

Beitrag zu einer genetischen Entwicklung der Planimetrie.

Theil II.

§. 14.

Punkt und Kreis.

Lehrsatz: Von allen Strecken, welche sich von einem Punkte innerhalb eines Kreises, der nicht der Mittelpunkt ist, oder außerhalb desselben, nach seiner Peripherie ziehen lassen, ist 1) die durch den Mittelpunkt gehende die größte, 2) die, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, die kleinste, 3) die übrigen sind paarweise einander gleich, wenn ihre Endpunkte gleichen Bogenabstand beiderseits von dem Punkte der kleinsten Entfernung haben und 4) desto größer, je größer dieser Bogenabstand ist. (Zu beachten ist dabei §. 4, 6.)

Hyp.: (Fig. 1, a u. b.) BD Durchmesser des Kreises, Arc. $DE = Arc. DE_1$, $DF > DE$.
Thes.: 1) AB die größte, 2) AD die kleinste Strecke von A bis zur Peripherie, 3) $AE = AE_1$,
4) $AF > AE$.

Bew.: ad 1: (Fig. 1, a u. b.) Ziehe den Radius FC, so ist $CF + CA > AF$; nun ist $CF = CB$, also

$$\begin{array}{l} CB + CA \\ \text{d. i. } AB \end{array} > AF.$$

ad 2: (Fig. 1, a.) $CF - CA < AF$; nun ist $CF = CD$, also
 $CD - CA < AF$.
d. i. $AD < AF$.

(Fig. 1, b.) $CA - CF < AF$; nun ist $CF = CD$, also
 $CA - CD < AF$.
d. i. $AD < AF$.

ad 3: Bringt man die beiden Halbkreise zur Deckung, so fällt E auf E_1 , also ist $AE = AE_1$.

ad 4: Ziehe EC, so ist in den Dreiecken FCA und ECA die Seite $AF > AE$ nach §. 10,

Lehrs. 2.

Zusatz: Liegt A in der Peripherie, z. B. in D, so ist die größte Strecke der Durchmesser, die kleinste Strecke ist = 0.

Folgerung: Der Durchmesser ist die größte Sehne eines Kreises.

§. 15.

Grade Linie und Kreis.

1. Erklärung: Je zwei Radien theilen den Kreis in zwei Theile, genannt Kreisabschnitte oder Sektoren. Ein Kreisabschnitt ist also eine von zwei Kreisradien und einem der zu ihnen gehörigen Bogen begrenzte Figur.

Anm.: Ist der Kreisabschnitt kein Halbkreis, so versteht man unter ihm immer den kleineren, wenn nicht der größere ausdrücklich bezeichnet ist, analog wie bei einem Winkel.

1. Lehrsatz: Je nachdem die Entfernung einer Geraden von dem Mittelpunkte eines Kreises größer, eben so groß, oder kleiner, als der Radius (r) ist, trifft die Gerade die Kreisperipherie in keinem, in einem, oder in zwei, und nur in zwei Punkten.

Bew. ad 1: (Fig. 2.) CA sei $\perp MN$; da $CA > r$, so liegt A außerhalb des Kreises. Jede schiefe Linie von C nach MN , z. B. CB ist $> CA$; mithin liegt B , d. h. jeder andere Punkt von MN ebenfalls außerhalb des Kreises.

ad 2: Dem vorigen ganz analog.

ad 3: CA_{11} sei $\perp MN$; da nun $CA_{11} < r$, so liegt A_{11} innerhalb des Kreises, trifft also, da sie nach beiden Richtungen unbegrenzt zu denken ist, den Umfang der Figur nach jeder der beiden Richtungen hin wenigstens einmal, z. B. in D und E . Träfe sie ihn öfter als zweimal, so hätte man von einem Punkte nach einer Geraden mehr als zwei gleiche Strecken, was nach §. 9 Folg. 2 unmöglich ist.

1. Folgerung: Der Kreis ist eine krumme Linie.

2. Folgerung: Eine Sehne liegt ganz innerhalb, ihre Verlängerungen außerhalb des Kreises.

2. Erklärung: Eine verlängerte Sehne heißt eine Secante. — Innerer, äußere Abschnitte. — Eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Secante heißt Centralsecante.

3. Erklärung: Eine Sehne theilt den Kreis in zwei Theile, genannt Kreisabschnitte oder Segmente. Ein Segment ist also eine von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzte Figur.

Anm.: Ist der Kreisabschnitt kein Halbkreis, so versteht man unter ihm immer den, in welchem der Mittelpunkt nicht liegt, wenn der andere nicht ausdrücklich bezeichnet ist.

2. Lehrsatz: Der Mittelpunkt eines Kreises liegt senkrecht über dem Mittelpunkte einer Sehne.

Bew.: Zieht man die Radien nach den Endpunkten der Sehne, so folgt der Bew. aus §. 11, Lehrs. 2.

Andere Fassungen des Satzes sind:

1) Die Senkrechte aus der Mitte einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

2) Das Loth aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne halbt diese.

3) Die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Kreises mit dem einer Sehne steht senkrecht auf dieser.

Zusatz: Das Loth aus dem Mittelpunkte einer Strecke ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise, von welchen die Strecke eine Sehne ist. (§. 11, Lehrs. 2.)

1. Aufgabe: Zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden.

Auflösung: Man sucht nach Lehrsatz 2 den Durchmesser und halbt ihn, oder zieht zwei convergente Sehnen u. s. w.

2. Aufgabe: Durch zwei Punkte einen Kreis zu legen.

Auflösung: Folgt aus vor. Zus.

3. Aufgabe: Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte einen Kreis zu legen.

Auflösung: Folgt aus vor. Zus. und §. 6, Folg. 4.

Folgerung: Ein von drei Punkten der Peripherie gleich weit entfernter Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises.

3. Lehrsatz: Gleiche Sehnen eines Kreises sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

Bew.: Zieht man die Verbindungslinien des Mittelpunktes des Kreises mit denen der Sehne und mit einem Endpunkte jeder Sehne, so folgt der Satz aus §. 10 s. f.

4. Lehrsatz: Gleich weit vom Mittelpunkte eines Kreises entfernte Sehnen sind gleich.

Bew.: Dem vorigen analog.

5. Lehrsatz: Von zwei ungleichen Sehnen ist die kleinere vom Mittelpunkte weiter entfernt.

Bew.: Legt man, wie es nach Lehrf. 3 gestattet ist, die Sehnen wie in Fig. 3, so ist $CG < CH < CF$.

6. Lehrsatz: Von zwei ungleich weit vom Mittelpunkte eines Kreises entfernten Sehnen ist die vom Mittelpunkte weiter entferntere die kleinere.

Bew.: Contraposition von Lehrf. 3 und Anwendung von Lehrf. 5.

4. Aufgabe: Eine Linie zu ziehen, die mit einem gegebenen Kreise nur einen Punkt gemein hat.

Auflösung: Ziehe durch den Endpunkt eines Radius eine auf ihm senkrechte Gerade, so ist diese die verlangte Linie (nach Lehrf. 1 dieses §).

4. Erklärung: Eine Gerade, welche mit einem Kreise nur einen Punkt gemein hat, heißt eine Tangente des Kreises in dem Punkte.

7. Lehrsatz: Ein Kreis hat in einem Punkte nur eine Tangente.

Bew.: (Fig. 4.) Zieht man durch A außer der auf AC Senkrechten noch die auf ihr schiefe Linie AE, so muß das auf diese gefällte Perpendikel CF innerhalb des spizen Winkels fallen, weil im entgegengesetzten Falle ein Dreieck mit einem rechten und stumpfen Winkel zugleich entstände. Nun aber ist $CF < CA$, also F innerhalb des Kreises; mithin schneidet die schiefe Linie den Kreis in zwei Punkten und ist somit eine Secante.

Anmerkung: Bei der Entstehung des Kreises ändert der bewegliche Endpunkt des Radius in jedem Punkte seiner Bahn seine Richtung. Denkt man sich aber, daß er einmal in irgend einem Punkte seine Richtung beibehielte, also in einer graden Linie fortginge, so wäre diese die Tangente in dem Punkte. Deshalb sagt man, jeder Radius steht auf der Richtung des Kreises in seinem Treffpunkte, kürzer auf dem Kreise senkrecht.

8. Lehrsatz: Der Mittelpunkt eines Kreises liegt senkrecht über dem Berührungspunkte der Tangente.

Bew.: Da die Tangente auf dem Radius senkrecht steht, steht auch der Radius auf der Tangente senkrecht.

Andere Fassungen des Satzes sind:

- 1) Der nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogene Radius steht senkrecht auf ihr;
- 2) die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises, und
- 3) die aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Tangente gefällte Senkrechte trifft den Berührungspunkt.

Daraus folgt von selbst die Lösung der

Aufgaben: 5) Einen Kreis zu zeichnen, der eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

6) An einen Kreis in einem bestimmten Punkte eine Tangente zu ziehen.

7. Aufgabe: Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Auflösung: (Fig. 5.) Ist AB die von A aus an den Kreis um C gezogene Tangente, so muß $\triangle CBA$ in B rechtwinklig sein. Dies ist der Fall, wenn die Mittellinie von B aus $= \frac{1}{2} CA$ ist (nach §. 11, Aufg. 7, Folg. 2). Halbirt man also CA, so muß es, da $\frac{1}{2} AC$ stets kleiner, als die größte und größer, als die kleinste Entfernung des Punktes A von der Kreisperipherie ist, nach §. 14, Lehrf. 2, von dem Halbierungspunkte um $\frac{1}{2} AC$ entfernte Punkte B und B₁ geben, welche die Berührungspunkte der beiden möglichen Tangenten sind.

Zusatz: Die beiden von einem Punkte außerhalb eines Kreises an ihn gezogenen Tangenten sind bis zum Berührungspunkte genommen, gleich. (Congruenzf. 1.)

Folgerung: Der von beiden Tangenten eingeschlossene Winkel wird durch die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des Kreises halbiert, oder: die Halbierungslinie des von zwei Tangenten gebildeten concaven Winkels geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

8. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Linien berührt.

Auflösung: Sie beruht, je nachdem die gegebenen Linien parallel, oder convergent sind, auf §. 12, Lehrf. 4, Zus. 2, oder §. 11, Aufg. 2, Folg. 2. Schneiden sich die Convergenten nicht, und ist ihre Verlängerung bis zum Durchschnitte nicht gestattet, so verfähre man folgendermaßen: (Fig. 6.) Ziehe aus einem beliebigen Punkte von $OP \parallel MN$, ebenso $CD \parallel OP$, mache $AG = CD$, und ziehe $FE \parallel OP$, so ist $AF = FE$. Die Halbierungslinie von AFE halbiert auch den durch die Verlängerung der Convergenten entstehenden Winkel nach §. 12, 4. Lehrf., Folg. 1 und §. 12, 13. Lehrf.

§. 16.

Winkel und Kreis.

Erklärung: Peripheriewinkel eines Kreises ist ein (concaver) Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und dessen Schenkel entweder zwei Sehnen, oder eine Sehne und eine Tangente sind. Der zwischen seinen Schenkeln liegende Kreisbogen heißt zu ihm gehörig, der Winkel auf ihm stehend.

1. Lehrsatz: Ein Peripheriewinkel eines Kreises ist die Hälfte des mit ihm auf gleichem Bogen stehenden Centralkwinkels.

Beweis: 1. Fall: Der eine Schenkel ist eine Tangente (Fig. 7 a). Halbiere DCE durch CF , so ist $EDB = DCF$, als Complementary von CDE und $ADE = DCF$, als Supplemente gleicher Winkel.

2. Fall: Beide Schenkel sind Sehnen (Fig. 7, b). Ziehe durch den Scheitel B des Winkels ABD die Tangente EF , so ist $\angle EBA = \frac{1}{2} \angle ACB$, $\angle FBD = \frac{1}{2} \angle BCD$. Subtrahirt man die Summe dieser Gleichungen von $2R = 2R$, so bleibt $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle ACD$.

1. Folgerung: Der Peripheriewinkel auf dem Halbkreise ist ein Rechter.

Anmerkung: Hieraus ergibt sich auch die obige Lösung der 7. Aufgabe dieses §. und eine einfache Construction eines rechten Winkels.

2. Folgerung: Zu gleichen — größeren Bogen gehören gleiche — größere Peripheriewinkel — und umgekehrt.

3. Folgerung: Peripheriewinkel über Implemmentbogen sind Supplementwinkel.

2. Lehrsatz: Ein auf einem Kreisbogen stehender Winkel, dessen Spitze innerhalb oder außerhalb der Peripherie liegt, ist bezüglich größer oder kleiner als der zugehörige Peripheriewinkel.

Bew.: Er beruht auf §. 10, 1. Lehrf. 2.

Folgerung: Von dem durch die Spitze und einen beliebigen Punkt in jedem Schenkel eines Winkels gelegten Kreise ist der den Winkel einschließende Bogen der geometrische Ort aller dem gegebenen Winkel gleichen, der von dem Winkel gespannte Bogen der seiner Supplementwinkel.

Aufgabe: Ueber einen gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel faßt.

Auflösung: Die Strecke sei a , der Winkel α ; dann ist der zu ihm gehörige Centralkwinkel $= 2\alpha$, und der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks, in welchem er an der Spitze liegt, $= R - \alpha$, wodurch die weitere Lösung gegeben ist. — Eine zweite Lösung ergibt sich aus dem 2. Fall des 1. Lehrf. dieses §.

1. Anmerkung: Ist $\alpha = R$, so schlägt man über a einen Halbkreis.

2. Anmerkung: Eine andere Fassung der letzten Aufgabe ist: Ein Dreieck aus einer Seite und ihrem Gegenwinkel zu construiren. Will man sich dabei auf die wirklich von einander verschiedenen Dreiecke einschränken, so reicht dazu, wie leicht ersichtlich, die eine Hälfte des betreffenden Bogens aus.

§. 17. Parallelen und Kreis.

1. Lehrsatz: Wird ein Kreis von zwei Parallelen getroffen, so liegen zwischen ihnen gleiche Bogen, es mögen die Parallelen beide Sehnen, Sehne und Tangente, oder beide Tangenten sein.

Bew.: Zieht man (Fig. 8.) BC, BI und KI, so ist bezüglich

$$ABC = DCB, ABI = FIB, GKI = FIK,$$

$$AC = DB, AI = BI, KCI = IDK.$$

2. Lehrsatz: (Umkehr. v. 1.) Schneidet man einerseits einer Sehne von ihren Endpunkten aus vom Kreise gleiche Bogen ab und verbindet deren Endpunkte, so sind die Sehnen parallel. Legt man durch den Halbierungspunkt eines Bogens einer Sehne eine Tangente, so ist auch diese der Sehne parallel. Die durch die Endpunkte eines Durchmessers gelegten Tangenten sind parallel.

Beweis: leicht.

§. 18.

Figuren und Kreis.

1. Erklärung: Eine Figur heißt in den Kreis beschrieben, wenn ihre Seiten Sehnen des Kreises sind; der Kreis ist dann der Figur umschrieben.

2. Erklärung: Eine Figur heißt um den Kreis beschrieben, wenn ihre Seiten Tangenten des Kreises sind; der Kreis ist dann der Figur eingeschrieben.

I. Dreieck und Kreis.

1. Lehrsatz: Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Bew.: Liegt in §. 15, Aufg. 3.

Folgerung: Die aus den Mitten der Dreiecksseiten errichteten Perpendikel schneiden sich in einem Punkte, der, je nachdem das Dreieck spitz, recht, oder stumpfwinklig ist, innerhalb des Dreiecks, im Mittelpunkte der Hypotenuse, oder außerhalb des Dreiecks liegt.

Bew.: Beim spitzwinkligen Dreiecke steht jeder Winkel auf einem Bogen, kleiner als der Halbkreis, also liegt der Mittelpunkt des Kreises zwischen jeder Winkelspitze und ihrer Gegenseite. Beim rechtwinkligen Dreiecke fällt Kreis- und Hypotenusenmittelpunkt zusammen, und dahin gehen auch die Perpendikel aus den Mitten der Katheten. Beim stumpfwinkligen Dreiecke steht der stumpfe Winkel über einem Bogen, größer als der Halbkreis, also liegt seine Gegenseite zwischen dem Mittelpunkte des Kreises und der Spitze seines Gegenwinkels.

2. Lehrsatz: In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis: Beruht auf §. 11, Aufgabe 2, Folg. 2 und §. 5, Lehrf. 2, Folg. 2.

Daraus ergibt sich zugleich die Lösung der allgemeinen

Aufgabe: Zu drei Geraden einen berührenden Kreis zu zeichnen. (Analogon von §. 15, Aufg. 3.)

Determination: Haben die drei Geraden keinen Durchschnittspunkt, d. h. sind alle drei einander parallel, oder haben sie nur einen Durchschnittspunkt, d. h. gehen alle drei durch einen Punkt, so gestattet die Aufgabe keine Lösung. Durchschneiden sich die drei Geraden in zwei Punkten, d. h. sind zwei von ihnen parallel und werden von der dritten durchschnitten, so sind zwei Lösungen möglich. Durchschneiden sie sich in drei Punkten, so sind vier Lösungen möglich.

Innere, äußere Berührungskreise eines Dreiecks.

Erklärung: Die Mittelpunkte des einem Dreiecke eingeschriebenen und umschriebenen Kreises heißen zwei merkwürdige Punkte des Dreiecks. (Vergleiche §. 19, Lehrf. 7, Anm. 2.)

II. Viereck und Kreis.

1. Lehrsatz: Die Gegenwinkel eines Vierecks im Kreise sind Supplementwinkel.

Bew.: Liegt in §. 16, Folg. 3.

2. Lehrsatz: (Umkehrung von 1.) Sind in einem Vierecke die Gegenwinkel Supplemente, so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

Bew.: Der durch drei Winkelpunkte legbare Kreis geht nach §. 16, Lehrs. 2, Folg. auch durch den vierten.

Folgerung: Um die rechteckigen Parallelogramme und graden Trapeze läßt sich ein Kreis beschreiben.

3. Lehrsatz: In einem dem Kreise umschriebenen Vierecke sind die Summen der Gegenseiten einander gleich.

Bew.: Liegt in §. 15, Aufg. 7, Zusatz.

4. Lehrsatz: (Umkehrung von 3.) Wenn in einem Vierecke die Summen der Gegenseiten gleich sind, so läßt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

Bew.: Zu drei Seiten des Vierecks läßt sich nach der letzten Aufgabe jedenfalls ein Berührungskreis ziehen. Es ist nur nachzuweisen, daß dieser Kreis auch die vierte Seite z. B. DB (Fig. 9.) berührt. Berührt er sie nicht, sondern z. B. DF, so verlängere man AB bis zum Durchschnitte mit DF; dann wäre nach dem vorigen Satze $EA + DF = ED + AF$; nach Voraussetzung ist

$$EA + DB = ED + AB; \quad DF - DB = AF - AB = BF,$$

was gegen §. 10, Lehrs. 5, Folg. 2 streitet. — Schnitte DF den Kreis, so wäre der Beweis ganz analog.

1. Folgerung: In die gleichseitigen Parallelogramme läßt sich ein Kreis beschreiben.

2. Folgerung: In und um ein Quadrat läßt sich ein Kreis beschreiben.

3. Folgerung: Die Mittelpunkte der einbeschriebenen und umschriebenen Parallelogramme fallen mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen. In den gleichseitigen Parallelogrammen liegen also alle Seiten vom Mittelpunkte gleichweit entfernt; in den ungleichseitigen liegt die größere dem Mittelpunkte näher.

III. Reguläre Polygone und Kreis.

1. Lehrsatz: Um und in jedes reguläre Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben.

Bew.: Liegt in §. 13, Folg. 2.

1. Aufgabe: In einen Kreis ein reguläres n-eck zu beschreiben.

Auflösung: Theilt man den vollen Winkel um den Mittelpunkt in n gleiche Theile, so gehören dazu n gleiche Sehnen, von denen je zwei zusammenstoßende einen Winkel bilden, welcher $\frac{n-2}{n}$ von der Peripherie bespannt. Unsere bisherigen Mittel gestatten uns die Construction der regulären 3-, 4-, 5- und 6-ecke, wo n jede endliche ganze Zahl, > 0 mit gerechnet, bedeuten kann.

2. Aufgabe: Ein Quadrat in den Kreis zu zeichnen.

Auflösung: Verbinde die Endpunkte zweier auf einander senkrechten Durchmesser.

Folgerung: Durch fortgesetzte Halbierung der Centriwinkel gelangt man zu sämtlichen regulären 4-, 8-, 16-ecken.

3. Aufgabe: Ein reguläres Sechseck in den Kreis zu zeichnen.

Auflösung: Der Radius ist seine Seite.

1. Folgerung: Verbindet man die abwechselnden Ecken des regulären Sechsecks durch Sehnen, so entsteht das gleichseitige Dreieck.

2. Folgerung: Durch fortgesetzte Halbierung der Centriwinkel gelangt man zu sämtlichen regulären 3-, 6-, 12-ecken.

4. Aufgabe: Ein reguläres n-eck (mit der obigen Beschränkung) um den Kreis zu zeichnen.

Auflösung: Man theilt den vollen Winkel um den Mittelpunkt in n gleiche Theile und legt durch die Endpunkte der theilenden Radien Tangenten. Dann sind (Fig. 10) die Winkel $G = H = I = u. s. w.$, als Supplemente gleicher Winkel. Zieht man ferner OH und OG, so ist $OA = OA, \angle HOA = GOA,$

als Hälften gleicher Ganzen, $OAG = OAH (= R)$, folglich $\triangle OAG \cong \triangle OAH$ und $AG = AH$. Ebenso wird jede Seite des necks in ihrem Berührungspunkte halbiert. Da nun nach §. 15, Aufg. 7, Zus. die halben Seiten gleich sind, so sind es auch die ganzen.

IV. Zwei Kreise.

1. Erklärung: Haben zwei verschiedene Kreise den Mittelpunkt gemeinschaftlich, so heißen sie concentrisch und ihre Differenz eine Corona oder ein Ring.

2. Erklärung: Kreise mit nicht gemeinschaftlichem Mittelpunkte heißen excentrisch und die Entfernung ihrer Mittelpunkte Centrale.

Excentrische Kreise können folgende Lagen haben:

1) Sie haben keinen Punkt gemeinschaftlich.

a. Jeder liegt ganz außerhalb des andern.

b. Einer liegt ganz innerhalb des andern.

2) Sie haben einen Punkt gemeinschaftlich. Sie heißen dann berührende und der gemeinschaftliche Punkt Berührungspunkt.

a. Jeder liegt außerhalb des andern, — äußere Berührung.

b. Der kleinere liegt innerhalb des größern, — innere Berührung.

3) Sie schneiden sich.

1. Lehrsatz: Liegen zwei Kreise außerhalb einander, ohne sich zu berühren, so ist ihre Centrale größer, als die Summe ihrer Radien.

Bew.: (Fig. 11.) Das Ganze ist größer als ein Theil von ihm.

2. Lehrsatz: Liegt ein Kreis ganz innerhalb eines andern, so ist die Centrale kleiner, als die Differenz ihrer Radien.

Bew.: (Fig. 12.) Die Differenz der Radien $CA - C_1B$ ist $= CC_1 + BA$, also $> CC_1$.

3. Lehrsatz: Zwei sich berührende Kreise haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.

Bew.: (Fig. 13 a u. b.) Legt man durch den Berührungspunkt A an den einen Kreis, z. B. an den um C, eine Tangente BD, so hat diese mit dem zweiten Kreise auch nur den Punkt A gemeinschaftlich, ist also auch zu ihm eine Tangente. Aus Fig. 13 a erhellt dies auf der Stelle. Wäre sie in Fig. 13 b zu ihm Secante, so läge ein Segment des Kreises um C_1 mit dem Kreise um C auf einer Seite der Tangente. Irgend eine in diesem Segmente von A aus gezogene Sehne würde somit in den Kreis um C fallen und mit ihr ein Theil des betreffenden Segmentes, d. h. die Kreise hätten mehr als einen Punkt gemeinsam, was wider die Voraussetzung ist.

1. Folgerung: Bei zwei einander von außen oder innen berührenden Kreisen liegen die Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte in gerader Linie, oder die Centrale geht, bei der inneren Berührung verlängert, durch den Berührungspunkt.

2. Folgerung: Bei zwei einander von außen oder innen berührenden Kreisen ist die Centrale bezüglich gleich der Summe oder Differenz der Radien.

4. Lehrsatz: Schneiden sich zwei Kreise, so schneiden sie sich nur in zwei Punkten, deren Verbindungslinie, die beiden Kreisen gemeinschaftliche Sehne, auf der Centrale senkrecht steht und von ihr halbiert wird.

Bew.: Die Centrale und die Radien beider Kreise nach einem Schnittpunkte bilden auf einer Seite der Centrale nur ein Dreieck, auf der andern Seite ebenfalls nur eins, dem ersten congruentes und so liegendes, daß die gleichen Seiten von einem und demselben Punkte ausgehen. Also sind nur zwei Durchschnitte möglich. Die von beiden Dreiecken gebildete Figur ist nun entweder ein Dektoib, oder ein gleichschenkeliges Dreieck, je nachdem ein Kreismittelpunkt außerhalb der gemeinschaftlichen Sehne oder in ihr liegt. Die übrigen Theile der Behauptung ergeben sich nun nach §. 11, Lehrs. 1 u. 3.

Folgerung: Bei zwei sich schneidenden Kreisen ist die Centrale bezüglich $>$ als die Summe oder Differenz der Radien.

3. Erklärung: Die beiden nicht gemeinschaftlichen Theile zweier sich schneidenden Kreise heißen Mündchen (lunulae).

5. Lehrsatz: Von den Lehrsätzen 1 und 2, der Folg. 2 des Lehrs. 3 und der Folgerung des Lehrs. 4 gelten auch die Umkehrungen.

Bew.: Hätten die beiden Kreise die in irgend einem dieser Umkehrungssätze behauptete Lage nicht, so könnten sie, da durch die fünf Fälle alle möglichen Lagen erschöpft sind, nur eine der vier andern haben. Jede dieser andern Lagen hat aber ein Verhältniß der Centrale zu den beiden Radien zur Folge, die dem in dem betreffenden Umkehrungssätze angenommenen widerspricht.

§. 19.

Vergleichung räumlicher Größen in Bezug auf ihre Größe.

1. Lehrsatz: (Erweiterung von §. 12, Lehrs. 17.) Trägt man auf einer von zwei convergenten Linien von einem beliebigen Punkte aus n an sich beliebige, aber unter sich gleiche Strecken ab, und zieht durch die Theilpunkte Parallelen bis zum Schnitte mit der andern: so sind die von den Durchschnittspunkten begrenzten n Strecken ebenfalls unter sich gleich.

Bew.: (Fig. 14.) Man ziehe durch $A_1, B_1, C_1, \dots$ die Parallelen $A_1F, B_1G, C_1H, \dots$ zu MN ; dann sind die Dreiecke $A_1FB_1, B_1GC_1, C_1HD_1, \dots$ congruent, (4. Congruenzf.), also $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1, \dots$

1. Aufgabe: (Vergleiche §. 3, Anm. 2.) Eine gegebene Strecke in n gleiche Theile zu theilen.

1. Auflösung: Legt man an einen ihrer Endpunkte unter einem beliebigen Winkel eine grade Linie und trägt vom Anfangspunkte aus n beliebige, aber unter sich gleiche Strecken ab, so folgt die weitere Lösung aus vorigem Lehrsatz. Der Unbequemlichkeit, wiederholt Parallelen ziehen zu müssen, entgeht man durch folgende

2. Auflösung: Man lege durch beide Endpunkte der zu theilenden Strecke, aber auf verschiedener Seite zwei Parallelen, schneide auf jeder derselben vom Anfangspunkte aus $n - 1$ beliebige, aber unter sich gleiche Strecken ab und verbinde den ersten, zweiten, $\dots$ Theilpunkt der einen bezüglich mit dem letzten, vorletzten, $\dots$ der zweiten Parallelen, so wird durch die Durchschnittspunkte dieser Verbindungslinien mit der gegebenen Strecke diese in n gleiche Theile getheilt. Der Beweis ist leicht.

1. Anmerkung: Ist n eine gemischte Zahl, z. B. $= m + \frac{p}{q} = \frac{mq + p}{q}$, so schneide man auf der Hülfslinie $mq + p$ gleiche Theile ab und fasse je q zusammen.

1. Folgerung: (Aus 1. Auflösung.) Die bei der Theilung einer Strecke in n gleiche Theile gezogenen Parallelen bilden eine arithmetische Reihe, so daß sie bezüglich $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$ der Strecke sind, zu der sie parallel gezogen sind.

2. Anmerkung: Hierauf beruht die Construction und der Gebrauch des verjüngten Maßstabes.

2. Aufgabe: (Vergl. §. 3, Aufg. 5.) Das (irrationale) Verhältniß zweier incommensurablen Strecken annähernd anzugeben.

Auflösung: Die gegebenen Strecken seien AB und CD . Man theile AB in n gleiche Theile $= \alpha$ und trage α auf CD so oft als möglich, z. B. m mal ab, so daß also $AB = n\alpha$ und $m\alpha < CD$

Mithin ist $\frac{m\alpha}{n} < \frac{CD}{AB} < \frac{(m+1)\alpha}{n}$, d. h. $\frac{m}{n} < \frac{CD}{AB} < \frac{m+1}{n}$

Der Unterschied zwischen den beiden Grenzverhältnissen ist der endliche Bruch $\frac{1}{n}$, also die reciproke Anzahl der Theile von AB. Je größer man also n annimmt, desto kleiner wird $\frac{1}{n}$ und kann so klein, als jede angebbare Zahl, d. h. unendlich klein gemacht werden. Mithin kann man, je größer n ist, mit desto mehr Recht die beiden rationalen Grenzverhältnisse einander, und jedes von ihnen ihrer Mittelgröße, dem gesuchten irrationalen Verhältnisse, gleichsetzen.

3. Anmerkung: Dasselbe Verfahren gilt bei der Ermittlung des Verhältnisses zweier Winkel oder Kreisbogen.

4. Anmerkung: In der Praxis bedient man sich zu einer annähernd höchst genauen Bestimmung des Verhältnisses zweier geraden Linien oder zweier Kreisbogen des Nonius oder Vernier.

5. Anmerkung: Die wirkliche Existenz incommensurabler Strecken läßt sich z. B. an der Seite und Diagonale eines Quadrats nachweisen. In Fig. 15 sei ABCD ein Quadrat und AC eine seiner Diagonalen. Trägt man CB = CE auf CA ab, so ist der Rest EA < AB. Errichtet man EF $\perp$ AC, so ist EF = EA = FB. (§. 9, Lehrs. 2). Es ist also AEF wie ABC ein rechtwinklig-gleichschenkeliges Dreieck und AE in AF einmal plus einem Reste, also in AB zweimal plus einem Reste enthalten. Die oben angestellte Betrachtung muß sich wegen der Gleichartigkeit der betrachteten Figuren wiederholen, d. h. es muß stets ein Rest bleiben. Das Verhältniß läßt sich also darstellen in dem unendlichen Kettenbruche:

$$\frac{\text{Diagonale}}{\text{Seite}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

dessen Näherungswerte $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$ sind.

2. Folgerung: Trägt man auf einer von zwei convergenten Linien von einem beliebigen Punkte aus n beliebige Strecken ab und zieht durch die Theilpunkte Parallelen bis zum Schnitte mit der andern, so sind die homologen Strecken zwischen den Parallelen proportionirt.

Bew.: Man denke sich im Falle der Commensurabilität zu den Strecken AB und BC (Fig. 16) das größte gemeinschaftliche Maß gesucht, auf AB und BC abgetragen und durch die neuen Theilpunkte Parallelen zu AA₁ gezogen; dann beruht der Beweis auf Lehrs. 1 dieses §. Für den Fall der Incommensurabilität ist die 2. Aufgabe zu berücksichtigen. Da der Werth der Grenzverhältnisse unabhängig von n ist, so sind nothwendig die Grenzverhältnisse für die Strecken auf beiden Convergenten gleich. Denn zwischen denselben, sich ins Unendliche nähernden Grenzen liegt nur eine Mittelgröße. Nimmt man nämlich zwei, z. B. v und v_1 , an, so muß $v - v_1 < \frac{1}{n}$ sein, welche Differenz, wenn n nur groß genug angenommen wird, der 0 beliebig nahe gebracht werden kann. — Also verhält sich allgemein AB : BC : AC = A₁B₁ : B₁C₁ : A₁C₁.

3. Folgerung: Werden auf einem Schenkel eines Winkels vom Scheitelpunkte aus beliebige Strecken abgetragen und durch die Theilpunkte Parallelen bis zum andern Schenkel gezogen, so sind die vom Scheitel aus gerechneten homologen Abschnitte unter sich und den durch ihre Endpunkte gehenden Parallelen proportionirt, also (Fig. 17)

$$AB : AC : AD : AE = AB_1 : AC_1 : AD_1 : AE_1 = BB_1 : CC_1 : DD_1 : EE_1.$$

3. Aufgabe: Eine Strecke in zwei oder mehrere andere von gegebenem Verhältnisse zu theilen. Auflösung, der der Aufg. 2 analog.

4. Aufgabe: Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.

Auflösungen ergeben sich aus dem Vorhergehenden mehrere, so wie für die speciellere

5. Aufgabe: Zu zwei Strecken die dritte Proportionale zu finden.

§. 20.

Proportionen am Dreiecke, Aehnlichkeit der Dreiecke und Polygone.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Vorhergehenden ist der

1. Lehrsatz: Eine Parallele zu einer Dreiecksseite theilt die beiden andern so, daß die homologen Stücke proportionirt sind.

2. Lehrsatz: (Umkehrung von 1.) Theilt eine grade Linie zwei Dreiecksseiten so, daß die homologen Abschnitte proportionirt sind, so ist sie der dritten parallel.

Bew.: Indirekt (Fig. 19).

3. Lehrsatz: Wird in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele gezogen, so sind die Seiten des abgeschnittenen Dreiecks denen des ersten proportionirt und die Winkel beider Dreiecke der Reihe nach gleich.

Bew.: Folgt aus Folg. 3 des vorigen §.

Erklärung: Gradlinige Figuren, deren Winkel der Reihe nach gleich und deren homologe Seiten proportionirt sind, heißen ähnlich ($\sim$).

1. Folgerung: Reguläre Polygone von derselben Seitenzahl sind ähnlich. $\square = \square = \square$

2. Folgerung: Eine grade Linie, welche in einem Dreiecke zu einer Seite parallel gezogen ist, schneidet von ihm ein ihm ähnliches Dreieck ab.

Anmerkung: Um die Aehnlichkeitsätze für die Dreiecke zu finden, überzeugt man sich aus der Erklärung sofort, daß zur Aehnlichkeit eine Gleichung weniger erforderlich ist, als zur Congruenz, indem bei der Congruenz außer der Gleichheit der Winkel die Gleichheit aller drei Seiten, bei der Aehnlichkeit nur die Gleichheit der Verhältnisse zweier Seiten zur dritten gefordert wird. Die gegenseitige Abhängigkeit der Dreiecksstücke bleibt natürlich dieselbe.

1. Aehnlichkeitsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen denen des andern proportionirt sind.

Bew.: Mache (Fig. 19.) $AB_{11} = A_1B_1$ und ziehe $B_{11}C_{11} \parallel BC$, so ist $\triangle AB_{11}C_{11} \sim ABC$, also $AB_{11} : B_{11}C_{11} : C_{11}A = AB : BC : CA$, nach Voraussetzung ist aber $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_{11}$,

Da nun $AB_{11} = A_1B_1$, so ist auch $B_{11}C_{11} = B_1C_1$ und $C_{11}A = C_1A_{11}$ und $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle AB_{11}C_{11}$ und $\sim ABC$.

2. Aehnlichkeitsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien des andern proportionirt und die eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Bew.: Verhält sich (Fig. 19.) $A_1B_1 : AB = A_1C_1 : AC$ und ist $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, so mache man $AB_{11} = A_1B_1$, $AC_{11} = A_1C_1$ und ziehe $B_{11}C_{11}$, so ist nach Lehrs. 2 dieses §. $B_{11}C_{11} \parallel BC$, also $\triangle AB_{11}C_{11} \sim ABC$ und $\cong \triangle A_1B_1C_1$, mithin $\triangle A_1B_1C_1 \sim ABC$.

3. Aehnlichkeitsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien des andern proportionirt und die Gegenwinkel der größern von Ihnen bezüglich gleich sind.

Bew.: Verhält sich (Fig. 19.) $A_1B_1 : AB = A_1C_1 : AC$ und ist, wenn $AB > AC$, $\angle C = C_1$, so mache man $AB_{11} = A_1B_1$, $AC_{11} = A_1C_1$ und ziehe $B_{11}C_{11}$, so ist $B_{11}C_{11} \parallel BC$, also $\angle AC_{11}B_{11} = C = C_1$. Ferner ist $AB_{11}C_{11} \sim ABC$ und somit auch $\triangle A_1B_1C_1 \sim ABC$.

4. Aehnlichkeitsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen zweien des andern gleich sind.

Bew.: Ist (Fig. 19.) $\angle A = A_1$, $B = B_1$, so mache man $AB_{11} = A_1B_1$ und ziehe $B_{11}C_{11} \parallel BC$, so ist $\triangle AB_{11}C_{11} \sim ABC$.

1. Zusatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise parallel sind.

Bew.: Der Satz wird durch §. 6, Folg. 3 auf den 1. Aehnlichkeitsatz zurückgeführt.

2. Zusatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen auf denen des andern senkrecht stehen.

Bew.: (Fig. 20.) $B = \beta$, $C = \gamma$, als Supplemente desselben Winkels.

Jeder der vorstehenden Ähnlichkeitsätze giebt eine Auflösung der

1. Aufgabe: Ein einem gegebenen Dreiecke ähnliches Dreieck zu zeichnen.

4. Lehrsatz: Die Winkelhalbirende eines Dreiecks theilt die Gegenseite im Verhältnisse der beiden andern.

Bew.: Verlängert man eine der den Winkel einschließenden Seiten über den Scheitel des Winkels hinaus um sich selbst und verbindet den Endpunkt mit der Spitze des Gegenwinkels, so ist der Satz auf Lehrs. 1 dieses §. zurückgeführt.

5. Lehrsatz: (Umkehrung v. Lehrs. 4.) Theilt eine von einer Dreiecks- spitze ausgehende Transversale die Gegenseite in zwei den andern Seiten proportionirte Stücke, so ist sie die Winkelhalbirende.

Bew.: Zieht man durch einen Endpunkt der Gegenseite eine Parallele bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung seiner Gegenseite, so ist der Satz ebenfalls auf Lehrs. 1 dieses §. zurückgeführt.

6. Lehrsatz: Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (dem Schwerpunkte des Dreiecks), der sie in dem Verhältnisse von 2 : 1 theilt.

Bew.: (Fig. 21.) Die beiden Mittellinien BB_1 und CC_1 schneiden sich in O. Verbindet man die Mittelpunkte D und E von BO und CO und zieht C_1B_1 , so sind DE und $C_1B_1 \parallel BC$, (Lehrs. 2 dieses §.), und $= \frac{1}{2} BC$ (§. 19, Folg. 3). Zieht man noch C_1D und B_1E , so ist C_1DEB_1 ein Parallelogramm, mithin $OB_1 = OD = BD = \frac{1}{2} BB_1$ und $OC_1 = OE = CE = \frac{1}{2} CC_1$. Was nun von je zwei Mittellinien gilt, gilt von allen dreien.

7. Lehrsatz: Die drei (aus den Winkelspitzen gefällt) Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte und verhalten sich umgekehrt, wie die Seiten, auf welche sie gefällt sind.

Bew.: Zieht man durch die drei Spitzen des Dreiecks Parallelen zu den Gegenseiten bis zum Durchschnitte, so ist der erste Theil des Satzes auf §. 18, Lehrs. 1, Folg. zurückgeführt. Der zweite Theil folgt aus der Ähnlichkeit zweier Theildreiecke, welche einen Dreieckswinkel gemeinschaftlich haben.

1. Anmerkung: Der Höhenpunkt liegt, je nachdem das Dreieck spitz, recht oder stumpfwinklig ist, innerhalb des Dreiecks, in der Spitze des rechten Winkels, oder außerhalb des Dreiecks.

2. Anmerkung: Schwerpunkt und Höhenpunkt sind die beiden (andern) merkwürdigen Punkte eines Dreiecks (Vergl. §. 18, Lehrs. 2, Erklärung).

Folgerung: Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Loth aus der Spitze des rechten Winkels die vierte Proportionale zu der Hypotenuse und den beiden Katheten.

8. Lehrsatz: Das Loth aus der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks theilt das Dreieck in zwei ihm, also auch sich ähnliche Dreiecke.

Bew.: Folgt aus Ähnlichkeitsatz 4.

1. Folgerung: Das Loth aus der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Hypotenusenabschnitten.

2. Folgerung: Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem an ihr liegenden, durch das Loth aus der Spitze des rechten Winkels gebildeten Hypotenusenabschnitt.

Hieraus ergeben sich zwei einfache Auflösungen der

2. Aufgabe: Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu suchen.

3. Folgerung: (Umkehrung von Folg. 1.) Ist ein in einem Punkte einer Strecke errichtetes Loth die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Strecke, so ist das durch die drei Endpunkte als Spitzen bestimmte Dreieck rechtwinklig.

Bew.: (Fig. 22.) Wäre, wenn $CA : CD = CD : CB$, $\angle BDA$ schief, so mache man $ADB_1 = R$; dann ist $CA : CD = CD = CB_1$; folglich müßte $CB = CB_1$ sein. Da dies unmöglich ist, so ist $\angle BDA = R$.

9. Lehrsatz: Alle Transversalen eines Dreiecks von einem Winkelpunkte nach der Gegenseite gezogen theilen jede Parallele zur Gegenseite in gleichen Verhältnisse mit ihr.

Bew.: Wiederholte Anwendung von §. 19, Aufg. 1, Folg. 3.

10. Lehrsatz: In ähnlichen Dreiecken verhalten sich homologe Höhen wie ein Paar homologe Seiten.

Bew.: Folgt aus der Ähnlichkeit zweier homologen Dreiecke.

Anmerkung: Dasselbe läßt sich von allen in ähnlichen Dreiecken unter gleichen Bedingungen gezogenen Linien, den Mittellinien, den Radien des in- und umschriebenen Kreises, beweisen.

11. Lehrsatz: Ähnliche Polygone werden durch homologe Diagonalen in bezüglich ähnliche Dreiecke zerlegt.

Bew.: Folgt aus Ähnlichkeitsatz 2. Daraus ergibt sich die Lösung der

Aufgabe: Ein einem gegebenen Polygone ähnliches zu zeichnen.

12. Lehrsatz: Reguläre Polygone von derselben Seitenzahl haben ähnliche Bestimmungs Dreiecke.

Bew.: Folgt aus Ähnlichkeitsatz 2. Daraus ergibt sich eine leichte Lösung der

Aufgabe: Ein reguläres Polygon, welches elementargeometrisch construierbar ist, aus seiner Seite zu construiren.

13. Lehrsatz: Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich, wie ein Paar homologe Seiten.

Bew.: Die Seiten des einen Polygons seien $a, b, c, \dots$, die homologen des andern $a_1, b_1, c_1, \dots$; dann verhält sich $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \dots$, mithin $a + b + c + \dots : a_1 + b_1 + c_1 + \dots = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \dots$.

§. 21. Proportionalität grader Linien am Kreise.

1. Lehrsatz: Zieht man durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises bezüglich zwei Sehnen oder zwei Secanten zu dem Kreise, so bilden die Entfernungen des Punktes von den Durchschnittspunkten der einen dieser Linien die inneren, seine Entfernungen von den Durchschnittspunkten der andern Linie die äußeren Glieder einer Proportion.

Bew.: (Fig. 23 a u. b.) Zieht man CD und EB , so ist $\triangle CAD \sim \triangle EAB$ (Ähnlichkeitsf. 2), also $AB : AD = AE : AC$.

Anmerkung: Von dem ersten Theile dieses Satzes ist §. 20, Lehrs. 8, Folg. 1 ein specieller Fall, dessen Umkehrungsatz sich nun so ausdrücken läßt:

Eine geschlossene krumme Linie ist eine Kreislinie, wenn zu ihr eine grade Linie so gezogen werden kann, daß jedes Perpendikel auf der letzteren bis zu der krummen Linie errichtet die mittlere Proportionale zwischen den durch den Fußpunkt des Perpendikels und die beiden Durchschnittspunkte der Graden mit der krummen Linie gebildeten Abschnitten ist.

2. Lehrsatz: Werden von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Secante zum Kreise gezogen, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußern Abschnitte.

Bew.: (Fig. 24.) $\triangle CDB \sim \triangle DBA$, also $AB : AD = AD : AC$.

Anmerkung: Der 2. Lehrs. ist der Grenzfall vom zweiten Theile des 1. Lehrsatzes und stimmt mit §. 20, Lehrs. 8, Folg. 2 vollständig überein, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man sich um eins der Theildreiecke einen Kreis beschrieben denkt.

Zusatz: Ist die Tangente gleich dem inneren Secantenabschnitte, so ist die Secante so getheilt, daß ihr innerer Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem äußeren Abs.

schnitte ist. — Die Bedingung läßt sich mit Zuhülfenahme von §. 15, Lehrsatz 4 leicht allgemein erfüllen, wenn der Durchmesser des Kreises nur nicht kleiner als die Tangente ist, am einfachsten aber dadurch, daß man den Durchmesser des Kreises und die Tangente gleich macht.

Erklärung: Ist eine Strecke so getheilt, daß ihr größerer Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitte ist, so heißt die Strecke stetig getheilt. Die stetige Theilung führt auch den Namen goldener Schnitt oder *sectio aurea* (s. divina).

1. Aufgabe: Eine gegebene Strecke AB stetig zu theilen.

Auflösung: (Fig. 25.) Errichte in einem Endpunkte von AB ein Loth $BC = \frac{1}{2} AB$, schlage um C mit CB als Radius einen Kreis, ziehe die Centralsecante AE, dann EB und durch D zu ihr die Parallele DF, so theilt F die Strecke AB stetig, weil AE stetig getheilt ist. (§. 20, Lehrs. 1.)

2. Aufgabe: An eine gegebene Strecke bezüglich eine kleinere oder größere so anzutragen, daß die ganze stetig getheilt ist.

Auflösung: Man zeichne sich eine beliebige stetig getheilte Linie; dann ist die Aufgabe auf die Construction der vierten Proportionale zurückgeführt.

Zusatz: Trägt man den kleineren Abschnitt einer stetig getheilten Strecke auf dem größeren ab, so wird dieser wieder stetig getheilt und der frühere kleinere Abschnitt ist nun ihr größerer.

Bew.: Ist (Fig. 26.) $AB : BC = BC : AC$, und $AC = A_1C$, so ist $AB - BC : BC - AC = BC : AC$, d. i. $A_1C : A_1B = BC : A_1C$ oder $BC : A_1C = A_1C : A_1B$.

1. Folgerung: Setzt man dies Verfahren fort, oder trägt umgekehrt an eine stetig getheilte Linie immer ihren größeren Abschnitt, so erhält man bezüglich eine bis ins Unendliche abnehmende oder zunehmende Reihe stetig getheilten Linien. Die Uebereinstimmung des ersten Verfahrens mit dem zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes und die Incommensurabilität der Abschnitte einer stetig getheilten Linie mit der ganzen und unter sich erhellt sofort.

3. Lehrsatz: Beschreibt man aus dem kleineren Abschnitte einer stetig getheilten Linie als Basis und ihrem größeren Abschnitte als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck, so ist dasselbe das Bestimmungs-dreieck des regulären Zehnecks.

Bew.: (Fig. 27.) Ist ACB das aus den Abschnitten der stetig getheilten Linie construirte gleichschenklige Dreieck, und verlängert man BA um $AD = AC$ und zieht DC, so ist $DB : BC = BC : BA$; da nun $\angle B = B$, so ist $\triangle DBC \sim \triangle ABC$, also $\angle D = \angle ACB$. Nun ist $\angle CAB = 2\angle D = 2\angle ACB$, also $\angle CAB + \angle B + \angle ACB = 5\angle ACB = 2R$, und $\angle ACB = \frac{2}{5}R$.

Daraus erzielt sich sofort die Lösung der

Aufgaben: 1) In einen Kreis ein reguläres Zehneck, Fünfeck, Zwanzigeck, allgemein ein $5 \cdot 2^n$ Eck zu beschreiben.

2) Ein reguläres Zehneck, Fünfeck u. s. w. mit gegebener Seite zu beschreiben.

3. Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen.

Auflösung: Man schneide vom sechsten Theil der Peripherie den zehnten Theil derselben ab, so bleibt $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ der Peripherie.

Zusatz: Man kann also auch ein reguläres $3 \cdot 5 \cdot 2^n$ Eck construiren.

Anmerkung: Außer den angegebenen regulären Polygonen lassen sich noch, wie zuerst Gauß in seinen „disquisitiones arithmeticae“ nachgewiesen hat, die regulären Polygone von der Seitenzahl $2^n + 1$ construiren, wenn $2^n + 1$ eine Primzahl ist.

Vergleichung des Flächeninhalts gradliniger Figuren.

§. 22.

Gleichheit gradliniger Figuren.

1. Erklärung: Zwei Figuren heißen inhalts gleich oder kürzer gleich, wenn sie entweder congruent, oder Summe oder Differenz bezüglich congruenter Figuren sind.

2. Erklärung: Nimmt man zwei Gegenseiten eines Parallelogramms als seine Grundlinien an, so heißt ihr oder ihrer Verlängerungen Abstand seine Höhe. Bei einem Trapeze ist ebenfalls der Abstand der Grundlinien die Höhe.

1. Lehrsatz: Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

Bew.: Haben die beiden Parallelogramme ABCD und EFGH (Fig. 28.) außerdem noch einen gleichen Winkel, so sind sie congruent; wenn nicht, so legt man sie, wie es offenbar immer möglich ist, zwischen dieselben Parallelen, so daß sie ganz außerhalb einander fallen. Dann ist Trapez AEGC $\cong$ BFHD, weil alle Seiten und Winkel in derselben Ordnung bezüglich gleich sind. Zieht man von ihnen das gemeinschaftliche Trapez ab, so bleibt $\parallel$ gr. ABCD = DEFG.

1. Zusatz: Ein Dreieck ist die Hälfte jedes Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

2. Zusatz: Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

2. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrs. u. Zuf. 2.) Gleiche Dreiecke, so wie Parallelogramme, haben bei gleicher Höhe gleiche Grundlinie und bei gleicher Grundlinie gleiche Höhe.

Bew. indirect.

3. Erklärung: Eine Figur verwandeln heißt ihren Flächeninhalt in anderer Gestalt darstellen.

1. Aufgabe: Ein Dreieck in ein anderes mit gegebenem Winkel zu verwandeln. (Beim ungleichseitigen Dreiecke drei Auflösungen.)

2. Aufgabe: Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkeliges zu verwandeln. (Wie bei Aufg. 1.)

3. Aufgabe: Ein Dreieck in ein anderes von gegebener Grundlinie zu verwandeln.

Auflösung: (Fig. 29.) Mache z. B. AD = a, ziehe DC und BE $\parallel$ DC und verbinde E mit D.

Bew.: $\triangle EBC = EBD$ (Zuf. 2 dieses §.). Addirt man beiderseits ABE, so ergibt sich die Behauptung.

1. Anmerkung: Daß die Auflösung für den Fall, daß $a < AB$, ganz analog ist, sieht man sofort, wenn man ADE als das verwandelte und ABC als das neu entstandene ansieht.

Ganz ähnlich ist die Auflösung der

4. Aufgabe: Ein Dreieck in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln.

2. Anmerkung: Die bisherigen Aufgaben lassen sich combiniren. Wie man die Summe oder Differenz von Dreiecken in Gestalt eines Dreiecks darstellt, erblickt sofort, eben so die Theilung in eine beliebige Anzahl gleicher Theile.

5. Aufgabe: Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel zu verwandeln.

6. Aufgabe: Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln.

Auflösung: Man halbiere das Parallelogramm durch eine Diagonale, verwandle eins der Dreiecke nach Aufg. 3 in eins mit der gegebenen Grundlinie und vervollständige dieses zu einem Parallelogramme.

Zusatz: Fig. 30 zeigt, daß außer den Parallelogrammen AB und AG auch HC und HE gleich sind. Ferner folgt, wenn man CD und EG bis zu ihrem Durchschnitte in F verlängert und AH und AF zieht, aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABH und HGF, daß AF die Diagonale des Parallelogramms AF ist, und hieraus der

3. Lehrsatz: Legt man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so sind die nicht von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme (die sogenannten Ergänzungsparallelogramme) gleich.

Der Beweis ist einfach.

2. Zusatz: (zu Aufg. 6.) Aus Fig. 30 folgt ferner: Zwei Parallelogramme, deren Grundlinien sich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, sind gleich, und der

3. Zusatz: Bei jeder Proportion zwischen vier Linien ist das aus den äußern Gliedern gebildete Rechteck gleich dem aus den innern gebildeten.

Folgerung: Bei einer stetigen Proportion zwischen drei Linien ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Rechtecke aus den äußern Gliedern.

Der Auflösung der 4. Aufgabe analog ist die der

5. Aufgabe: Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln. Eine zweite Auflösung gründet sich auf Zus. 2.

4. Erklärung: Ein Rechteck mit den Seiten a und b soll der Kürze wegen durch das Product a b, ein Quadrat mit der Seite a entsprechend durch a^2 bezeichnet werden. Den Grund für diese Bezeichnung wird die Lehre von der Ausmessung der Figuren geben.

6. Aufgabe: Ein Rechteck (oder ein beliebiges Parallelogramm) in ein Quadrat zu verwandeln. Auflösungen folgen aus §. 20, Lehrsatz 8, Folg. 1 und 2 und §. 21, Lehrs. 2.

7. Aufgabe: Ein Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung: Die mittlere Proportionale zwischen Grundlinie und halber Höhe ist die gesuchte Quadratseite.

8. Aufgabe: Die Summe zweier Quadrate als Quadrat darzustellen.

Auflösung: Heißen die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks a, b, die Hypotenuse c und ihre durch das Loth aus der Spitze des rechten Winkels gebildeten Theile p und q, so ist $a^2 = ep$, $b^2 = eq$, also $a^2 + b^2 = ep + eq = e(p + q) = c^2$.

Daraus folgt

4. Lehrsatz (der Pythagoräische): Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

1. Folgerung: Ein Kathetenquadrat ist gleich der Differenz zwischen dem Hypotenusen- und dem andern Kathetenquadrat.

2. Folgerung: Das Diagonalenquadrat eines Quadrats ist das Doppelte von ihm. (Vergl. §. 19, Anm. 5.)

5. Lehrsatz: Das Quadrat der Summe oder Differenz zweier Strecken ist bezüglich um das doppelte Rechteck aus ihnen größer oder kleiner, als die Summe ihrer Quadrate.
Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Figuren.

5. Erklärung: Unter der Projection einer Strecke auf eine grade Linie versteht man diejenige Strecke auf der letzteren, welche durch die Fußpunkte der von den Endpunkten der ersteren auf sie gefällten Perpendikel begrenzt wird.

6. Lehrsatz (der allgemeine Pythagoräische): Das Quadrat der Gegenseite eines stumpfen oder spitzen Winkels in einem Dreiecke ist bezüglich um das doppelte Rechteck aus einer der andern Seiten und der Projection der dritten auf sie größer oder kleiner, als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten.

Bew.: (Fig. 31 a u. b.) Ist BD die Projection von BC auf AB, so ist

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2. \text{ Nun ist aber}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \pm 2 \overline{AB} \cdot \overline{BD}, \text{ je nachdem B stumpf oder spitz, und}$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD}.$$

7. Lehrsatz (Umkehrung der Lehrs. 4 u. 6.): Je nachdem das Quadrat einer Dreiecksseite größer, eben so groß oder kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern ist, ist ihr Gegenwinkel stumpf, recht oder spitz.

Bew.: indirect.

Eine Combination beider Fälle von Lehrs. 6, oder eine zweimalige Anwendung von Lehrs. 4 ist der

7. Lehrsatz: In jedem Dreiecke ist die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der halben dritten Seite und dem doppelten Quadrate der Mittellinie nach ihr.

§. 23.

Ausmessung gradliniger Figuren.

1. Erklärung: Eine Figur messen heißt das Verhältniß einer als Einheit angenommenen Fläche zu ihr angeben.

Zum Flächenmaße hat man von denjenigen regelmäßigen Figuren, die an einander gesetzt eine lückenlose Fläche bilden, (dem regulären Dreis, Vier- und Sechsecke) das Quadrat genommen, sowohl wegen der Unmittelbarkeit seiner Berechnung, als auch wegen seiner unmittelbaren Anwendungsfähigkeit zur Messung des Rechtecks, auf welches nach dem Vorhergehenden der Inhalt jeder gradlinigen Figur zurückgeführt werden kann.

2. Erklärung: Als Einheit des Flächenmaßes dient in der Praxis die Quadratruthe ($\square^\circ$); nach dem Duodecimalmaß (dde.) ist

$$1 \square^\circ = 144 \text{ Quadratfuß } (\square'), 1 \square' = 144 \square'', \text{ u. s. w. Nach dem Decimalmaß (de.) ist}$$

$$1 \square^\circ = 100 \square', 1 \square' = 100 \square'' \text{ u. s. w., da allgemein } \left(\frac{1'}{n}\right)^2 = \frac{1'}{n^2}.$$

1. Aufgabe: Ein Rechteck zu messen.

Auflösung: Man suche zu zwei anstoßenden Seiten das größte gemeinschaftliche Maß, so ist das Product der beiden Verhältnißzahlen das Verhältniß des Quadrats des gemeinschaftlichen Maßes zu dem Rechtecke. Dies läßt sich kürzer so ausdrücken: Ein Rechteck ist gleich dem Producte aus den Längen zweier Winkelseiten, wenn man mit diesem Ausdrucke nur die obige Bedeutung verbindet.

Hierbei sind folgende Fälle zu berücksichtigen:

1. Der Fall der Commensurabilität der Winkelseiten ist durch obige Auflösung erledigt.
2. Sind die Winkelseiten incommensurabel, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks irrational, d. h. es giebt kein Quadrat, welches von dem Rechtecke ein Maß wäre. Indessen giebt es nach §. 19, Aufg. 2 stets zwei rationale Verhältnisse, denen das irrationale gleichgesetzt werden kann, so daß dadurch der Fall der Incommensurabilität auf den der Commensurabilität zurückgeführt ist.
3. Nimmt man, wie es in der Praxis geschieht, zum Maße der Winkelseiten ein willkürlich gegebenes Maß, z. B. einen Fuß, so kann der Fall eintreten, daß die Maßzahlen Brüche sind. Sind z. B. die beiden Seiten bezüglich $4\frac{1}{2}'$ und $3\frac{2}{3}'$, so erhält man ein gemeinschaftliches Maß beider Seiten, wenn man die Brüche gleichnamig macht, also $4\frac{1}{2}' = 27 \cdot \frac{1}{6}'$ und $3\frac{2}{3}' = 22 \cdot \frac{1}{6}'$ setzt. Dann ist nach dem 1. Fall $\frac{1}{6}'$ das größte gemeinschaftliche Maß und der Flächeninhalt des Rechtecks $= 27 \cdot 22 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 * = 27 \cdot 22 \cdot \frac{1}{6^2} \square' = \frac{27}{6} \cdot \frac{22}{6} \square' = 4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3} \square'$

Es gilt also die obige Regel für alle Fälle.

Daraus ergeben sich folgende

Lehrsätze: 1. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe.

2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.

Zusatz: Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich seinem halben Kathetenproducte.

3. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Producte aus dem arithmetischen Mittel seiner Grundlinien in die Höhe.

4. Der Flächeninhalt eines regulären Polygons ist gleich dem halben Producte aus seinem Umfange in den kleinen Radius.

5. Der Flächeninhalt eines beliebigen n-ecks ist gleich der Summe seiner Theildreiecke.

§. 24.

Verhältniß des Flächeninhalts gradliniger Figuren.

Aus den Lehrsätzen 1 und 2 des vorigen §. ergeben sich sofort folgende

Lehrsätze: 1. Parallelogramme oder Dreiecke stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen.

2. Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie oder Höhe verhalten sich bezüglich wie ihre Höhen oder Grundlinien.

3. In gleichen Parallelogrammen oder Dreiecken stehen die Grundlinien im umgekehrten Verhältnisse der Höhen und umgekehrt: Parallelogramme oder Dreiecke sind gleich, wenn ihre Grundlinien im umgekehrten Verhältnisse der Höhen stehen.

*) $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ ist zu lesen: Quadrat-Sechstelfuß.

4. Parallelogramme oder Dreiecke, welche bezüglich einen Winkel gleich, und Dreiecke, welche zwei Winkel haben, die sich zu 2 R ergänzen, stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der diese Winkel einschließenden Seiten.

Bew.: Macht man die gleichen Winkel zu Scheitelwinkeln (Fig. 32.) und zeichnet das Parallelogramm oder Dreieck f , so verhält sich $F : f = b : c$

$$f : F_1 = a : d$$

$$F : F_1 = ab : cd$$

Haben die beiden Dreiecke ein Paar Supplementwinkel, so braucht man nur die zweite Diagonale in dem Parallelogramme F_1 zu zeichnen, um sich von der Richtigkeit der Behauptung zu überzeugen.

Ein specieller Fall davon ist:

5. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Höhen.

Bew.: Sind die Dreiecke F und F_1 , so verhalten sie sich, wie die Producte von je einem Paare homologer Seiten, also wie $ab : a_1 b_1$; da aber $b : b_1 = a : a_1$, so ist $F : F_1 = a^2 : a_1^2$.

6. Ähnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Bew.: Sind die homologen Dreiecke, in welche ähnliche Polygone zerlegt werden können, bezüglich $A, B, C, \dots$ und $A_1, B_1, C_1, \dots$ und die homologen Seiten in ihnen bezüglich $a, b, c, \dots$ und $a_1, b_1, c_1, \dots$, so verhält sich $A : A_1 = a^2 : a_1^2$, $B : B_1 = b^2 : b_1^2 = a^2 : a_1^2$, $C : C_1 = c^2 : c_1^2 = a^2 : a_1^2, \dots$ folglich $A : A_1 = B : B_1 = C : C_1, \dots = a^2 : a_1^2$, und $A + B + C + \dots : A_1 + B_1 + C_1 + \dots = a^2 : a_1^2$.

7. Sind die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks homologe Seiten ähnlicher Polygone, so ist das Polygon über der Hypotenuse gleich der Summe der Polygone über den Katheten.

Bew.: Sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks a und b , die Hypotenuse c , die Flächen der ähnlichen Figuren über ihnen bezüglich A, B und C , so verhält sich

$$A : B = a^2 : b^2, \text{ also } A + B : A = a^2 + b^2 : a^2.$$

$$\text{Da nun auch } C : A = c^2 : a^2$$

und $a^2 + b^2 = c^2$, so ist auch $A + B = C$.

Aus dem Umstande, daß sich $a^2 : b^2$ verhält, wie die Projectionen von a und b auf die Hypotenuse, ergibt sich die

1. Folgerung: Ueber den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks als homologen Seiten construirte ähnliche Polygone verhalten sich wie die Projectionen der Katheten auf die Hypotenuse. — Analog ergibt sich die

2. Folgerung: Ueber der Hypotenuse und einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks als homologen Seiten construirte ähnliche Polygone verhalten sich wie die Hypotenuse zu der Projection der betreffenden Kathete auf sie.

1. Aufgabe: Ein einem gegebenen Polygone ähnliches zu zeichnen, welches zu ihm in dem gegebenen Verhältnisse $m : n$ steht.

Auflösung: Sind s und x zwei homologe Seiten der ähnlichen Figuren, so ist $s^2 : x^2 = m : n$, woraus sich die Auflösung nach voriger Folgerung sofort ergibt.

2. Aufgabe: Ein ungleichseitiges Dreieck A in ein gleichseitiges X zu verwandeln.

Auflösung: Läßt man zunächst die Bedingung der Gleichheit fallen und berücksichtigt nur, die vorgeschriebene Form, so liegt es nahe, über der Grundlinie a von A ein gleichseitiges Dreieck B zu construiren. Dann verhalten sich die Dreiecke mit gleicher Grundlinie wie ihre Höhen, also

$$B : A = h_1 : h. \text{ Ist } x \text{ nun die Höhe des gesuchten Dreiecks, so ist } CE = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 - a^2}.$$

$B : X = h_1^2 : x^2$; da nun $X = A$ sein soll,

$$h_2 : h = h_1^2 : x^2,$$

woraus die weitere Lösung sich wieder nach voriger Folgerung ergibt.

§. 25.

Rectification und Quadratur des Kreises.

1. Lehrsatz: Jeder Kreisbogen ist größer als seine Sehne.

Bew.: Die grade Linie ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte.

2. Lehrsatz: Jeder Kreisbogen ist kleiner als die Summe der beiden an seine Endpunkte bis zu ihrem Durchschnitte gezogenen Tangenten.

Bew.: Betrachtet man den Bogen als eine gebrochene Linie mit einerseits nur concaven Winkeln, so ist nachzuweisen, daß, wenn auf einer Seite über einer Strecke zwei gebrochene, nur mit concaven Winkeln gegen sie gekehrte gebrochene Linien gezeichnet werden, von denen die eine von der andern umschlossen ist, die innere gebrochene Linie kleiner als die äußere ist. Zieht man (Fig. 33.) die punktirten Hülfslinien, so ist

$$a + h > c + f,$$

$$f + c > d + g,$$

$$g + k > e.$$

$$a + h + f + c + g + k > c + f + d + g + e, \text{ und}$$

$$a + h + c + k > c + d + e, \text{ d. i.}$$

$$a + b > c + d + e.$$

Folgerung: Die Peripherie des einem regulären Polygone ein- oder umbeschriebenen Kreises ist bezüglich kleiner, oder größer als der Umfang des Polygons.

1. Erklärung: Rectification des Kreises ist die Berechnung des Verhältnisses seines Halbmessers zur Peripherie.

Hierzu zeigt die folgende Betrachtung den Weg.

Wenn man im Stande ist, ein reguläres Polygon mit gegebenem Umfange so zu bestimmen, daß der Unterschied seiner beiden Radien oder Durchmesser, d. h. der Radien des ein- und umbeschriebenen Kreises, also auch der Unterschied der beiden Kreise selbst kleiner, als jede angebbare Zahl, also unendlich klein ist: so kann man das Verhältniß des Polygonumfangs zu einem seiner Radien für das Verhältniß des Kreisumfangs zu seinem Radius setzen.

1. Aufgabe: Aus dem kleinen und großen Radius, r und R eines einem Kreise einbeschriebenen regulären n -ecks die beiden Radien r_1 und R_1 desjenigen $2n$ -ecks zu finden, welches mit ihm gleichen Umfang hat (ihm isoperimetrisch ist.)

Auflösung: Ist (Fig. 34.) AB die Seite des gegebenen n -ecks, also $CD = r$, $AC = R$, so ist, wenn A_1 und B_1 bezüglich die Mittelpunkte der beiden Sehnen AE und BE sind, $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$,

$A_1CB_1 = \frac{1}{2} ACB$, also A_1CB_1 das Bestimmungsdreieck des dem gegebenen n ecke isoperimetrischen $2n$ ecks und $CD_1 = r_1$, $CA_1 = R_1$ seine beiden Radien. Da nun $ED_1 = DD_1$, so ist $CD_1 = \frac{1}{2} (CE + CD) + CD = \frac{1}{2} (CE + CD)$, d. i. $r_1 = \frac{1}{2} (R + r)$. Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke CA_1E , $A_1C^2 = CE \cdot CD_1$, d. i. $R_1^2 = Rr_1$ und $R_1 = \sqrt{Rr_1}$.

1. Folgerung: Geht man so von dem regulären n ecke zu den isoperimetrischen $2n$, $4n$, $8n$. . . ecken fort und bezeichnet die Radien bezüglich mit $r, R; r_1, R_1; r_{11}, R_{11}; r_{111}, R_{111}; \dots$, so sind von r_1 an sämtliche r die arithmetischen, und von R_1 an sämtliche R die geometrischen Mittel zwischen den beiden ihnen unmittelbar vorangehenden Gliedern der Reihe.

2. Folgerung: Die Gleichungen der 1. Aufgabe und die daraus gezogene Folgerung gelten auch für die Durchmesser $d, D; d_1, D_1$ der Polygone und die Verhältnisse des constanten Polygonumfangs p zu den Durchmessern. Es ist also

$$\frac{d_1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{p} + \frac{D}{p} \right); \frac{D_1}{p} = \sqrt{\frac{D}{p} \cdot \frac{d}{p}}, \text{ u. s. f.}$$

Geht man nun von dem regulären Sechsecke aus, und setzt seine Seite $= R = 1$, so ist sein Umfang $p = 6$, $\frac{D}{p} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333333$. Der kleine Radius r ist $= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, also $d = \sqrt{3}$ und $\frac{d}{p} = \frac{1}{6} \sqrt{3} = 0,288675$. Wendet man nun die obige Rechnungsregel an, so erhält man leicht folgende Tabelle:

Anzahl der Seiten.	Verhältniß des Polygonumfangs zu seinem kleineren Durchmesser.	zu seinem größeren Durchmesser.
6	0,288675	0,333333
12	0,311004	0,321975
24	0,316490	0,319221
48	0,317855	0,318537
96	0,318196	0,318367
192	0,318281	0,318324
384	0,318303	0,318313
768	0,318308	0,318311
1536	0,318309	0,318310
3072	0,318310	0,318310

Daraus ergibt sich, daß bei einem 3072 eck die Verhältnisse der beiden Durchmesser zum Umfange sich nicht um ein Milliontel des letzteren von einander unterscheiden, diese Durchmesser also näherungsweise gleich, und die beiden Kreise miteinander und mit dem zwischen ihnen liegenden Polygone zusammenfallend gedacht werden können. Bezeichnen wir nun das Verhältniß des Kreisdurchmessers zur Peripherie mit π , so ist, da $\frac{1}{\pi} = 0,318310$, $\pi = 3,141591$. . . Der richtige Werth ist $\pi = 3,14159265$. . . Es ist also der gefundene Werth erst in der 6. Stelle um 1 zu klein.

In Form eines Kettenbruches ist

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots}$$

dessen Näherungswerte $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \dots$ sind, von denen der letzte $\frac{355}{113} = 3,1415929$ sich erst in der 7ten Decimalstelle von dem wahren Werthe unterscheidet.

1. Folgerung: Die Kreisperipherie ist $= 2\pi r$.

2. Folgerung: Ein Kreisbogen, dessen zugehöriger Centriwinkel $= \alpha$ ist, ist $= \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$.

3. Folgerung: Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser.

2. Erklärung: Quadratur des Kreises ist die Berechnung seines Flächeninhalts.

Aufgabe: Einen Kreis zu quadriren.

Auflösung: Betrachtet man den Kreis als die Grenze aller regulären Polygone, so geht die Formel für die Fläche der letzteren $Fl = \frac{1}{2} U \rho$ über in $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = r^2\pi$.

1. Folgerung: Ein Kreissektor ist $= \frac{\text{Arc. } r}{2} = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$.

Anmerkung: Die Berechnung eines Segments würde hier nur für die speciellen Fälle möglich sein, wenn seine Sehne die Seite eines elementar-geometrisch construierbaren regulären Polygons ist. Eine allgemeine und einfache Auflösung dieser Aufgabe giebt die Trigonometrie.

2. Folgerung: Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

3. Folgerung: Nimmt man die Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bezüglich zu Halb- oder Durchmessern dreier Kreise, so ist die Summe der beiden ersten Kreise gleich dem dritten.

4. Folgerung: Wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmessern Halbkreise construirt, so ist die Summe der über den Katheten entstehenden Mönchchen gleich dem gegebenen Dreieck.

Bew.: Ergiebt sich sofort aus Fig. 35.

1. Aufgabe: Einen Kreisring in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung: Sind die Radien der Kreise, deren Differenz der Ring ist, bezüglich R und r , der des gesuchten Kreises x , so ist $x^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$, also $x^2 = R^2 - r^2$, woraus sich (Fig. 36.) ergibt, daß x der durch den Berührungspunkt und die Peripherie des großen Kreises begrenzte Theil der Tangente des kleinen Kreises ist.

2. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der zu einem gegebenen in einem bestimmten Verhältnisse steht.

Auflösung: Analog der von §. 24, Aufg. 1.

3. Aufgabe: Die Peripherie eines Kreises annähernd geometrisch zu rectificiren.

Auflösung: Wählen wir zu dem Zwecke den Näherungswert $\frac{355}{113}$, so ist derselbe $= 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{16}{49+64} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2}$. Der Werth $\frac{4^2}{7^2+8^2}$ läßt sich in folgender Weise leicht construiren:

Man mache (Fig. 37.) die Schenkel des rechten Winkels $ABC = d = 1$ und $CD = \frac{1}{8}d$, verbinde A mit D, halbiere AB in E, trage AE = AF auf AD von A aus ab, ziehe FH || CB, verbinde D mit H und ziehe FG || DH, so ist $AG = \frac{4^2}{7^2+8^2}$.

Bew.: Es verhält sich

$$AF : AD = AH : AB \text{ und}$$

$$AF : AD = AG : AH$$

$$\frac{AF^2}{AD^2} = \frac{AG}{AB}, \text{ d. i.}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 : d^2 + \left(\frac{7d}{8}\right)^2 = AG : d, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 : \frac{(8d)^2 + (7d)^2}{8^2} = AG : d, \text{ d. i. für } d=1,$$

$$4^2 : 8^2 + 7^2 = AG : 1, \text{ folglich } AG = \frac{4^2}{8^2+7^2}.$$

Es ist somit die gerade Linie 3 AB + AG = $\frac{355}{113}$ des Durchmessers, d. h. bis auf die 7te Decimale gleich der Kreisperipherie.



