

Das Gleichgewicht des Dreirads beim Wenden auf der schiefen Ebene.

Die Frage nach den Gleichgewichtsbedingungen eines sich bewegenden Dreirads gehört wegen der Mannigfaltigkeit der wirksamen Kräfte und der verwickelten Gestalt des Körpers, auf welchen dieselben wirken, zu denjenigen mechanischen Aufgaben, deren Lösung von vornherein auf die volle mathematische Strenge verzichten muss. Die numerischen Ergebnisse, zu denen die nachfolgenden Erörterungen in ihrer praktischen Anwendung führen, haben nur den Wert einer angenäherten Richtigkeit, weniger darum, weil die Schwere und die Schwingkraft als allein wirksame Kräfte in die Rechnung gezogen sind, als wegen der Schwierigkeit, den gegebenen Körper in eine übersichtliche mathematische Formel einzukleiden.

Die drei Punkte, in denen das Dreirad die Grundebene berührt, bilden ein gleichschenkeliges Dreieck ABC, dessen Basis $BC = 2a$ der Breite des Dreirads und dessen Höhe $AF = l$ der Längsachse gleich ist.

Damit nicht das Gewicht allein schon das Gleichgewicht stört, wird die Lage des Schwerpunktes auf den dreiseitigen prismatischen Raum beschränkt, welchen die durch die Punkte A, B, C gehenden Vertikallinien bestimmen; bei horizontaler Stellung des Dreirads und normalem Sitze des Fahrers wird sich der Schwerpunkt in der durch die Längsachse des Dreirads gehenden Vertikalebene befinden, jede schiefe Stellung der Grundebene aber, sowie jede seitliche Körperbewegung des Fahrers wird die Lage des Schwerpunktes verschieben. Ausser dem Gewichte sollen nur noch die durch eine drehende Bewegung erregten Schwingkräfte berücksichtigt werden. Tritt bei übergrosser Schwingkraft eine Störung des Gleichgewichts ein, so erfolgt das Umschlagen des Dreirads um die Gerade als Drehachse, welche den Berührungspunkt des Vorderrades mit dem Berührungspunkte des äussern Hinterrades verbindet. Es kommt zunächst darauf an, die aus dem Gewichte und der Schwingkraft herstammenden Drehungsmomente um die bezeichnete Drehachse festzustellen.

Ein solches Moment aber stellt sich dar als das Produkt der zur Drehachse senkrechten Komponente der thätigen Kraft in den Abstand zwischen der Krafrichtung und der Drehachse.

Um die soeben gekennzeichneten Faktoren zu bilden, sollen verstanden werden unter

ν der Neigungswinkel der schiefen Ebene, auf welcher das Dreirad sich bewegt;

TU die Spur der schiefen Ebene mit der horizontalen;

β der Winkel zwischen TU und der Drehachse AB, beide Geraden in dem durch die Schreibweise angedeuteten Richtungssinne aufgefasst;

λ der Neigungswinkel der Drehachse AB gegen die Horizontalebene;

ξ der Flächenwinkel zwischen der schiefen Ebene und der durch die Drehachse AB bestimmten Vertikalebene.

Nunmehr gelten die folgenden stereometrischen Sätze:

- 1) Der Winkel, welchen die vertikale Kraft P mit ihrer senkrecht zu AB gerichteten Komponente einschliesst, ist gleich dem Neigungswinkel λ , den AB gegen die Horizontalebene hat (Fig. 1);

$$2) \sin \lambda = \frac{VW}{VU} = \frac{VW}{VX} \cdot \frac{VX}{VU} = \sin \nu \cdot \sin \beta \text{ (Fig. 2);}$$

3) aus der dreiseitigen Ecke, deren Kanten die Spur TU, die Gerade AB und die Horizontalprojektion A,B, sind:

$$\cot \xi = \operatorname{tg} \nu \cdot \cos \beta \text{ (Fig. 3).}$$

Betrachten wir jetzt ein Massenteilchen m des Dreirads, dessen Gewicht p sei (Fig. 4). N sei der Punkt, in welchem die Vertikale MN die schiefe Ebene durchschneidet, MO das Lot von M auf die schiefe Ebene gefällt; OQ und NR seien in der schiefen Ebene senkrecht auf AB gezeichnet. Die für die Drehung um AB zur Geltung kommende Komponente des Gewichts ist nach Satz 1 $p \cos \lambda$, und wir haben sie mit dem Abstände zu multiplizieren; welchen die Kraftrichtung MN von der Drehachse hat; dieser Abstand aber ist gleich der Entfernung des Punktes N von der durch AB gelegten Vertikalebene, also $= \overline{NR} \sin \xi$. Demgemäss ist der Wert des aus dem Gewichte des Massenteilchens m hervorgehenden Drehungsmomentes $p \cos \lambda \cdot \overline{NR} \sin \xi$, oder wenn wir noch für $\cos \lambda$ und $\sin \xi$ die aus den obigen Sätzen 2 und 3 folgenden Werte einsetzen,

$$p \cdot \overline{NR} \sqrt{1 - \sin^2 \nu \cdot \sin^2 \beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu \cdot \cos^2 \beta}} = p \cdot \overline{NR} \cos \nu.$$

Um für $\overline{NR}$ einen andern Ausdruck zu gewinnen, führen wir die Grössen $\overline{MO} = d$ und $\overline{OQ} = e$ ein. Da $\overline{ON} \perp \overline{TU}$ und $\angle OMN = \nu$ ist, so folgt $\overline{ON} = d \cdot \operatorname{tg} \nu$ und $\overline{NR} = e + \overline{ON} \cos \beta = e + d \operatorname{tg} \nu \cdot \cos \beta$, und der Wert des Drehungsmomentes wird endlich

$$A = p \cdot (e \cdot \cos \nu + d \sin \nu \cos \beta).$$

Das zweite in Betracht kommende Drehungsmoment rührt von der Centrifugalkraft her. Die Wendung des Dreirads erfolge nach links und zwar dadurch, dass die Achse des Vorderrades um den Winkel η gedreht wird. Die Projektion der so verschobenen Achse auf die schiefe Ebene schneide die verlängerte Projektion der Hinterachse im Punkte K (Fig. 5); dann ist die in K auf der Ebene errichtete Senkrechte die Achse, um welche sich die Wendung vollzieht. Um nun für das vorhin betrachtete, in M befindliche Massenteilchen das neue Drehungsmoment zu bestimmen, nennen wir wieder O die Projektion von M. Die in M durch die Wendung hervorgerufene Centrifugalkraft wirkt in einer Richtung parallel KO und hat die Grösse $\frac{mv^2}{\overline{KO}}$, wenn m die Masse und v die Geschwindigkeit bedeutet; von ihr tritt nur der Teil in die Rechnung ein, welcher durch die auf AB senkrechte Komponente dargestellt wird. Zeichnen wir (Fig. 5) $\overline{OL} \parallel \overline{AB}$ und $\overline{KL} \perp \overline{AB}$, so hat diese Komponente den Wert $\frac{mv^2 \cos \angle OKL}{\overline{KO}}$. Multiplizieren wir sie mit dem Abstände d der

Kraftrichtung von der Drehachse AB und setzen für m seinen Wert $\frac{p}{g}$, unter g die Beschleunigungskonstante der Erdschwere verstanden, so erhalten wir das aus der Centrifugalkraft stammende Drehungsmoment

$$B = \frac{p}{g} \cdot \frac{v^2 d \cos \angle OKL}{\overline{KO}}.$$

Um unsere Aufgabe zu lösen, haben wir die durch A und B ausgedrückten Drehungsmomente für sämtliche Massenteilchen des Dreirads zu ermitteln und zu summieren; die Summe der aus der Centrifugalkraft resultierenden Drehungsmomente darf nicht grösser ausfallen als die Summe der aus dem Gewichte resultierenden. Hiernach gewinnt die fragliche Gleichgewichtsbedingung den Ausdruck $\Sigma(A) - \Sigma(B) \geq 0$ oder

$$\cos \nu \cdot (\Sigma p e) + \sin \nu \cdot \cos \beta \cdot (\Sigma p d) - \frac{v^2}{g} \left(\Sigma \frac{p d \cos \angle OKL}{\overline{KO}} \right) \geq 0.$$

Schreiben wir denselben in der Form

$$\mathfrak{A} \cos \nu + \mathfrak{B} \sin \nu \cos \beta - \mathfrak{C} v^2 \geq 0,$$

so sind die Grössen

$$\mathfrak{A} = \sum p e \text{ und } \mathfrak{B} = \sum p d$$

nur von den Dimensionen des Dreirads, dagegen

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{g} \cdot \sum \frac{p d \cos \text{OKL}}{\text{KO}}$$

ausserdem noch von der Grösse der Krümmung abhängig, unter der die Wendung erfolgt, und welche gemessen wird durch den Winkel AKB (Fig. 5).

Bei gegebener Krümmung ist für die Erhaltung des Gleichgewichts die Geschwindigkeit an die Bedingung gebunden $v \leq \sqrt{\frac{\mathfrak{A} \cos \nu + \mathfrak{B} \sin \nu \cos \beta}{\mathfrak{C}}}$. Wird im andern Falle bei gegebener

Geschwindigkeit nach der Grösse der zulässigen Krümmung gefragt, so bleibt aus der Relation $\mathfrak{C} \leq \frac{\mathfrak{A} \cos \nu + \mathfrak{B} \sin \nu \cos \beta}{v^2}$ eine weitere Bedingung für den Winkel η abzuleiten. Der sich nur

auf das Gewicht beziehende Ausdruck $\mathfrak{A} \cos \nu + \mathfrak{B} \sin \nu \cos \beta$ lässt sich auch schreiben $\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \beta} - (\mathfrak{A} \sin \nu - \mathfrak{B} \cos \nu \cos \beta)^2$; er erreicht also für einen spitzen Winkel β seinen grössten Wert $\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \beta}$, wenn $\text{tg } \nu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cos \beta$ ist. Die grösste Neigung ν_1 , welche die

schiefe Ebene für diesen Fall der grössten Standfestigkeit haben kann, wird durch die Gleichung $\text{tg } \nu_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ bestimmt. Für $\beta = 90^\circ$ ist die Horizontalebene die Ebene der grössten Standfestigkeit.

Ist der Winkel β stumpf, so wird der Ausdruck $\mathfrak{A} \cos \nu + \mathfrak{B} \sin \nu \cos \beta$ desto kleiner, je näher der Winkel an 180° herankommt; für $\beta = 180^\circ$ darf die Neigung der schiefen Ebene den Wert ν_2 , der aus der Gleichung $\cot \nu_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ folgt, nicht übersteigen, wenn das Dreirad nicht schon durch sein Gewicht umstürzen soll.

Die Werte der Summen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ lassen sich nur näherungsweise und unter bestimmten Voraussetzungen bestimmen. Untersuchen wir zunächst den einfachsten Fall, und nehmen wir an, die Masse sei im Schwerpunkte vereinigt und in der Ebene gelegen, welche durch die Längsachse des Dreirads normal zur schiefen Ebene gerichtet ist, und von der durch die Hinterachse gelegten Normalebene um das Stück εl entfernt, unter ε einen echten Bruch verstanden.

Alsdann ist

$$\mathfrak{A} = P \cdot \frac{(1 - \varepsilon) l a}{l^2 + a^2}; \quad \mathfrak{B} = P \cdot d; \quad \mathfrak{C} = \frac{P d}{g} \cdot \frac{1}{l^2 + a^2} \cdot \frac{1 \cot \eta + \varepsilon a}{l^2 \cot^2 \eta + \varepsilon^2 l^2};$$

folglich

$$\frac{P d}{g} \cdot \frac{1}{l^2 + a^2} \cdot \frac{1 \cot \eta + \varepsilon a}{l^2 \cot^2 \eta + \varepsilon^2 l^2} \leq \frac{P}{v^2} \left(\frac{(1 - \varepsilon) l a \cos \nu}{l^2 + a^2} + d \sin \nu \cos \beta \right)$$

oder

$$\frac{v^2 d}{g} \cdot \frac{1 \cot \eta + \varepsilon a}{\cot^2 \eta + \varepsilon^2} \leq (1 - \varepsilon) l a \cos \nu + d \sqrt{l^2 + a^2} \sin \nu \cos \beta.$$

Geschieht die Bewegung abwärts und senkrecht zur Spur mit der Horizontalebene, so ist

$$\cos \beta = - \frac{a}{\sqrt{l^2 + a^2}}; \text{ daher } \frac{v^2 d}{g l} \cdot \frac{1 \cot \eta + \varepsilon a}{\cot^2 \eta + \varepsilon^2} \leq (1 - \varepsilon) l a \cos \nu - a d \sin \nu.$$

Unter der gewöhnlich zutreffenden Voraussetzung $\cot \gamma > \frac{\varepsilon l}{a}$ wird $\frac{1}{\cot \gamma} < \frac{l \cot \gamma + \varepsilon a}{\cot^2 \gamma + \varepsilon^2}$;
hieraus folgt

$$\frac{v^2 d}{g \cdot \cot \gamma} < (1 - \varepsilon) l a \cos \nu - a d \sin \nu.$$

Der Ausdruck der rechten Seite muss positiv sein; denn wäre er = 0, so sagte die Gleichung $\operatorname{tg} \nu = \frac{(1 - \varepsilon) l}{d}$, dass die Gerade, welche den Schwerpunkt mit dem Berührungspunkte des Vorderrades verbindet, vertikal ist; eine Zunahme des Neigungswinkels würde schon durch das Gewicht ein Ueberschlagen des Dreirads nach vorn zur Folge haben. Die aufgefunden Relation wird noch einfacher, wenn man den Winkel φ einführt, unter welchem die Verbindungslinie des Schwerpunktes und des Berührungspunktes des Vorderrades gegen die schiefe Ebene geneigt ist; dies geschieht mit Hülfe der Gleichung $(1 - \varepsilon) \cdot l = d \cdot \cot \varphi$ und führt zu dem Resultate

$$\frac{v^2}{ag} < \frac{\cos (\varphi + \nu)}{\sin \varphi} \cot \gamma.$$

Um ein Zahlenbeispiel durchzurechnen, geben wir dem Dreirad die folgenden Dimensionen:

$$l = 1\text{m}, a = 0,4\text{m}, d = 1,09\text{m}, \varepsilon = 0,15;$$

dazu setzen wir $g = 9,81\text{ m}$ und die Neigung der schiefen Ebene so gross, dass $\sin \nu = \frac{1}{200}$

ist. Die numerische Rechnung liefert $v^2 \cdot \frac{\cot \gamma + 0,06}{\cot^2 \gamma + 0,0225} < 3,04$.

Ist die Strasse, auf welcher die Abwärtsbewegung geschieht, 6 m breit, so kann, um eine ganze Wendung möglich zu machen, KB (Fig. 5) höchstens = 3m sein; für diesen Grenzwert wird $\cot \gamma = 2,6$ und $\nu < 2,78$. Setzen wir anderseits die Geschwindigkeit als gegeben, und nehmen wir an, es sei $\nu = 8\text{m}$, so folgt aus der Bedingung $64 \cdot \frac{\cot \gamma + 0,06}{\cot^2 \gamma + 0,0225} < 3,04$ die andere $\cot \gamma > 21,1$, also $\gamma < 2^\circ 42'$. Diesem Winkel entspricht der Krümmungsradius $l \cot \gamma + a = 21,5$ und zum Wenden wäre eine Wegbreite von 43m erforderlich.

Für geringe Neigungen, wie sie bei unsern Verkehrsstrassen gewöhnlich in Frage kommen, wird es ausreichen, die Bedingung des Gleichgewichts für die horizontale Bewegung zu kennen; sie lautet für die angenommenen Zahlenwerte $v^2 < 3,06 \cot \gamma$.

Die eben ausgeführten Rechnungen, welche die ganze Masse in den Schwerpunkt verlegen, werden sich desto mehr dem Falle der Wirklichkeit anpassen, je weniger das Gewicht des Dreirads gegen das Gewicht des Fahrers in Anschlag zu bringen ist. Hätte die bisherige Rechnung nur das Gewicht des Fahrers berücksichtigt, so müsste sie der Wirklichkeit gegenüber ein zu ungünstiges Resultat ergeben haben. Um im letzteren Falle ein der Wahrheit näher kommendes Ergebnis zu erzielen, führen wir noch für jedes Hinterrad des Dreirads die Masse p und für das Vorderrad die Masse p , in die Rechnung ein; die Massen seien in den Mittelpunkten der Räder concentrirt. Die Radien der Räder bezeichnen wir mit r und r_1 , und für die numerische Rechnung setzen wir: $r = 0,5\text{m}$, $p = 10\text{kg}$; $r_1 = 0,35\text{m}$, $p_1 = 4\text{kg}$; dazu das Gewicht des Fahrers $P = 80\text{ kg}$. Im übrigen lassen wir die Bedingungen der vorigen Rechnung ungeändert und nehmen uns vor, unter den neuen Voraussetzungen die Grenzen der zulässigen Geschwindigkeit festzustellen. Es ergibt nun die Ausführung der Rechnung:

$$\mathfrak{A} = \frac{[P(1 - \varepsilon) + 2p] \cdot la}{l^2 + a^2}; \quad \mathfrak{B} = Pd + 2pr + p_1 r_1;$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{g \sqrt{l^2 + a^2}} \cdot \left[\frac{Pd}{l} \cdot \frac{1 \cot \eta + \varepsilon a}{\cot \eta^2 + \varepsilon^2} + \frac{lpr}{1 \cot \eta + a} + \frac{lpr}{1 \cot \eta - a} + \frac{p, r}{l} \cdot (1 \cot \eta + a) \cdot \sin \eta^2 \right];$$

und mit Einsetzung der Zahlenwerte

$$\mathfrak{A} = 32,68, \mathfrak{B} = 98,6, \mathfrak{C} = 3,66;$$

$$\text{demnach } v < \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A} - 0,002 \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}} \right) = 2,98^m;$$

während sich im vorigen bei Nichtberücksichtigung der Dreiradmasse die Geschwindigkeitsgrenze von 2,78^m ergeben hat.

Um noch kurz die Frage zu erörtern, inwieweit es der Fahrer in seiner Gewalt hat, die Gleichgewichtslage beim Wenden dadurch günstiger zu gestalten, dass er sich seitwärts biegt und so den Schwerpunkt verlegt, machen wir die Voraussetzung, der Schwerpunkt sei senkrecht zur Drehachse und parallel zur Grundebene so verschoben, dass er sich von der Drehachse entfernt hat, und zwar um das Stück xl .

Soll der Schwerpunkt nicht rückwärts über die Hinterachse hinweggehen, so ist der Wert von x an die Bedingung gebunden $x \leq \frac{\varepsilon}{\sin \alpha}$, wobei α den halben Winkel an der Spitze des Dreirads ($< \text{FAB Fig. 5}$) bedeutet.

Wir bestimmen die Grösse $\mathfrak{C}$ mit Hülfe der Gleichungen

$$\overline{OK} \cdot \cos OKL = (1 \cot \eta + a) \cos \alpha - (1 - \varepsilon) l \sin \alpha - xl,$$

$$\overline{OK}^2 = (1 \cot \eta - xl \cos \alpha)^2 + (\varepsilon l - xl \sin \alpha)^2,$$

aus denen sich ergibt:

$$\mathfrak{C} = \frac{P \cdot d}{gl} \cdot \frac{\cot \eta \cdot \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha - x}{(\cot \eta - x \cos \alpha)^2 + (\varepsilon - x \sin \alpha)^2}$$

oder wenn zur Abkürzung

$$H = \cot \eta \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha, \quad H_r = \cot \eta \cdot \sin \alpha - \varepsilon \cdot \cos \alpha$$

gesetzt wird:

$$\mathfrak{C} = \frac{Pd}{gl} \cdot \frac{H - x}{(H - x)^2 + H_r^2}.$$

Da $\mathfrak{A} = Pl \cdot ((1 - \varepsilon) \sin \alpha + x)$ ist, so bekommen wir für die Bewegung auf der horizontalen Ebene die Bedingung:

$$v^2 < \frac{gl^2}{d} \cdot \left[(1 - \varepsilon) \sin \alpha + x \right] \cdot \frac{(H - x)^2 + H_r^2}{H - x}.$$

Es wird durch die Verschiebung des Schwerpunktes eine Vergrösserung der Stabilität eingetreten sein, sobald in der letzten Relation der Ausdruck der rechten Seite für ein positives x grösser ausfällt als für $x = 0$. Der Unterschied aber zwischen dem Ausdruck mit dem positiven x und dem andern für $x = 0$ hat mit Fortlassung der Grösse $\frac{gl^2}{d}$ den Wert:

$$\frac{x}{H - x} \cdot \left[(H - x)^2 + H_r^2 + (1 - \varepsilon) \sin \alpha \cdot \left(\frac{H_r^2}{H} - (H - x) \right) \right],$$

und damit derselbe positiv wird, genügt die Bedingung:

$$H - x - (1 - \varepsilon) \sin \alpha > 0;$$

dieselbe lässt sich, weil $x \leq \frac{\varepsilon}{\sin \alpha}$ sein soll, in die andere Form bringen:

$$\cot \eta > \operatorname{tg} \alpha + \varepsilon \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha},$$

aus der für $\alpha \geq 45^\circ$ noch einfacher $\cot \eta > \operatorname{tg} \alpha$, also $\eta < 90^\circ - \alpha$ hervorgeht. Wo in der Wirklichkeit diese Bedingung erfüllt ist, wird auch die Seitwärtsbewegung die Stabilität des Dreirads während der Wendung erhöhen. In welchem Grade diese Erhöhung stattfindet, darüber giebt die numerische Rechnung Aufschluss, welche zu den Ergebnissen führt:

$x =$	0	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4
$v <$	2,78	2,83	3,15	3,45	3,64	3,93.

E. Jackwitz,

Oberlehrer.

dieselbe lässt sich, weil $x \in \mathbb{W}$

aus der für $\alpha \geq 45^\circ$ noch
Wirklichkeit diese Bedingung
rads während der Wendung
die numerische Rechnung auf

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale



bringen:

$0^\circ - \alpha$ hervorgeht. Wo in der
bewegung die Stabilität des Drei-
höhung stattfindet, darüber giebt
führt:

0,4.
3,93.

C. Jackwitz,
Oberlehrer.