

Gleichgewichtslagen und Schwingungen eines Pendelsystems.

1. Feststellung der Aufgabe. In derselben Horizontalebene werden die festen Punkte A_1 und A_2 als Aufhängepunkte von zwei Pendeln angenommen. In den Endpunkten B_1 und B_2 der Pendelstangen $A_1B_1 = l_1$ und $A_2B_2 = l_2$ befinden sich die schweren Massen m_1 und m_2 . Zwei andere Pendelstangen $B_1C = l_1'$ und $B_2C = l_2'$ hängen in dem Punkte C zusammen, in welchem die Masse μ durch ihr Gewicht wirkt. Die Pendelstangen werden als gewichtslos vorausgesetzt und als gleich widerstandsfähig gegen Zug- wie gegen Druckspannungen. Ausser diesen Spannungen T_1, T_2, T_1', T_2' , welche als eigentliche Spannungen positive, als Pressungen negative Werte haben, sollen nur noch die Gewichte $m_1g, m_2g, \mu g$ die wirksamen Kräfte sein. Als Coordinatensystem wird ein Rechtssystem zugrunde gelegt, die durch A_1A_2 gehende Horizontalebene ist die XY -Ebene; die auf A_1A_2 mittelsenkrechte Vertikalebene die ZX -Ebene; die positiven y rechnen nach der Seite von A_1 , die positiven z nach unten hin.

Sind jetzt die Coordinaten von A_1, A_2, B_1, B_2, C der Reihe nach $0, a, 0; 0, -a, 0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \xi, \eta, \zeta$, so findet die Bewegung des Systems ihren mathematischen Ausdruck in den folgenden Gleichungen:

$$\left| \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -T_1 \cdot \frac{x_1}{l_1} - T_1' \cdot \frac{x_1 - \xi}{l_1'} \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -T_1 \cdot \frac{y_1 - a}{l_1} - T_1' \cdot \frac{y_1 - \eta}{l_1'} \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -T_1 \cdot \frac{z_1}{l_1} - T_1' \cdot \frac{z_1 - \zeta}{l_1'} + m_1 g \end{array} \right| ; \quad \left| \begin{array}{l} m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -T_2 \cdot \frac{x_2}{l_2} - T_2' \cdot \frac{x_2 - \xi}{l_2'} \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -T_2 \cdot \frac{y_2 + a}{l_2} - T_2' \cdot \frac{y_2 - \eta}{l_2'} \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -T_2 \cdot \frac{z_2}{l_2} - T_2' \cdot \frac{z_2 - \zeta}{l_2'} + m_2 g \end{array} \right| ;$$

$$\left| \begin{array}{l} \mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -T_1' \cdot \frac{\xi - x_1}{l_1'} - T_2' \cdot \frac{\xi - x_2}{l_2'} \\ \mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -T_1' \cdot \frac{\eta - y_1}{l_1'} - T_2' \cdot \frac{\eta - y_2}{l_2'} \\ \mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -T_1' \cdot \frac{\zeta - z_1}{l_1'} - T_2' \cdot \frac{\zeta - z_2}{l_2'} + \mu g \end{array} \right|$$

Nimmt man noch die vier Gleichungen hinzu, welche die Erhaltung der Pendellängen ausdrücken, so hat man im ganzen dreizehn Gleichungen, deren Anzahl notwendig und ausreichend ist, um die neun Koordinaten der drei Massenpunkte, sowie die Spannungen der vier Pendelstangen als Funktionen der Zeit darzustellen.

2. Einschränkung der Aufgabe auf ein symmetrisches Pendelsystem und auf unendlich kleine Schwingungen. Angesichts der Schwierigkeiten, welche die Lösung der Aufgabe schon am einfachen Pendel verursacht, wäre es ein aussichtsloses Unternehmen,

auf die Behandlung der aufgestellten Gleichungen in ihrer allgemeinen Form weiter einzugehen. Die Aufgabe soll darum die folgenden Einschränkungen erfahren, welche ihre Lösung wesentlich erleichtern. Durch die Annahmen $l_1 = l_2 = l$, $l'_1 = l'_2 = l'$ und $m_1 = m_2 = m$ soll das System als ein symmetrisches vorausgesetzt werden. Ferner soll die Behandlung des dynamischen Teils der Aufgabe auf die unendlich kleinen Schwingungen beschränkt bleiben, welche das System macht, sobald es durch irgend welche kleinen Antriebe aus seiner stabilen Gleichgewichtslage verschoben wird.

Die zunächst vorzunehmende Umformung besteht in der Einführung zweckmäßiger Polar-coordinaten. Die Länge A_1B_1 befindet sich im Zustande des Gleichgewichts in der YZ -Ebene; beim Heraustreten aus derselben soll φ_1 den Winkel bedeuten, den A_1B_1 mit seiner Projektion auf die YZ -Ebene macht, positiv genommen nach der Seite der positiven x , negativ nach der entgegengesetzten. Ferner soll ψ_1 der Winkel sein, den diese Projektion mit der durch A_1 gehenden, abwärts gerichteten Vertikalen einschließt, wieder positiv nach der Seite der positiven y , negativ nach der Seite der negativen y gerechnet. Die gleiche Bedeutung sollen φ_2 und ψ_2 für die Pendellänge A_2B_2 , sowie φ und ψ (ohne Index) für die geometrische Länge $OC = \lambda$ haben (Fig. 1). Der Zusammenhang zwischen den neu eingeführten Winkeln und den alten Coordinaten wird durch die Gleichungen vermittelt

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = l \sin \varphi_1 \\ y_1 = a + l \cos \varphi_1 \sin \psi_1 \\ z_1 = l \cos \varphi_1 \cos \psi_1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_2 = l \sin \varphi_2 \\ y_2 = -a + l \cos \varphi_2 \sin \psi_2 \\ z_2 = l \cos \varphi_2 \cos \psi_2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} \xi = \lambda \sin \varphi \\ \eta = \lambda \cos \varphi \sin \psi \\ \zeta = \lambda \cos \varphi \cos \psi \end{array} \right| .$$

Die Winkel φ und ψ sind sämtlich spitze Winkel und geeignet, die Lage des Systems vollständig zu bestimmen. Da nur unendlich kleine Schwingungen betrachtet werden sollen, so läßt sich schon übersehen, daß die Winkel φ , φ_1 , φ_2 unendlich klein bleiben müssen, indem sie in der Gleichgewichtslage ganz verschwinden; das Gleiche gilt für den Winkel ψ . Dagegen sind die Winkel ψ_1 und ψ_2 von ihren Werten in der Gleichgewichtslage abhängig, welche wir künftig mit $\bar{\psi}_1$ und $\bar{\psi}_2$ bezeichnen werden, und die unter Umständen recht beträchtliche Größen sein können.

Bevor wir in diesen Betrachtungen weiter gehen, ist es geboten, die statischen Verhältnisse des Systems genauer zu untersuchen.

3. Gleichgewichtslagen des Systems. Wir betrachten zunächst die absolut sichere Gleichgewichtslage (Fig. 2), bezeichnen mit τ und τ' die im Ruhezustande auf l und l' herrschenden Spannungen und mit ψ und ε zwei Winkel, welche in dieser Untersuchung stets positiv sind und so definiert werden, daß ψ den Winkel bedeutet, um welchen die durch A_1 nach unten gehende Vertikale sich im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muß, um in die Lage von l zu kommen, — ebenso ε denjenigen Winkel, um welchen die durch B_1 nach unten gehende Vertikale sich im gleichen Sinne wie vorhin zu bewegen hat, um die Lage von l' zu erreichen. Für die Hauptgleichgewichtslage sind ψ und ε spitze Winkel; es giebt aber andere Gleichgewichtslagen, für welche ψ und ε allen vier Quadranten angehören können, und es wird sich zeigen, daß die für den Hauptfall aufgestellten Bedingungsgleichungen bei den so definierten Winkeln ψ und ε allgemeine Gültigkeit haben, sofern nur die Größen τ und τ' an den Stellen, wo sie nicht Spannungen, sondern Pressungen ausdrücken, als negative Größen aufgefaßt werden.

Wegen des symmetrischen Baues des Systems ist es nur nötig, außer für den Punkt C noch für einen der Punkte B_1 oder B_2 die Bedingungen des Gleichgewichts aufzufinden; wir wählen dazu den Punkt B_1 . Nach den Grundgesetzen der Statik sind nun die Bedingungen des Gleichgewichts für den Punkt C : $\mu g = 2\tau' \cos \varepsilon$ und für den Punkt B_1 : $\frac{\tau}{\sin \varepsilon} = \frac{\tau'}{\sin \psi} = \frac{mg}{\sin(\varepsilon - \psi)}$. Hierzu kommt die rein geometrische Gleichung $l \sin \psi + l' \sin \varepsilon = a$. Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$\text{I} \quad \begin{cases} \tau = \frac{\mu g \operatorname{tg} \varepsilon}{2 \sin \psi} = \frac{mg \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \psi)}; \\ \tau' = \frac{\mu g}{2 \cos \varepsilon} = \frac{mg \sin \psi}{\sin(\varepsilon - \psi)}; \\ \frac{\mu}{2m} = \frac{\cos \varepsilon \sin \psi}{\sin(\varepsilon - \psi)}; \quad 1 + \frac{2m}{\mu} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \psi}. \end{cases}$$

Verbindet man mit der geometrischen Gleichung die Beziehung $\tau : \tau' = \sin \varepsilon : \sin \psi$, so findet sich $\sin \varepsilon = \frac{a\tau}{l\tau' + l'\tau}$, $\sin \psi = \frac{a\tau'}{l\tau' + l'\tau}$. Da nur die Verhältnisse der Längen, Gewichte und Spannungen in die Rechnung eintreten, so empfiehlt es sich, die folgende Bezeichnung einzuführen:

$$\text{II} \quad \begin{cases} \frac{a}{l'} = p, \quad \frac{l}{l'} = q, \quad 1 + \frac{2m}{\mu} = N, \\ \frac{\tau}{\tau'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \psi} = u, \\ \sin \varepsilon = \frac{pu}{q+u}, \quad \sin \psi = \frac{p}{q+u}. \end{cases}$$

Aus den gegebenen Größen p, q, N wird die noch unbekannte Gröfse u und mit ihr ε und ψ vermittelt der folgenden Schlusskette bestimmt:

$$\left(\frac{N}{u}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \psi}\right)^2 : \left(\frac{\sin \varepsilon}{\sin \psi}\right)^2 = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{1 - \sin^2 \psi}{1 - \sin^2 \varepsilon} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q+u}\right)^2}{1 - \left(\frac{pu}{q+u}\right)^2},$$

deren Ergebnis sich unter den folgenden Formen darstellen läßt:

$$\text{III} \quad \begin{cases} \left(\frac{pu}{q+u}\right)^2 = \frac{N^2 - u^2}{N^2 - 1}; \\ u^4 + 2qu^3 + [q^2 - N^2 + p^2(N^2 - 1)] \cdot u^2 - 2qN^2u - q^2N^2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung ist vom vierten Grade, und gleichgültig, ob der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck positiv oder negativ ausfällt, nach den Gesetzen der Algebra muß sich unter ihren vier Wurzeln eine positive und eine negative reelle befinden. Wir werden unsere Betrachtungen vorläufig auf diese zwei mit Sicherheit existierenden Wurzeln beschränken. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß unter allen Umständen Gleichgewichtslagen möglich sind; die einfache Annahme z. B. $a > l + l'$ oder $p > q + 1$ macht das System physikalisch unmöglich, während die mathematische Gleichung III immer noch ihre reellen Wurzeln liefern wird.

Aus der ersten Form der Gleichung III schließt man, daß die reellen Wurzeln der Gleichung zwischen $-N$ und $+N$ liegen müssen. Weil ferner $\frac{pu}{q+u} = \sin \varepsilon$ kein unächter

Bruch sein kann, so schließt man weiter, daß $u^2 > 1$ sein muß, um physikalisch bedeutsam zu werden. Der Grenzfall $u = +1$ liefert die Zwangslage $p = q + 1$ oder $a = l + l'$; die zugehörige negative Wurzel wird nicht zwischen -1 und $-N$ liegen dürfen, weil ihr keine physikalische Bedeutung zukommt. Der Wurzel $u = -1$ entspricht $p = (q - 1)$ oder $a = (l - l')$, woraus für ε und ψ die Werte 90° und 270° folgen, sodaß sämtliche Längen sich in der Richtung von a befinden; die Gleichgewichtslage ist eine illusorische, indem $\frac{\text{tg } \varepsilon}{\text{tg } \psi}$ und daher auch N sich unter der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ darstellen. Im letztern Falle bewahrt die positive Wurzel ihren physikalischen Sinn. Die Grenzfälle $u = \pm N$ verlangen entweder $p = 0$ oder $q = \infty$. Im ganzen sind die Grenzfälle von keiner besondern Wichtigkeit, und wir lassen sie darum ganz außer Betracht.

Fassen wir das Wesentliche der letzten Betrachtung zusammen, so liegt die positive Wurzel der Gleichung III zwischen $+1$ und $+N$, die negative zwischen -1 und $-N$. Wir schreiben jetzt $\sin \varepsilon = \left(\frac{pu}{q+u}\right)$ und $\sin \psi = \left(\frac{p}{q+u}\right)$ und deuten durch die Klammern an, daß rechts die absoluten Werte genommen werden sollen; alsdann sind ε und ψ für einen jeden der beiden Wurzelwerte bestimmte Winkel des ersten Quadranten. Die den verschiedenen Gleichgewichtslagen entsprechenden ε und ψ unterscheiden wir jetzt durch Suffixe. Bei der negativen Wurzel müssen wir die Fälle $q + u > 0$ und $q + u < 0$ auseinanderhalten; der Fall $q + u = 0$ verlangt $p = 0$ und wird nicht weiter beachtet. Wir erhalten nunmehr

für die positive Wurzel

$$\text{entweder } \varepsilon_1 = \varepsilon \text{ und } \psi_1 = \psi \quad \text{oder} \quad \varepsilon_2 = 180^\circ - \varepsilon \text{ und } \psi_2 = 180^\circ - \psi;$$

für die negative Wurzel und $q + u > 0$

$$\text{entweder } \varepsilon_3 = 180^\circ + \varepsilon \text{ und } \psi_3 = \psi \quad \text{oder} \quad \varepsilon_4 = 360^\circ - \varepsilon \text{ und } \psi_4 = 180^\circ - \psi;$$

für die negative Wurzel und $q + u < 0$

$$\text{entweder } \varepsilon_5 = 180^\circ - \varepsilon \text{ und } \psi_5 = 360^\circ - \psi \quad \text{oder} \quad \varepsilon_6 = \varepsilon \text{ und } \psi_6 = 180^\circ + \psi.$$

Die Winkel sind dabei so gepaart, daß beide Winkel eines jeden Paares im ersten und dritten Quadranten oder beide im zweiten und vierten Quadranten liegen, damit $N = \frac{\text{tg } \varepsilon}{\text{tg } \psi}$ positiv wird. Diese sechs Gleichgewichtslagen sind in Fig. 3 dargestellt; es ist wohl darauf zu achten, daß $\varepsilon > \psi$ ist. Die Lage I ist die einzige absolut sichere und diejenige, welche für die später zu entwickelnden Bewegungsgleichungen allein in Frage kommt. Die Lagen III und V können als relativ sichere angesehen werden, indem sie sich stabil verhalten, so lange es sich nur um Verrückungen in der YZ -Ebene handelt. Die übrigen Lagen sind unsichere. — Zur Ergänzung dieser allgemeinen Betrachtungen wird uns die genauere Untersuchung einiger Beispiele führen.

Als erstes Beispiel wählen wir das Pendelsystem $a = 2$, $l = 8$, $l' = 5$, $N = 5$; also $p = 0,4$, $q = 1,6$. Um über die Wurzeln Aufklärung zu bekommen, wenden wir auf die Gleichung III den Sturmschen Satz an und bilden die für denselben charakteristischen Funktionen. Mit Weglassung von überflüssigen positiven Faktoren liefert die Rechnung

$V = u^4 + 3,2u^3 - 18,6u^2 - 80u - 64$	u	V	V_1	V_2	V_3	V_4
$V_1 = u^3 + 2,4u^2 - 9,3u - 20$	$-\infty$	+	—	+	+	—
$V_2 = u^2 + 7,122u + 6,5$	-5	+	—	—	+	—
$V_3 = -u - 0,6$	-1	—	—	+	+	—
$V_4 = -1$	0	—	—	+	+	—
	$+1$	—	—	+	—	—
	$+5$	+	+	+	—	—
	$+\infty$	+	+	+	—	—

Hieraus ist ersichtlich, daß die Gleichung außer der positiven Wurzel zwischen $+1$ und $+5$ und der negativen zwischen -1 und -5 keine reellen Wurzeln hat. Diese Wurzeln sind $u = 4,495$ und $u' = -1,14$. Die erste Wurzel liefert $\psi = 2^\circ 55'$, $\varepsilon = 17^\circ 10'$, die zweite $\psi = 5^\circ 13'$, $\varepsilon = 5^\circ 57'$. Da $q + u' > 0$ ist, so entsprechen die Gleichgewichtslagen des Pendels den Formen I—IV der Fig. 3. Die Gleichgewichtsformen V und VI sind dem Pendel nicht eigen.

Als zweites Beispiel wählen wir $a = 2$, $l = 4$, $l' = 5$, $N = \sqrt{5}$; also $p = 0,4$, $q = 0,8$ und bekommen

$V = u^4 + 1,6u^3 - 3,72u^2 - 8u - 3,2$	u	V	V_1	V_2	V_3	V_4
$V_1 = u^3 + 1,2u^2 - 1,86u - 2$	$-\infty$	+	—	+	+	—
$V_2 = u^2 + 2,246u + 1,0256$	$-\sqrt{5}$	+	—	+	—	—
$V_3 = u + 1,7354$	-1	+	+	—	+	—
$V_4 = -1$	0	—	—	+	+	—
	$+1$	—	—	+	+	—
	$+\sqrt{5}$	+	+	+	+	—
	$+\infty$	+	+	+	+	—

Die Gleichung III hat wieder nur zwei reelle Wurzeln, von welchen die positive etwas kleiner als 2,16 ist, die negative ungefähr $= -0,6$. Da die letzte Wurzel die Bedingung $u^2 > 1$ nicht erfüllt, so paßt sie für unser System nicht, und dasselbe ist nur fähig, die Gleichgewichtslagen I und II einzunehmen. Soll diese unbrauchbare Wurzel schon bei der Wahl des Systems vermieden werden, so hat man es so einzurichten, daß der Wert der linken Seite der entwickelten Gleichung III für $u = -1$ negativ ausfällt; dieser Wert ist aber $[p^2 - (q - 1)^2] \cdot (N^2 - 1)$, und die hinreichende Bedingung dafür, daß die negative Wurzel brauchbar wird, ist $p^2 - (q - 1)^2 < 0$ oder $a < (l - l')$; sie ist in unserm Systeme nicht erfüllt.

Ein drittes Beispiel ordnen wir so an, daß N eine größere Zahl ist; damit wird m groß angenommen im Vergleich mit μ . Wir setzen $a = 4$, $l = 10$, $l' = 5$, $N = 21$, mithin $p = 0,8$, $q = 2$, $m = 10\mu$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= u^4 + 4u^3 - 155,4u^2 - 1764u - 1764 \\ V_1 &= u^3 + 3u^2 - 77,7u - 441 \\ V_2 &= u^2 + 15,4u + 16,4 \\ V_3 &= -u + 2,45 \\ V_4 &= -1. \end{aligned}$$

Die Gleichung $V=0$ hat demnach zwei imaginäre Wurzeln; von ihren reellen Wurzeln ist die positive $= 14,903$, die negative $= -1,11$. Da $q - 1,11 > 0$ ist, so ist das System fähig, die Gleichgewichtsfiguren I–IV anzunehmen.

Wenn wir die Längen des letzten Pendelsystems beibehalten, die Gewichte aber so groß annehmen, daß $\mu = 10m$ wird, so ist $p = 0,8$, $q = 2$, $N = 1,2$. Die Rechnung giebt

$$\begin{aligned} V &= u^4 + 4u^3 + 2,8416u^2 - 5,76u - 5,76 \\ V_1 &= u^3 + 3u^2 + 1,4208u - 1,44 \\ V_2 &= u^2 + 3,63526u + 2,73556 \\ V_3 &= -u - 0,2994 \\ V_4 &= -1. \end{aligned}$$

Demnach sind zwei Wurzeln imaginär; die positive Wurzel liegt zwischen $+1$ und $+1,2$, die negative zwischen -1 und $-1,2$. Da $q - 1,2 > 0$ ist, so sind wieder nur die Gleichgewichtslagen I–IV möglich.

Ändern wir das im zweiten Beispiele behandelte Pendelsystem nur soweit um, daß wir l halbsolang wie dort annehmen, so haben wir ein Pendel, bei welchem die Gleichgewichtsfiguren V und VI zum Vorschein kommen; denn für $a = 2$, $l = 2$, $l' = 5$, $N = \sqrt{5}$, also $p = 0,4$, $q = 0,4$ giebt die Rechnung

$V = u^4 + 0,8u^3 - 4,2u^2 - 4u - 0,8$	u	V	V_1	V_2	V_3	V_4
$V_1 = u^3 + 0,6u^2 - 2,1u - 1$	$-\infty$	+	—	+	—	+
$V_2 = u^2 + 1,162u + 0,27$	$-\sqrt{5}$	+	—	+	—	+
$V_3 = u + 0,494$	-1	—	+	+	—	+
$V_4 = 1$	$-0,5$	+	+	—	—	+
	0	—	—	+	+	+
	$+1$	—	—	+	+	+
	$+\sqrt{5}$	+	+	+	+	+
	$+\infty$	+	+	+	+	+

Von den brauchbaren Wurzeln liegt die positive zwischen $2,15$ und $2,16$; die negative ist genau $= -2$. Da in diesem Falle $q - 2 < 0$ ist, so haben wir wirklich die Gleichgewichtslagen V und VI, denen hier die Winkel $\varepsilon = 30^\circ$ und $\psi = 14^\circ 28'$ zukommen. Dieses letzte Beispiel lehrt uns aber außerdem, daß die Hauptgleichung III unserer Aufgabe nicht notwendig zwei imaginäre Wurzeln hat, wie es nach den übrigen Beispielen zu sein schien; der Sturmsche Satz zeigt uns, daß die Gleichung noch eine reelle Wurzel zwischen 0 und $-0,5$ und eine andere zwischen $-0,5$ und -1 hat.

Gehen wir nun zu den allgemeinen Betrachtungen zurück, und fassen wir zusammen, was uns aus den Beispielen ersichtlich geworden, indem wir die Grenzfälle als unwesentlich außer acht lassen, so können wir das Folgende aussprechen:

Erfüllt das System die Bedingung $l + l' > a$, so ist dasselbe imstande die Gleichgewichtslagen I und II einzunehmen. Erfüllt das System außerdem die Bedingung $a < (l - l')$, so kann es noch zwei andere Gleichgewichtslagen einnehmen und zwar die Lagen III und IV, wenn $q + u > 0$ ist, die Lagen V und VI, wenn $q + u < 0$ ist, unter u die negative

Wurzel der Gleichung III, welche < -1 ist, verstanden. Da nur die sechs Gleichgewichtslagen der Fig. 3 denkbar sind, so giebt es nur eine positive Wurzel, zwischen $+1$ und $+N$ gelegen, und nur eine negative Wurzel, zwischen -1 und $-N$ gelegen, welche die Aufgabe lösen; das System kann nie mehr als vier Gleichgewichtslagen einnehmen. Die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung III werden im allgemeinen imaginär sein; sie können aber auch, wie aus dem letzten Beispiele hervorgeht, reell ausfallen. Sind die der Aufgabe fremden Wurzeln reell, so müssen dieselben zwischen $+1$ und -1 liegen, weil die aus der ersten Form der Gleichung III sich ergebende Beziehung $u^2 < N^2$ jede andere Lage ausschließt.

4. Bestimmung der Spannungen bei dem in Bewegung befindlichen Systeme. Wir gehen nunmehr in den Erörterungen des Abschnitts 2 weiter, und es sollen künftig wieder nach der dort festgestellten Definition die Größen ψ , ebenso wie die φ , positive oder negative spitze Winkel sein. Da die Aufgabe sich darauf beschränkt hat, nur die unendlich kleinen Schwingungen um die absolut sichere Gleichgewichtslage herum zu untersuchen, so sind sämtliche φ als unendlich kleine Winkel zu behandeln, während bei den ψ nur ihre Abweichungen von den ψ der Gleichgewichtslage als unendlich klein gelten. Als ψ der Gleichgewichtslage kommt nur der spitze Winkel ψ der Gleichung $\sin \psi = \frac{p}{q+u}$ in Betracht, in welcher u die positive Wurzel der Hauptgleichung III bedeutet; er soll künftig mit $\bar{\psi}$ bezeichnet werden. Indem wir die vorhin erwähnten, unendlich kleinen Abweichungen der ψ_1 und ψ_2 von ihren Werten in der Gleichgewichtslage mit χ_1 und χ_2 benennen, haben wir nur

$$\psi_1 = -\bar{\psi} + \chi_1 \quad \text{und} \quad \psi_2 = \bar{\psi} + \chi_2$$

zu setzen, und die Vorzeichen von χ_1 und χ_2 werden sich genau nach den für die ψ getroffenen Feststellungen regeln. Durch diese Substitution bekommen die im Abschnitt 2 aufgeführten Werte der Coordinaten die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} x_1 &= l\varphi_1, & y_1 &= a - l \sin \bar{\psi} + l\chi_1 \cos \bar{\psi}, & z_1 &= l \cos \bar{\psi} + l\chi_1 \sin \bar{\psi}; \\ x_2 &= l\varphi_2, & y_2 &= -a + l \sin \bar{\psi} + l\chi_2 \cos \bar{\psi}, & z_2 &= l \cos \bar{\psi} - l\chi_2 \sin \bar{\psi}; \\ \xi &= h\varphi, & \eta &= h\psi, & \zeta &= h + \varrho. \end{aligned}$$

In den letzten Ausdrücken bedeutet h die Strecke der Gleichgewichtslage

$$\overline{OC} = h = l \cos \bar{\psi} + l' \cos \bar{\varepsilon},$$

und $\bar{\varepsilon}$ bestimmt sich analog dem $\bar{\psi}$ durch die Gleichung $\sin \varepsilon = \frac{pu}{q+u}$; der Strich über dem ε wird aber fernerhin als überflüssig fortgelassen werden. Weiter bedeutet ϱ die unendlich kleine Veränderung, welche die geometrische Strecke $\overline{OC}$ während der Bewegung erfährt, sodafs $+\varrho$ eine Verlängerung, $-\varrho$ eine Verkürzung ausdrückt.

Setzen wir die neuen Coordinaten in die beiden geometrischen Gleichungen

$$l'^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = (\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2 + (\zeta - z_2)^2$$

ein, so erhalten wir mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} l'^2 &= (h\psi - a + l \sin \bar{\psi} - l\chi_1 \cos \bar{\psi})^2 + (h + \varrho - l \cos \bar{\psi} - l\chi_1 \sin \bar{\psi})^2 \\ &= (h\psi + a - l \sin \bar{\psi} - l\chi_2 \cos \bar{\psi})^2 + (h + \varrho - l \cos \bar{\psi} + l\chi_2 \sin \bar{\psi})^2 \\ &= (a - l \sin \bar{\psi})^2 + (h - l \cos \bar{\psi})^2 \end{aligned}$$

und durch Entwicklung der Quadrate und mit Berücksichtigung der Relation

$$\frac{a - l \sin \bar{\psi}}{h - l \cos \bar{\psi}} = \operatorname{tg} \varepsilon$$

die folgenden zwei wichtigen Gleichungen:

$$\text{IV} \quad \begin{cases} l(\chi_2 + \chi_1) = 2h\psi \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}; \\ l(\chi_2 - \chi_1) = 2\varrho \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}. \end{cases}$$

Indem wir jetzt auch die neuen Coordinaten in die dynamischen Grundgleichungen einführen, erhalten wir die folgenden drei Tripel von Gleichungen, welche sich der Reihe nach auf die drei Punkte B_1, B_2, C beziehen:

$$\begin{aligned} \text{IV} \quad & \left\{ \begin{aligned} ml \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= -T_1 \varphi_1 + T_1' \cdot \frac{h\varphi - l\varphi_1}{l'} \\ ml \cos \bar{\psi} \frac{d^2 \chi_1}{dt^2} &= -T_1 \cdot [-\sin \bar{\psi} + \chi_1 \cos \bar{\psi}] + T_1' \cdot \frac{h\psi - a + l \sin \bar{\psi} - l\chi_1 \cos \bar{\psi}}{l'} \\ ml \sin \bar{\psi} \frac{d^2 \chi_1}{dt^2} &= -T_1 \cdot [\cos \bar{\psi} + \chi_1 \sin \bar{\psi}] + T_1' \cdot \frac{h + \varrho - l \cos \bar{\psi} - l\chi_1 \sin \bar{\psi}}{l'} + mg \end{aligned} \right. ; \\ \\ \text{V} \quad & \left\{ \begin{aligned} ml \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= -T_2 \varphi_2 + T_2' \cdot \frac{h\varphi - l\varphi_2}{l'} \\ ml \cos \bar{\psi} \frac{d^2 \chi_2}{dt^2} &= -T_2 \cdot [\sin \bar{\psi} + \chi_2 \cos \bar{\psi}] + T_2' \cdot \frac{h\psi + a - l \sin \bar{\psi} - l\chi_2 \cos \bar{\psi}}{l'} \\ -ml \sin \bar{\psi} \frac{d^2 \chi_2}{dt^2} &= -T_2 \cdot [\cos \bar{\psi} - \chi_2 \sin \bar{\psi}] + T_2' \cdot \frac{h + \varrho - l \cos \bar{\psi} + l\chi_2 \sin \bar{\psi}}{l'} + mg \\ \mu h \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -T_1' \cdot \frac{h\varphi - l\varphi_1}{l'} - T_2' \cdot \frac{h\varphi - l\varphi_2}{l'} \\ \mu h \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= -T_1' \cdot \frac{h\psi - a + l \sin \bar{\psi} - l\chi_1 \cos \bar{\psi}}{l'} - T_2' \cdot \frac{h\psi + a - l \sin \bar{\psi} - l\chi_2 \cos \bar{\psi}}{l'} \\ \mu \frac{d^2 \varrho}{dt^2} &= -T_1' \cdot \frac{h + \varrho - l \cos \bar{\psi} - l\chi_1 \sin \bar{\psi}}{l'} - T_2' \cdot \frac{h + \varrho - l \cos \bar{\psi} + l\chi_2 \sin \bar{\psi}}{l'} + \mu g \end{aligned} \right. . \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $\sin \bar{\psi}$, die dritte mit $\cos \bar{\psi}$ und subtrahiert die so entstandenen Gleichungen von einander, und verfährt man in ähnlicher Weise mit der fünften und sechsten Gleichung, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relationen $a - l \sin \bar{\psi} = l' \sin \varepsilon$, $h - l \cos \bar{\psi} = l' \cos \varepsilon$:

$$\text{VI} \quad \begin{cases} T_1 = mg \cos \bar{\psi} + T_1' \cdot \left[\frac{\varrho \cos \bar{\psi} - h\psi \sin \bar{\psi}}{l'} + \cos(\varepsilon - \bar{\psi}) \right]; \\ T_2 = mg \cos \bar{\psi} + T_2' \cdot \left[\frac{\varrho \cos \bar{\psi} + h\psi \sin \bar{\psi}}{l'} + \cos(\varepsilon - \bar{\psi}) \right]. \end{cases}$$

Aus denselben Paaren von Gleichungen findet man:

$$\text{VII} \quad \begin{cases} ml \frac{d^2 \chi_1}{dt^2} = mg \sin \bar{\psi} - T_1 \cdot \chi_1 + T_1' \cdot \left[\frac{h\psi \cos \bar{\psi} + q \sin \bar{\psi} - l\chi_1}{l'} - \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \right]; \\ ml \frac{d^2 \chi_2}{dt^2} = -mg \sin \bar{\psi} - T_2 \cdot \chi_2 + T_2' \cdot \left[\frac{h\psi \cos \bar{\psi} - q \sin \bar{\psi} - l\chi_2}{l'} + \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \right]. \end{cases}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen des Systems V leitet man ab:

$$h \sin \varepsilon \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \cos \varepsilon \frac{d^2 q}{dt^2} = - \left(\frac{T_1'}{\mu} + \frac{T_2'}{\mu} \right) \cdot \frac{h\psi \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon}{l'} + \frac{T_1'}{\mu} \chi_1 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon + \bar{\psi})}{l'} + \frac{T_2'}{\mu} \chi_2 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{l'} - \frac{T_1'}{\mu} \cos 2\varepsilon - \frac{T_2'}{\mu} + g \cos \varepsilon$$

und

$$h \sin \varepsilon \frac{d^2 \psi}{dt^2} - \cos \varepsilon \frac{d^2 q}{dt^2} = - \left(\frac{T_1'}{\mu} + \frac{T_2'}{\mu} \right) \cdot \frac{h\psi \sin \varepsilon - q \cos \varepsilon}{l'} + \frac{T_1'}{\mu} \chi_1 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{l'} + \frac{T_2'}{\mu} \chi_2 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon + \bar{\psi})}{l'} + \frac{T_1'}{\mu} + \frac{T_2'}{\mu} \cos 2\varepsilon - g \cos \varepsilon.$$

Bedenkt man, dafs nach IV

$$l\chi_2 = \frac{h\psi \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \quad \text{und} \quad l\chi_1 = \frac{h\psi \sin \varepsilon - q \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}$$

ist, so müssen die rechten Seiten der beiden vorhergehenden Gleichungen den mit $\frac{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{m}$ multiplizierten rechten Seiten der Gleichungen VII beziehungsweise gleich sein. Auf diese Weise entstehen die folgenden Gleichungen:

$$\text{VIII} \quad \begin{cases} \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \cdot \left\{ g \sin \bar{\psi} - \frac{T_1}{m} \chi_1 + \frac{T_1'}{m} \left[\frac{h\psi \cos \bar{\psi} + q \sin \bar{\psi} - l\chi_1}{l'} - \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \right] \right\} = \\ \quad - \left(\frac{T_1'}{\mu} + \frac{T_2'}{\mu} \right) \cdot \frac{h\psi \sin \varepsilon - q \cos \varepsilon}{l'} + \frac{T_1'}{\mu} \chi_1 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{l'} \\ \quad + \frac{T_2'}{\mu} \chi_2 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon + \bar{\psi})}{l'} + \frac{T_1'}{\mu} + \frac{T_2'}{\mu} \cos 2\varepsilon - g \cos \varepsilon; \\ \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \cdot \left\{ -g \sin \bar{\psi} - \frac{T_2}{m} \chi_2 + \frac{T_2'}{m} \left[\frac{h\psi \cos \bar{\psi} - q \sin \bar{\psi} - l\chi_2}{l'} + \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \right] \right\} = \\ \quad - \left(\frac{T_1'}{\mu} + \frac{T_2'}{\mu} \right) \cdot \frac{h\psi \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon}{l'} + \frac{T_1'}{\mu} \chi_1 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon + \bar{\psi})}{l'} \\ \quad + \frac{T_2'}{\mu} \chi_2 \cdot \frac{l \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{l'} - \frac{T_1'}{\mu} \cos 2\varepsilon - \frac{T_2'}{\mu} + g \cos \varepsilon. \end{cases}$$

Jetzt substituieren wir zunächst für T_1 und T_2 die Werte aus VI und richten es durch Addition und Subtraktion der Gleichungen so ein, dafs $T_2' + T_1'$ und $T_2' - T_1'$ als unbekannte Größen auftreten. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \frac{T_2' + T_1'}{m} &= 2gU; & \frac{T_2' - T_1'}{m} &= 2gV; \\ \frac{T_2' + T_1'}{\mu} &= \frac{m}{\mu} \cdot \frac{T_2' + T_1'}{m} = \frac{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{2 \cos \varepsilon \sin \bar{\psi}} \cdot 2gU; & \frac{T_2' - T_1'}{\mu} &= \frac{m}{\mu} \cdot \frac{T_2' - T_1'}{m} = \frac{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{2 \cos \varepsilon \sin \bar{\psi}} \cdot 2gV; \\ \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})} - \cos \bar{\psi} &+ \frac{\sin \varepsilon \cdot \cot(\varepsilon - \bar{\psi})}{l} = A; & \frac{\cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})} + \sin \bar{\psi} &+ \frac{\cos \varepsilon \cdot \cot(\varepsilon - \bar{\psi})}{l} = B, \end{aligned}$$

so werden A und B endliche, durch das gegebene Pendelsystem bestimmte Größen bedeuten, während U und V die zu bestimmenden Unbekannten sind. Die Rechnung kann von hier ab zwei Wege einschlagen, indem entweder ϱ und $h\psi$ oder χ_1 und χ_2 beibehalten werden. Wir reducieren auf ϱ und $h\psi$ und erhalten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} h\psi \cdot \left[A + \frac{\sin \varepsilon}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \right] \cdot U + \left\{ \varrho \cdot \left[B + \frac{\sin \varepsilon \cot \bar{\psi}}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \right] - \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon \sin \bar{\psi}} - \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \right\} \cdot V \\ + h\psi \cdot \frac{\cos \bar{\psi} \sin \varepsilon}{l \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} = 0; \\ \left\{ \varrho \cdot \left[B - \frac{\sin \varepsilon \cot \bar{\psi}}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \right] - \frac{\cos \varepsilon}{\sin \bar{\psi}} - \sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \right\} \cdot U + h\psi \cdot \left[A - \frac{\sin \varepsilon}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \right] \cdot V \\ + \frac{\varrho \cos \varepsilon \cos \bar{\psi}}{l \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} + \cos \bar{\psi} \cot(\varepsilon - \bar{\psi}) = 0. \end{aligned}$$

Es würde zu unübersichtlichen Ausdrücken führen, wollte man diese linearen Gleichungen auf die gewöhnliche Art auflösen; wir werden aus diesem Grunde anders verfahren. Da wir die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigen, so müssen U und V die Formen haben

$$U = \alpha + \beta \varrho + \gamma h\psi, \quad V = \alpha' + \beta' \varrho + \gamma' h\psi.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen ein, so sind beide Gleichungen identisch erfüllt, und wir dürfen die Coefficienten von ϱ , diejenigen von $h\psi$ und endlich auch die freien Glieder einzeln $= 0$ setzen. Daraus ergeben sich sechs Gleichungen, welche zur Bestimmung der sechs Konstanten $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ ausreichend sind. Auf diese Weise findet man ohne weitere Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\sin \bar{\psi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}, \quad \beta = \frac{\operatorname{tg} \bar{\psi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi})} \cdot \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})} - \frac{1}{l'} \cos^2 \bar{\psi} \right], \quad \gamma = 0; \\ \alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = \frac{\frac{\sin \bar{\psi}}{\sin^2(\varepsilon - \bar{\psi})} \cdot \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin \bar{\psi}} + \frac{1}{l'} \cdot (\sin \varepsilon + \sin \psi \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi})) \right]}{\frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon \cdot \sin \bar{\psi}} + \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}. \end{aligned}$$

Hiermit sind die Werte von U und V gefunden, und es ergibt sich aus ihnen:

$$\frac{T_2' + T_1'}{m} = 2g(\alpha + \beta \varrho), \quad \frac{T_2' - T_1'}{m} = 2g\gamma' h\psi;$$

$$T_1' = mg \cdot (\alpha + \beta \varrho - \gamma' h\psi), \quad T_2' = mg \cdot (\alpha + \beta \varrho + \gamma' h\psi).$$

Mit Hülfe der Gleichungen VI kann man hinzufügen:

$$T_1 = mg \cdot (\alpha'' + \beta'' \varrho - \gamma'' h\psi), \quad T_2 = mg \cdot (\alpha'' + \beta'' \varrho + \gamma'' h\psi),$$

worin

$$\alpha'' = \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}, \quad \beta'' = \frac{\alpha \cos \bar{\psi}}{l'} + \beta \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi}), \quad \gamma'' = \frac{\alpha \cdot \sin \bar{\psi}}{l'} + \gamma' \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi}).$$

Um die gewonnenen Resultate auf ihre Richtigkeit zu prüfen, wurde bei einer Wiederholung der Rechnung auf die Variablen χ_1 und χ_2 Bezug genommen. Auf einem ähnlichen und auch nicht weniger mühsamen Wege wurde dabei das folgende Ergebnis erzielt:

$$\text{IX} \quad \left\{ \begin{aligned} T_1' &= \frac{\mu g}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \varepsilon} - \mathfrak{A} \cdot \frac{\chi_2 + \chi_1}{2} + \mathfrak{B} \cdot \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right], & T_2' &= \frac{\mu g}{2} \left[\frac{1}{\cos \varepsilon} + \mathfrak{A} \cdot \frac{\chi_2 + \chi_1}{2} + \mathfrak{B} \cdot \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right], \\ T_1 &= mg \cos \bar{\psi} + \frac{\mu g}{2} \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi}) \left[\frac{1}{\cos \varepsilon} - \mathfrak{D} \cdot \frac{\chi_2 + \chi_1}{2} + \mathfrak{E} \cdot \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right], \\ T_2 &= mg \cos \bar{\psi} + \frac{\mu g}{2} \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi}) \left[\frac{1}{\cos \varepsilon} + \mathfrak{D} \cdot \frac{\chi_2 + \chi_1}{2} + \mathfrak{E} \cdot \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right], \\ \mathfrak{A} &= \frac{\sin \varepsilon + \frac{l}{l'} \cdot \left[\sin \bar{\psi} + \frac{\sin^2 \bar{\psi} \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi})}{\sin \varepsilon} \right]}{\sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \cdot \sin \bar{\psi} \cdot \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}, & \mathfrak{B} &= \frac{\sin \varepsilon - \frac{l}{l'} \cdot \frac{\cos^2 \bar{\psi}}{\cos \varepsilon} \cdot \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{\cos \varepsilon \cdot \cos \bar{\psi} \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi})}, \\ \mathfrak{D} &= \frac{\sin \varepsilon + \frac{l}{l'} \cdot \frac{\sin \bar{\psi} \cdot \sin(\varepsilon + \bar{\psi})}{\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi})}}{\sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \cdot \sin \bar{\psi} \cdot \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}, & \mathfrak{E} &= \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\cos \bar{\psi} \cdot \cos(\varepsilon - \bar{\psi})}. \end{aligned} \right.$$

Es hat keine Schwierigkeit, sich von der Übereinstimmung dieser Formeln mit den vorher entwickelten zu überzeugen. Auch scheint es überflüssig, die früher durch q und $h\psi$ ausgedrückten Werte für die Spannungen auf die Form der Gleichungen IX zu bringen, weil erforderlichen Falls eine Substitution mit Hilfe von IV viel einfacher zum Ziele führt.

5. Die Integrale der Bewegungsgleichungen. Substituiert man die für die Spannungen gefundenen Werte in die Formeln VII, so findet man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\chi_2 + \chi_1)}{dt^2} &= -\frac{g}{l} (\chi_2 + \chi_1) \cdot \left[\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \bar{\psi})} + \frac{l}{l'} \cdot \frac{\sin^2 \bar{\psi}}{\sin \varepsilon} \cdot \cot(\varepsilon - \bar{\psi}) - \cos \varepsilon \sin \bar{\psi} \cdot \mathfrak{A} \right] \\ &= -\frac{g}{l} (\chi_2 + \chi_1) \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon + \frac{l}{l'} \cdot \sin^3 \bar{\psi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi}) \cdot [\sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \sin \bar{\psi} \sin(\varepsilon - \bar{\psi})]}; \\ \frac{d^2(\chi_2 - \chi_1)}{dt^2} &= -\frac{g}{l} (\chi_2 - \chi_1) \cdot \left[\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})} + \frac{l}{l'} \cdot \frac{\sin \bar{\psi} \cdot \cos \bar{\psi}}{\cos \varepsilon} \cdot \cot(\varepsilon - \bar{\psi}) - \cos \varepsilon \cdot \sin \bar{\psi} \cdot \mathfrak{B} \right] \\ &= -\frac{g}{l} (\chi_2 - \chi_1) \cdot \frac{1}{\sin 2(\varepsilon - \bar{\psi})} \cdot \left[\frac{\sin 2\varepsilon}{\cos \bar{\psi}} + \frac{l}{l'} \cdot \frac{\sin 2\bar{\psi}}{\cos \varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Führt man hier die neuen Längen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ mittelst der Gleichungen ein

$$\text{X} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{\mathfrak{L}_1} [\sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \cdot \sin \bar{\psi} \sin(\varepsilon - \bar{\psi})] &= \frac{1}{l} \cdot \sin^3 \varepsilon + \frac{1}{l'} \cdot \sin^3 \bar{\psi}; \\ \frac{\sin 2(\varepsilon - \bar{\psi})}{\mathfrak{L}_2} &= \frac{1}{l} \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\cos \bar{\psi}} + \frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin 2\bar{\psi}}{\cos \varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

so nehmen die Differenzialgleichungen die höchst einfache Gestalt an:

$$\frac{d^2(\chi_2 + \chi_1)}{dt^2} = -\frac{g}{\mathfrak{L}_1} \cdot (\chi_2 + \chi_1); \quad \frac{d^2(\chi_2 - \chi_1)}{dt^2} = -\frac{g}{\mathfrak{L}_2} (\chi_2 - \chi_1),$$

und man kann sofort ihre Integrale hinschreiben:

$$\text{XI} \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_2 + \chi_1 &= c_1 \sin \sqrt{\frac{g}{\mathfrak{L}_1}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{\mathfrak{L}_1}} t; \\ \chi_2 - \chi_1 &= c_3 \sin \sqrt{\frac{g}{\mathfrak{L}_2}} t + c_4 \cos \sqrt{\frac{g}{\mathfrak{L}_2}} t. \end{aligned} \right.$$

Zur Bestimmung der vier Konstanten dienen die vier linearen Gleichungen, welche aus den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten entweder von χ_1 und χ_2 oder von q und $h\psi$ hervorgehen. Vermöge der Gleichungen IV genügt es aber auch, wenn die vier

notwendigen Stücke in anderer Kombination gegeben sind. Beginnt die Bewegung durch einen Stoß aus der Gleichgewichtslage heraus, so ist $c_2 = c_4 = 0$; beginnt sie dagegen aus einer andern Lage ohne Anfangsgeschwindigkeiten, so ist $c_1 = c_3 = 0$.

Die Gleichungen X, XI, IV drücken die Projektion der Bewegung in der YZ -Ebene aus.

Um die Bewegung kennen zu lernen, welche die Projektion in der ZX -Ebene ausführt, haben wir die ersten Gleichungen der drei Gruppen in V zu benutzen. Setzen wir in denselben für die Spannungen ihre Werte ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} ml \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= -mg \cdot \frac{l \sin \varepsilon}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \varphi_1 + \frac{\mu g}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{h \varphi - l \varphi_1}{l'}; \\ ml \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= -mg \cdot \frac{l \sin \varepsilon}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \varphi_2 + \frac{\mu g}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{h \varphi - l \varphi_2}{l'}; \\ \mu h \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -\frac{\mu g}{2 \cos \varepsilon} \cdot \frac{2h \varphi - l(\varphi_1 + \varphi_2)}{l'}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man ab:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{dt^2} &= -\frac{g}{l'} \cdot \frac{\sin \varepsilon + \sin \bar{\varphi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = -\frac{g}{k} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}; \\ \frac{d^2 \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{dt^2} &= -\frac{g}{l'} \cdot \frac{\sin \varepsilon + \sin \bar{\varphi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \frac{gh}{ll'} \cdot \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \varphi = -\frac{g}{k} \cdot \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \frac{g}{k'} \cdot \varphi; \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -\frac{g}{l'} \cdot \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \varphi + \frac{gl}{hl'} \cdot \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})} \cdot \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = -\frac{g}{h'} \cdot \varphi + \frac{g}{k''} \cdot \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}, \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} k &= \frac{l' \sin(\varepsilon - \bar{\varphi})}{\sin \varepsilon + \sin \bar{\varphi}}; \quad k' = \frac{ll'}{h} \cdot \frac{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})}{\sin \bar{\varphi}}; \\ k' &= \frac{l' \sin(\varepsilon - \bar{\varphi})}{\sin \bar{\varphi}}; \quad k'' = \frac{hl'}{l} \cdot \frac{\sin(\varepsilon - \bar{\varphi})}{\sin \bar{\varphi}}, \quad *) \end{aligned}$$

mit den Beziehungen

$$k' = \sqrt{k' \cdot k''}; \quad \frac{1}{k'} > \frac{1}{k} > \frac{1}{k''}; \quad \frac{1}{k} > \frac{1}{h'}.$$

Von den drei Differenzialgleichungen liefert die erste für sich allein das Integral

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = c_5 \sin \sqrt{\frac{g}{k}} t + c_6 \cos \sqrt{\frac{g}{k}} t;$$

die beiden andern lassen sich zwar nicht selbständig integrieren, wohl aber, wenn man ihre Zusammengehörigkeit berücksichtigt. Setzt man nämlich in diesen Gleichungen versuchsweise

$$\varphi = A \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \nu \right), \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = A \cdot \omega \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \nu \right),$$

*) In Fig. 4 ist die geometrische Bedeutung der Größen k, k', k'' veranschaulicht. Man verlängere $A_1 B_1$ bis zum Schnittpunkte D mit der Z -Achse, zeichne das Parallelogramm $A_1 B_1 C J$, ziehe durch D die Parallele zu $O J$, welche $C J$ verlängert in F trifft, beschreibe den Kreis durch die Punkte O, J, D , welcher $J F$ verlängert in G schneidet und bezeichne endlich mit E den Punkt, in welchem die Halbierungslinie von $\angle C B_1 D$ die Z -Achse trifft, — alsdann ist

$$CD = k, \quad CE = k, \quad CF = k', \quad CG = k''.$$

so entstehen mit Weglassung des gemeinsamen Faktors $Ag \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \nu \right)$ die Gleichungen

$$-\frac{\omega}{L} = -\frac{\omega}{k} + \frac{1}{k}; \quad -\frac{1}{L} = -\frac{1}{k'} + \frac{\omega}{k'},$$

aus welchen hervorgeht

$$\omega = \frac{\frac{1}{k'}}{\frac{1}{k} - \frac{1}{L}}; \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{L} = \frac{1}{k' \cdot k''} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{L}} = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{L}}$$

oder

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{L} \right) \cdot \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{L} \right) = \frac{1}{k'^2}.$$

Die Wurzeln der letzten Gleichung sind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right)^2 - \frac{1}{k' \cdot k}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \right)^2 + \frac{1}{k'^2}}. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Form schließt man, daß die Wurzeln reell, aus der ersten weiter, daß beide Wurzeln positiv sind. Setzt man wieder für die Größen k , k' und k'' ihre Werte ein, so wird

$$\text{XII} \quad \begin{cases} \frac{1}{L_1} = \frac{1}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin \varepsilon + \sin \bar{\psi} + \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon + \sin^2 \bar{\psi}} \right]; \\ \omega_1 = -\frac{h}{l' \sin \bar{\psi}} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon + \sin^2 \bar{\psi}} \right]; \\ \frac{1}{L_2} = \frac{1}{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin \varepsilon + \sin \bar{\psi} - \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon + \sin^2 \bar{\psi}} \right]; \\ \omega_2 = \frac{h}{l' \sin \bar{\psi}} \cdot \left[-\frac{1}{2} \sin \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon + \sin^2 \bar{\psi}} \right]. \end{cases}$$

Die gesuchten Integrale lauten jetzt:

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L_1}} t + \nu_1 \right) + A_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L_2}} t + \nu_2 \right); \\ \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} &= A_1 \omega_1 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L_1}} t + \nu_1 \right) + A_2 \omega_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L_2}} t + \nu_2 \right). \end{aligned}$$

Man hat nur nötig, andere Konstanten einzuführen, um ihnen die Form der Integrale XI zu geben; alsdann wird die Projektion der Bewegung in der ZX-Ebene in den folgenden Gleichungen ihren Ausdruck finden:

$$\text{XIII} \quad \begin{cases} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = c_5 \sin \sqrt{\frac{g}{k}} t + c_6 \cos \sqrt{\frac{g}{k}} t; \\ \varphi = c_7 \sin \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_8 \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_9 \sin \sqrt{\frac{g}{L_2}} t + c_{10} \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t; \\ \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = c_7 \omega_1 \sin \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_8 \omega_1 \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_9 \omega_2 \sin \sqrt{\frac{g}{L_2}} t + c_{10} \omega_2 \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t, \end{cases}$$

in welchen $k = \frac{l' \sin(\varepsilon - \bar{\psi})}{\sin \varepsilon + \sin \bar{\psi}}$ ist, und $L_1, L_2, \omega_1, \omega_2$ die in XII angegebene Bedeutung haben. Zur Bestimmung der sechs hinzugekommenen Konstanten dienen wieder die sechs linearen Gleichungen, welche von den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten geliefert werden. Die c mit geradzahligem Index verschwinden, wenn die Anfangslage die Gleichgewichtslage ist, die mit ungeradzahligem Index, wenn es keine Anfangsgeschwindigkeiten giebt.

Die Gleichungen IV, XI, XIII geben die vollständige Lösung unserer Aufgabe, sobald die zehn in ihnen auftretenden Konstanten gehörig bestimmt sind. Die Schwingungsbewegungen stellen sich als Übereinanderlagerung von fünf Einzelschwingungen dar, welche von den Pendellängen $\varrho_1, \varrho_2, L_1, L_2, k$ abhängig sind. Die Möglichkeit ist nicht ausgeschlossen, daß dieselben sich in einzelnen Teilen oder in ihrer Gesamtheit periodisch gestalten. Soll eine Periode für das ganze System vorhanden sein, derart, daß jeder Teil nach derselben Zeit in die nämliche Lage zurückkehrt, so muß es gelingen, ganze Zahlen n und eine positive (rationale oder irrationale) Gröfse ν so ausfindig zu machen, daß $\varrho_1 n_1^2 = \varrho_2 n_2^2 = L_1 n_3^2 = L_2 n_4^2 = k n_5^2 = \nu$ wird; die Periode ist alsdann $T = 2\pi \sqrt{\frac{\nu}{g}}$.

6. Der besondere Fall, daß $\bar{\psi}$ unendlich klein ist. Aus der Gleichung $\frac{\mu}{2m} = \frac{\cos \varepsilon \sin \bar{\psi}}{\sin(\varepsilon - \bar{\psi})}$ geht hervor, daß die Masse μ hinreichend klein sein muß gegen m , wenn es erlaubt sein soll, $\bar{\psi}$ als unendlich klein aufzufassen. Die im Vorigen entwickelten Formeln, welche ihre Gültigkeit behalten, lassen in diesem Falle mancherlei Vereinfachung zu; insbesondere erlangen die in den Integralen vorkommenden Gröfsen die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{1}{l}; & \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{1}{l} + \frac{2\bar{\psi}}{\sin 2\varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{l' \cos \varepsilon} + \frac{\cos 2\varepsilon}{l} \right]; \\ \frac{1}{k} &= \frac{1}{L_1} = \frac{1}{l'} + \frac{\bar{\psi}}{l'} \cdot \cot \frac{\varepsilon}{2}; & \frac{1}{L_2} &= \frac{\bar{\psi}}{l' \sin \varepsilon} = \frac{1}{h}; \\ \omega_1 &= -\frac{h \sin \varepsilon}{l \bar{\psi}}; & \omega_2 &= \frac{h \bar{\psi}}{l \sin \varepsilon}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Werte, und indem man vermittelt der Gleichungen $\chi_1 = \bar{\psi} + \psi_1$ und $\chi_2 = -\bar{\psi} + \psi_2$ wieder auf die ursprünglichen Gröfsen zurückgeht, erhält man die Lösung der Aufgabe in den folgenden Gleichungen:

$$\text{XIII} \left\{ \begin{aligned} \psi_2 + \psi_1 &= c_1 \sin \sqrt{\frac{g}{\varrho_1}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{\varrho_1}} t; \\ \psi_2 - \psi_1 &= 2\bar{\psi} + c_3 \sin \sqrt{\frac{g}{\varrho_2}} t + c_4 \cos \sqrt{\frac{g}{\varrho_2}} t; \\ h\psi &= l \cdot \frac{\psi_2 + \psi_1}{2}; \\ \varrho &= l \cdot \tan \varepsilon \cdot \left[\frac{\psi_2 - \psi_1}{2} - \bar{\psi} \right]; \\ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} &= c_5 \sin \sqrt{\frac{g}{k}} t + c_6 \cos \sqrt{\frac{g}{k}} t; \\ \varphi &= c_7 \sin \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_8 \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_9 \sin \sqrt{\frac{g}{L_2}} t + c_{10} \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t; \\ \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} &= \omega_1 \cdot \left[c_7 \sin \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + c_8 \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t \right] + \omega_2 \cdot \left[c_9 \sin \sqrt{\frac{g}{L_2}} t + c_{10} \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t \right]. \end{aligned} \right.$$

Zur Bestimmung der Konstanten mit geradem Index dienen immer wieder die anfänglichen Lagen, zur Bestimmung derer mit ungeradem Index die anfänglichen Geschwindigkeiten.

Um die Rechnung in einem Falle durchzuführen, machen wir die Voraussetzung, daß die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeiten beginnt, und daß die anfängliche Lage durch die Größen φ_{10} , ψ_{10} ; φ_{20} , ψ_{20} ; φ_0 gegeben ist. Aus den nunmehrigen Gleichungen:

$$\psi_2 + \psi_1 = (\psi_{20} + \psi_{10}) \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t;$$

$$\psi_2 - \psi_1 = 2\bar{\psi} + (\psi_{20} - \psi_{10} - 2\bar{\psi}) \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t;$$

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\varphi_{20} - \varphi_{10}}{2} \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t;$$

$$\varphi = \frac{\varphi_{20} + \varphi_{10}}{2\omega_1} \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_{20} + \varphi_{10}}{2\omega_1} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t;$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \left(\frac{\varphi_{20} + \varphi_{10}}{2} - \varphi_0 \omega_2 \right) \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + \varphi_0 \omega_2 \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t;$$

$$h\psi = l \cdot \frac{\psi_2 + \psi_1}{2}; \quad \varrho = l \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2} - \bar{\psi} \right)$$

läßt sich für jede Zeit t die Lage der drei schwingenden Massenpunkte eindeutig bestimmen.

Zu einem Beispiele für das soeben betrachtete System eignet sich ein Pendel, welches wir schon bei der Bestimmung der Gleichgewichtsfiguren in 2. benutzt haben.

Die Dimensionen desselben waren $l = 1\text{ m}$, $l' = 0,5\text{ m}$, $a = 0,4\text{ m}$, das Verhältnis der Massen $\frac{\mu}{m} = 0,1$. Die gegebenen Anfangswerte sollen sein: $\varphi_{10} = 0,07 = 4^\circ$; $\varphi_{20} = -0,04 = -2^\circ 18'$; $\varphi_0 = -0,02 = -1^\circ 9'$; $\psi_{10} = 0,05 = 2^\circ 52'$; $\psi_{20} = 0,06 = 3^\circ 26'$. Mit Hilfe der charakteristischen Wurzel $u = 14,903$ (cf. 3 p. 8) berechnet man $\varepsilon = 44^\circ 52'$; $\bar{\psi} = 0,0476 = 2^\circ 44'$; $h = 1,353\text{ m}$; $\omega_1 = -20,05$; $\omega_2 = 0,09$. Mit diesen Zahlengrößen kommt man zu dem Resultate:

$$\varphi_1 = 4^\circ 6' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t - 0^\circ 6' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t;$$

$$\varphi_2 = -2^\circ 12' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t - 0^\circ 6' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t.$$

$$\varphi = -0^\circ 2,5' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t - 1^\circ 6,5' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t;$$

$$\psi_1 = -2^\circ 44' + 3^\circ 9' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t + 2^\circ 25' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t;$$

$$\psi_2 = 2^\circ 44' + 3^\circ 9' \cos \sqrt{\frac{g}{L_1}} t - 2^\circ 25' \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L_2}} t,$$

und hierin ist:

$$\sqrt{\frac{g}{L_1}} = 4,678 = 268^\circ 2'; \quad \sqrt{\frac{g}{L_2}} = 1,15 = 65^\circ 55';$$

$$\sqrt{\frac{g}{L_1}} = 3,132 = 179^\circ 27'; \quad \sqrt{\frac{g}{L_2}} = 3,5284 = 202^\circ 10'.$$

7. Das dem mathematischen Pendelsysteme äquivalente physische. Um die an dem mathematischen Pendelsysteme gewonnenen Resultate durch den Versuch bestätigen zu können, haben wir ein physisches Pendelsystem nötig, dessen Schwingungen diejenigen des mathematischen zu ersetzen vermögen; das Verfahren, ein solches herzustellen, soll an dem letzten Beispiel, das wir zahlenmäßig durchgerechnet haben, erläutert werden.

Wir nehmen als Masse μ eine 100 g schwere Messingkugel und für die Längen l' dünne Fäden an. Indem wir die Ausdehnung der Kugel und das Gewicht der Fäden unberücksichtigt lassen, entspricht die Einrichtung bis hierher den mathematischen Anforderungen. Die Masse m dagegen, welche nach den Bedingungen der Aufgabe jetzt ein Gewicht von 1000 g haben muß, ist zu groß, als daß man ihre Ausdehnung vernachlässigen dürfte, und außerdem verlangt die Pendellänge l einen festen, unbiegsamen Stab, dessen Gewicht mit in Rechnung zu ziehen ist. Wir nehmen daher zur Pendelstange einen 40 g schweren Eisendraht von der erst noch zu bestimmenden Länge $l+x$ und als schwingende Massen zwei gleich große Messingkugeln von je 480 g Gewicht, welche wir auf beiden Seiten von B_1 (Fig. 5) in dem gleichen Abstände x anbringen. Da wir wissen, daß die reduzierte Länge eines physischen Pendels gleich ist dem Quotienten aus der Summe der Trägheitsmomente und der Summe der Drehungsmomente, so haben wir nur die Masse einer jeden Kugel mit M , die des Drahtes mit M' und den Radius jeder Kugel mit r zu bezeichnen, und wir erhalten zur Bestimmung von x die Gleichung

$$l = \frac{\frac{1}{3} M' (l+x)^2 + M \cdot \left[\frac{2}{5} r^2 + (l-x)^2 \right] + M \cdot \left[\frac{2}{5} r^2 + (l+x)^2 \right]}{\frac{1}{2} M' (x+l) + M(l-x) + M(l+x)}.$$

Für die angenommenen Zahlenwerte findet man $x = 0,0813\text{m}$. Da $r = 0,0243\text{m}$ ist, so ist nicht zu befürchten, daß der Faden l' während der Bewegung eine der beiden Kugeln berührt und dadurch in seiner freien Bewegung behindert wird. Die Pendelstange hat, entsprechend dem Werte von x , eine Länge $= 1,0813\text{m}$, und da sich hieraus der Durchmesser des Drahtes $= 2,5\text{ mm}$ berechnet, so liegt kein unerlaubter Fehler vor, wenn die Dicke des Drahtes von vorn herein nicht berücksichtigt worden ist.

8. Übertragung der Schwingungen. Man hat ein Pendelsystem von der zuletzt betrachteten Form dazu benutzt, um in der Physik die Erscheinungen der Resonanz und Absorption durch einen sichtbaren mechanischen Vorgang zu veranschaulichen.*)

Um zu erkennen, in welchem Umfange an unserm Pendelsysteme eine Übertragung der Schwingungen stattfindet, machen wir die möglichst einfache Voraussetzung, daß die Bewegung aus der Gleichgewichtslage heraus und durch einen einzigen Stoß erfolgt, der gegen B_1 parallel der X-Achse gerichtet ist. Von den Gleichungen in XIV bleiben alsdann nur die

*) Ein solches Pendelsystem, welches der bekannte Experimentalphysiker Herr G. Dähne aus Dresden-Blasewitz bei einem hier gehaltenen Vortrage gebrauchte, hat die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gegeben. Nachträglich hat Herr Dähne dem Verfasser auf Anfrage die folgende Mitteilung gemacht: „Bei der Aufnahme des Pendelversuchs habe ich mich angelehnt an Holtz: Poskes Ztschr. f. Ph. u. Ch. 1887–1888 p. 164 und insbesondere Oberbeck ebenda p. 254. An letzterer Stelle befindet sich auch die mathematische Behandlung des Versuches“.

drei letzten von Bedeutung, und man erhält, wenn die durch den Stofs erteilte Anfangsgeschwindigkeit mit φ'_{10} bezeichnet wird, nach gehöriger Bestimmung der Konstanten:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = -\frac{\varphi'_{10}}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{k}} t;$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = -\frac{\varphi'_{10}}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \cdot \sqrt{\frac{k}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{k}} t + \frac{\varphi'_{10}}{2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \cdot \sqrt{\frac{L_2}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{L_2}} t.$$

Setzt man $L_2 = n^2 k$, so wird n eine desto grössere Zahl bedeuten, je kleiner $\bar{\varphi}$ ist. Setzt man ausserdem zur Abkürzung $\frac{t}{n} \cdot \sqrt{\frac{g}{k}} = \vartheta$, so entstehen aus den vorigen Gleichungen die beiden folgenden:

$$\varphi_1 = \varphi'_{10} \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{k}} t + \frac{\varphi'_{10}}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \cdot [n \sin \vartheta - \sin n \vartheta];$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi'_{10}}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \cdot [n \sin \vartheta - \sin n \vartheta].$$

Wollten wir hier, wie es bisher geschehen ist, die unendlich kleinen Grössen der zweiten Ordnung aus der Rechnung fortlassen, so würde $\varphi_2 = 0$ sein wegen des Faktors $\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$, und von einer Übertragung der Schwingungen könnte dann überhaupt nicht mehr die Rede sein. Wir vernachlässigen aus diesem Grunde den Ausdruck mit dem Faktor $\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ nicht und machen nur den Schluss, dass die Schwingungen, welche sich von dem ersten Pendel auf das zweite übertragen, von einer Kleinheit höherer Ordnung sind.

Der Faktor $[n \sin \vartheta - \sin n \vartheta]$ nimmt für $\vartheta = \frac{2N\pi}{n \pm 1}$ den Maximal- oder Minimalwert $(n \pm 1) \cdot \sin \frac{2N\pi}{n \pm 1}$ an, unter N eine positive ganze Zahl verstanden. Aus der Gleichung $n^2 = \frac{L_2}{k} = \frac{\sin \varepsilon}{\bar{\varphi}} + 2 \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$ berechnet man für das in 6. gewählte Zahlenbeispiel $n = 4,06$. Der absolute Betrag von φ_2 , der nach dem soeben Gesagten immer $< \frac{\varphi'_{10}}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \cdot [n + 1]$ sein muß, ist demnach $[\varphi_2] < 0,0024 \varphi'_{10}$.

Die Maximal- oder Minimalwerte von φ_2 stellen sich ein nach Verlauf der Zeiten $T = \frac{2nN\pi}{n \pm 1} \sqrt{\frac{k}{g}}$; für das behandelte Zahlenbeispiel ist, den beiden Vorzeichen entsprechend, $T_1 = 1,08 N$ und $T_2 = 1,78 N$. Ferner berechnet sich:

N	1	1	2	3	2	4	3	5
T_1	1,08		2,16	3,24		4,32		5,40
T_2		1,78			3,56		5,34	
$\frac{\varphi_2}{\varphi'_{10}} \cdot 10^5$	225	127	145	— 131	— 117	— 230	— 17	— 18
N	6	4	7	8	5	9	6	10
T_1	6,48		7,56	8,64		9,72		10,80
T_2		7,12			8,90		10,68	
$\frac{\varphi_2}{\varphi'_{10}} \cdot 10^5$	218	— 163	159	— 116	— 107	— 234	— 35	— 35

Es verschwindet φ_2 , wenn $n \sin \vartheta - \sin n\vartheta = 0$ wird; die ersten zwei Wurzeln dieser Gleichung sind $\vartheta_1 = 3,1185$, $\vartheta_2 = 6,527$, und ihnen entsprechen die Zeiten $t_1 = 2,65$, $t_2 = 5,66$.

Aus diesen Rechnungen geht hervor, daß das zweite Pendel durchaus nicht jedesmal durch die Gleichgewichtslage hindurchgehen muß, bevor es umkehrt, ferner daß seine Amplituden wohl gesetzmäßigen Schwankungen unterliegen, aber keineswegs in einer so übersichtlichen Weise, daß dieselben geeignet wären, eine Anschauung davon zu geben, wie sich molekulare Schwingungen übertragen.

Wenn man durch ein ähnlich gebautes Pendelsystem es wirklich erreicht, daß das in Gang gesetzte eine Pendel nicht bloß ein Mitschwingen des andern zur Folge hat, sondern daß die Amplituden des ersten kontinuierlich abnehmen, die des zweiten kontinuierlich wachsen, so lange bis der ganze Vorgang sich umkehrt, so muß die Ursache dieser Erscheinung in der Art der Aufhängung der Pendel gesucht werden. Die im Vorigen durchgeführte Rechnung hat zur Voraussetzung, daß die Pendel nach allen Seiten Bewegungsfreiheit haben, und an den Aufhängungspunkten keinerlei Widerstände wirksam werden, während die Pendel, bei denen die erwähnte Erscheinung beobachtet wird, auf Schneiden schwingen. Das Bestreben des Verbindungsgewichtes, die seitlichen Pendel aus ihren Schwingungsebenen herauszuziehen, ruft an den Zapfenlagern Widerstände hervor, und die aus diesen Widerständen resultierenden Drehungsmomente wirken wesentlich auf den ganzen Bewegungsvorgang ein. Diese Drehungsmomente bei einer allgemeinen Behandlung der Aufgabe mit in die Rechnung aufzunehmen, ist wegen der damit verbundenen mathematischen Schwierigkeiten nicht angängig. Die in der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht (Berlin, 1887—1888, p. 256) zur Erklärung der Schwingungsübertragung aufgestellte Theorie beschränkt sich auf die Untersuchung der Bewegung von zwei Punkten, welche Schwingungen um zwei bestimmte Gleichgewichtslagen in der Richtung ihrer Verbindungslinie ausführen und sich gegenseitig anziehen oder abstoßen, je nachdem ihre Entfernung größer oder kleiner als eine gewisse mittlere Entfernung ist.

Schrimm, Ostern 1899.

Ernst Jackwitz.

Es verschwindet
dieser Gleichung sind $\vartheta_1 =$
 $t_2 = 5,66$.

Aus diesen Rechnu
durch die Gleichgewichtslag
tuden wohl gesetzmäßigen
lichen Weise, daß dieselben
kulare Schwingungen übert

Wenn man durch
Gang gesetzte eine Pendel
daß die Amplituden des ers
so lange bis der ganze Vor
Art der Aufhängung der Pe
zur Voraussetzung, daß die
Aufhängungspunkten keiner
die erwähnte Erscheinung
bindungsgewichtes, die seitl
den Zapfenlagern Widerstän
momente wirken wesentlich
bei einer allgemeinen Beha
der damit verbundenen mat
für physikalischen und che
Schwingungsübertragung au
wegung von zwei Punkten,
der Richtung ihrer Verbind
je nachdem ihre Entfernung

Schrimm, Ostern

d; die ersten zwei Wurzeln
sprechen die Zeiten $t_1 = 2,65$,

pendel durchaus nicht jedesmal
ehrt, ferner daß seine Ampli
neswegs in einer so übersicht
von zu geben, wie sich mole

wirklich erreicht, daß das in
ndern zur Folge hat, sondern
zweiten kontinuierlich wachsen,
che dieser Erscheinung in der
n durchgeführte Rechnung hat
gsfreiheit haben, und an den
ährend die Pendel, bei denen
gen. Das Bestreben des Ver
benen herauszuziehen, ruft an
inden resultierenden Drehungs
ein. Diese Drehungsmomente
nung aufzunehmen, ist wegen
gängig. Die in der Zeitschrift
88, p. 256) zur Erklärung der
auf die Untersuchung der Be
timmte Gleichgewichtslagen in
seitig anziehen oder abstofsen,
e mittlere Entfernung ist.

Ernst Jackwitz.

