

Dieses Regelheft, das ich seit mehr als fünfundzwanzig Jahren mit dem besten Erfolge dem Unterricht zu Grunde gelegt habe, dem Druck zu übergeben, nötigt hauptsächlich der Umstand, die Einheit des arithmetischen Unterrichts zu wahren, nachdem derselbe wegen Erweiterung der Anstalt in mehrere Hände übergegangen ist. Das Heft enthält nur das Notwendigste für den Schüler und ist nicht zum Selbststudium bestimmt.

Das Pensum der beiden oberen Klassen des Realgymnasiums habe ich nicht in dasselbe aufgenommen aus Rücksicht auf die Kosten bei grösserem Umfange, und weil die Gefahr der Zersplitterung, nachdem ein einheitlicher Grund gelegt, kaum mehr zu befürchten

ist, zumal auch der Unterricht daselbst meist in einer Hand liegt.

Der Lehrer findet weitere Anleitung und Belehrung hauptsächlich in dem ersten Bande der Elemente der Mathematik von Baltzer, Leipzig, S. Hirzel.

Dieses Buch, das ich seit mehr als fünfzig Jahren mit dem besten Erfolge dem Leser zu Grunde gelegt habe, dem Druck zu übergeben, ist in der That ein Umstand, der mich das höchste Vergnügen bereitet. Es enthält die Elemente der Mathematik, wie sie in der Natur der Dinge selbst liegen, und ist nicht zum Selbststudium, sondern zum Unterrichte bestimmt.

Das Buch ist in zwei Theile getheilt. Der erste Theil enthält die Elemente der Arithmetik, und der zweite Theil die Elemente der Geometrie. Die Arithmetik ist in drei Abschnitte getheilt: die erste Abschnitte enthält die Elemente der Arithmetik, die zweite Abschnitte die Elemente der Algebra, und die dritte Abschnitte die Elemente der Zahlentheorie. Die Geometrie ist in zwei Abschnitte getheilt: die erste Abschnitte enthält die Elemente der Geometrie, und die zweite Abschnitte die Elemente der Trigonometrie.

I. Arithmetik.

§ 1.

Die Summe.

1) Zwei Zahlen addieren heisst die Einheiten der einen Zahl zu den Einheiten der andern Zahl hinzuzählen. Die beiden Zahlen heissen Summanden, Addenden, Posten oder Glieder; die neue Zahl die Summe.

2) Die Glieder samt der Summe sind entweder unbenannt oder gleichbenannt.

3) Die Ordnung der Glieder ist beliebig, z. B.:

$$a + b = b + a$$

Bew.: $\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \text{---} + \overset{a}{1} + 1 + 1 + 1 + \text{---} + \overset{b}{1}$

Diese Zeile heisst von links nach rechts gelesen, dass zu a Einheiten b Einheiten und umgekehrt von rechts nach links gelesen, dass zu b Einheiten a Einheiten hinzugenommen worden sind. In beiden Fällen erhält man dieselbe Anzahl von Einheiten.

§ 2.

Das Produkt.

1) Ein Produkt ist eine Summe von gleichen Gliedern; das sich wiederholende Glied heisst Multiplikand, die Anzahl der Glieder Multiplikator. Z. B.:

$$\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \text{---} + \overset{m}{a} = a \times m.$$

2) Im Produkt kann nur der Multiplikand, niemals der Multiplikator benannt sein, weil letzterer die Anzahl der Glieder angiebt.

3) Multiplikand und Multiplikator lassen sich vertauschen; sie führen den gemeinschaftlichen Namen Faktoren, z. B.:

$$\begin{array}{r} 3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 \\ = 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

von links nach rechts gelesen sind dies 4 Zeilen von je 3 Einheiten und von oben nach unten gelesen sind dies 3 Reihen von je 4 Einheiten; d. h. die Ordnung der Faktoren ist beliebig.

§ 3.

Die Potenz.

1) Eine Potenz ist ein Produkt von gleichen Faktoren; der Faktor, welcher sich wiederholt, heisst Basis (Grundzahl, Dignand) und die Anzahl der Faktoren heisst Exponent. Z. B.:

$$a \cdot a \cdot a \dots \overset{n}{a} = a^n.$$

Zusatz: Die zweite Potenz heisst auch Quadrat; die dritte Würfel oder Kubus.

2) Der Ableitung der Potenz gemäss, kann der Exponent niemals, sondern nur die Basis benannt sein.

3) Basis und Exponent lassen sich nicht vertauschen, mit alleiniger Ausnahme von 2^4 und 4^2 .

§ 4.

Die Differenz.

1) Die Aufgabe der Subtraktion wird von der Summe hergeleitet, wenn nach einem Gliede derselben gefragt wird, während die Summe und das andere Glied gegeben sind. Die Summe wird dann zum Minuenden, das gegebene Glied zum Subtrahenden, und das gesuchte Glied zur Differenz. Die Differenz zweier Zahlen ist diejenige Zahl, die zum Subtrahenden addiert den Minuenden giebt, oder

$$\text{Differenz} + \text{Subtrahend} = \text{Minuend.}$$

$$\text{Z. B.: } 7 - 4 = 3 \text{ weil } 4 + 3 = 7.$$

In der Differenz $a - b$ heisst a der Minuend und b der Subtrahend, denn:

$$\text{Differenz} + \text{Subtrahend} = \text{Minuend,}$$

$$a - b + b = a.$$

2) Differenz und Subtrahend lassen sich vertauschen, weil sie Glieder einer Summe sind, deren Ordnung beliebig ist;

$$\text{Minuend} - \text{Differenz} = \text{Subtrahend,}$$

$$\text{weil } 7 - 4 = 3$$

$$\text{ist auch } 7 - 3 = 4$$

$$\text{oder } a - (a - b) = b.$$

3) In der Differenz sind entweder alle Teile unbenannt oder gleichbenannt.

4) Wenn in der Differenz der Subtrahend wächst, während der Minuend bleibt, so wird die Differenz kleiner z. B.:

$$8 - 5 = 3$$

$$8 - 6 = 2$$

$$8 - 7 = 1$$

$$8 - 8 = 0.$$

5) Wird der Subtrahend gleich dem Minuenden, so wird die Differenz Null.

6) Wird der Subtrahend grösser als der Minuend, so bleiben immer noch so viele Einheiten abzuziehen übrig, wie der Subtrahend mehr als der Minuend hat. Die Differenz erhält in diesem Falle dasselbe Vorzeichen wie der Subtrahend, z. B.:

$$8 - 9 = -1$$

$$8 - 10 = -2$$

$$8 - 11 = -3 \text{ u. s. w.}$$

Diese Differenzen heissen negative Zahlen, im Gegensatz dazu heissen die andern positive. Die negativen Zahlen setzen die Zahlenreihe unter 0 fort.

§ 5.

Der Quotient.

1) Die Division entsteht aus der Multiplikation, wenn nach einem Faktor gefragt wird, während das Produkt und der andere Faktor gegeben sind. Das Produkt heisst dann der Dividend, der gegebene Faktor Divisor und der gesuchte Quotient. Der Quotient ist diejenige Zahl, die mit dem Divisor multipliziert den Dividend giebt, oder

$$\text{Quotient} \times \text{Divisor} = \text{Dividend.}$$

$$\text{Z. B.: } 63 : 7 = 9 \text{ weil } 9 \times 7 = 63.$$

2) Da im Produkt die Ordnung der Faktoren beliebig ist, so lassen sich bei der Division Quotient und Divisor vertauschen, also nicht bloss:

$$\text{Dividend} : \text{Divisor} = \text{Quotient,}$$

$$\text{sondern auch: } \text{Dividend} : \text{Quotient} = \text{Divisor.}$$

$$\text{Z. B.: } 63 : 7 = 9 \text{ und } 63 : 9 = 7.$$

3) Sowie im Produkt nur der Multiplikand, niemals aber der Multiplikator benannt sein kann, so kann bei der Division niemals der Divisor benannt sein, dahingegen führen Dividend und Quotient gleiche Benennung.

Zusatz 1. Sind in der Divisionsaufgabe Divisor und Dividend benannt, so ist dies kein eigentlicher Quotient mehr, sondern ein Verhältnis.

Zusatz 2. Die Divisionsaufgabe kann auch in Bruchform geschrieben werden. Nach No. 1 dieses § ist daher:

$$\text{Bruch} \times \text{Nenner} = \text{Zähler.}$$

Hieran würden sich die Umkehrungen der Potenz anschliessen, deren es zwei geben muss (Wurzel und Logarithmus), da sich Basis und Exponent der Potenz nicht vertauschen lassen; doch sind diese wegen grösserer Schwierigkeit in der Übersicht der Rechnungsarten hier ausgelassen. Die in den ersten drei §§ behandelten Rechnungsarten (Species) heissen direkte, die andern vier durch Umkehrung der ersteren erhaltenen indirekte Rechnungsarten. Im ganzen giebt es demnach 7 Species, von denen das gemeine Rechnen gewöhnlich nur die bekannten vier einübt.

§ 6.

1) Die Aufgabe der Arithmetik besteht nicht allein in der Herleitung der in dem vorigen § aufgeführten Rechnungsarten, sondern sie hat auch weiter zu lehren, wie mit diesen Ausdrücken (Formen) gleich einfachen Zahlen zu rechnen ist.

2) Produkt, Potenz und Quotient heissen eingliedrige oder einteilige Zahlen (Monom), Summe und Differenz mehrgliedrige oder mehrteilige Zahlen (Polynom). Z. B.:

$a, ab, a^n, \frac{a}{b}$ sind eingliedrige Zahlen (Monomien),

$a+b, a-b$ „ zweigliedrige „ (Binomien),
 $a+b+c, a-b+c$ sind dreigliedrige Zahlen (Trinomien).

3) Um eine mehrgliedrige Zahl als eine eingliedrige aufzufassen und damit weiter zu rechnen, bedient man sich der Parenthese, worüber die folgenden §§ das Nähere lehren.

§ 7.

Addition und Subtraktion der Polynomen.

1) Zu einer Summe wird eine Zahl addiert, indem man sie zu einem Gliede addiert und eine Summe wird zu einer Zahl addiert, indem man die einzelnen Glieder zu ihr addiert.

$$\text{Z. B.: } (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

Bew.: siehe § 1, 3.

2) Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man sie von einem Gliede subtrahiert. Z. B.:

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Bew.: Differenz + Subtrahend = Minuend

$$\begin{aligned} (a - c) + b \quad + \quad c &= a - c + b + c \\ &= a + b \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

3) Zu einer Differenz wird eine Zahl addiert, indem man sie zum Minuenden addiert und dann den Subtrahenden von der Summe abzieht oder indem man den Subtrahend von derselben Zahl abzieht und diese Differenz zum Minuenden addiert.

$$\text{Z. B.: } (a - b) + c = (a + c) - b = a + c - b.$$

Bew.: Umkehrung von 2 dieses §.

Aus der Formel $a + (c - b) = a + c - b$ folgt, dass eine Differenz zu einer Zahl addiert wird, indem man den Minuenden addiert und den Subtrahenden subtrahiert.

4) Eine Summe wird von einer Zahl abgezogen, indem man die einzelnen Glieder subtrahiert.

$$\text{Z. B.: } a - (b + c) = a - b - c.$$

Bew.: Differenz + Subtrahend = Minuend

$$(a - b - c) + (b + c) = a - b - c + b + c = a.$$

5) Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahiert, indem man den Minuenden abzieht und den Subtrahenden addiert, z. B.:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Bew.: Differenz + Subtrahend = Minuend,

$$(a - b + c) + b - c = a - b + c + b - c = a.$$

6) Die vorhergehenden Sätze dieses § lassen sich zu zwei mechanischen Regeln zusammenfassen:

a) eine mehrteilige Zahl wird addiert, indem man die einzelnen Glieder mit ihren Vorzeichen der voraufgehenden Zahl hinzufügt, oder wenn vor der Parenthese das positive Zeichen steht, so kann dieselbe wegfallen;

b) eine mehrteilige Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Glieder mit umgekehrten Vorzeichen hinzufügt, oder wenn das negative Zeichen vor der Parenthese steht, so müssen beim Wegfall derselben die Vorzeichen aller Glieder in der Parenthese geändert werden.

Zusatz: Diese beiden Regeln gelten auch umgekehrt, wenn mehrere Zahlen in eine Paranthese eingeschlossen werden.

§ 8.

Multiplikation der Polynomen.

1) Eine mehrteilige Zahl wird multipliziert, indem jedes Glied multipliziert wird, z. B.:

$$(p + q)n = pn + qn.$$

$$\text{Bew.: } (p+q)n = \overset{1}{(p+q)} + \overset{2}{(p+q)} + \cdots + \overset{n}{(p+q)} \\ \text{nach § 2, 11.}$$

$$= \overset{1}{p} + \overset{2}{p} + \cdots + \overset{n}{p} + \overset{1}{q} + \overset{2}{q} + \cdots + \overset{n}{q} \\ \text{nach § 1, 3. } = pn + qn.$$

Ebenso ist der Bew.: für $(p-q)n = pn - qn$.

2) Mit einer mehrgliedrigen Zahl wird multipliziert, indem mit jedem einzelnen Gliede multipliziert wird.

$$n(p \pm q) = (p \pm q)n \text{ nach § 2, 3.} \\ = pn \pm qn \text{ nach § 8, 1.}$$

3) Mehrteilige Ausdrücke werden mit einander multipliziert, indem man jedes Glied des Multiplikanden mit jedem Gliede des Multiplikators multipliziert.

$$\text{I) } (a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d \text{ nach § 8, 2.} \\ = ac + bc + ad + bd \text{ nach § 8, 1.}$$

$$\text{II) } (a+b)(c-d) = (a+b)c - (a+b)d \\ = ac + bc - (ad + bd) \\ = ac + bc - ad - bd$$

$$\text{III) } (a-b)(c+d) = (a-b)c + (a-b)d \\ = ac - bc + ad - bd$$

$$\text{IV) } (a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d \\ = ac - bc - (ad - bd) \\ = ac - bc - ad + bd.$$

Zusatz 1. Als mechanische Zeichenregel für die Vorzeichen der einzelnen Teilprodukte dient folgendes Schema:

$$\text{I) } + \times + = + \quad \text{II) } + \times - = - \\ \text{III) } - \times + = - \quad \text{IV) } - \times - = +$$

oder zwei Zahlen von gleichen Zeichen mit einander multipliziert geben positives, von ungleichen Zeichen geben negatives Zeichen.

Zusatz 2. Wenn man mit einer positiven oder negativen Zahl multiplizieren soll, so ist dieser Aus-

druck eine Abkürzung für eine doppelte Aufgabe, man soll nämlich mit der Zahl multiplizieren und das erhaltene Produkt addieren oder subtrahieren.

4) Nach der vorigen Nummer wird es möglich, die Potenzen mehrteiliger Ausdrücke zu bilden, von denen insbesondere folgende zu merken sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{ausserdem } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

§ 9.

Division von Produkten und Multiplikation von Quotienten (Brüchen).

1) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen Faktor dividiert.

$$\text{Z. B.: } \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$$

Bew.: Quotient $\times$ Divisor = Dividend,

$$\left(\frac{a}{c} \cdot b\right) \times c = \left(\frac{a}{c} \times c\right) \times b \text{ nach § 2, 3.}$$

$$= a \times b \text{ nach § 5, 1.}$$

Die Umkehrungen von diesem Satz heissen: ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man seinen Zähler multipliziert,

$$\text{z. B.: } \frac{a}{c} \times b = \frac{ab}{c}$$

und mit einem Bruch wird multipliziert, indem man mit seinem Zähler multipliziert und durch den Nenner dividiert, z. B.:

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

2) Durch ein Produkt wird dividiert, indem man durch die einzelnen Faktoren in beliebiger Reihe dividiert, z. B.:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b$$

Bew.: Quotient $\times$ Divisor = Dividend

$$\left(\frac{a}{b} : c\right) \times bc = \left[\left(\frac{a}{b} : c\right) \times c\right] \cdot b \text{ nach § 2, 3.}$$

$$= \frac{a}{b} \times b \quad \text{nach § 5, 1.}$$

$$= a \quad \text{nach § 5, 1.}$$

Die Umkehrung davon ist: ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man seinen Zähler durch die Zahl dividiert, oder indem man seinen Nenner mit derselben multipliziert.

3) Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert oder mit derselben Zahl multipliziert, das erstere heisst den Bruch kürzen, das zweite denselben erweitern.

$$\text{Z. B.: } \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

Bew.: Quotient $\times$ Divisor = Dividend,

$$\frac{a}{b} \times bm = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times m \text{ nach § 2, 3.}$$

$$= a \times m \text{ nach § 5, 1.}$$

4) Brüche werden mit einander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\text{Z. B.: } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{Bew.: } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \times c\right) : d \text{ nach § 9, 1.}$$

$$= \frac{ac}{b} : d \quad \text{nach § 9, 1.}$$

$$= \frac{ac}{bd} \quad \text{nach § 9, 2.}$$

5) Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem umgekehrten Bruche multipliziert, z. B.:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

Bew.: Quotient $\times$ Divisor = Dividend.

$$\frac{ac}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{ac \cdot b}{b \cdot c} \text{ nach § 9, 4.} \\ = a \text{ nach § 9, 3.}$$

6) Erklärung: Der reciproke oder umgekehrte (inverse) Wert einer Zahl heisst der Quotient, dessen Dividend 1 und dessen Divisor die gegebene Zahl ist: z. B.: Der reciproke Wert von 3 ist $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \frac{1}{3} & \text{"} & 3 \\ & & & & a & \text{"} & b \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \frac{a}{b} & \text{"} & \frac{b}{a} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

7) Wenn der Dividend eines Quotienten wächst, während der Divisor ungeändert bleibt, so wächst auch der Quotient, z. B.:

$$\frac{14}{7} = 2; \frac{21}{7} = 3 \text{ u. s. w.}$$

und umgekehrt wenn bei unverändertem Divisor der Dividend abnimmt, so nimmt auch der Quotient ab, insbesondere

$$\frac{0}{a} = 0.$$

8) Wenn der Divisor eines Quotienten wächst, während der Dividend ungeändert bleibt, so nimmt der Quotient ab; z. B.:

$$\frac{24}{2} = 12, \frac{24}{3} = 8, \frac{24}{6} = 4 \text{ u. s. w.}$$

Wird der Divisor über alle Grenzen gross (∞), so nimmt der Quotient unter alle Grenzen ab. d. h.

$$\frac{a}{\infty} = 0;$$

und umgekehrt wenn der Divisor bei unverändertem Dividenten abnimmt, so wächst der Quotient; insbesondere wenn der Divisor unter alle Grenzen abnimmt, d. h. sich der Null nähert, so wird der Quotient über alle Grenzen gross, also

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

Zusatz: $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.

9) Wenn in einem Quotienten Divident und Divisor zugleich verschwinden, so wird der Wert des Quotienten unbestimmt.

z. B.: $\frac{a-b}{a-b} = 1$ für $a=b$ wird $\frac{0}{0} = 1$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b \text{ für } a=b \text{ wird } \frac{0}{0} = 2a$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2 \text{ für } a=b \text{ wird } \frac{0}{0} = 3a^2$$

u. s. w.

Ebenso ist $\frac{\infty}{\infty}$ ein unbestimmter Ausdruck.

§ 10.

Division mehrteiliger Ausdrücke.

1) Eine mehrteilige Zahl wird dividiert, indem man jedes einzelne Glied dividiert.

z. B.: $\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m}$

Bew.: Quotient $\times$ Divisor = Divident

$$\left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m} \right) \times m = \frac{a}{m} m \pm \frac{b}{m} m \pm \frac{c}{m} m$$

nach § 8, 1.

$$= a \pm b \pm c$$

2) Brüche von gleichen Nennern werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert.

$$\text{Z. B.: } \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m} = \frac{a \pm b \pm c}{m}.$$

Bew.: Umkehrung von 1 dieses §.

3) Brüche von ungleichen Nennern werden addiert oder subtrahiert, nachdem sie durch Erweiterung gleichnamig gemacht worden sind.

Zusatz: Der gemeinschaftliche Nenner ist das Produkt der Nenner der einzelnen Brüche, wenn sie keine gemeinschaftlichen Faktoren haben; sind aber dergleichen vorhanden, so sind dieselben bei der Bildung des Generalnenners nur einmal zu nehmen.

4) Durch einen mehrtheiligen Ausdruck lässt sich nur teilweise dividieren, nachdem Dividend und Divisor nach Potenzen derselben Zahl, die in ihren Gliedern vorkommt, geordnet sind. Wird nun das erste Glied des Dividenten durch das erste Glied des Divisors dividiert, so erhält man das erste Glied des Quotienten; das Produkt dieses Gliedes mit dem ganzen Divisor wird vom Dividenten abgezogen; darauf wird das erste Glied des so erhaltenen Restes wiederum durch das erste Glied des Divisors dividiert, hierdurch erhält man das zweite Glied des Quotienten, das Produkt dieses zweiten Gliedes mit dem ganzen Divisor wird vom ersten Reste mit Berücksichtigung der noch vorhandenen Glieder im gegebenen Dividenten abgezogen; mit diesem zweiten Reste verfährt man wie mit dem vorigen und fährt so fort bis man entweder zum Reste 0 gelangt, in welchem Falle die Division aufgeht, oder man erhält einen Rest, der sich nicht weiter dividieren lässt; diesen noch dividiert durch den Divisor fügt man als Bruch dem letzten Gliede des Quotienten an.

§ 11.

Die Potenzrechnung.

1) Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert; z. B.:

$$(a.b)^m = a^m . b^m$$

Bew.: Das Produkt von m Faktoren $a.b$ lässt sich auch nach § 2, 3 als ein Produkt von m Faktoren a mit m Faktoren b darstellen.

Die Umkehrung der Formel lehrt: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert.

2) Ein Quotient wird potenziert, indem man Dividend und Divisor potenziert; z. B.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Bew.: Das Produkt von m Faktoren $\frac{a}{b}$ giebt nach § 9, 4 den Quotienten von m Faktoren a durch m Faktoren b .

Die Umkehrung der Formel lehrt: Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert.

3) Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert; z. B.:

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

Bew.: Das Produkt von n Faktoren, wovon jeder wieder aus m Faktoren a besteht, giebt das Produkt von mn Faktoren a .

Die Umkehrung der Formel lehrt: eine Zahl wird mit einem Produkt potenziert, indem man mit den einzelnen Faktoren in beliebiger Reihe potenziert.

4) Potenzen von gleichen Basen werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert; z. B.:

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Bew.: Das Produkt von m Faktoren a multipliziert mit dem Produkte von n Faktoren a , giebt das Produkt von $m+n$ Faktoren a .

Die Umkehrung der Formel lehrt, wie eine Zahl mit einer Summe potenziert wird.

5) Potenzen von gleichen Basen werden durch einander dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert, z. B.: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$.

Bew.: Ist $m > n$ so heben sich die n Faktoren a des Divisors gegen ebensoviele Faktoren des Dividenden, demnach bleiben im letzteren $m-n$ Faktoren a ; ist $m < n$, so heben sich die m Faktoren a des Dividenden gegen ebensoviele Faktoren des Divisors, demnach bleiben im letzteren $n-m$ Faktoren a , während der erstere 1 wird.

Die Umkehrung der Formel lehrt, wie mit einer Differenz potenziert wird.

6) Eine Potenz mit dem Exponenten 0 hat den Wert 1, wenn die Basis weder 0 noch ∞ ist.

Bew.: Nach 5 dieses § erhält man den Exponenten 0, wenn $m=n$ wird, aber dann ist

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

$$\text{oder } a^{m-m} = a^0 = 1.$$

7) Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich der reziproken Basis mit positivem Exponenten.

Bew.: Nach 5 dieses § entstehen die negativen Exponenten, wenn $m < n$ ist;

Z. B.: ist $m-n = -p$, so ist $n-m = +p$

$$\text{also aus } a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$\text{wird } a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

8) Eine Summe oder Differenz lässt sich nicht ohne weiteres potenzieren, sondern die einzelnen Potenzen der mehrteiligen Zahlen lassen sich nur durch allmähliche Multiplikation bilden.

§ 12.

Die Wurzelrechnung.

1) Die Wurzelrechnung entsteht aus der Potenzrechnung, wenn die Basis aus der Potenz und dem Exponenten berechnet werden soll. Die Basis der Potenz wird zur Wurzel, der Potenzexponent zum Wurzelexponenten und die Potenz zum Radikanden.

Die Wurzel ist diejenige Zahl, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikanden giebt.

$$\begin{array}{lcl} & \text{Wurzelexponent} & \\ \text{oder Wurzel} & & = \text{Radikand.} \end{array}$$

$$\text{Z. B.: } \sqrt[n]{a} = b \text{ wenn } a = b^n$$

$$\text{oder } \sqrt[n]{b^n} = b.$$

2) Aus einem Produkt wird die Wurzel gezogen, indem man sie aus jedem Faktor zieht, z. B.:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n &= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \text{ nach § 11, 1.} \\ &= a \cdot b \text{ nach § 12, 1.} \end{aligned}$$

Die Umkehrung der Formel lehrt: Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden mit einander multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert.

3) Aus einem Quotienten wird die Wurzel gezogen, indem man sie aus dem Dividenten und Divisor zieht, z. B.:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

$$\begin{aligned}\text{Bew.: } (\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n &= (\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n \text{ nach § 11, 2.} \\ &= a : b \text{ nach § 12, 1.}\end{aligned}$$

Die Umkehrung der Formel lehrt: Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden durch einander dividiert, indem man die Radikanden dividiert.

4) Aus einer Potenz wird die Wurzel gezogen, indem man sie aus der Basis zieht, z. B.:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\begin{aligned}\text{Bew.: } \left[(\sqrt[n]{a})^m \right]^n &= \left[(\sqrt[n]{a})^n \right]^m \text{ nach § 11, 3.} \\ &= a^m \text{ nach § 12, 1.}\end{aligned}$$

Die Umkehrung der Formel lehrt: eine Wurzel wird potenziert, in dem man den Radikanden potenziert.

Zusatz: Wenn eine Zahl potenziert und radiziert werden soll, so kann dies in beliebiger Reihenfolge geschehen.

5) Mit einem Produkt wird radiziert, indem man mit den Faktoren in beliebiger Reihenfolge radiziert.

$$\text{Z. B.: } \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\begin{aligned}\text{Bew.: } (\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^{mn} &= \left[(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n \right]^m \text{ nach § 11, 3.} \\ &= (\sqrt[m]{a})^m = a \text{ nach § 12, 1.}\end{aligned}$$

Die Umkehrung lehrt: Aus einer Wurzel wird wieder die Wurzel gezogen, indem man mit dem Produkte der Wurzelexponenten radiziert.

Zusatz: Soll eine Zahl mit mehreren Zahlen nach einander radiziert werden, so kann dies in beliebiger Reihenfolge geschehen. Z. B.:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

6) Eine Wurzel bleibt ungeändert, wenn man Potenz und Wurzelexponent mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe dividiert. Z. B.:

$$\sqrt[nx]{a^{ny}} = \sqrt[x]{a^y}$$

$$\text{Bew.: } (\sqrt[x]{a^y})^{nx} = \left[(\sqrt[x]{a^y})^x \right]^n \text{ nach § 11, 3.}$$

$$= (a^y)^n = a^{ny}$$

Zusatz: Hieraus folgt: aus einer Potenz wird die Wurzel gezogen, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert oder auch umgekehrt verfährt. Z. B.:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:m]{a^{n:m}} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\text{oder } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:n]{a^{n:n}} = \sqrt[n]{a}.$$

7) Indem man nach der vorigen Nummer $a^{\frac{1}{n}}$ als $\sqrt[n]{a}$ definiert, lassen sich die Potenzregeln von ganzen Exponenten auf gebrochene übertragen, z. B.:

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \text{ nach § 11, 1.}$$

zugleich ist $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ nach § 12, 2.

u. s. w.

8) Die geraden Wurzeln aus negativen Zahlen können weder positiv noch negativ sein, weil die geraden Potenzen sowohl der positiven als auch der negativen Zahlen immer positiv sind. Die geraden Wurzeln aus negativen Zahlen heissen deshalb unmögliche oder imaginäre Zahlen. Im Gegensatz dazu heissen die übrigen Zahlen reelle. Die Einheit der imaginären Zahlen ist $\sqrt{-1}$; bei der Rechnung mit denselben sind ihre Potenzen zu beachten:

$$(\sqrt{-1})^1 = +\sqrt{-1}; (\sqrt{-1})^2 = -1; (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^4 = +1 \text{ u. s. w.}$$

Wird wie gebräuchlich $\sqrt{-1} = i$ gesetzt, so ist
 $i^{4n} = i^0 = +1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = i^2$ $i^{4n+3} = i^3 = -i$.

Die Zahlen, welche aus einem reellen und einem imaginären Teil zusammengesetzt sind, heissen komplexe, z. B.:

$$a + ib; a - ib; -a + ib; -a - ib.$$

§ 13.

Die Logarithmenrechnung.

1) Die Logarithmenrechnung ist ebenfalls eine Umkehrung der Potenzrechnung und entsteht aus ihr, wenn Basis und Potenz gegeben sind und der Exponent gesucht wird. Der Exponent wird dann zum Logarithmus, die Potenz zum Numerus (Logarithmand) und die Basis bleibt Basis.

Der Logarithmus ist diejenige Zahl, mit welcher die Basis potenziert den Numerus giebt. Oder

Logarithmus

Basis = Numerus.

Z. B.: wenn $a^n = b$ so ist $n = {}^a\lg b$

oder nach Definition $a^{{}^a\lg b} = b$.

Zusatz: Die Logarithmen sind Potenzexponenten, die Basis ist eine reelle Zahl, 0 und 1 können nicht als Basis gebraucht werden; ebenso sind die negativen Zahlen als Basen auszuschliessen; unter diesen Voraussetzungen ist der Logarithmus einer negativen Zahl nicht reell.

2) Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren, z. B.:

$${}^n\lg(ab) = {}^n\lg a + {}^n\lg b$$

Bew.: $n^{{}^n\lg a + {}^n\lg b} = n^{{}^n\lg a} \times n^{{}^n\lg b}$ nach § 11, 4.
 $= a \times b$ nach § 13, 1.

3) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividenten, vermindert um den Logarithmus des Divisors. Z. B.:

$${}^n\lg \frac{a}{b} = {}^n\lg a - {}^n\lg b$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } n^{{}^n\lg a - {}^n\lg b} &= \frac{n^{{}^n\lg a}}{n^{{}^n\lg b}} \text{ nach § 11, 5.} \\ &= \frac{a}{b} \text{ nach § 13, 1.} \end{aligned}$$

4) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Exponenten, z. B.:

$${}^n\lg a^x = x \cdot {}^n\lg a$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } n^x \cdot {}^n\lg a &= (n^{{}^n\lg a})^x \text{ nach § 11, 3.} \\ &= a^x \text{ nach § 13, 1.} \end{aligned}$$

5) Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikanden dividiert durch den Wurzelexponenten. Z. B.:

$${}^n\lg \sqrt[x]{a} = \frac{1}{x} {}^n\lg a$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } n\lg \sqrt[x]{a} &= {}^n\lg a^{\frac{1}{x}} \text{ nach § 12, 8.} \\ &= \frac{1}{x} {}^n\lg a \text{ nach § 13, 6.} \end{aligned}$$

6) Ein Logarithmensystem ist die geordnete Zusammenstellung der Logarithmen der natürlichen Zahlen zu einer bestimmten Basis. Im Gebrauch beim Rechnen ist das Logarithmensystem, dessen Basis 10 ist; dies heisst das gemeine oder Briggs'sche; in der höheren Mathematik wird vorzugsweise das natürliche (hyperbolische) Logarithmensystem gebraucht, dessen Basis $e = 2,7182818 \dots$ ist.

7) Der n -Logarithmus einer Zahl ist gleich dem

Produkt aus dem x -Logarithmus derselben Zahl und dem n -Logarithmus der zweiten Basis, also:

$${}^n\lg a = {}^x\lg a \cdot {}^n\lg x = {}^n\lg x \cdot {}^x\lg a$$

$$\text{Bew.: } n^{x\lg a \cdot n\lg x} = (n^{n\lg x})^{x\lg a} \text{ nach § 11, 3.}$$

$$= x^{x\lg a} \quad \text{„ § 13, 1.}$$

$$= a \quad \text{„ „ „}$$

$$\text{Daraus folgt: } {}^x\lg a = \frac{{}^n\lg a}{{}^n\lg x}.$$

Zusatz 1. Diese Formel dient dazu, aus einem Logarithmensystem ein anderes abzuleiten. Insbesondere werden aus den natürlichen die gemeinen Logarithmen abgeleitet.

$$\text{Es ist dann } \lg a = \frac{\lg_{\text{nat.}} a}{\lg_{\text{nat.}} 10};$$

$\frac{1}{\lg_{\text{nat.}} 10}$ heisst der Modulus des gemeinen Systems.

Zusatz 2. Wird in dieser Nummer $n = a$, so geht die Formel über in:

$$1 = {}^x\lg a \cdot {}^a\lg x.$$

II. Die Lehre von den Gleichungen. (Algebra.)

§ 14.

Einleitung.

1) Bei der Vergleichung zweier Grössen ergibt sich entweder das Urteil, dass sie ungleich, oder das, dass sie gleich sind. Das erste Urteil heisst eine Ungleichung, das letztere eine Gleichung. Die verglichenen Grössen heissen die Seiten (linke und rechte).

2) Identisch heisst eine Gleichung, wenn die rechte Seite die Wiederholung der linken Seite ist, oder die Auflösung derselben enthält, im letzteren Falle heisst sie auch eine analytische. Z. B.:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

3) Gleichung im engeren Sinne oder algebraische Gleichung heisst eine solche, die eine Unbekannte enthält, so dass nur für einen bestimmten Wert derselben die beiden Seiten identisch werden. Den Wert der Unbekannten bestimmen heisst, die Gleichung auflösen. Der gefundene Wert der Unbekannten heisst eine Wurzel der Gleichung.

4) Aus jeder Gleichung lässt sich eine neue ableiten, indem man auf beiden Seiten dieselbe arithmetische Operation ausführt, nach den Grundsätzen: Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches, u. s. w.

a) Ein Glied lässt sich von einer Seite auf die andere mit umgekehrtem Vorzeichen schaffen d. h. zu beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder davon subtrahieren. Insbesondere lassen sich die Glieder der einen Seite auf die andere schaffen; d. h. die Gleichung auf Null bringen; z. B.;

$$\begin{aligned} \text{aus } ab + cd &= mn - pq \\ \text{wird } ab + cd - mn + pq &= 0. \end{aligned}$$

Auch lassen sich die Vorzeichen durch die ganze Gleichung umkehren, d. h. es werden die Glieder der linken Seite auf die rechte gebracht und umgekehrt, oder die Gleichung wird mit -1 multipliziert, z. B.:

$$\begin{aligned} \text{aus } ab + cd &= mn - pq \\ \text{wird } -ab - cd &= -mn + pq. \end{aligned}$$

b) Ein Faktor oder Divisor wird aus einem Gliede entfernt, indem man alle Glieder der Gleichung durch den Faktor dividiert oder mit dem Divisor multipliziert, z. B.:

$mx + n = p$ durch m dividiert giebt:

$$x + \frac{n}{m} = \frac{p}{m}$$

ferner $\frac{x}{a} + \frac{c}{b} = d$ mit a multipliziert giebt:

$$x + \frac{ac}{b} = ad.$$

Insbesondere lässt sich ein gemeinschaftlicher Faktor durch Division entfernen, und die Nenner durch Multiplikation mit dem gemeinschaftlichen Nenner.

c) Die Gleichung bleibt auch richtig, wenn man jede Seite mit derselben Zahl potenziert, radiziert oder logarithmiert, z. B.:

$$\text{aus } \sqrt[n]{ax+b} = cx+d$$

$$\text{folgt } ax+b = (cx+d)^n$$

$$\text{aus } a^x = b$$

$$\text{folgt } x \cdot {}^n\lg a = {}^n\lg b.$$

5) Um den Grad einer Gleichung zu beurteilen, muss dieselbe geordnet werden, d. h.

a) kommt die Unbekannte im Nenner vor, so muss letzterer durch Multiplikation entfernt werden;

b) die Parenthesen, in denen die Unbekannte vorkommt, müssen aufgelöst werden;

c) die Glieder, welche dieselbe Potenz der Unbekannten enthalten, werden zusammengefasst und sämtliche Glieder auf eine Seite geschafft, dann ist die auf Null gebrachte Gleichung eine vom n^{ten} Grade, wenn die Unbekannte in keiner höheren Potenz als in der n^{ten} vorkommt, dagegen kann dieselbe noch in niedrigeren Potenzen vorhanden sein;

z. B.: $ax + b = 0$ ist vom ersten Grade,

$ax^2 + bx + c = 0$ ist vom zweiten Grade,

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ist vom dritten Grade.

Zusatz 1. Die Gleichungen werden auch noch eingeteilt nach der Zahl der Unbekannten, welche darin enthalten sind.

Zusatz 2. Ausser algebraischen Gleichungen giebt es noch transcendente, die sich durch arithmetische Operationen nicht lösen lassen.

§ 15.

Auflösung der Gleichung vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

1) Die geordnete Gleichung vom ersten Grade kann nicht mehr als zwei Glieder enthalten; ein Glied mit der Unbekannten und ein bekanntes Glied. Die allgemeine Form ist:

$$ax + b = 0.$$

2) Die Gleichung wird aufgelöst, indem man das bekannte Glied auf die andere Seite schafft und die Unbekannte durch Division vom Faktor befreit. Demnach ist:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Zusatz. Die Gleichungen bilden ein Hauptmittel zur Auflösung arithmetischer Aufgaben. Um zur Aufstellung der Gleichung, welche die Lösung der Aufgabe fordert, zu kommen, antwortet man meistens auf die Frage der Aufgabe mit der Unbekannten und rechnet mit dieser weiter, wie mit einer gegebenen Grösse. Mitunter ist es vorteilhaft eine andere Grösse, wie die gesuchte als Unbekannte einzuführen, z. B. bei manchen Bewegungsaufgaben. Zur Lösung dieser letzteren zeichne man zuerst eine Figur (meist eine Gerade oder einen Kreis), hierauf beantworte man die Fragen: 1) wie lange ist jeder Körper unterwegs?

2) welchen Weg hat jeder von ihnen zurückgelegt? und entlehne dann die Gleichung aus der Figur. (Das Ganze ist gleich der Summe der Teile u. s. w.) Welche Grösse dabei als Unbekannte zu nehmen ist, ergibt sich aus der Natur der Aufgabe und der Folge der Fragen.

§ 16.

Verhältnisse und Proportionen.

1) Werden zwei gleichartige Grössen mit einander verglichen, so giebt man entweder an: um wieviel ist die eine Grösse grösser als die andere oder wieviel mal ist die eine in der anderen enthalten; das erstere Verhältnis heisst ein arithmetisches, letzteres ein geometrisches; jenes hat die Form der Differenz, letzteres die des Quotienten.

Im Folgenden sollen nur die geometrischen Verhältnisse berücksichtigt werden.

2) Die Teile des Verhältnisses heissen die Glieder, sein Wert der Exponent; die Glieder sind gleichbenannt, der Exponent immer unbenannt. Das Verhältnis $a : b$ ist so zu verstehen, dass der Exponent mit dem zweiten Gliede b multipliziert, das erste giebt. (Vergl. § 5, 1). Das Verhältnis lässt sich auch in Bruchform schreiben.

3) Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn dasselbe erweitert oder gekürzt wird. (Vergl. § 9, 3.)

4) Eine Proportion ist eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen, z. B. $a : b = c : d$. In dieser Proportion sind a und d die äusseren, b und c die inneren Glieder, a und c heissen Vorderglieder, b und d Hinterglieder. In jeder richtigen Proportion ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkt der äusseren.

Bew.: Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ erhält man durch Multiplikation mit bd die Gleichung $ad = bc$.

Zusatz: Die inneren und äusseren Glieder einer Proportion lassen sich vertauschen.

5) Sind in der Proportion die inneren oder äusseren Glieder gleich, so heisst sie stetig,

z. B.: $a:c = c:b$.

6) Die Proportion $a:b:c = p:q:r$ heisst eine fortlaufende und steht für die einfachen

$$a:b = p:q \text{ und } b:c = q:r$$

oder für die zusammengesetzte: $a:p = b:q = c:r$.

7) Wenn $a:b:c = p:q:r$, so lassen sich in dem Verhältnisse

$$Aa \pm Bb \pm Cc : A'a \pm B'b \pm C'c$$

die Grössen a, b, c durch die proportionalen p, r, q ersetzen

Bew.: Nach Voraussetzung ist $\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$

$$\text{folgl. } Aa \cdot \frac{p}{a} + Bb \cdot \frac{q}{b} + Cc \cdot \frac{r}{c} : A'a \cdot \frac{p}{a} + B'b \cdot \frac{q}{b} + C'c \cdot \frac{r}{c}$$

$$\text{oder } Ap + Bq + Cr : A'p + B'q + C'r.$$

Beispiele: aus $a:b = c:d$ folgt

$$a \pm b : a = c \pm d : c$$

$$\text{aus } a:b:c = p:q:r \text{ folgt}$$

$$a \pm b \pm c : a = p \pm q \pm r : p \text{ u. s. w.}$$

8) Aus zwei oder mehreren Proportionen lässt sich eine neue durch Multiplikation ableiten, z. B.:

$$a:b = c:d$$

$$m:n = p:q$$

$$\frac{am:bn = cp:dq.}{}$$

Bew.: einfach.

9) Aus der stetigen Proportion $a:c = c:b$ folgt $c^2 = ab$ und $c = \pm \sqrt{ab}$; c heisst das geometrische

Mittel oder die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Grössen a und b . Ausserdem giebt es zwischen denselben noch ein arithmetisches Mittel, worunter ihre halbe Summe zu verstehen ist. Das harmonische Mittel zwischen zwei Grössen ist das Verhältniss des Quadrates ihres geometrischen Mittels zu ihrem arithmetischen Mittel,

$$\text{z. B.: } c = \frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{oder } \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{oder } a : c : c : b = a : b.$$

Zusatz 1. Von den drei Mitteln zwischen zwei Zahlen hat das arithmetische den grössten, das geometrische den kleinsten Wert.

Bew.: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$
weil die linke Seite als Quadrat immer positiv ist, so ist es auch die rechte, d. h.

$$a + b > 2\sqrt{ab} \text{ oder}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Das harmonische Mittel:

$$\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} < \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\text{hieraus folgt } ab < \frac{1}{4}(a+b)^2 \text{ oder}$$

$$ab < \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab) \text{ oder}$$

$$0 < \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab),$$

$$\text{aber } \frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} > \sqrt{ab} \text{ weil}$$

$$\frac{ab}{\sqrt{ab}} > \frac{1}{2}(a+b) \text{ oder}$$

$$\sqrt{ab} > \frac{1}{2}(a+b).$$

Zusatz 2. Das arithmetische Mittel mehrerer Grössen ist ihre algebraische Summe dividiert durch ihre Anzahl; das geometrische Mittel mehrerer Grössen ist ihr Produkt radiziert mit ihrer Anzahl.

§ 17.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

1) Kommen in einer Gleichung mehrere Unbekannte vor, so können denselben, mit Ausnahme einer, beliebig viele Werte zuerteilt werden, wodurch dann nur die letzte Unbekannte bestimmt wird.

2) Sollen alle Unbekannten bestimmt werden, so müssen soviele von einander unabhängige Gleichungen gegeben sein, wie Unbekannte vorkommen.

3) Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, ist aus ihnen eine dritte Gleichung herzuleiten, in der nur eine Unbekannte vorkommt, d. h. aus beiden Gleichungen eine Unbekannte eliminieren.

4) Die Methoden der Elimination sind folgende:

a) man löse die erste Gleichung für die eine Unbekannte auf und setze den Wert in die zweite Gleichung ein. (Substitutionsmethode), z. B.:

$$\begin{array}{l} mx + ny = p \\ rx + sy = t \end{array}$$

aus der ersten Gleichung folgt:

$$y = \frac{p - mx}{n};$$

dies in die zweite Gleichung eingesetzt, giebt:

$$rx + \frac{s(p - mx)}{n} = t. \text{ u. s. w.}$$

b) Man löse beide Gleichungen für dieselbe Un-

bekannte auf und setze die erhaltenen Werte einander gleich (Kombinationsmethode); z. B.:

$$\begin{array}{r} mx + ny = p \\ rx + sy = t \end{array}$$

aus der ersten Gleichung folgt:

$$y = \frac{p - mx}{n}$$

aus der zweiten:

$$y = \frac{t - rx}{s}$$

$$\text{folglich: } \frac{p - mx}{n} = \frac{t - rx}{s} \text{ u. s. w.}$$

c) Man verschaffe durch Multiplikation der wegzuschaffenden Unbekannten in beiden Gleichungen gleiche Faktoren, und addiere die Gleichungen, wenn die Glieder mit der wegzuschaffenden Unbekannten entgegengesetzte Vorzeichen haben, andernfalls subtrahiere man. (Additions- und Subtraktionsmethode; englische Methode.) Z. B. aus

$$\begin{array}{r} mx + ny = p \\ rx + sy = t \end{array}$$

soll y eliminiert werden, so multipliziere man die erste Gleichung mit s , die zweite mit n , und man erhält die Gleichungen:

$$\begin{array}{r} msx + nsy = sp \\ rnx + nsy = nt \\ \hline msx - rnx = sp - nt \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Zusatz. Haben n und s einen gemeinschaftlichen Faktor, so ist derselbe vor der Multiplikation der Gleichungen auszuschneiden.

d) Man multipliziere die eine Gleichung mit dem unbestimmten Faktor α , addiere oder subtrahiere sodann die andere Gleichung, worauf man α so bestimmt,

dass der Faktor der wegzuschaffenden Unbekannten Null wird. (Bézout'sche Methode.) Z. B.:

$$\begin{array}{l} mx + ny = p \text{ mit } \alpha \text{ multipliziert} \\ rx + sy = t \end{array}$$

$$(m\alpha + r)x + (n\alpha + s)y = p\alpha + t;$$

soll y eliminiert werden, so setze man $n\alpha + s = 0$,

woraus folgt $\alpha = -\frac{s}{n}$; dies in die letzte Gleichung eingesetzt, giebt:

$$\left(-\frac{ms}{n} + r\right)x = -\frac{ps}{n} + t \text{ u. s. w.}$$

5) Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so ist aus allen Gleichungen eine Unbekannte zu eliminieren und auf diese Art ein System von $n-1$ Gleichungen herzustellen u. s. w., bis endlich eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist. Bei n Gleichungen sind im ganzen zur Bestimmung einer Unbekannten $\frac{1}{2}n(n-1)$ Eliminationen nötig.

§ 18.

Quadratische Gleichungen.

1) Eine geordnete Gleichung vom zweiten Grade besteht höchstens aus drei Gliedern; das erste enthält die Unbekannte in zweiter Potenz, das zweite in erster, das dritte ist frei von der Unbekannten (absolutes Glied). Demnach ist die allgemeine Form der Gleichungen zweiten Grades:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

worin a, b, c von x unabhängige Zahlen bedeuten.

a) Wenn in dieser Gleichung $a = 0$ wird, so geht dieselbe in eine vom ersten Grade scheinbar über,

denn dividiert man die obige Gleichung durch x^2 , so erhält man:

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0.$$

Setzt man nun $a=0$, so erhält man:

$$\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

$$\text{oder: } \frac{1}{x} \left(b + \frac{c}{x} \right) = 0$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{x} = 0 \text{ oder } b + \frac{c}{x} = 0$$

woraus ersichtlich ist, dass die Gleichung zwei Wurzeln hat, wenn a in 0 übergeht.

b) Wird $b=0$, so heisst die Gleichung:

$$ax^2 + c = 0;$$

eine solche Gleichung, in der die Unbekannte in der ersten Potenz fehlt, heisst eine reine quadratische Gleichung. Durch Umstellung und Division geht die Gleichung über in:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

wonach durch Wurzelziehen folgt:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Danach hat die reine quadratische Gleichung zwei aber entgegengesetzte Wurzeln, welche reell oder imaginär sind, jenachdem der Radikand positiv oder negativ ist.

c) Wird $c=0$, so geht die Gleichung über in:

$$x(ax + b) = 0$$

welche die beiden Wurzeln $x=0$ und $x = -\frac{b}{a}$ hat.

2) Die gemischte quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wird durch Umstellung und Division auf die Form

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \text{ zurückgeführt; die linke Seite ist}$$

das angefangene Quadrat des Binoms $x + \frac{b}{2a}$, zu

dem das Quadrat des zweiten Gliedes $\frac{b^2}{4a^2}$ fehlt, dies zu beiden Seiten hinzugefügt, giebt:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

Durch Wurzelziehen folgt:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

durch Umstellung:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3) Die beiden Wurzeln der gemischten quadratischen Gleichung sind reell und verschieden, wenn $b^2 > 4ac$; reell und gleich, wenn $b^2 = 4ac$; complex und verschieden, wenn $b^2 < 4ac$.

4) Wenn die quadratische Gleichung geordnet, auf Null gebracht und das quadratische Glied vom Faktor befreit ist, so ist der Faktor von x gleich der algebraischen Summe der Wurzeln mit umgekehrtem Vorzeichen und das absolute Glied gleich dem Produkte der Wurzeln.

5) Jede quadratische Gleichung kann auch in der Form eines Produktes aus zwei binomischen Faktoren dargestellt werden, denn

$$(x - a)(x - b) = 0$$

giebt ausmultipliziert die quadratische Gleichung:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0;$$

der ersten Gleichung aber wird genügt, wenn $x = +a$ oder $x = +b$ gesetzt wird, und dies sind auch nach voriger Nummer die Wurzeln der aus dem Produkte abgeleiteten quadratischen Gleichung.

6) Die Lösung der quadratischen Gleichung lässt sich auf höhere Gleichungen von der Form $x^{2n} + ax^n = b$ übertragen, worin x^{2n} das Quadrat von x^n ist; demnach:

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}}.$$

Ebenso lässt sich die Gleichung von der Form

$$\sqrt[n]{x} + a \sqrt[2n]{x} = b$$

lösen, so insbesondere folgt aus

$$x + a\sqrt{x} = b$$

$$\sqrt{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$\text{und } x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right)^2.$$

7) Sind mehrere quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten gegeben, so ist im allgemeinen die Substitutionsmethode anzuwenden; einfacher wird das Verfahren, wenn nur die Quadrate der Unbekannten vorkommen. Für einzelne Fälle giebt es besonders elegante Lösungen, z. B.:

$$\begin{array}{rcl} xy & = & p \\ x + y & = & s \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 & = & s^2 \\ + 4xy & = & + 4p \\ \hline (x + y)^2 & = & s^2 + 4p \\ \hline x + y & = & \pm \sqrt{s^2 + 4p} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

$$\text{oder: } x^2 + y^2 = a$$

$$x + y = b$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = b^2$$

$$2xy = b^2 - a$$

$$\text{folgl. } x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2 \text{ u. s. w.}$$

§ 19.

Die arithmetische und die geometrische Reihe.

1) Die arithmetische Reihe ist eine Aufeinanderfolge von Gliedern, in der die Differenz der aufeinanderfolgenden Glieder konstant ist. Heisst das Anfangsglied a , die Differenz d , so lässt sich folgende Reihe bilden:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d \text{ u. s. w.}$$

Das n^{te} Glied heisst demnach:

$$t_n = a + (n-1)d.$$

2) Die Reihe aus n Gliedern bestehend lässt sich summieren, wenn unter die erste Reihe dieselbe noch einmal in umgekehrter Ordnung geschrieben wird, und sodann die untereinanderstehenden Glieder addiert werden; bezeichnet s die Summe der Reihe, so ist:

$$s = a \quad + a + d \quad + a + 2d \quad + \dots + a + (n-1)d$$

$$s = a + (n-1)d + a + (n-2)d + a + (n-3)d + \dots + a$$

$$2s = 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + \dots + 2a + (n-1)d$$

$$2s = n[2a + (n-1)d]$$

$$s = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a + t).$$

3) Jede arithmetische Reihe ist von der einen Seite her betrachtet steigend, von der andern fallend, was auch für die geometrische Reihe gilt.

4) In der geometrischen Reihe ist der Quotient von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern constant und heisst der Exponent der Reihe.

z. B.: a, ae, ae^2, ae^3 u. s. w.
das n^{te} Glied heisst demnach:

$$t_n = ae^{n-1}.$$

5) Die Summe wird erhalten, indem man die gegebene Reihe mit e multipliziert, und von der neuen Reihe die gegebene subtrahiert, wenn $e > 1$; umgekehrt wenn $e < 1$, z. B.:

$$\begin{array}{r} s = a + ae + ae^2 + \dots + ae^{n-2} + ae^{n-1} \\ es = ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1} + ae^n \\ \hline es - s = ae^n - a \end{array}$$

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{et - a}{e - 1} \text{ wenn } e > 1$$

$$\text{oder } s = \frac{a(1 - e^n)}{1 - e} = \frac{a - et}{1 - e} \text{ wenn } e < 1.$$

Ist $e < 1$ und die Anzahl der Glieder unendlich gross, so nehmen die Glieder zu Null ab, und da $t=0$

$$\text{so wird } s = \frac{a}{1 - e}.$$

oder: $x^2 + y^2 = a$

$$x + y = b$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = b^2$$

$$2xy = b^2 - a$$

folgl. $x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2$ u. s. w.

§ 19.

Die arithmetische und die geometrische Reihe.

z. B.: a, ae, ae^2, ae^3 u. s. w.
das n^{te} Glied heisst demnach:

$$t_n = ae^{n-1}.$$

5) Die Summe wird erhalten, indem man die gegebene Reihe mit e multipliziert, und von der neuen Reihe die gegebene subtrahiert, wenn $e > 1$; umgekehrt wenn $e < 1$, z. B.:

$$\begin{array}{r} s = a + ae + ae^2 + \dots + ae^{n-2} + ae^{n-1} \\ es = ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1} + ae^n \\ \hline \end{array}$$



$$2s = 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + \dots + 2a + (n-1)d$$

$$2s = n[2a + (n-1)d]$$

$$s = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a + l).$$

3) Jede arithmetische Reihe ist von der einen Seite her betrachtet steigend, von der andern fallend, was auch für die geometrische Reihe gilt.

4) In der geometrischen Reihe ist der Quotient von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern constant und heisst der Exponent der Reihe.

Buchdruckerei Julius Klinkhardt, Leipzig.

Es ist zu zeigen, dass

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(x))$$

(5) Die Funktion f ist stetig, und es gilt $f(0) = 0$.
 Ist f eine Funktion, so gilt $f(x) = f(x)$ für alle x .
 Ist f eine Funktion, so gilt $f(x) = f(x)$ für alle x .

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(x))$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(x))$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(x))$$

Ist f eine Funktion, so gilt $f(x) = f(x)$ für alle x .
 Ist f eine Funktion, so gilt $f(x) = f(x)$ für alle x .

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(x))$$