

Beitrag zu einer genetischen Entwicklung der Planimetrie.

Die folgende, lediglich im Interesse des mathematischen Schulunterrichts geschriebene Abhandlung beansprucht weniger einen wissenschaftlichen, als didaktischen Werth. Sie giebt nichts Neues, sondern Altes in neuer Form und Verbindung und, durch den Raum beschränkt, auch nur in einem beschränkten Gebiete.

So sehr man auch principiell dem Ausspruche des Aristoteles (Analyt. post. I. 27): *Ακριβέστερα δ' ἐπιστήμῃ ἐπιστήμης καὶ πρότερα, ἢ τε τοῦ ὅτι καὶ διότι ἢ αὐτῇ, ἀλλὰ μὴ χωρὶς τοῦ ὅτι, τῆς τοῦ διότι* beistimmt und denselben in der Bearbeitung und dem Vertrage sämmtlicher Wissenschaften zu befolgen strebt: so hat sich doch sonderbarer Weise gerade in der Mathematik, die wie keine andere Wissenschaft ihre Keime einzig und allein in den ursprünglichsten Anschauungen des Menschen hat und sich aus diesen mittelst der ursprünglichsten Begriffe klar und sicher entwickelt, und noch dazu in dem anschaulichsten, dem geometrischen Theile derselben das fast unvertilgbare Vorurtheil festgesetzt, daß zur Begründung ihrer Lehren der logische Nachweis ihrer Richtigkeit allein hinreichend, die Darlegung des Weges zur Auffindung der bewiesenen Wahrheiten aber mindestens überflüssig sei. Ob dieses Vorurtheil in wissenschaftlicher Beziehung der Mathematik mehr genützt als geschadet hat, will ich hier nicht untersuchen; wohl aber glaube ich die Behauptung aussprechen zu dürfen und dabei der Zustimmung vorurtheilsfreier Sachkenner gewiß zu sein, daß in didaktischer Beziehung die ausgesprochene Methode, mathematische Lehren zu behandeln, die ihr Vorbild in Euklid's Elementen hat, dem Verständniß und der Verbreitung mathematischer Lehren entschieden hinderlich gewesen ist und noch ist. Euklid's Elemente sind in ihrer Art ein unübertreffliches Muster von consequenter Durchführung eines auf logischen Gesetzen beruhenden Systemes und erreichen ihren Zweck, die Richtigkeit ihrer Lehren nachzuweisen und so deren Existenz zu sichern, auf das Vollkommenste. Aber darum ist die in ihnen befolgte Methode, wenn man darunter mehr versteht, als die nie genug zu rühmende und keiner andern Rücksicht zu opfernde mathematische Strenge, noch nicht die beste Unterrichtsmethode. Denn sie widerspricht sowohl den Forderungen, die an jeden Unterricht, besonders aber an den auf wissenschaftlichen Anstalten ertheilten zu stellen sind, daß nämlich der Schüler weniger Gedachtes, als denken lerne, als auch besonders dem Geiste der Jugend, die ohne Vergleich mehr Verständniß und Sinn für das Werden, als für das Fertige hat.

Der synthetische Vortrag der Mathematik mit seinem fast durchgängigen Mangel an übersichtlicher Zusammenstellung der gleichartigen Objecte, mehr noch einer logischen Anordnung der Begriffe und besonders einer organischen Entwicklung der Lehren bleibt mehr oder weniger immer ein dogmatischer. Ist der Schüler auch von der logischen Richtigkeit eines Satzes überführt, so ist er dadurch von seiner Wahrheit noch nicht überzeugt. Beides steht sehr oft im umgekehrten Verhältnisse. Der dem Schüler hierbei angethane Zwang beengt ihn, aber fesselt ihn nicht. Je rüstiger die Kraft, desto mehr lehnt sie sich oft gegen ihn auf. Je höher die Bewunderung des auf den Beweis verwandten Scharfsinns steigt, desto tiefer sinkt die Zuneigung.

Diese letztere, die der Zweck alles wissenschaftlichen Unterrichts ist und bleiben muß, kann nur erzeugt werden, wenn dem Schüler das innere Verständniß des Gelernten aufgeschlossen wird. Und hierzu ist eine genetische, anschauliche Entwicklung der mathematischen Lehren nothwendig. Jeder andere Weg verurtheilt den Lernenden zu einer bloßen Receptivität, verhindert aber die Productivität. Blindlings steht er sich geführt, wo er selber gehen möchte und könnte, wenn ihm nur der Weg gezeigt würde. So wird das Bewußtsein eigener Kraft und das Selbstvertrauen systematisch gelähmt und eine vollständige Rathlosigkeit bei einer selbstständigen Leistung ist die unausbleibliche Folge.

Die entgegengesetzte Methode, die Begründung der Lehrsätze der Geometrie bloß der Anschauung zu überweisen und, wie es leider geschehen ist, die Geometrie zu einer rein beschreibenden Wissenschaft zu machen, hat auf viel schlimmere Abwege geführt, und nichts ist geeigneter, als sie, nicht allein den mathematischen, sondern auch den wissenschaftlichen Sinn überhaupt zu ertöden.

Eine Verbindung beider Methoden, eine Anordnung der Sätze, eine Führung der Beweise, die gleichzeitig der größten Strenge der Beweise, sowie der Darlegung des Weges, wie die bewiesenen Wahrheiten, wenn nicht gefunden sind, so doch hätten gefunden werden können, Rechnung trägt, wird ohne Zweifel die für den Unterricht geeignetste sein. Vorzugsweise wichtig ist sie für den ersten mathematischen Unterricht, weil sich in keiner andern Wissenschaft ein früherer Fehlgriff so sehr rächt, wie in der Mathematik. Darum erschien mir die Ausarbeitung dieses Versuches zur Lösung eines kleinen Theiles einer größeren Aufgabe nicht unnütz.

Erklärungen.

§. 1.

Alle Körper, mögen sie wirklich vorhanden, oder nur gedacht sein, haben drei endliche Ausdehnungen oder Dimensionen: Länge, Breite und Dicke, die den Begriffen vorn und hinten, rechts und links, oben und unten entsprechen. Mit andern Worten: Alle Körper nehmen einen Theil des Raumes ein.

Den Raum können wir uns nicht ohne folgende Eigenschaften denken: 1) Er hat unbegrenzte Ausdehnungen; 2) er hat, wie auch alle seine Theile, eine unbegrenzte Theilbarkeit; 3) seine Theile sind gleichartig, d. h. sie unterscheiden sich durch nichts, als höchstens durch ihre Größe; 4) er ist stetig, d. h. keiner seiner Theile ist von einem andern durch etwas, was nicht Raum wäre, oder Raum einnähme, getrennt, oder seine Theile haben einen ununterbrochenen (continuirlichen) Zusammenhang.

Da der Stoff der physischen Körper der verschiedensten Art sein kann, ein bestimmter Stoff also einem Körper nicht wesentlich ist, die Physik außerdem die Eigenschaften der Stoffe behandelt: so können wir denselben insofern unberücksichtigt lassen, als wir uns die Größe und Gestalt des Körpers unabhängig von einem besondern Stoffe denken. Wir verstehen deshalb unter einem mathematischen Körper einen vollständig begrenzten Theil des Raumes.

Die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarten Raumtheile, d. h. dasjenige, was, ohne selbst ein Theil des Raumes zu sein, zwei Raumtheile von einander scheidet, heißt eine Fläche. Die beiden durch sie getrennt gedachten Raumtheile heißen ihre beiden Seiten. — Die Fläche hat nur die beiden Ausdehnungen Länge und Breite. Sie ist entweder gekrümmt oder eben — eine Ebene —, unbegrenzt oder begrenzt. Zu den letzteren gehören die Grenzen eines Körpers, die entweder aus einer Fläche, (z. B. die Kugel) oder aus mehreren Flächen (z. B. die Halbkugel, der Würfel) bestehen. — Die Gesamtbegrenzung eines Körpers, aufgefaßt als eine einzige, in sich zurückkehrende Fläche, heißt seine Oberfläche.

Wir betrachten vorläufig nur die Ebene, und alle künftigen Gebilde werden, auch ohne weitere Erinnerung, oder wenn nicht ausdrücklich eine Ausnahme davon gemacht wird, als in ihr ausgeführt gedacht. Die Wissenschaft von den mathematischen Gebilden in einer Ebene heißt Planimetrie.

Die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarten Theile einer Fläche heißt eine Linie. Die beiden durch sie getrennt gedachten Theile der Fläche heißen ihre Seiten. — Die Linie hat nur die Ausdehnung der Länge. Sie ist entweder krumm — eine Curve, — oder grade, begrenzt oder unbegrenzt. — Die graden Linien nennt man, je nachdem sie anfangs- und endlos, mit Anfang und endlos, mit Anfang und Ende sind, bezüglich Grade, Strahl, Strecke.

Ein von einer Linie, (z. B. der Kreis) oder von mehreren (z. B. Halbkreis, Quadrat) begrenzter Theil einer Ebene heißt eine ebene Figur. Die Gesamtbegrenzung einer Figur, aufgefaßt als eine einzige, in sich zurücklaufende krumme, gebrochene oder gemischte Linie, heißt ihr Umfang.

Die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarten Theile einer Linie, also auch die Grenze einer Linie heißt Punkt. Er ist ohne Ausdehnung, also ohne Theile. Der bestimmte Ort im Raume, den er einnimmt, heißt seine Lage.

Linien, Flächen und Körper heißen gemeinschaftlich räumliche oder stetige Größen. Die Wissenschaft von ihnen heißt Geometrie.

Anmerkung: In Wirklichkeit existirt der Punkt nicht ohne die Linie, die Linie nicht ohne die Fläche, die Fläche nicht ohne den Körper und der Körper nicht ohne Materie, da die Grenze nicht ohne ein Begrenztes, die Form nicht ohne eine Materie ist; doch können wir uns, wie schon oben bemerkt, eins unabhängig von einer bestimmten Art des andern denken und ihm so wenigstens in Gedanken eine abgesonderte Existenz geben. — Man versinnlicht sich den Punkt durch einen materiellen Punkt, die Linie durch einen materiellen Strich und bezeichnet verschiedene Punkte durch verschiedene Buchstaben meist des großen lateinischen Alphabets.

§. 2.

Grundsatz: Durch einen Punkt können wir unendlich viele Grade, durch zwei Punkte dagegen nur eine ziehen oder uns gezogen denken. — Anwendung des Lineales zum Prüfen, Zeichnen und Verlängern einer graden Linie. — Mit dieser letzteren Operation erhält man zugleich den Begriff der Richtung von einem Punkt nach einem andern und der dieser direkt entgegengesetzten Richtung.

Die Richtung einer graden Linie wird durch zwei beliebige Punkte in ihr bestimmt. Daraus folgt die Grundeigenschaft der graden Linie, daß alle ihre Theile dieselbe Richtung haben, oder daß sie zwischen je zweien ihrer Punkte nur auf eine Art liegen kann.

1. Folgerung: Zwei verschiedene grade Linien können nicht mehr als einen Punkt gemein haben, sich nur in einem Punkte schneiden.

2. Folgerung: Zwischen zwei Punkten, z. B. zwischen den beiden Spitzen eines Zirkels ist nur eine einzige Strecke möglich. — Diese Strecke ist kleiner, als jede andere die beiden Punkte verbindende Linie und heißt deshalb die Entfernung der beiden Punkte. — Die Länge und Lage einer Strecke wird durch die Lage ihrer Endpunkte bestimmt. Deshalb bezeichnet man sie, indem man ihre Endpunkte bezeichnet. Soll die Länge allein bezeichnet werden, so genügt dazu ein Buchstabe.

Anmerkung: Die Begriffe grade und eben, sowie ihre Gegensätze sind so ursprünglich, daß ihr Verstandniß durch keine andern Begriffe vermittelt werden kann. Als Grundeigenschaft der Ebene ergibt sich dem Obigen analog, daß sie durch drei nicht in grader Linie liegende Punkte nur auf eine Art gelegt werden kann, oder daß in ihr von jedem Punkte nach allen Richtungen grade Linien gezogen werden können.

§. 3.

Beziehungen zwischen den Längen zweier Strecken.

1. Aufgabe: Eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke zu zeichnen.

Auflösung: Man setzt die Spitze eines Zirkels in ihre Endpunkte oder trägt die Entfernung ihrer Endpunkte auf der Kante eines Lineales ab und trägt dann die Entfernung der Zirkelspitzen oder die Entfernung der Endpunkte auf einer zweiten graden Linie ab.

1. Erklärung: Legt man zwei Strecken so aufeinander, daß sich das eine Paar ihrer Endpunkte deckt, so sind die Strecken, wenn sich auch das andere Paar ihrer Endpunkte deckt, gleich ($=$), wenn nicht, so ist die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen die Endpunkte der andern fällt. Das Zeichen für kleiner ist $<$, das für größer $>$.

2. Erklärung. Räumliche Größen überhaupt, die zur Deckung gebracht werden können, heißen congruent ($\cong$).

2. Aufgabe: Zwei gegebene Strecken zu addiren, oder eine gegebene Strecke um eine andere zu verlängern.

Auflösung: Man trage eine von ihnen auf der Verlängerung der andern von dem Endpunkte aus, über den hinaus sie verlängert ist, ab, so ist die Entfernung der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte die verlangte Summe.

Zusatz: Wie mehr als zwei Strecken zu addiren sind, erhellt aus Aufgabe 2 sogleich.

3. Aufgabe: Eine kleinere gegebene Strecke von einer größeren zu subtrahiren, oder eine gegebene Strecke um eine kleinere zu verkürzen.

Auflösung: Legt man die kleinere Strecke auf die in Erkl. 1. angegebene Weise auf die größere, so ist die Entfernung der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte die verlangte Differenz.

Als specieller Fall des obigen Zusatzes ergibt sich die

4. Aufgabe: Eine gegebene Strecke mit einer unbenannten ganzen Zahl zu multipliciren, nebst der Auflösung.

1. Anmerkung: Zwei Linien können natürlich nicht mit einander multiplicirt werden, da nach dem Begriffe der Multiplication der Multiplikator stets eine unbenannte Zahl sein muß.

2. Anmerkung: Die Aufgabe, eine gegebene Strecke in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, welche sich als erste Umkehrung der 4. Aufgabe ergibt, kann hier noch nicht gelöst werden und bedarf hier der Lösung auch noch nicht.

Der zweiten Umkehrung von Aufg. 3 (siehe Aufg. 5) ist Folgendes voranzuschicken:

2. Erklärung: Eine Strecke, die in einer andern beliebig vielmal enthalten ist, ohne daß ein Rest dabei übrig bleibt, heißt von dieser ein Maß, diese von jener ein Vielfaches, und die Zahl, welche angiebt, wie oft das Maß in der gemessenen Strecke enthalten ist, heißt das Verhältniß beider Strecken.

Eine Strecke, die von zwei und mehr Strecken zugleich ein Maß ist, heißt ein gemeinschaftliches Maß derselben. (Größtes, kleinere gemeinschaftliche Maße.)

1. Lehrsatz: Ein Maß einer Strecke ist auch ein Maß ihres Vielfachen.

2. Lehrsatz: Ein gemeinschaftliches Maß zweier Strecken ist auch ein Maß von der Summe und Differenz derselben. Die Beweise beider Sätze sind leicht.

5. Aufgabe: Eine gegebene Strecke durch eine andere zu messen, oder das Verhältniß beider Strecken in den kleinsten Zahlen zu suchen.

Auflösung, 1. Fall: Sind beide Strecken einander gleich, so ist ihr Verhältniß die Zahl 1.

2. Fall: Sind sie ungleich, so trage man die kleinere auf der größeren von einem Endpunkte aus so oft als möglich ab. Kann dies z. B. n mal geschehen, ohne daß ein Rest übrig bleibt, so ist die ganze Zahl n also das gesuchte Verhältniß, und die kleinere Strecke von der größeren ein Maß.

3. Fall: Bleibt dagegen z. B. nach einem n maligen Abtragen ein Rest übrig, so ist keine unmittelbare Messung mehr möglich. Es fragt sich also, ob nicht eine mittelbare Messung stattfinden kann. Dies wird aber der Fall sein, wenn man im Stande ist, eine dritte Strecke zu finden, die von beiden gegebenen Strecken ein gemeinschaftliches Maß ist. Das dabei zu beobachtende Verfahren ist dasselbe, wie bei der Lösung der arithmetischen Aufgabe, zu zwei gegebenen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen. Die also zunächst in Frage zu stellende Strecke ist augenscheinlich der Rest selbst. Denn ist dieser ein Maß der kleineren Linie, so ist er es auch von ihrem n fachen und mithin auch von der Summe aus dem n fachen und sich selbst, d. h. von der größeren, also ein gemeinschaftliches Maß beider. Ist er dagegen kein Maß, so mache man dieselbe Untersuchung mit dem neuen Reste an dem ersten u. s. w. Hierbei sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem einmal kein Rest mehr, oder stets einer übrig bleibt.

Im letzteren Falle nennt man die Strecken incommensurabel und ihr durch keine Zahl genau anzugebendes Verhältniß irrational. Die Art und Weise, wie man ein irrationales Verhältniß annähernd bestimmt, muß, da sie auf der in Anmerkung 2 besprochenen Aufgabe beruht, einer spätern Untersuchung vorbehalten bleiben. Jedoch erhellt hier schon die Möglichkeit einer solchen Bestimmung, da die Reste nach und nach immer kleiner werden und sich zuletzt aller Wahrnehmung entziehen, so daß man sie einmal, je nach dem Grade der beanspruchten Genauigkeit, unberücksichtigt lassen kann.

Den Gang der Untersuchung im ersteren Falle, den man in Verbindung mit dem Falle, wo die kleinere Strecke von der größeren ein Maß ist, den Fall der Commensurabilität nennt, und wo das Verhältniß rational ist, mag folgendes Schema verdeutlichen. Die Längen der beiden Linien seien der Kürze wegen bezeichnet durch a und b , u. z. sei $a > b$. Das Resultat der ersten Vergleichung werde dargestellt durch die Gleichung:

$$1) a = nb + r, \quad \text{speciell } a = 3b + r, \quad \text{das der zweiten durch}$$

$$2) b = n_1 r + r_1, \quad \text{" } b = 2r + r_1, \quad \text{" } \text{dritten "}$$

$$3) r = n_2 r_1, \quad \text{" } r = 4r_1,$$

wo r_1 also ein Maß von r sein mag. Dann ist r_1 das größte gemeinschaftliche Maß von a und b . Um nun schließlich das gesuchte Verhältniß zu finden, muß man a und b durch r_1 ausdrücken, welches leicht auf folgende Art geschieht. Setzt man aus Gleichung 3 den Werth für r in die 2. Gleichung, so ist

$$4) b = n_1 n_2 r_1 + r_1 = (n_1 n_2 + 1) r_1, \quad \text{speciell } b = 8r_1 + r_1 = 9r_1.$$

Setzt man schließlich aus Gleichung 4 und 3 die Werthe für b und r in Gleichung 1, so ist

$$5) a = n(n_1 n_2 + 1) r_1 + n_2 r_1, \quad \text{speciell } a = 27r_1 + 4r_1 \\ = (n n_1 n_2 + n + n_2) r_1, \quad \text{" } = 31r_1$$

$$\text{Mithin ist } \frac{a}{b} = \frac{(n n_1 n_2 + n + n_2) r_1}{(n_1 n_2 + 1) r_1} = \frac{n n_1 n_2 + n + n_2}{n_1 n_2 + 1}, \quad \text{speciell } \frac{a}{b} = \frac{31r_1}{9r_1} = \frac{31}{9}, \text{ also} \\ a = \frac{n n_1 n_2 + n + n_2}{n_1 n_2 + 1} b, \quad \text{speciell } a = \frac{31}{9} b.$$

Beweis: r_1 ist ein Maß von r , mithin auch von $n_1 r$ und $n_1 r + r_1$, d. h. von b , mithin auch von nb und $nb + r$, d. h. von a , also ein gemeinschaftliches von a und b . Es ist aber auch das größte; denn wäre z. B. m ein gemeinschaftliches Maß und $m > r_1$, so wäre es auch ein Maß von nb , also auch von $a - nb$, d. h. von r , also auch von $n_1 r$ und $b - n_1 r$, d. h. von r_1 , was dem Begriffe des Maßes widerspricht. Es sind also in dem speciellen Beispiele 31 und 9 die kleinsten Zahlen, in denen das Verhältniß von a zu b angegeben werden kann.

Folgerung (aus dem 2. Theile des Beweises): Die kleineren gemeinschaftlichen Maße zweier Strecken sind Maße des größten.

Zusatz: Das Verfahren, zu mehr als zwei gegebenen Strecken das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen, ist dem angegebenen ganz analog. Sind z. B. a, b, c drei Strecken, so sucht man zu a und b das größte gemeinschaftliche Maß; es sei m . Nun sucht man es zu m und c ; es sei m_1 ; dann ist m_1 das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß zu a, b und c .

Beweis: Da m_1 ein Maß von m , so ist es auch eins von a und b , außerdem von c . Gäbe es ein größeres, z. B. M , so wäre es auch ein Maß von m und c , also auch von m_1 , was wieder ungeräumt ist.

Anmerkung: Diese Lösung der vorigen Aufgabe hat einen mehr wissenschaftlichen, als praktischen Werth, da sie oft sehr weitläufig wird und doch nicht immer zu einem Resultate führt, welches, auch wo es gefunden werden kann, für die Praxis unbrauchbar wäre. Das praktische Leben bedarf eines

ein für alle Mal bestimmten Maßes und kann sich mit einer näherungsweisen Bestimmung des Verhältnisses zweier Strecken begnügen. Als Einheit des Längenmaßes dient die Ruthe, ($^{\circ}$), die als Werkmaß in 12 Fuß, ($'$), der Fuß in 12 Zoll, ($''$), der Zoll in 12 Linien, ($'''$), getheilt wird, weil 12 die häufig gebrauchten Maßzahlen 2, 3, 4 und 6 hat (Duodecimalmaß). Für wissenschaftliche Zwecke, z. B. für Feldmesserarbeiten, theilt man die Ruthe ein in 10', 1' in 10'', 1'' in 10''', wegen der Uebereinstimmung mit der Einrichtung des dekadischen Zahlensystems. (Decimalmaß.)

§. 4.

Beziehungen zwischen den Richtungen zweier graden Linien.

1. Erklärung: Dreht man eine grade Linie um einen in ihr befindlichen, als fest angenommenen Punkt, der Einfachheit wegen z. B. einen Strahl um seinen Anfangspunkt stetig nach einer Seite hin bis in eine beliebige andere Richtung, so heißt die Größe der Drehung, durch welche der Strahl von seiner ursprünglichen Richtung in die neue gelangte, ein Winkel.

Denkt man sich die ursprüngliche Richtung des Strahles durch einen zweiten Strahl vertreten, so kann man auch sagen:

Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehenden Strahlen.

Der Drehpunkt heißt der Scheitel oder die Spitze des Winkels, die beiden Strahlen seine Schenkel. Man bezeichnet einen Winkel, indem man seine Schenkel bezeichnet und den Buchstaben am Scheitel in der Mitte liest und schreibt. Kürzer bezeichnet man ihn auch durch einen zwischen seine Schenkel an den Scheitel gesetzten kleinen Buchstaben oder durch den Scheitelbuchstaben allein, wenn dadurch keine Zweideutigkeit entstehen kann.

1. Folgerung: Je weiter die obige Drehung fortgesetzt wird, desto größer wird der Winkel.

2. Folgerung: Die Größe eines Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig.

2. Erklärung: Die Richtungen der Schenkel eines Winkels heißen in Bezug auf einander divergent, die ihnen direkt entgegengesetzten, nach dem Scheitel gehenden Richtungen heißen convergent.

3. Folgerung: Linien mit convergenter Richtung müssen sich bei gehöriger Verlängerung schneiden.

3. Erklärung: Um eine ganz bestimmte Vorstellung von der Größe eines Winkels zu erhalten, denken wir uns in einem beliebigen Abstände vom Anfangspunkte des sich drehenden Strahles einen zweiten Punkt. Dieser beschreibt, während der Strahl eine volle Umdrehung (einen vollen Winkel) macht, eine krumme Linie, welche überall von dem festen Drehpunkte gleich weit entfernt ist. Diese Linie heißt eine Kreislinie (Kreisperipherie), irgend ein Theil von ihr ein Kreisbogen, die Hälfte Halbkreis, das Viertel Quadrant, die von ihr begrenzte Figur ein Kreis, der Drehpunkt Mittelpunkt (Centrum), die sich drehende Strecke Halbmesser (Radius). Eine zwei beliebige Punkte einer Kreisperipherie verbindende Strecke heißt eine Sehne. Geht diese durch den Mittelpunkt, so heißt sie Durchmesser (Diameter). Der Richtungsunterschied zweier Radien heißt ein Centriwinkel.

Aus der Entstehung des Kreises folgt nun unmittelbar:

1) Ein Kreis hat nur einen Mittelpunkt.

2) Alle Radien, also auch die Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

3) Ein Punkt liegt innerhalb oder außerhalb der Kreisperipherie, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte kleiner oder größer als der Radius ist, d. h.

4) die Kreislinie ist der geometrische Ort aller von einem Punkte, ihrem Mittelpunkte, gleichweit entfernten Punkte, indem man unter einem geometrischen Orte die Gesamtheit aller der Punkte versteht, die sämmtlich, mit Ausschluß aller übrigen, eine und dieselbe Bedingung erfüllen.

5) Kreise mit gleichen Radien sind congruent.
 6) Zu gleichen Centriwinkeln gehören in einem Kreise und in gleichen Kreisen gleiche Bogen und gleiche Sehnen — und umgekehrt, wenn man die Bogen gleichzeitig größer oder kleiner, als den Halbkreis oder ihm gleich nimmt, weil zu jeder Sehne zwei Bogen gehören. Beweis durch Deckung.

Zusatz: Zum n -fachen Centriwinkel gehört ein n -facher Bogen — und umgekehrt.

Wir haben hier also eine bestimmte Abhängigkeit zwischen Winkeln und Bogen, die uns zugleich die Lösung giebt zu folgender

1. Aufgabe: Einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen gleich ist.

Auflösung: Soll z. B. (Fig. 1) $\angle \alpha$ in A an AB angetragen werden, so schlage man von dem Scheitel des $\angle \alpha$ aus mit einem beliebigen Radius einen Bogen MN, der seine beiden Schenkel trifft, schlage von A aus mit demselben Radius einen AB treffenden Bogen CP, mache Sehne $CD = NM$ und ziehe AD, so ist $\angle BAD = \angle \alpha$ nach 6.

4. Erklärung: Legt man zwei Winkel mit dem Scheitel und einem Schenkelpaare aufeinander, so sind die Winkel, wenn sich auch das andere Schenkelpaar deckt, gleich, wenn nicht, so ist der kleinere, dessen zweiter Schenkel innerhalb der Schenkel des andern fällt. — Je nach ihrer Größe haben die Winkel verschiedene Namen.

5. Erklärung: Denkt man sich die Drehung des beweglichen Schenkels so lange fortgesetzt, bis er in die entgegengesetzte Richtung des festen fällt, so heißt der so entstandene Winkel ein gestreckter. — Ein gestreckter Winkel ist also ein solcher, dessen Schenkel eine direct entgegengesetzte Richtung haben.

Folgerung: Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

6. Erklärung: Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein gestreckter, heißt hohl (concau). Ist er größer, als ein gestreckter, so heißt er erhaben (conver).

7. Erklärung: Der Schenkel AD (Fig. 2) des hohlen Winkels BAD theilt den gestreckten Winkel BAC in zwei Theile, die den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben und auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels so liegen, daß ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel direct entgegengesetzte Richtung haben. Solche Winkel heißen Nebenwinkel.

8. Erklärung: Jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln heißt ein rechter Winkel oder ein Rechter (R). Die Schenkel desselben stehen aufeinander senkrecht oder lothrecht (perpendicular, $\perp$). Ist der eine Schenkel vom Scheitelpunkte aus gezogen, so heißt er ein auf dem andern errichtetes Perpendikel; ist er dagegen nach demselben hin gezogen, so heißt er ein gefälltes Perpendikel.

1. Folgerung: Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten, oder ein gestreckter Winkel ist gleich 2 R.

2. Folgerung: Alle rechten Winkel sind einander gleich.

3. Folgerung: Die Summe je zweier Nebenwinkel ist gleich 2 R.

1. Anmerkung: Es ist in Folg. 3 nur von hohlen Nebenwinkeln die Rede. Der Nebenwinkel eines erhabenen Winkels ist, wie man sich aus Fig. 3 leicht überzeugt, ebenfalls erhaben, und ihre Summe beträgt 6 R.

4. Folgerung: Die Summe aller einfachen Winkel auf einer Seite einer graden Linie, die in derselben den Scheitelpunkt gemeinschaftlich haben, ist gleich 2 R.

5. Folgerung: Die Summe aller einfachen Winkel um einen Punkt herum als gemeinschaftlichen Scheitelpunkt ist gleich 4 R.

6. Folgerung: In einem Punkte einer graden Linie kann auf einer Seite von ihr nur ein Perpendikel errichtet werden, oder, was dasselbe ist,

7. Folgerung: Eine Linie kann auf beiden Schenkeln eines nicht gestreckten Winkels nicht zugleich senkrecht stehen, wovon wieder nur ein anderer Ausdruck ist die

8. Folgerung: Von einem Punkte aus kann nach einer graden Linie nur ein Perpendikel gefällt werden.

9. Erklärung: Jeder von zwei ungleichen Nebenwinkeln heißt ein schiefer Winkel; seine Schenkel stehen schief auf einander. Je nachdem ein schiefer Winkel größer oder kleiner ist, als ein rechter, heißt er stumpf oder spitz.

2. Aufgabe: Zwei gegebene Winkel zu addiren.

Auflösung: Man legt den Scheitel und ein Schenkelpaar auf einander und die Winkel auf verschiedene Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels. Der Richtungsunterschied der nicht gemeinschaftlichen Schenkel ist die verlangte Summe.

Zusatz: Wie mehr als zwei Winkel zu addiren sind, erhellt aus Aufgabe 2 sogleich.

2. Anmerkung: Daß die Summe, wie auch schon aus der Drehung folgt, größer, als vier Rechte werden kann, sieht man leicht. Wir schließen jedoch von unserer Betrachtung Winkel aus, die größer als 4 R sind.

10. Erklärung: Je zwei Winkel, deren Summe gleich einem Rechten, zwei Rechten, vier Rechten ist, heißen bezüglich Complement-, Supplement-, Implementwinkel.

1. Zusatz: Mit jedem Winkel ist sein Implementwinkel unmittelbar gegeben.

2. Zusatz: Gleiche Winkel haben gleiche Complement-, Supplement- und Implementwinkel.

1. Lehrsatz: (Umkehrung von Folg. 3) Complementwinkel lassen sich in die Lage von Nebenwinkeln bringen.

Beweis: Sie müssen jedenfalls, mag man sie nach Aufgabe 2 addiren oder ein Schenkelpaar zu einem gestreckten Winkel machen, den Raum einerseits einer Gradens ganz ausfüllen und nie mehr als diesen.

3. Aufgabe: Einen kleinern gegebenen Winkel von einem größeren zu subtrahiren.

Auflösung: Man lege die Winkel wie bei Aufgabe 2 mit dem Scheitel und einem Schenkelpaare auf einander, aber die Winkel auf dieselbe Seite des gemeinschaftlichen Schenkels; dann ist der Richtungsunterschied der nicht gemeinschaftlichen Schenkel die gesuchte Winkeldifferenz.

4. Aufgabe: Einen gegebenen Winkel mit einer unbenannten ganzen Zahl zu multipliciren.

Auflösung: Specieller Fall von 2. Aufg., Zusatz.

3. Anmerkung: Die Aufgabe, einen Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, gestattet keine allgemeine Lösung. Specieller Fälle werden unten behandelt werden.

5. Aufgabe: Das Verhältniß zweier Winkel zu suchen.

Auflösung: Ganz analog der 5. Aufg. §. 3.

4. Anmerkung: Den rechten Winkel, so wie den Quadranten, gebraucht man wegen ihrer beständigen Größe als Maßeinheit der Winkel und Bogen, theilt sie jedoch noch für praktische Messungen auf mechanische Weise in 90, vier Rechte und einen ganzen Kreis also in 360 gleiche Theile, genannt Grade ($^{\circ}$); 1° wird getheilt in 60 Minuten ($'$), $1'$ in 60 Secunden ($''$). Ein auf die angegebene Weise meist nur in 180° getheilter Halbkreis heißt ein Transporteur. Man bedient sich seiner zu einer annähernden Messung gezeichneter und Zeichnung gemessener Winkel.

Mit dem einfachen Winkel ist die verschiedene Richtung zweier Strahlen, mit den Nebenwinkeln die verschiedene Richtung einer Gradens und eines Strahls betrachtet. Es bleibt die Betrachtung zweier Gradens von verschiedener Richtung übrig.

11. Erklärung: Zwei sich schneidende Grade AB und CD (Fig. 4) bilden an ihrem Durchschnittspunkte O 4 einfache Winkel, von denen die beiden Nebenwinkel eines und desselben dritten Winkels Scheitelwinkel heißen, also n und p, m und o. Oder: der Scheitelwinkel eines Winkels ist der Richtungsunterschied der Rückverlängerungen seiner Schenkel.

2. Lehrsatz. Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich, z. B. $o = m$.

Beweis: Sie sind die Nebenwinkel eines und desselben Winkels z. B. m. Oder: Um die Richtung OA von AC aus zu erzeugen, bedarf es derselben Drehung, wie zur Erzeugung der Richtung OB von OD aus.

3. Lehrsatz (Umkehrung des vorigen): Je zwei gleiche Winkel lassen sich in die Lage von Scheitelwinkeln bringen.

§. 5.

Von den Parallellinien.

Mit dem im vorigen §. erörterten Begriffe des Richtungsunterschiedes zweier Graden ist von selbst der ihm entgegengesetzte der gleichen Richtung gegeben. Folgende Betrachtung mag dies noch veranschaulichen.

Wenn die Richtungen AB und CD (Fig. 5) divergent sind, so läßt sich CD jedenfalls um einen in ihr liegenden Punkt O so weit drehen, daß sie z. B. in der Richtung C' D' gegen AB convergirt. Bei dieser Drehung muß sie dann sicher einmal eine Richtung, z. B. C'' D'' haben, die weder gegen AB convergent, noch divergent ist, sondern der Richtung von AB gleich ist.

1. Erklärung: Grade Linien in einer Ebene und von gleicher Richtung heißen parallel (||).

1. Folgerung: Parallellinien können sich nie schneiden, so weit man sie auch nach beiden Richtungen verlängern mag.

2. Folgerung. Zwei sich schneidende grade Linien können nicht beide zugleich einer und derselben dritten parallel sein.

Beweis: Ist z. B. (Fig. 6) $AB \parallel CD$, so weicht EF in der Richtung von AB ab, weil sie von CD abweicht.

Nur ein anderer Ausdruck dieser Folgerung ist: Wenn eine grade Linie die eine von zwei Parallelen scheidet, so scheidet sie hinreichend verlängert auch die andere.

3. Folgerung: Wenn zwei grade Linien einer und derselben dritten parallel sind, so schneiden sie sich nicht, d. h. sie sind parallel.

Beweis: Durch Contraposition von Folgerung 2.

Anmerkung: Will man nun zwei verschiedene grade Linien in Bezug auf ihre gegenseitige Richtung vergleichen, so muß man, wie man bei der Auffindung des Größenverhältnisses zweier Strecken und zweier Winkel bezüglich eine dritte Strecke und einen dritten Winkel als gemeinschaftliches Maß zu Hülfe nehmen mußte, auch hier die Richtung einer dritten Linie zu Hülfe nehmen, am einfachsten eine solche, welche die beiden gegebenen schneidet. Daß sich eine solche Linie, falls die gegebenen Linien nicht direct entgegengesetzte Richtungen haben, wo also eine weitere Untersuchung unnöthig ist, immer ziehen läßt, ist klar.

2. Erklärungen: Werden (Fig. 7) zwei grade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten zusammen acht einfache Winkel, von denen je zwei an je einem Durchschnittspunkte liegende ihre Benennung haben, die an verschiedenen Durchschnittspunkten liegenden jetzt benannt werden sollen.

1) Die vier Winkel o, p, q, r, welche den mittleren Abschnitt der schneidenden Linie zum gemeinschaftlichen Schenkel haben, heißen innere, die vier m, n, s, t, welche die äußern Abschnitte der schneidenden Linie zu Schenkeln haben, heißen äußere Winkel.

2) Je zwei Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie und auf gleichliegenden Seiten der geschnittenen heißen Gegenwinkel oder correspondirende Winkel, also m und q , o und s , n und r , p und t .

3) Je zwei Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen heißen entgegengesetzte Winkel, also m und s , o und q , n und t , p und r .

4) Je zwei Winkel auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen heißen Wechselwinkel, also m und t , o und r , q und p , s und n .

Anmerkung: Die Winkelpaare auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden und gleichliegenden Seiten der geschnittenen Linien haben keinen besonderen Namen.

1. Lehrsatz: Werden zwei grade Linien von einer dritten geschnitten, und sind

1) zwei Gegenwinkel gleich, oder

2) zwei Wechselwinkel gleich, oder ist

3) die Summe zweier entgegengesetzten Winkel $= 2 R$, so sind die geschnittenen Linien parallel.

1. Hypothese: z. B. (Fig. 8) $n = r$; These: $AB \parallel CD$.

Beweis: Da wir uns die Richtungen AB und CD durch eine nach derselben Seite genommene Drehung der Linien AB und CD um die Punkte G und H aus der Richtung FE hervorgegangen denken können, so müssen sie, da die Größen der Drehungen gleich sind, gleich sein, d. h. AB ist $\parallel CD$.

2. Hyp.: z. B. $o = r$; These: $AB \parallel CD$.

Beweis: Da $o = r$ und $o = n$ ist, so ist $r = n$, also nach dem ersten Theile unseres Satzes $AB \parallel CD$.

3. Hyp. z. B. $p + r = 2 R$; These: $AB \parallel CD$.

Beweis: Da $p + r = 2 R$ und $p + n = 2 R$, so ist $p + r = p + n$, also $r = n$ und wieder $AB \parallel CD$.

Bei den andern Winkelpaaren wäre der Beweis ganz analog.

Wir haben somit ein Mittel zur Lösung der

Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt A (Fig. 9a.) zu einer gegebenen Geraden BC eine Parallele zu ziehen.

Auflösung: Man ziehe von A nach BC unter einem beliebigen Winkel die Strecke AD und trage einen der bei D entstehenden Winkel, z. B. ADC in A an AD als Wechselwinkel von ihm an, so ist sein zweiter Schenkel $AE \parallel BC$.

Anmerkung: Auch die bekannte praktische, durch Fig. 9b. veranschaulichte Lösung der Aufgabe mittelst des festen Lineales 1 und des beweglichen 2 beruht auf Lehrsatz 1.

2. Lehrsatz: (Umkehrung von 1) Werden zwei Parallelen von einer graden Linie geschnitten, so sind

1) je zwei Gegenwinkel gleich,

2) je zwei Wechselwinkel gleich, und

3) die Summe je zweier entgegengesetzten Winkel ist $= 2 R$.

Hyp. (Fig. 8) $AB \parallel CD$; These: z. B. $n = r$, $o = r$, $r + p = 2 R$.

Beweis: Da $AB \parallel CD$, so können diese Richtungen nur durch gleich große, nach einer Seite genommene Drehungen aus der Richtung FE hervorgegangen sein, also ist $n = r$ u. s. w.

Ist $n = r$, so ist, da auch $n = o$, $o = r$ u. s. w.

Ist $n = r$, so ist, da $n + p = 2 R$, auch $r + p = 2 R$ u. s. w.

1. Folgerung (aus Lehrsatz 1 durch Contraposition). Sind die geschnittenen Linien nicht parallel, so gilt keine der Gleichungen in der Hypothese.

2. Folgerung (aus Lehrf. 2 durch Contraposition und Umkehrung von Folg. 1.) Gilt keine der Gleichungen in der Behauptung, so sind auch die geschnittenen Linien nicht parallel, und zwar convergiren sie auf der Seite der schneidenden Linie, auf welcher die Summe der innern entgegengesetzten Winkel kleiner als 2 R ist.

Von der Richtigkeit der letzten Behauptung überzeugt man sich leicht, wenn man einen der in Rede stehenden entgegengesetzten Winkel zum Supplemente des andern vergrößert und dann die 2. Folgerung der ersten Erklärung dieses §. anwendet.

§. 6.

Die allgemeinen Resultate des vorigen §. wollen wir nun auf besonders wichtige specielle Fälle anwenden.

1. Folgerung (aus Lehrf. 1): Alle Senkrechten auf einer graden Linie (oder auf den Schenkeln eines gestreckten Winkels) sind einander parallel, (falls sie nicht zusammenfallen, vergl. §. 4, Folg. 5, oder einen gestreckten Winkel bilden).

2. Folgerung (aus Lehrf. 2 und Umkehr. von Folg. 1): Eine Senkrechte auf der einen von zwei Parallelen ist es auch auf der andern, oder: Wenn eine von zwei Parallelen auf einer graden Linie senkrecht ist, so ist sie es auch auf der andern.

3. Folgerung: Sind zwei Linien je einem Schenkel eines Winkels parallel, so sind sie convergent und schneiden sich hinreichend verlängert unter einem dem gegebenen Winkel gleichen Winkel oder seinem Supplementwinkel, je nachdem beide Linien mit ihrem parallelen Schenkel einerseits gleich, oder entgegengesetzt gerichtet sind, oder andererseits die eine Linie mit ihren parallelen Schenkel gleich, die andern aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Beweis: Verlängert man (Fig. 10) ED bis zum Schnitte mit BC, so folgt die erste Behauptung durch zweimalige Anwendung von §. 5, Lehrf. 2. Die zweite Behauptung ergibt sich, weil die Nebenwinkel von DEF, nämlich GEF und DEH die Supplemente des ihm gleichen Winkels ABC sind.

Anmerk: Ist ABC conver, so wird er im letztern Falle zu 6 R ergänzt.

4. Folgerung: Sind zwei grade Linien auf je einem Schenkel eines nicht gestreckten Winkels senkrecht, so sind sie convergent und schneiden sich hinreichend verlängert unter einem dem gegebenen Winkel gleichen Winkel oder seinem Supplementwinkel, je nachdem beide Perpendikel nach derselben Seite ihrer Schenkel oder nach entgegengesetzten Seiten gezogen sind.

Beweis: Denken wir uns (Fig. 11.) beide Perpendikel im Scheitel des Winkels errichtet (vergl. §. 4, Folg. 6), so ist im ersten Falle DAF ebenso $EAG = BAC$, weil DAF und BAC Supplemente desselben Winkels FAB sind. Zweitens sind die Nebenwinkel DAG und EAF von DAF die Supplemente des ihm gleichen Winkels BAC. Sämmtliche Parallelen zu DE und FG liefern dieselben Winkel nach Folgerung 3.

1. Anm.: Ist BAC conver, so gilt auch hier die vorige Anmerkung.

2. Anm.: Beide Sätze sind specielle Fälle eines ebenfalls leicht zu erweisenden allgemeineren.

§. 7.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen.

Erklärungen: Schneiden und begrenzen sich 3, 4, n Strecken bezüglich in 3, 4 n Punkten, so heißt die von den diesen Strecken eingeschlossene Figur bezüglich ein Dreieck, Viereck, n-eck. Von mehr als vier Strecken begrenzte Figuren heißen Vielecke, Polygone. Die einfachste gradlinige Figur ist das Dreieck. Die eine Figur begrenzenden Strecken heißen ihre Seiten, die Punkte Ecken oder

Spitzen. Die von den Seiten innerhalb der Figur gebildeten Winkel heißen Innenwinkel, Polygonwinkel, kurz Winkel der Figur.

Sind die Innenwinkel alle concav, so heißen sie ausspringend und die Figur convex; sie liegt also ganz auf einer Seite jeder ihrer Seiten. Sind unter den Innenwinkeln convexe, so heißen sie einspringend und die Figur concav; sie liegt also nie ganz auf einer Seite jeder ihrer Seiten.

Die Nebenwinkel der Innenwinkel einer Figur heißen Außenwinkel der Figur. Sie ergänzen also den zu ihnen gehörigen Innenwinkel, je nachdem dieser concav oder convex ist, bezüglich zu 2 R oder zu 6 R.

Eine grade Linie, welche zwei nicht durch Seiten verbundene Eckpunkte einer Figur verbindet, heißt eine Diagonale. Sie kann ganz innerhalb, ganz außerhalb und theils innerhalb, theils außerhalb der Figur liegen.

In jedem n-eck lassen sich $n-3$ einander nur in den Ecken der Figur schneidende Diagonalen ziehen, die entweder alle von einer Ecke ausgehen, oder eine gebrochene Linie bilden, oder auch nicht. Dadurch wird das n-eck in $n-2$ Dreiecke getheilt.

Im Ganzen lassen sich in einem n-eck $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen ziehen und zwischen n Punkten, von denen nicht drei in grader Linie liegen, $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Verbindungslinien. Der Beweis ist leicht.

§. 8.

Von den Dreiecken.

Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks.

1. Lehrsatz: Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist kleiner als 2 R. Beweis leicht.

1. Folgerung: Ein Dreieck kann nur einen rechten oder einen stumpfen, aber keinen convexen Winkel enthalten.

Erklärung: Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinklig. Die den rechten Winkel bildenden Seiten heißen Katheten, die ihm gegenüberliegende Hypotenuse. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinklig, nur mit spitzen Winkeln spitzwinklig.

2. Lehrsatz: Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist gleich dem nicht zu ihnen gehörigen Außenwinkel.

Beweis: Man zeichne (Fig. 12) durch Verlängerung von BA den Außenwinkel zu A, ziehe $AE \parallel BC$, so ist

$$\angle ABC = DAE \text{ (§. 5 Lehrs. 1),}$$

$$\angle BCA = CAE \text{ (§. 5 Lehrs. 1),}$$

$$\angle ABC + \angle BCA = DAE + CAE = DAC.$$

3. Lehrsatz: Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich 2 R.

Beweis ergibt sich unmittelbar aus vorigem Lehrsatz.

1. Folgerung: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel bekannt sind, so ist es auch der dritte, oder: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel bezüglich gleich sind, so sind es auch die dritten.

2. Folgerung: Die Summe der drei in einem und demselben Sinne genommenen Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich 4 R.

Diese Folgerung läßt sich auch von dem vorigen Lehrsatz unabhängig so beweisen:

Dreht man (Fig. 13) die Linie AB um B bis in die Richtung von BC, so entsteht der Winkel m. Dreht man sie weiter um C bis in die Richtung von CA, so entsteht der Winkel n. Dreht man sie

schließlich um A, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Richtung fällt, so entsteht der Winkel o. Indem also die Linie AB eine volle Drehung, d. h. eine Drehung von 4 R macht, beschreibt sie die Winkel m, n und o; also ist $m + n + o = 4 R$. — Hieraus ließen sich dann in umgekehrter Reihenfolge die vorhergehenden Sätze dieses §. ableiten.

1. Anm.: Will man die Drehung um verschiedene Punkte vermeiden, so kann man sich Linie AB in ihrer jedesmaligen neuen Richtung so weit fortgeschoben denken, bis B auf die andern Eckpunkte fällt, oder man dreht AB um B allein zuerst bis in die Richtung von BC, dann in eine Richtung parallel mit CA und schließlich wieder in ihre eigene Richtung.

2. Anm.: Daß sich die eben gegebene Betrachtungsweise auf alle convexen Polygone mit demselben Resultate ausdehnen läßt, erhellt sogleich. Wollte man sie auch auf die concaven Polygone ausdehnen, so würde man einen Fehler begehen. 3. B. durch Fig. 14, in welcher um den Punkt A herum die Drehung einer Seite vorgenommen ist, überzeugt man sich leicht, daß in ihr die Summe der Außenwinkel $= 8 R$ ist.

§. 9.

Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln, sowie den Seiten eines Dreiecks.

1. Erklärung: Die einen Winkel bildenden Seiten heißen die ihn einschließenden Seiten, die ihm gegenüberliegende Seite seine Gegenseite, die Winkel, deren Scheitel die Endpunkte einer Seite sind, heißen der Seite anliegende Winkel, der einer Seite gegenüber liegende Winkel ihr Gegenwinkel.

2. Erklärung: Diejenige Dreiecksseite, welche man als die erste betrachten, oder auf deren einer Seite man sich das Dreieck liegend denken will, heißt die Grundlinie desselben. Es kann also jede Seite Grundlinie sein. Der senkrechte Abstand der Spitze des Gegenwinkels von der Grundlinie oder deren Verlängerung heißt die zu dieser Grundlinie gehörige Höhe.

3. Erklärung: Nach dem Längenverhältnisse der Seiten theilt man die Dreiecke ein in ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige, je nachdem in einem Dreiecke alle drei Seiten ungleich, zwei gleich oder alle drei gleich sind. Die gleichen Seiten des gleichschenkligen Dreiecks heißen Schenkel, die ungleiche Grundlinie oder Basis, die ihr anliegenden Winkel Basiswinkel, der Scheitel ihres Gegenwinkels Spitze.

1. Lehrsatz: In einem Dreiecke haben gleiche Seiten gleiche Gegenwinkel, oder die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

Beweis: Das Dreieck ABC (Fig. 15) kann in umgekehrter Lage mit sich selbst zur Deckung gebracht werden, indem man C auf C liegen läßt, CB mit CA, und, wegen der unveränderten Größe des Winkels C, CA mit CB zur Deckung bringt. Dann ist zwischen A und B nur die eine grade Linie möglich, folglich ist $\angle A = \angle B$.

1. Folgerung: Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist spitz, der Winkel an der Spitze kann dagegen recht, spitz oder stumpf sein.

2. Folgerung: Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich dem doppelten Basiswinkel.

3. Folgerung: Mit einem Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind alle gegeben.

4. Folgerung: Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel $= \frac{2}{3} R = 60^\circ$.

4. Erklärung: Eine Figur, in welcher alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind, heißt regelmäßig, wenn dagegen nicht alle Seiten und alle Winkel gleich sind, unregelmäßig.

2. Lehrsatz (Umkehrung von Lehrs. 1): In einem Dreiecke haben gleiche Winkel gleiche Gegenseiten.

Beweis: Das Dreieck ABC (Fig. 15) kann wieder in umgekehrter Lage mit sich selbst zur Deckung gebracht werden, indem man BA mit AB zur Deckung bringt. Dann fällt, weil $\angle B = A$, BC längs AC, AC längs BC; sie schneiden sich also wieder in C und fallen somit auch mit ihren zweiten Endpunkten zusammen, sind folglich gleich.

Folgerung: Gleichwinklige Dreiecke sind auch gleichseitig.

3. Lehrsatz: In einem Dreiecke hat die größere Seite den größeren Gegenwinkel.

Beweis: Verlängert man in Fig. 16 eine der gleichen Seiten beliebig, z. B. CB um BD und zieht AD, so ist $\angle CAD > CAB$, d. h. auch $> CBA$. Nun aber ist $CBA > CDA$, also um so mehr $CAD > CDA$.

4. Lehrsatz (Umkehrung von Lehrs. 3): In einem Dreiecke hat der größere Winkel die größere Gegenseite.

Beweis: Vergrößert man in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 16) den Winkel CAB um BAD, so kann AD nur die Verlängerung von CB schneiden, es ist also $CD > AC$. Da nun nach dem vorigen Satze $\angle CAD > CDA$ ist, so liegt die größere Seite dem größeren Winkel gegenüber.

1. Folgerung: Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die Gegenseite des stumpfen Winkels, im rechtwinkligen die Hypotenuse die größte Seite.

2. Folgerung: Das von einem Punkte auf eine Linie fällbare Perpendikel ist die kleinste Verbindungslinie beider. Alle schiefen Verbindungslinien werden um so größer, je weiter ihre Durchschnitte mit der gegebenen Linie vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt sind, und sind paarweise vorhanden, nämlich einander gleich, wenn ihre Durchschnitte mit der gegebenen Linie sich auf beiden Seiten vom Fußpunkte des Perpendikels gleich weit entfernen.

Beweis: Die beiden ersten Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus Folgerung 1. Die letzte, daß z. B., wenn (Fig. 17) $BA \perp CD$ und $AC = AD$ ist, auch $BC = BD$ ist, ergibt sich, da $\angle BAC$ mit BAD als rechter zur Deckung gebracht werden kann. Fällt BA auf BA, so fällt AC auf AD und C auf D, BC und BD decken sich also und sind somit gleich.

5. Erklärung: Die Entfernung eines Punktes von einer graden Linie — und umgekehrt — ist das von ihm auf die Linie fällbare Perpendikel.

3. Folgerung: Von einem Punkte nach einer graden Linie lassen sich also mit Ausnahme des Perpendikels, welches einfach vorhanden ist, immer nur je zwei gleiche grade Linien ziehen. Sie liegen dann beide auf einer Seite einer größeren und auf verschiedenen Seiten einer kleineren Verbindungslinie.

4. Folgerung: Sind zwei Verbindungslinien eines Punktes mit einer Grade einander gleich, so liegen ihre Durchschnittpunkte mit derselben gleichweit vom Fußpunkte des von dem Punkte auf die Grade fällbaren Perpendikels entfernt.

Beweis: Ist (Fig. 17) $BD = BC$, so muß, wenn man den rechten Winkel BAD mit BAC zur Deckung bringt, BD auf BC, also auch D auf C fallen, weil BD sonst $\geq BC$ sein müßte, was gegen die Voraussetzung ist. Also ist $AD = AC$.

5. Lehrsatz: Die Summe je zweier Seiten eines Dreiecks ist größer, als die dritte.

Beweis: Die grade Linie ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte.

1. Folgerung: Im gleichschenkligen Dreiecke ist ein Schenkel größer, als die Hälfte der Basis.

2. Folgerung: Die Differenz je zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner, als die dritte.

§. 10.

Construction der Dreiecke, Congruenzsätze.

Die in den beiden vorigen Paragraphen nachgewiesene Abhängigkeit zwischen den sechs Stücken eines Dreiecks zeigt, daß zu seiner Construction nicht alle sechs Stücke gegeben zu sein brauchen, woraus

sich die Frage nach der Anzahl und Beschaffenheit der zur Construction eines bestimmten Dreiecks nothwendigen, der Bestimmungsstücke desselben, ergibt. Daß die Aufgabe, aus einem Stücke, also aus einer Seite oder einem Winkel, aus zwei Stücken, also aus zwei Seiten oder einer Seite und einem Winkel, oder zwei Winkeln, mithin auch aus drei Winkeln, falls die Größe der Winkel der in dem Vorigen nachgewiesenen Beschränkung unterworfen ist, ein Dreieck zu construiren, unendlich viele Lösungen zuläßt, also eine mehr oder minder unbestimmte ist, erhellt alsbald.

Die Betrachtung zweier Dreiecke mit nur einer oder zwei gleichen Seiten führt uns zu folgenden Sätzen:

1. Lehrsatz: Wenn zwei Dreiecke auf derselben Seite einer gemeinschaftlichen Grundlinie liegen, und
 - 1) die dritte Spitze jedes Dreiecks außerhalb des andern liegt, so ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden. Wenn aber
 - 2) die dritte Spitze des einen Dreiecks in einer Seite des andern oder innerhalb des andern Dreiecks liegt, so ist die Summe der beiden nicht gemeinschaftlichen Seiten des ersten kleiner, als des zweiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber größer, als der des ersten.

Beweis ad 1 (Fig. 18) $AE + CE > AC$

$$DE + BE > BD$$

$$AE + DE + CE + BE > AC + BD, \text{ d. i.}$$

$$AD + BC > AC + BD.$$

ad 2. $AC + CE > AE$

$$EB = EB$$

$$AC + CE + EB > AE + EB \text{ d. i.}$$

$$AC + CB > AE + EB.$$

Ferner ist $\angle AEB > \angle ACB$ (als Außenvinkel). Daß $AC + CB > AE + EB$ und $\angle AEB > \angle ACB$, folgt aus einer zweimaligen Anwendung des letzten Falles.

2. Lehrsatz: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so hat der größere Winkel die größere Gegenseite.

Beweis: Vergrößert man z. B. in Fig. 19 den Winkel BAC , indem man AC in die Richtung von AC' bringt, und zieht BC' , so muß der nicht gemeinschaftliche Winkelpunkt C außerhalb des Dreiecks ABC' liegen. Denn da $\angle BAC' > \angle BAC$ ist, so muß $\angle AC'B + \angle ABC' < \angle ACB + \angle ABC$ sein. Diese Ungleichung kann aber nur dann stattfinden, wenn mindestens einer der letzteren Winkel größer als der entsprechende der ersteren ist. Hier sei $\angle ABC > \angle ABC'$. Wäre dagegen nur $\angle ACB > \angle AC'B$, so kann man sich AC mit AC' zusammenfallend denken. In beiden Fällen liegt also der dritte Winkelpunkt außerhalb ABC' . In unserem Falle ist nun $AC + BC' > AC' + BC$; nach Voraussetzung ist

$$AC = AC'$$

$$BC' > BC.$$

3. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrs. 2) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die dritten aber ungleich sind, so hat die größere Seite den größeren Gegenwinkel.

Beweis: Es sei in Fig. 19 $AB = AB$, $AC = AC'$, $BC' > BC$, so ist $BC' + AC > BC + AC'$. Daraus folgt, daß AC' außerhalb des Dreiecks ABC liegen muß. Denn AC' kann weder auf AC , noch mit C' auf die Linie BC fallen, weil sonst $BC' =$ oder $< BC$ sein würde, was gegen die Voraussetzung ist. Zieht C' innerhalb ABC , so wäre, da $BC' + AC > BC + AC'$ ist, auch

$$BC' + AC' > BC + AC,$$

was nach Lehrs. 1 unmöglich ist. Schnitte schließlich AC^1 die Linie BC , so wäre $gC^1 + AC < BC + AC^1$, was wieder gegen die Voraussetzung ist.

Prüfen wir nun die Bestimmtheit folgender

1. Aufgabe: Aus drei gegebenen Strecken a , b und c als Seiten ein Dreieck zu construiren.

Auflösung: Welche Seite man auch als Grundlinie annehmen mag, ihre Endpunkte bestimmen immer zwei Ecken des Dreiecks. Durch c werden also die beiden Eckpunkte (Fig. 20) A und B bestimmt, und es ist somit nur noch die Lage des dritten Eckpunktes zu suchen. Es sei nun z. B. b die Gegenseite von B , also a die Gegenseite von A , so muß der dritte Eckpunkt sowohl in der mit b um A , als auch in der mit a um B beschriebenen Kreisperipherie, d. h. also in dem Durchschnitte beider liegen. Hieraus ergibt sich wieder die Nothwendigkeit der Bedingung, daß die Summe zweier Dreiecksseiten größer sein muß, als die dritte, indem die beiden Kreise, wenn die Summe ihrer Radien a und b gleich c oder kleiner als c wäre, entweder einen gemeinschaftlichen Punkt in C oder auch gar keinen gemeinschaftlichen Punkt haben. Ist dagegen $a + b > c$, so fallen die Kreise theilweise in einander, und ihre Peripherien schneiden sich in zwei Punkten auf verschiedenen Seiten von c , wodurch wir vorläufig zwei Dreiecke mit den gegebenen Strecken als Seiten erhalten. — Nun aber hätten wir statt der in der Figur gewählten Anordnung der Seiten auch folgende nehmen können: acb , abc , cba , cab , bac , von denen jede eine entsprechende auf der anderen Seite der mittleren Seite hätte. Es sind also, wenn alle drei Seiten ungleich sind, zwölf Dreiecke möglich, von denen sich aber leicht nachweisen läßt, daß sie sich durch weiter nichts, als ihre verschiedene Lage unterscheiden.

Man überzeugt sich nämlich sofort, daß alle zwölf Dreiecke so auf eine Seite einer gemeinschaftlichen Grundlinie, z. B. c , gelegt werden können, daß die Seiten b alle von dem Punkte A , und die Seiten a alle von dem Punkte B ausgehen, wenn man bedenkt, daß ein Dreieck auch eine Betrachtung von der Rückseite der Ebene, in der es liegt, also eine Umkehrung zuläßt. Daß dann die dritten Ecken der Dreiecke sämtlich in den einen Durchschnittpunkt der beiden oben beschriebenen Kreise fallen, also die Dreiecke sich decken, mithin eins sind, ergibt sich leicht, da eine entgegengesetzte Annahme nach Lehrs. 1 zu Beziehungen zwischen den Seiten führen würde, die der Voraussetzung widersprechen.

Hieraus folgt der

1. Congruenzsatz: Dreiecke sind congruent, wenn sie die drei Seiten bezüglich gleich haben.

Anm.: Da man also nur ein Dreieck zu zeichnen braucht, so kann man sich auch, statt die ganzen Kreise zu zeichnen, auf die Bogen derselben beiderseits eines Durchschnittpunktes beschränken.

Zusatz: Die Construction eines gleichschenkligen Dreiecks aus Basis und Schenkel und des gleichseitigen Dreiecks aus seiner Seite ergibt sich leicht.

Folgerung: In congruenten Dreiecken sind je zwei homologe Stücke, d. h. die Gegenseiten gleicher Winkel und die Gegenwinkel gleicher Seiten einander gleich.

Anm.: Diese Folgerung giebt uns noch eine allgemeinere, wenngleich unbequemere Lösung der Aufgabe in §. 4, einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel zu zeichnen, indem man, statt wie oben den gegebenen Winkel zu einem gleichschenkligen Dreieck zu vervollständigen, ihn zu einem beliebigen Dreieck vervollständigen kann. Zeichnet man ein diesem congruentes Dreieck, so hat man in den homologen Winkeln gleiche Winkel.

2. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren aus zwei Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C .

Auflösung: Man mache die beiden Schenkel des gegebenen oder eines ihm gleichen Winkels bezüglich gleich a und b und verbinde ihre Endpunkte, so ist diese Verbindungslinie c die dritte Dreiecks-

seite. Es können so, wenn nicht gerade $a = b$, zwei Dreiecke entstehen, je nachdem man a auf dem einen oder dem andern Schenkel des Winkels abträgt. Daß diese beiden Dreiecke aber zur Deckung gebracht werden können, sieht man leicht. Es ergibt sich also

2. Congruenzsatz: Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bezüglich gleich sind.

3. Aufgabe: Ein Dreieck zu construiren aus zwei Seiten a, b (Fig. 21) und dem Gegenwinkel der einen, und zwar

1) dem Gegenwinkel A der größeren a .

Auflösung: Da $\sphericalangle A$ Gegenwinkel von a ist, so muß er ein anliegender von B sein. Man mache darum einen Schenkel von A oder von einem ihm gleichen Winkel gleich b und bezeichne den freien Endpunkt durch C . Die dritte Spitze des Dreiecks liegt nun sowohl in dem andern Schenkel von A , als auch in dem mit a um C beschriebenen Kreise, also in dem Durchschnittspunkte beider. Ein Durchschnitt z. B. in B muß aber nach §. 9, Folg. 3 stets stattfinden. Der zweite nothwendige Durchschnitt fällt dagegen nach derselben Sage in die Verlängerung des andern Schenkels. Das zweite so entstehende Dreieck $B'AC$ hat zwar mit BAC zwei Seiten gleich, ist aber, wenn A ein schiefer Winkel ist, demselben incongruent, dagegen wenn $A = R$, nach §. 9, Folg. 4 und dem zweiten Congruenzsatze congruent, gilt also mit ihm nur für eins. Läge $\sphericalangle A$ am andern Endpunkte von b , so wäre das neue entstehende Dreieck dem ersten aus schon bekannten Gründen ebenfalls congruent.

2) dem Gegenwinkel A der kleineren Seite a . (Fig. 22)

Auflösung: Die Construction ist ganz wie vorher. Da aber $a < b$, so können in Betreff des Durchschnittes von a mit dem freien Schenkel von $\sphericalangle A$ folgende Fälle eintreten:

1) Wenn a größer als das Perpendikel ist, so giebt es zwei Durchschnittspunkte des Kreises mit dem Schenkel einerseits von A , also auch zwei von einander verschiedene Dreiecke, in welchen die Gegenwinkel von a Supplemente sind.

2) Wenn a gleich dem Perpendikel ist, so haben Kreis und Schenkel nur einen Punkt, den Fußpunkt des Perpendikels, gemeinschaftlich; es giebt nur ein Dreieck, und zwar ein rechtwinkliges.

3) Wenn a kleiner, als das von C auf den freien Schenkel von A fällbare Loth ist, so schneidet der mit a als Radius um C geschlagene Kreis den Schenkel gar nicht, es ist also kein Dreieck möglich.

Daraus ergibt sich als

3. Congruenzsatz: Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren bezüglich gleich sind,

allgemeiner: Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen bezüglich gleich und die Gegenwinkel der andern gleichartig, d. h. gleichzeitig entweder recht oder spitz oder stumpf sind.

4. Aufgabe: Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite a und zwei Winkeln, und zwar

1) aus den beiden der Seite a anliegenden Winkeln β und γ (Fig. 23).

Auflösung: Man trage an den einen Endpunkt von a , z. B. an B den Winkel β und an den andern Endpunkt auf derselben Seite den Winkel γ , so ist der Durchschnittspunkt A der freien Schenkel die gesuchte dritte Dreiecksspitze. Die vier so construirbaren Dreiecke sind congruent.

2) aus einem der Seite a anliegenden Winkel β und ihrem Gegenwinkel α .

Auflösung: Da mit zwei Winkeln auch der dritte mittelbar gegeben ist, so ist die Auflösung auf die des ersten Falls zurückgeführt. Wie die Construction des dritten Winkels am zweckmäßigsten mit der Construction des Dreiecks verbunden wird, zeigt Fig. 24.

4. Congruenzsatz: Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen eine Seite und zwei in Bezug auf diese gleichliegende Winkel bezüglich gleich sind.

Ann.: Daß eine Seite und zwei in Bezug auf sie nicht gleichliegende Winkel ein Dreieck nicht bestimmen, zeigt die Betrachtung von Fig. 25. Ist z. B. in $\triangle ABC$ $\angle A > B$, so mache man $\angle CAD = B$. Die beiden Dreiecke ABC und ADC haben eine Seite AC und zwei, aber nicht gleichliegende Winkel gleich, sind aber nicht congruent.

Folgerung: Rechtwinklige Dreiecke sind also congruent, wenn in ihnen

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) die beiden Katheten, (2. Congruenzsatz), | } (4. Congruenzsatz), also allgemein |
| 2) die Hypotenuse und eine Kathete, (3. Congruenzsatz), | |
| 3) eine Kathete und ein spitzer Winkel, | |
| 4) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel, | |
- 1) zwei gleichliegende Seiten, oder
2) eine gleichliegende Seite und ein spitzer Winkel bezüglich gleich sind.

§. 11.

Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke. Fundamentalaufgaben.

Im vorigen Paragraphen gab uns der Umstand, daß die bei der Construction eines Dreiecks aus seinen Bestimmungsstücken sich ergebenden Dreiecke zur Deckung gebracht werden können, Gelegenheit zur Auf-
findung der Congruenzsätze. Betrachten wir nun noch zwei congruente Dreiecke in der Lage auf beiden Seiten der Grundlinie, wie sie z. B. aus der Construction eines Dreiecks aus seinen drei Seiten unmittelbar hervorgehen, so erhalten wir, wenn wir in den Fig. 26, 27 und 28 C mit C' verbinden, je nachdem z. B. A ein rechter, spitzer oder stumpfer Winkel ist,

- 1) ein gleichschenkliges Dreieck CBC' über der Basis CC' ,
- 2) zwei gleichschenklige Dreiecke CBC' und CAC' auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Basis CC' oder
- 3) zwei gleichschenklige Dreiecke CBC' und CAC' auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Basis CC' .

Aus 1 folgt unmittelbar der

1. Lehrsatz: In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze zugleich auch 1) das von der Spitze auf die Basis fällbare Loth, 2) halbiert sie die Basis und ist 3) auch das aus der Mitte der Basis errichtbare Loth — und umgekehrt, da es von jeder dieser Linie nur eine einzige giebt.

Erklärung: Jede grade Linie, welche wie die oben genannten von einer Winkelspitze eines Dreiecks nach der Gegenseite oder deren Verlängerung gezogen ist, so wie allgemein jede grade Linie, welche andere grade Linien schneidet, heißt eine Transversale oder Querlinie. Die Transversale von einer Winkelspitze nach der Mitte der Gegenseite heißt Mittellinie.

Von den Umkehrungssätzen des vorigen Satzes ist besonders wichtig der folgende

2. Lehrsatz. Das aus der Mitte einer Strecke errichtete Perpendikel nebst seiner Rückverlängerung ist der geometrische Ort aller von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernten Punkte, also der Spitzen der über der Strecke als Basis construierbaren gleichschenkligen Dreiecke.

Bew.: Daß jeder Punkt im Perpendikel die behauptete Eigenschaft hat, folgt aus §. 8, Folg. 2. Daß sie dagegen kein Punkt außerhalb des Perpendikels hat, läßt sich leicht nachweisen. In Fig. 29 sei AB die Strecke, DC das in ihrer Mitte errichtbare Perpendikel und EA schneide DC in F . Zieht man FB , so ist $\angle EBA > FBA$, also auch $> FAB$, mithin $AE > BE$.

Aus 2 und 3 folgt der

3. Lehrsatz: Die Verbindungslinie der Spitzen zweier, entweder auf einer oder auf verschiedenen Seiten einer gemeinschaftlichen Basis construirten gleichschenkligen Dreiecke halbt, im 3. Falle verlängert,

- 1) die Winkel an der Spitze,
- 2) die gemeinschaftliche Basis und steht
- 3) senkrecht auf der Basis.

Beweis: Bringt man (Fig. 27 und 28) die beiden Dreiecke beiderseits AB zur Deckung, so decken sich auch CD und C'D, wodurch sämtliche Theile der Behauptung bewiesen sind.

Folgerung: Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines Dreiecks halbt auch den Winkel an der Spitze in dem andern Dreieck.

Anm.: Durch diese beiden Sätze sind wir in den Stand gesetzt eine Reihe von Aufgaben zu lösen, wodurch wir die wirkliche Existenz einiger im Vorigen nur hypothetisch angenommenen Begriffe nachweisen.

1. Aufgabe: Eine gegebene Strecke zu halbiren.

Auflösung: Man construiere über ihr als Basis die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke; dann halbt nach Lehrs. 3 die Verbindungslinie dieser Spitzen die gegebene Strecke.

1. Folgerung: Eine Strecke hat nur einen Halbierungspunkt.

2. Folgerung: Durch fortgesetzte Halbierung kann man eine Linie in 4, 8 . . . 2^n gleiche Theile theilen.

2. Aufgabe: Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Auflösung: Man schneide vom Scheitel aus auf den Schenkeln gleiche Stücke ab, construiere über der (nur gedachten) Verbindungslinie die Spitze eines zweiten gleichschenkligen Dreiecks, so halbt nach Lehrsatz 3 (oder nach Congruenzsatz 1) die Verbindungslinie dieser Spitzen den gegebenen Winkel.

1. Folgerung: Die Halbierungslinie eines Winkels halbt gehörig verlängert auch sein Implement.

2. Folgerung: Ein Winkel hat nur eine Halbierungslinie, und diese ist der geometrische Ort sämtlicher von seinen Schenkeln gleichweit entfernten Punkte.

Der Beweis der ersten Behauptung ist leicht, der der zweiten folgt aus der Congruenz der Dreiecke ACE und ADE (Fig. 30). Daß dagegen kein Punkt außerhalb AP, z. B. F von AM und AN gleichweit entfernt ist, läßt sich folgendermaßen beweisen. Ziehe $FH \perp AN$, $FG \perp AM$ und von dem Durchschnittspunkte K der letzteren mit AP, $KJ \perp AN$, so ist, wenn man GJ zieht, diese Linie die Basis der beiden gleichschenkligen Dreiecke GKJ und GAJ, also $AK \perp GJ$ in seinem Mittelpunkt. Darum ist $FJ < FG$, nach Lehrs. 2. Da aber $FH < FJ$, so ist um so mehr $FH < FG$.

3. Folgerung: Durch fortgesetzte Halbierung kann man einen Winkel in 4, 8, . . . 2^n gleiche Theile theilen.

3. Aufgabe: In einem Punkte A (Fig. 31) einer gegebenen graden Linie MN auf ihr ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung: Man schneide auf beiden Seiten von A aus auf MN zwei beliebige, aber gleiche Stücke ab, z. B. $AB = AC$, und construiere über BC die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks BCD, dann ist DA als Mittellinie des gleichschenkligen Dreiecks von der Spitze aus gezogen nach Lehrs. 1 $\perp MN$.

Anm.: Die Aufgabe ist von der zweiten ein specieller Fall, insofern DA den gestreckten Winkel MAN halbt.

4. Aufgabe: Von einem Punkte A auf eine gegebene grade Linie MN ein Perpendikel zu fallen.

Auflösung: Man schlage mit der Entfernung des Punktes A von einem beliebigen Punkte jenseits MN einen Kreisbogen, welcher MN zweimal, in B und C, trifft, construiere über BC die Spitze

eines zweiten gleichschenkligen Dreiecks BCD und verbinde dieselbe mit dem gegebenen Punkte A, so steht diese Verbindungslinie auf MN senkrecht, (nach Lehrs. 3).

Diese Aufgabe ist ein specieller Fall von der allgemeineren

5. Aufgabe: Von einem gegebenen Punkte A aus nach einer gegebenen graden Linie MN unter einem gegebenen Winkel eine grade Verbindungslinie zu ziehen.

Auflösung: Man lege in irgend einem Punkte an die gegebene Gerade den gegebenen Winkel und ziehe durch A zu dem freien Schenkel eine Parallele bis zu MN.

Beweis folgt aus §. 5 Lehrsatz 1.

Anm.: Ausgenommen, wenn der gegebene Winkel = R, giebt es immer zwei unter gleichem Winkel gegen die Gerade geneigte Verbindungslinien. — Die vorige Aufgabe läßt sich dieser analog lösen.

6. Aufgabe: In dem Endpunkte A (Fig. 32) einer gegebenen graden Linie ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung: Kann die grade Linie über den Endpunkt A verlängert werden, so verlängere man sie und verfare nach Aufgabe 3. Kann die grade Linie nicht verlängert werden, so construirt man über einer von A aus auf ihr abgeschnittenen Strecke AB ein gleichschenkliges oder gleichseitiges Dreieck, ABC, verlängere BC über C hinaus um sich selbst bis D und ziehe DA, so ist $DA \perp AN$.

Beweis: Die Dreiecke ACB und ACD sind gleichschenkelig, also $\angle C = 2m$, $p = 2n$, somit $o + p = 2m + 2n = 2(m + n)$; $o + p$ ist aber = 2 R, also $m + n = R$. — Ist ACB gleichseitig, so ist $CAB = \frac{2}{3} R$ und $DAC = \frac{1}{3} R$. Man braucht also CAB nur noch zu halbiren zur Lösung der

Aufgabe: Einen rechten Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen. — Einfacher ist jedoch folgende

Auflösung: Man zeichne zwischen den Schenkeln des rechten Winkels mit einem beliebigen Radius den Quadranten und trage von jedem seiner Endpunkte aus den Radius als Sehne in ihn. Die Endpunkte der Sehnen theilen den Quadranten und die nach ihnen gezogenen Radien den rechten Winkel in 3 gleiche Theile.

1. Folgerung: Berücksichtigt man Aufg. 2, so lassen sich außer dem rechten Winkel und seinen Vielfachen auch noch $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$, von ihm und deren Vielfache, also allgemein $\frac{m}{2^n} R$ in drei gleiche Theile theilen.

Anmerkung: Die Dreitheilung jedes beliebigen Winkels ist mittelst Lineal und Zirkel nicht ausführbar.

Daß z. B. der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nicht in drei gleiche Theile getheilt wird, wenn man die Basis in drei gleiche Theile theilt und die Theilpunkte mit der Spitze verbindet, zeigt folgende Betrachtung. Man construirt über dem Dreifachen einer Linie, z. B. über $AD = 3AB$ (Fig. 33) ein gleichschenkliges Dreieck ADE und ziehe EB und EC. Dann ist $EA > EB$; es läßt sich also $EB = EF$ auf EA abtragen. Zieht man BF, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck EFB der Basisswinkel EFB spitz, sein Nebenwinkel AFB also stumpf, mithin in dem Dreieck AFB seine Gegenseite $AB = BC > FB$. Die beiden Dreiecke FEB und CEB haben also zwei gleiche und eine ungleiche Seite, mithin ist der Gegenwinkel der größeren Seite BC d. h. $CEB > FEB$.

2. Folgerung: (aus Aufg. 6.) Ist eine Mittellinie eines Dreiecks gleich der Hälfte der Seite, nach der sie gezogen ist, so ist der Gegenwinkel der letzteren = R.

3. Folgerung: (Umkehrung von Folg. 2.) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Mittellinie nach der Hypotenuse gleich deren Hälfte.

Beweis: Macht man in dem rechtwinkligen Dreieck DAB (Fig. 32) $\angle n = B$, so ist $\angle m = D$, also $CA = CB = CD$.

§. 12.

Von den Vierecken.

1. Lehrsatz: Die Summe der Innenwinkel jedes, so wie der Außenwinkel eines convergen Vierecks ist $= 4 R$.

Beweis: Man zerlege das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so folgt die erste Behauptung aus §. 8, Lehrf. 3. Die zweite folgt aus §. 8, Anm. 2.

Folgerung: Ein Viereck kann vier rechte, aber nur drei stumpfe, drei spitze und einen convergen Winkel haben.

1. Erklärung: Die Seiten eines Vierecks theilt man paarweise ein in anstoßende und Gegenseiten, die Winkel ebenso in einer Seite anliegende und Gegenwinkel.

2. Erklärungen: Ein Viereck, in welchem beide Paar anstoßende Seiten bezüglich gleich sind, heißt ein Deltoid. Vergleiche die Fig. 27 und 28. Seine Entstehung und seine wichtigsten Eigenschaften enthält der 3. Lehrsatz des vorigen §. Ein Viereck ohne parallele Gegenseiten heißt ein Trapezoid. Ein Viereck mit einem Paar paralleler Gegenseiten heißt ein Trapez. Es entsteht, wenn man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele zieht; die parallelen Seiten heißen Grundlinien. Sind die nicht parallelen Seiten in ihm gleich, so heißt es grade oder gleichschenkelig. Es entsteht, wenn man in einem gleichschenkeligen Dreieck zu der Basis eine Parallele zieht. — Ein Viereck, in welchem beide Paar Gegenseiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm ($\parallel$ gr.). Es entsteht, wenn ein Paar Parallelen von einem zweiten Paar Parallelen durchschnitten wird.

2. Lehrsatz: In jedem Parallelogramm sind die je einer Seite anliegenden Winkel Supplementwinkel und je zwei Gegenwinkel gleich.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus §. 5, Lehrf. 2, 3, die zweite aus §. 6, Folg. 3.

3. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrf. 2). Sind in einem Viereck die je einer Seite anliegenden Winkel Supplementwinkel oder je zwei Gegenwinkel gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus §. 5, Lehrf. 1, 3, die zweite wird durch Lehrf. 1 dieses §. auf die erste zurückgeführt.

Folgerung: Ist ein Winkel eines Parallelogramms bekannt, so sind sie es alle, ist ein Winkel entweder ein rechter, oder ein schiefer, so sind sie es bezüglich alle.

Man theilt demnach nach den Winkeln die Parallelogramme ein in rechtwinklige (Rechtecke) und schiefwinklige.

4. Lehrsatz: In jedem Parallelogramme sind je zwei Gegenseiten gleich.

Beweis folgt aus der Congruenz der beiden Dreiecke, in die es durch jede seiner Diagonalen zerlegt werden kann.

1. Zusatz: Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

2. Zusatz: Schneiden sich zwei Paar Parallelen, so sind die von einem Paar begrenzten Strecken des andern gleich; schneiden sie sich also rechtwinklig, so ergibt sich, daß Parallellinien überall von einander gleich weit entfernt sind, d. h.

Zwei auf beiden Seiten einer Geraden liegende und in gleicher Entfernung von ihr zu ihr gezogene Parallelen bilden den geometrischen Ort aller von der ersten Geraden gleichweit entfernten Punkte.

1. Folgerung: Sind in einem Parallelogramme zwei anstoßende Seiten einander gleich, so sind sie es alle. — Man theilt demnach nach den Seiten die Parallelogramme in gleichseitige und ungleichseitige und classificirt sie demnach in

1) rechtwinklig=gleichseitige oder Quadrate.

- 2) rechtwinklig-ungleichseitige oder Oblongen,
- 3) schiefwinklig-gleichseitige oder Rhomben, Rauten,
- 4) schiefwinklig-ungleichseitige oder Rhomboide.

5. Lehrsatz: (1. Umkehrung von Lehrs. 4.) Sind in einem Vierecke je zwei Gegenseiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis: Folgt aus dem 1. Congruenzsatz und §. 5, Lehrs. 1.

Anmerkung: Auf diesem Satz beruht die Construction und Anwendung der bekannten Parallel-Lineale.

6. Lehrsatz: (2. Umkehrung von Lehrs. 4.) Sind in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis: Folgt aus dem 2. Congruenzsatz und §. 5, Lehrs. 1.

Anmerkung: Sind in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und die beiden andern parallel, so ist es, je nachdem die Paralleelseiten gleich oder ungleich sind, bezüglich ein Parallelogramm (5. Lehrs.) oder ein grades Trapez (Erklärung).

7. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm halbiren die Diagonalen einander.

Beweis: Folgt aus der Congruenz zweier einander gegenüber liegenden Dreiecke.

Zusatz. Auch jede andere durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gelegte, von zwei Gegenseiten begrenzte Strecke wird in ihm halbt und theilt das Parallelogramm in zwei congruente Vierecke.

Beweis: Der erste Theil folgt ebenfalls aus der Congruenz zweier einander gegenüber liegenden Dreiecke, der zweite aus der bezüglichlichen Gleichheit aller Seiten und Winkel der beiden Vierecke.

3. Erklärung: Der Durchschnittspunkt der Diagonalen heißt der Mittelpunkt, auch Schwerpunkt des Parallelogramms, die durch ihn den Seiten parallel gelegten Linien heißen die Mittellinien desselben.

8. Lehrsatz: (Umkehrung von 7.) Halbiren in einem Vierecke die Diagonalen einander, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis: Folgt aus dem 2. Congruenzsatze und §. 5, Lehrs. 1.

9. Lehrsatz: In den rechtwinkligen Parallelogrammen sind die Diagonalen gleich.

Beweis: Die beiden an einer Parallelogrammseite liegenden Dreiecke sind congruent nach Congruenzs. 2.

10. Lehrsatz: (Umkehrung von 9.) Sind die Diagonalen eines Parallelogramms einander gleich, so ist dasselbe rechtwinklig.

Beweis: Folgt aus der Congruenz derselben Dreiecke nach Congruenzs. 1 und Lehrs. 2 dieses §.

11. Lehrsatz: In den schiefwinkligen Parallelogrammen ist die Diagonale die größere, welche den stumpfen Winkel gegenüber liegt.

Beweis: Contraposition von Lehrs. 10 und §. 10, Lehrs. 2.

12. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrs. 11.) Sind die Diagonalen eines Parallelogramms ungleich, so ist es schiefwinklig.

Beweis: Contraposition von Lehrs. 9.

13. Lehrsatz: In den gleichseitigen Parallelogrammen halbiren die Diagonalen die Winkel und schneiden sich rechtwinklig.

Beweis: Folgt aus §. 11, Lehrs. 3.

14. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrs. 13.) Halbiren in einem Parallelogramme die Diagonalen die Winkel, oder schneiden sie sich rechtwinklig, so ist das Parallelogramm gleichseitig.

Beweis: Das Erste folgt aus der Congruenz zweier beiderseits einer halben Diagonale liegenden Dreiecke nach Congruenzsatz 4 und Folg. 1 dieses §. Das Zweite folgt aus der Congruenz derselben Dreiecke nach Congruenzs. 2 und Folg. 1 dieses §.

15. Lehrsatz: In den schiefwinkligen Parallelogrammen halbiren die Diagonalen die Winkel nicht und schneiden sich nicht rechtwinklig.

Beweis: Contraposition von Lehrs. 14.

16. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrs. 15.) Halbiren die Diagonalen eines Parallelogramms die Winkel nicht, oder schneiden sie sich nicht rechtwinklig, so ist das Parallelogramm schiefwinklig.

Beweis: Contraposition von Lehrs. 13.

Aufgabe: Die Bestimmungsstücke der verschiedenen Arten von Parallelogrammen zu finden und aus ihnen das betreffende Parallelogramm zu construiren.

Auflösung: Da jedes Parallelogramm durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, so reichen die Bestimmungsstücke eines dieser Dreiecke zur Bestimmung des Parallelogramms hin. Wie leicht ersichtlich, wird

- 1) ein Quadrat durch eine Seite,
- 2) ein Oblongum durch zwei anstoßende Seiten,
- 3) ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel,
- 4) ein Rhomboid durch zwei anstoßende Seiten und einen Winkel bestimmt.

Die Construction ist nun nach Lehrsatz 4 die, daß man die Schenkel des gegebenen Winkels gleich den gegebenen Seiten macht und aus dem Endpunkte jedes von ihnen je mit dem andern einen Kreisbogen beschreibt. Der Durchschnittspunkt dieser Bogen ist der vierte Winkelpunkt.

Folgerung: Parallelogramme sind congruent, wenn sie die oben genannten Bestimmungsstücke gleich haben.

17. Lehrsatz: Wenn man durch den Mittelpunkt E (Fig. 34) einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes eine Parallele zu den Grundlinien zieht, so halbirt diese die andere nicht parallele Seite ebenfalls und ist gleich der halben Summe (dem arithmetischen Mittel) der beiden Grundlinien.

Beweis: Ziehe durch E eine Parallele zu CB bis zum Schnitte mit AB in G und der Verlängerung von CD in H. Da nun $ED = EA$, $\angle HED = \angle GEA$, $HDE = \angle GAE$, so ist $\triangle HED \cong \triangle GEA$, also $HE = GE$, also sind auch die ihnen gleichen Strecken CF und FB gleich.

Ferner ist $EF = DC + HD$ und

$$EF = AB - AG$$

$$2 EF = DC + AB + HD - AG.$$

Nun ist, weil $\triangle HED \cong \triangle GEA$, $HD = AG$, also

$$2 EF = DC + AB \text{ und } EF = \frac{1}{2} (DC + AB).$$

18. Lehrsatz: In jedem graden Trapeze sind die Winkel an jeder der Grundlinien gleich.

Beweis: Zieht man (Fig. 35) $AE \parallel BC$, so ist $AE = BC = AD$, also $\angle ADE = \angle AED = \angle BCD$, folglich auch $\angle DAB = \angle CBA$ als Supplemente gleicher Winkel.

19. Lehrsatz: (Umkehrung von Lehrs. 18.) Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der Grundlinien gleich, so ist dasselbe grade.

Beweis: Ist $\angle D = \angle C$, so ist auch $D = E$ und $AD = AE = BC$.

20. Lehrsatz: In einem graden Trapeze sind die Diagonalen einander gleich.

Beweis: Folgt aus der Congruenz zweier an einer und derselben Grundlinie liegenden Dreiecke.

21. Lehrsatz: Zur Construction eines Trapezoids gehören fünf von einander unabhängige Stücke.

Beweis: Zur Construction des einen der durch Ziehung einer Diagonale entstehenden Dreiecke gehören drei Bestimmungsstücke, zur Construction des andern, dessen eine Seite die durch das erste bestimmte Diagonale ist, nur noch zwei.

Ann: Daß in manchen Fällen, analog dem 3. Congruenzsaze, zu den fünf Bestimmungsstücken noch eine besondere Beschränkung hinzukommen muß, liegt auf der Hand.

Folgerung: Zur Construction eines Trapezes bedarf man vier, eines graden Trapezes drei von einander unabhängige Stücke.

§. 13.

Von den Polygonen, besonders den regulären.

1. Lehrsaz: Die Winkelsumme eines n eckes ist gleich $(2n - 4) R$.

Beweis: Es läßt sich jedenfalls in $(n-2)$ Dreiecke zerlegen, deren Winkelsumme gleich der Winkelsumme des Polygons ist.

2. Lehrsaz: Legt man n congruente gleichschenklige Dreiecke, deren Winkel an der Spitze $\frac{4}{n} R$ ist, mit den Scheiteln und je einem Schenkel nebeneinander, so entsteht ein reguläres n eck.

Beweis: Die Figur ist eine vollständig geschlossene mit n gleichen Seiten und Winkeln.

Erklärung: Das gleichschenklige Dreieck, durch dessen wiederholte Aneinanderlegung das reguläre Polygon entstanden ist, heißt das Bestimmungs-dreieck, sein Winkel an der Spitze der Centriwinkel, sein Schenkel der große, seine Höhe der kleine Radius des regulären Polygons.

Zusaz: Bei einem Polygone von grader Seitenzahl bilden je zwei große oder kleine Radien eine grade Linie und theilen das Polygon in zwei congruente Theile, genannt Halbpolygone. Die durch sie verbundenen Winkel oder Seiten heißen bezüglich Gegenwinkel oder Gegenseiten des Polygons.

1. Folgerung: Der Polygon- und Centriwinkel eines regulären Polygons sind Supplementwinkel d. h. der Polygonwinkel $= (2 - \frac{4}{n}) R$.

2. Folgerung: Der gemeinschaftliche Scheitelpunkt der Dreiecke ist von allen Ecken, sowie von allen Seiten bezüglich gleichweit entfernt. Er heißt deshalb der Mittelpunkt des regulären Polygons.

3. Folgerung: Die Halbierungslinien der Winkel eines regulären Polygons schneiden sich alle im Mittelpunkte desselben.

Beweis: Die entstehenden n gleichschenkligen Dreiecke sind congruent, mithin sind ihre Schenkel bezüglich gleich. Da nun je zwei Dreiecke einen Schenkel gemeinschaftlich haben, so treffen alle Spizen in dem von den Ecken und also auch von den Seiten bezüglich gleichweit entfernten Punkte, dem Mittelpunkte, zusammen.

4. Folgerung: Die in den Mittelpunkten der Seiten eines regulären Polygons errichteten Senkrechten schneiden sich alle im Mittelpunkte des Polygons.

Beweis: Sie sind die Höhen gleichschenkliger Dreiecke und gehen mithin alle durch die gemeinschaftliche Spitze, den Mittelpunkt.

Aufgabe: Den Mittelpunkt eines regulären Polygons zu finden.

Auflösung: Man halbiere zwei beliebige Winkel oder Seiten des Polygons. Der Durchschnittspunkt der beiden Winkelhalbirenden oder der in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten ist der Mittelpunkt des Polygons.

Beweis: Er liegt in den Folg. 3 und 4.

Zusaz: Bei den Polygonen von grader Seitenzahl ist der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Spizen zweier Paare Gegenwinkel (oder der Mitten zweier Paare Gegenseiten) der gesuchte Mittelpunkt.

3. Lehrsaz: Die die abwechselnden Ecken eines regulären Polygons von grader Seitenzahl verbindenden Diagonalen sind die Seiten eines neuen Polygons von halb so viel Seiten, als das erste hat.

Beweis leicht.

4. Lehrsat: Macht man die Halbierungslinien der Centriwinkel eines regulären Polygons von beliebiger Seitenanzahl gleich den großen Radien und verbindet ihre Endpunkte mit den benachbarten Ecken, so erhält man ein reguläres Polygon von doppelt so viel Seiten, als das erste hat.

Beweis leicht.

Anmerkungen.

1. Es dürfte befremden, daß in eine genetische Entwicklung der Planimetrie, wie sie hier versucht ist, die allbekannten Erklärungen von der Entstehung einer Linie durch Fortbewegung eines Punktes u. s. w. nicht mit aufgenommen sind. Die Gründe dafür sind folgende. Angenommen, die Erklärungen wären richtig, so gelten sie doch nicht allgemein. Die also bei ihnen zu erörternden Ausnahmefälle, welche einerseits die grade Linie, den Kreisbogen und die cylindrische Schraubenlinie, andererseits die Ebene und die Rotationsflächen betreffen, liegen dem Standpunkte der Schüler, denen man Linien u. s. w. erklären will, noch so fern, daß es gerathen ist, von diesen Dingen nicht zu sprechen. Vor allen Dingen aber sind diese Erklärungen falsch, da sie auf unvereinbare Widersprüche führen. Denn denkt man sich z. B. zwischen den aufeinander folgenden Lagen des sich bewegenden Punktes keinen Zwischenraum, so würde auch eine unendliche Summe der ausdehnungslosen Punkte nichts Ausgedehntes, d. h. keine Linie geben. Denkt man sich andererseits zwischen den Lagen des Punktes Zwischenräume, so erhielte man wieder keine Linie, sondern nur eine discontinuirliche Folge von Punkten. Da ein dritter Fall natürlich ausgeschlossen ist, so erfüllt die Bewegung des Punktes nie den beabsichtigten Zweck. Und dies ist sehr begreiflich, da jede Bewegung den Weg voraussetzt und ihn nicht erzeugt. Kants transcendente Aesthetik giebt hierüber den bündigsten Aufschluß. Die Erklärungen negiren nämlich die Apriorität des Begriffes Raum und consequenterweise auch die der Zeit und des Causalitätsgesetzes. Wer also bei der obigen Erklärung bleibt, giebt den Lehren der Mathematik nur eine empirische Gültigkeit.

Der Irrthum kommt von der Entstehung des Striches aus dem materiellen Punkte, auf die freilich die genetische Erklärung paßt. — Den oben angestellten Betrachtungen verdankt die Mathematik die Einführung unendlich kleiner Größen, die dann den Widerspruch zwar nicht heben, aber umgehen. So sind die gegebenen Erklärungen im Grunde ein verdecktes Integriten.

Sagt man dagegen, die Linie ist der Weg eines sich bewegenden Punktes, so ist das zwar vollständig richtig, aber der an und für sich schon geringe Gewinnst aus dieser Erklärung wird durch den Umstand sehr beeinträchtigt, daß man den Schüler vor dem nur zu leicht entstehenden Irrthume warnen muß, in der Erklärung eine genetische zu sehen.

2) Ich habe mich bemüht, den mathematischen Grundbegriffen ihre bestimmte Bedeutung zu geben und sie dann auch nur in dieser zu gebrauchen. Dies schien mir um so nothwendiger als man in vielen, sonst guten und vielgebrachten mathematischen Lehrbüchern eine nicht zu billigende, den Schüler jedenfalls verwirrende Verwechslung solcher Begriffe findet. Vorzugsweise geschieht dies mit den Begriffen Lage, Richtung und Seiten einer graden Linie und der graden Linie selbst. 3. B. statt: Zwei Punkte bestimmen die Lage einer graden Linie vollständig, (Kambly S. 10) muß es heißen: Die Lage der beiden Endpunkte bestimmt die Lage einer Strecke, des Anfangspunktes und eines beliebigen Punktes die Lage eines Strahles, zweier beliebigen Punkte die Lage einer Geraden, oder: Zwei Punkte bestimmen die Richtung u. s. w. Denn eine begrenzte grade Linie kann ihre Lage, den bestimmten, von ihr im Raume eingenommenen Ort recht wohl ändern, und dabei doch immer durch die beiden Punkte gehen. Die Richtung einer graden Linie wird außerdem nicht bloß durch zwei Punkte in ihr, sondern auch mittelbar durch zwei Punkte außer ihr bestimmt. — Statt: Man errichtet über einer graden Linie nach derselben Richtung zwei gleichschenklige Dreiecke (Kambly, S. 62) muß es offenbar heißen auf derselben Seite. — Man verlängert eine Linie nach einer Seite (Heis u. Eschweiler II., 17) statt Richtung. Eine Linie drehe sich um einen Punkt nach einerlei Richtung (ebendas. I., 1) statt Seite. — Die Winkel liegen nach einer Richtung (Kambly S. 29) statt auf einer Seite. — Statt: Wenn zwei Linien gleiche Richtung haben, so müssen sie denselben Richtungsunterschied gegen eine dritte Linie haben, (Kambly, S. 27) muß es heißen, gegen eine und dieselbe Richtung einer dritten Linie u. s. w.

3. Der so leicht faßlichen und wesentliche Vereinfachungen in den Beweisen gebenden Contraposition eines Urtheils dürfte mit Recht ein Platz in den mathematischen Lehrbüchern eingeräumt werden.



