=\frac{c^2\oslash a. \oslash b. \oslash c}{S^2 c}.$





Handwritten text at the bottom left of the page, likely a reference or note.





$$30. D = \frac{a}{S_a} \sqrt{S_a \cdot S_b \cdot S_c} \text{ et sic porro.}$$

$$31. 4O^2 = 4b \times 4R; \text{ quia } 4b : 4O = 4O : 4R.$$

$$32. 4O = \sqrt{4b \times 4R} = D \cdot \text{Sec. } v = \frac{D}{S_v}.$$

$$33. bo = D \cdot \text{Cosec. } v = \frac{D}{S_v}.$$

$$34. 4a = \frac{D \cdot Th}{S_v}.$$

$$35. 5R = D \cdot \text{Cot. } t.$$

$$36. 5O = D \cdot \text{Cosec. } t = \frac{D}{\text{Sin. } t}.$$

$$37. cO = D \cdot \text{Sec. } t = \frac{D}{S_t}.$$

$$38. \text{Tang. } h = \frac{4a}{4c} = \sqrt{\text{Cot. } a \cdot \text{Tg. } c} = \sqrt{\frac{T_c}{T_a}}.$$

$$39. T_v = \frac{4R}{D} = \sqrt{\frac{S_a \cdot S_c}{S_b}}.$$

$$40. T_t = \frac{D}{5R} = \sqrt{\frac{S_c}{S_a \cdot S_b}}.$$

Itaque declinationes h, v, t ex angulis trianguli abc reperiuntur.

$$41. T_c = \frac{Th}{S_v}.$$

$$42. \text{Cot. } a = Th \cdot Sv.$$

$$43. S_a = \frac{T_v}{T_t}.$$

$$44. S_b = \frac{S_c}{T_t \cdot T_v}.$$

Ergo e duabus declinationibus planorum H, V, T angulos trigoni auxiliaris abc enucleabis.

