

Aufgaben.

§ 1. Konstruktionen einfacher geradliniger Figuren aus dem Inhalt und gewissen Strecken. — Lineare Gleichungen.

Konstruiere:

1) Ein Rechteck aus einer Seite*) und dem Inhalt, welcher gleich dem m -fachen (m ganz oder gebrochen) Inhalt einer der folgenden Figuren ist:

a) eines Quadrats mit geg. Seite; b) eines Rechtecks mit geg. Seiten; c) eines Dreiecks mit geg. Grundlinie und Höhe; d) eines Trapezes, von dem die parallelen Seiten und die Höhe geg. sind; e) eines Quadrats mit geg. Diagonale; f) eines gleichschenkeligen Dreiecks, von dem Schenkel und Basis oder Schenkel und Basis-Höhe geg. sind; g) eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem eine Kathete und die Hypotenuse, oder die beiden Hyp.-Abschnitte, oder eine Kathete und die Höhe geg. sind; h) eines gleichseitigen Dreiecks mit geg. Seite oder Höhe.

2) Ein Rechteck aus einer Seite und dem Inhalt, welcher gleich einem Flächenaggregate ist. Beispiel: $a \cdot x = m \cdot cd - n \cdot g \cdot h$, worin a die bekannte, x die gesuchte Rechtecksseite, c, d, g, h geg. Strecken, m und n Zahlen bedeuten.

Determination: $x +$ für $m \cdot c > \frac{n \cdot gh}{d}$.

*) Die Seite braucht nicht direkt gegeben zu sein, sondern kann auch durch andere bekannte Strecken bestimmt werden, z. B. als Umfang oder Diagonale eines Rechtecks, als mittlere oder als vierte Proportionale u. s. w.

3) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus dem Inhalt i und
a) einer Kathete a ; b) der Hyp. c ; c) der Höhe h .

Determ. b): $2h < c$ für $4i < c^2$. Z. B. $i = d^2 : 2d < c$.
c) $2h < c$ für $i > h^2$.

4) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus dem Inhalt i und
a) der Basis a ; b) der Basishöhe h ; c) dem Schenkel s ; d)
der Schenkelhöhe k . — Determ.: c) $s > k$ für $s^2 > 2i$. d)
 $s > k$ für $k^2 < 2i$.

5) Einen Rhombus aus dem Inhalte i und a) einer
Diagonale d ; b) der Seite a . Determ.: b) $a > h$ für $a^2 > i$.

6) Ein schiefwinkeliges Parallelogramm aus dem Inhalt
 i und a) den Seiten a und b ; b) einer Seite a und der nicht
zugehörigen Höhe k ; c) einer Seite und einem Winkel.

Determ.: a) $b > h$ für $ab > i$. b) $a > k$.

7) Ein Dreieck aus dem Inhalt i und a) zwei Seiten a
und b ; b) einer Seite a und der nicht zugehörigen Höhe k ;
c) einer Seite und einem Winkel. — Determ.: a) $ab > 2i$.
b) $a > k$.

8) Ein Trapez aus dem Inhalte, den parallelen Seiten
und einem Winkel oder einer der nicht parallelen Seiten.

9) Ein Rechteck aus dem Inhalt i und der Diagonale
 d . — Drücke i durch den Abstand p der Diagonale von den
Gegenecken aus und bestimme hieraus p . (Vergl. 3^b.)

Determ.: $d^2 > 2i$.

10) Ein gleichschenkeliges Trapez aus dem Inhalte i und
a) einer der parallelen Seiten a und der Höhe h ; b) einer
der nicht parallelen Seiten c und h ; c) dem Umfange u und h .

Auflösung zu b): i und h bestimmen die Summe der
parallelen Seiten $a + b$, c und h deren Differenz $a - b$, aus
 $a + b$ und $a - b$ finden sich a und b selbst. Determ.: α)
 $c > h$. β) $b +$ für $2J > h(a - b)$.

Aufl. zu c): Durch u und $a + b$ ist c bestimmt.

Determ.: α) $c + : u > \frac{2J}{h}$. β) $c > h : u > \frac{2J}{h} + 2h$, wo
α) schon mit erfüllt ist. γ) $b +$. a) Ist $u < \frac{4J}{h}$, so ist b

stets +. b) Ist $u > \frac{4J}{h}$, so muss sein $u < \frac{2J}{h} + \sqrt{\left(\frac{4J}{h}\right)^2 + 4h^2}$.
(Quadratische Ungleichung.)

§ 2. Fortsetzung. Rein-quadratische Gleichungen.

Konstruiere ein Quadrat aus seinem Inhalt, welcher als m -faches (m ganz oder gebrochen) eines Quadrats, Rechtecks u. s. w. (s. § 1, 1) oder als Aggregat von Flächen gegeben ist.

Verwandle Streckenprodukte und Aggregate solcher in Quadrate. — Im Folgenden wird daher ein geg. Inhalt immer durch ein Quadrat ausgedrückt gedacht.

Beispiel: $i = m \cdot ab - n \cdot gh$. Die gesuchte Quadratsseite ist reell für $mab > n \cdot gh$, oder, wenn $mab = u^2$, $n \cdot gh = v^2$ ist, für $u > v$.

Konstruiere ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck aus dem Inhalt i . — Vergl. §§ 4, 5, 7, 9.

§ 3. Streckenteilung.

Auf einer unbegrenzten Geraden sind zwei Punkte A und B gegeben. Auf derselben Geraden einen P. C zu suchen, dessen Abstände von A und B in einer gewissen Beziehung zu einander stehen. — Es ist zu unterscheiden, ob C auf der Verlängerung von AB oder zwischen A und B liegen soll. Da der Abstand des P. C von einem der geg. P., etwa von B , ebensowohl von A aus nach der andern Seite der Geraden abgetragen werden kann, so erhält man in jedem Falle zwei symmetrische Lösungen C und C' . (Oder: Bestimmt man den Abstand des P. C von der Mitte M der Strecke AB , so kann derselbe von M aus nach beiden Seiten abgetragen werden.)

Setzt man im ersten Hauptfalle die kleinere der Entfernungen des P. C von den Endpunkten der Strecke AB , etwa $BC = AC' = x$, und AB selbst $= a$, so ist die grössere $AC = BC' = a + x$. Im zweiten Hauptfalle ist für $BC =$

$AC' = x$, $AC = BC' = a - x$. Gilt für einen ausserhalb AB gelegenen $P. C$ die Gleichung $x(a+x) = p^2$, so bedeuten mithin die beiden Wurzeln derselben absolut genommen die Abstände der Punkte C und C' von A oder B . Ebenso geben die Wurzeln der Gleichung $x(a-x) = p^2$ die zwischen A und B gelegenen $P. C$ und C' .

Zur Determination: Für ausserhalb AB befindliche Punkte C muss x reell und positiv, für innerhalb gelegene ausserdem $< a$ sein. Im folgenden bezeichnet a immer die Strecke AB , x die Strecke BC ; a) bezieht sich auf einen ausserhalb AB , b) auf einen zwischen A und B gelegenen Punkt C .

A) Lineare oder rein-quadratische Gleichungen.

C so zu bestimmen, dass

1) $AB \cdot BC = c^2$. — a) und b): $x = \frac{c^2}{a}$. Determ. a): Stets möglich. b) $x < a: c < a$. Vergl. § 1, 1.

2) $AC^2 - BC^2 = c^2$. a) $(a+x)^2 - x^2 = c^2$, $x = \frac{c^2}{2a} - \frac{a}{2}$. Determ.: $x + : c > a$.

b) $(a-x)^2 - x^2 = c^2$, $x = \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a}$. Determ. a) $x + : a > c$.

β) x stets $< a$. Vergl. § 4, 1) und 2).

3) $BC^2 = m \cdot AC^2$, worin für $BC < AC$ $m < 1$ sein muss.

a) $x^2 = m \cdot (a+x)^2$, oder $x = (a+x) \sqrt{m}$, $x = \frac{a \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}}$

oder $x = \frac{am + a \sqrt{m}}{1 - m}$. Determ.: x stets $+$.

b) $x^2 = m(a-x)^2$, $x = \frac{a \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} = \frac{-am + a \sqrt{m}}{1 - m}$.

Determ.: Es ist stets $x +$ und $x < a$.

Anmerkung: Da $BC = AC \cdot \sqrt{m}$, so wird die Aufgabe auch dadurch gelöst, dass man AB im Verhältnis $BC:AC = \sqrt{m}:1$ teilt.

Ist $m = \frac{p}{q}$, so ist $\sqrt{m}:1 = \sqrt{p}:\sqrt{q}$. Man stellt daher $\sqrt{p}$ und $\sqrt{q}$ als zwei Strecken u und v dar und macht $AC:BC = u:v$.

B) Gemischt-quadratische Gleichungen.

Punkt C so zu bestimmen, dass

1) $AC^2 + BC^2 = c^2$.

a) $(a+x)^2 + x^2 = c^2$. $x(a+x) = \frac{c^2 - a^2}{2}$.

Determ.: $x + c > a$.

b) $(a-x)^2 + x^2 = c^2$. $x(a-x) = \frac{a^2 - c^2}{2}$.

Determ.: I) Ist $a > c$, so ist x reell für $2c^2 > a^2$ und stets $< a$.

Determ.: II) Ist $a < c$, so ist die Aufg. unmöglich, weil $x > a$ würde. Vergl. § 6, 1) und 2).

2) $AC \cdot BC = c^2$. a) $x(a+x) = c^2$. Determ.: Stets möglich.

b) $x(a-x) = c^2$. Determ.: $\alpha)$ x reell: $a > 2\sqrt{c^2}$. $\beta)$ x stets $< a$.

3) $AC:BC = BC:AB$. (Goldener Schnitt.) a) $(a+x):x = x:a$, $x(x-a) = a^2$. Determ.: Stets möglich.

b) $(a-x):x = x:a$, $x(x+a) = a^2$. Determ.: Stets möglich.

4) $BC^2 = 2m \cdot AB \cdot AC$. (Verallgemeinerung von 3.)

a) $x^2 = 2ma \cdot (a+x)$, $x(x-2ma) = 2ma^2$. Determ.: $x +$ für das obere Zeichen.

b) $x^2 = 2ma(a-x)$, $x(x+2ma) = 2ma^2$. Determ.: Wie a).

5) $BC^2 + 2m \cdot AB \cdot BC = c^2$.

$x(x+2am) = c^2$.

Determ.: a) $x +$ für das obere Zeichen. b) $*x < a$: $c^2 < a^2(2m+1)$.

Welche Werte haben hier in a) $a+x$, in b) $a-x$?

Die zweite Wurzel bedeutet die Lösung der Aufgabe: $BC^2 - 2m \cdot AB \cdot BC = c^2$, $x(x-2am) = c^2$.

Determ.: a) $x +$ für das obere Zeichen. b) $x < a$: für $1 < m$ unmöglich, für $1 > m$ muss sein $c^2 < a^2(1-2m)$, was nur für $m < \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

6) $BC^2 + 2m \cdot AB \cdot AC = c^2$. a) $x^2 + 2ma(a+x) = c^2$,
 $x(x+2ma) = c^2 - 2ma^2$. Determ.: $x + : c^2 > 2ma^2$.

b) $x^2 + 2ma(a-x) = c^2$, $x(x-2ma) = c^2 - 2ma^2$.

Determ.: I) $c^2 > 2ma^2$. a) x stets reell und $+$ für das obere Zeichen. β) $x < a : c < a$. Soll diese Ungleichung mit der Ungleichung I) zugleich bestehen, so muss sein $2m < 1$.

II) $c^2 < 2ma^2$. a) x reell: $(am)^2 > 2ma^2 - c^2$, oder $c^2 > m \cdot (2-m) \cdot a^2$, was für $m > 2$ schon von selbst erfüllt ist. — 2 Lösungen*)! β) $x < a : c < a$. — Die Ungleichungen II) und a), sowie a) und β) können stets zugleich bestehen. (a) und β) geben $1 > m(2-m)$, was stets erfüllt ist.) — Für $2m < 1$ ist β) schon durch II) mit gegeben.

Z. B. $m = \frac{1}{4}$:

I) $c^2 > \frac{1}{2}a^2$: a) x reell und $+$ für das obere Zeichen.

β) $x < a : c < a$.

II) $c^2 < \frac{1}{2}a^2$: a) x reell: $c^2 > \frac{7}{16}a^2$. β) x stets $< a$.

Die zweite Wurzel in a) bedeutet absolut die erste Wurzel in b) für $c^2 > 2ma^2$ und umgekehrt.

§ 4. Aufgaben über das rechtwinkelige Dreieck.

Lineare oder rein-quadratische Gleichungen.

Bezeichnungen: Die Katheten $= a$ und $= b$, die Hypotenuse $= c$, die Höhe $= h$, der a anliegende Hyp.-Abschnitt $= p$, der andere $= q$, der Inhalt J , die Inhalte der durch die Höhe gebildeten Teildreiecke $= i_1$ und i_2 . — Soll speziell a die kleinere Kathete, p also den kleineren Hyp.-Abschnitt bedeuten, so tritt in den folg. Aufgaben noch eine darauf bezügliche Determination hinzu. Gleichwertig mit der Bestimmung $a < b$ sind: $p < h$, $p < q$, $2p < c$, $2q > c$, $2p^2 < a^2$, $a^2 < 2h^2$, $2i_1 < J$. Für die Determination ist weiter zu

*) D. h. hier, wo der 2. Wert von x nicht der andere Abschnitt von a ist, zwei Punktepaare C und C' zwischen A und B .

beachten, dass, wenn eines der Teildreiecke i_1 oder i_2 konstruierbar ist, stets auch das volle Dreieck erhalten wird, eine auf das letztere bezügliche Beschränkung also nicht vorhanden ist.

1) Geg. a und $b + c = s$.

$$a^2 + b^2 = (s - b)^2, \quad b = \frac{s}{2} - \frac{a^2}{2s}. \quad \text{Vergl. § 3, A), 2}^b.$$

Determ.: $b + : s > a$.

2) Geg. a und $c - b = t$.

$$a^2 + b^2 = (b + t)^2, \quad b = \frac{a^2}{2t} - \frac{t}{2}. \quad \text{Vergl. ibid. 2}^a.$$

Determ.: $b + : a > t$.

Wie heissen die entsprechenden Aufgaben für das Rechteck?

3) und 4) Geg. p und $a + h$. Wie 1) und 2).

$$5) \quad c, \quad b^2 - a^2 = t^2. \quad - \quad b^2 = \frac{c^2 + t^2}{2}, \quad a^2 = \frac{c^2 - t^2}{2}.$$

Determ.: a reell : $c > t$. (Oder : $b < c : c > t$.)

$$6) \quad a, \quad b^2 + c^2 = s^2. \quad - \quad b^2 = \frac{s^2 - a^2}{2}, \quad c^2 = \frac{s^2 + a^2}{2}.$$

Determ.: b reell : $s > a$.

7) $a, \quad h^2 - p^2 = t^2$. Wie 5).

8) Geg. $a : b = m, J$. — $a^2 = 2m \cdot J, \quad a = \sqrt{2mJ}$.

9) Geg. $a : b = m, c$. — $a^2(1 + m^2) = m^2 \cdot c^2, \quad a = \sqrt{\frac{(mc)^2}{1 + m^2}}$.

Geometr. Lösung durch ähnliche Dreiecke. — Wie lauten die entsprechenden Rechtecksaufgaben?

10) $c : h = m, J$. — $c^2 = 2mJ, \quad c = \sqrt{2mJ}$. Determ.: $2h < c : m > 2$.

11) $h : p = m, i_1$. — $h^2 = 2m \cdot i_1, \quad h = \sqrt{2mi_1}$.

12) $a : c = m, J$. — $a^2 = \frac{2m \cdot J}{\sqrt{1 - m^2}}$. Determ.: a reell : $m < 1$; dann auch stets $a < c$.

13) $h : a = m, i_1$. — Ähnlich der vorigen Aufgabe.

14) $c : p = m, J$. — Gleichungen: $c : p = m, \quad c \cdot h = 2J, \quad h^2 = p(c - p)$. Daraus $c^2 = \frac{2Jm}{\sqrt{m - 1}}$. Determ.: c reell : $m > 1$; dann auch stets $c > p$.

§ 5. Fortsetzung. — Ähnliche Dreiecke im rechtwinkligen Dreieck.

15) Geg. $a:p=m$ und a) c . — $a:p=m$, $a^2=c \cdot p$.

Daraus $a = \frac{c}{m}$.

Determ.: $a > p:m > 1$.

b) h . — Aus $a:p=m$ und $p^2+h^2=a^2$ findet sich

$$p^2 = \frac{h^2}{m^2-1}.$$

Determ.: p reell: $m > 1$.

c) b . — $a:p=m$, $a^2=p^2+h^2$, $a:p=b:h$. Daraus

$$a^2 = \frac{b^2}{m^2-1}. \text{ — Determ.: } a \text{ reell: } m > 1.$$

d) q . — $a:p=m$, $a^2=p \cdot (p+q)$. Daraus $a = \frac{m \cdot q}{m^2-1}$.

Determ.: $a + : m > 1$.

16) Geg. $h:p=m$ und a) a . — Wie 15b) $h^2 = \frac{a^2 \cdot m^2}{1+m^2}$.

Determ.: a stets $> h$.

b) b . — $a = \frac{b}{m}$. — c) c . — Aus $h:p=m$ u. $h^2=p \cdot (c-p)$

folgt $h = \frac{m \cdot c}{m^2+1}$. — Determ.: $2h$ stets $< c$.

d) q . — Aus $h:p=m$ und $h^2=p \cdot q$ folgt $h = \frac{q}{m}$.

17) Geg. $c:p=m$ und a) a . — $c:p=m$ und $a^2=c \cdot p$ giebt $c^2=m \cdot a^2$. Determ.: $c > p:m > 1$.

b) q . — Aus $c:p=m$ und $p+q=c$ folgt $c = \frac{qm}{m-1}$.

Determ.: $c +$ und $> q:m > 1$.

c) b . — Aus $c:p=m$ und $b^2=c \cdot (c-p)$ folgt $c^2 = \frac{mb^2}{m-1}$. — Determ.: $c +$ und $> q:m > 1$.

d) h . — $c:p=m$ und $h^2=p(c-p)$ giebt $c^2 = \frac{m^2 \cdot h^2}{m-1}$.

Determ.: $c +$ und $> 2h:m > 1$.

Geom. Lösung der Aufg. 15—17): Konstr. ein dem gesuchten Dreieck ähnliches, u. s. w.

In 18) und 19) findet der Satz Anwendung: Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

18) Geg. eine Strecke und das Verhältnis zweier Inhalte.

a) Geg. $J : i_1 = n$ und eine der Strecken a, p, h, b, c .
Determin.: $n > 1$.

b) Geg. n und q . — Führe i_2 ein! Aus $J : i_1 = n$ folgt
 $J : i_2 = n : (n-1)$. Daher $q^2 : b^2 = (n-1) : n$, $b^2 = \frac{n \cdot q^2}{n-1}$.

Determin.: b reell : $n > 1$.

c) Geg. $i_1 : i_2 = n$ und eine der Strecken a, p, h, b, q .
Determin.: Stets möglich.

d) Geg. $i_1 : i_2 = n$ und c . — Führe J ein. Aus $i_1 : i_2 = n$
folgt z. B. $J : i_1 = (n+1) : n$. Determin.: Stets möglich.

19) Geg. zwei Inhalte oder ein Inhalt und das Verhältnis der beiden andern Inhalte oder zweier entsprechenden Strecken:

a) i_1, i_2 . — 1) $p \cdot h = 2 i$, 2) $p^2 : h^2 = i_1 : i_2$. Daraus
 $h^4 = 4 i_1 \cdot i_2$, $p^4 = \frac{4 i_1^3}{i_2}$.

Setzt man $i_1 = u^2$, $i_2 = v^2$, so wird $h^2 = 2 u \cdot v$, $p^2 = \frac{2 \cdot u^3}{v}$.
Determin.: Stets möglich.

Hierauf kommen zurück die Aufg., wo ausser i_1 die Verhältnisse $h : q$ oder $a : b$ geg. sind. (i_1 und $h : p$ s. § 4, 11.)

b) J, i_1 . — 1. Lösung: Aus $a \cdot b = 2 J$ und $c^2 : a^2 = J : i_1$
folgt $a^4 = \frac{4 J^2 i_1}{J - i_1}$, woraus man für $J = u^2$, $i_1 = v^2$ erhält:

$a^2 = \frac{2 u^2 \cdot v}{\sqrt{u^2 - v^2}}$, $b^2 = \frac{2 u^2 \sqrt{u^2 - v^2}}{v}$. 2. Lösung: $i_2 = J - i_1$,
dann wie a). — Determin.: $J > i_1$.

Hierher auch: geg. J und $a : p$ oder $b : h$ (J und $c : a$
s. § 4, 12).

c) $J, i_1 : i_2 = n$. — 1) Aus $i_1 : i_2 = n$ folgt $J : i_1 =$
 $(1+n) : n$, daraus $i_1 = \frac{J \cdot n}{1+n}$ und $i_2 = \frac{J}{1+n}$. — Vergl. nun

a) oder b). — 2) Aus $a \cdot b = 2 J$ und $a^2 : b^2 = i_1 : i_2 = n$ folgt
 $a^4 = 4 n \cdot J^2$. Für $J = u^2 : a^2 = 2 u^2 \cdot \sqrt{n}$, $b^2 = \frac{2 u}{n} \sqrt{n}$.

Hierher auch: geg. J und $h : p$ oder $h : q$. (J und $a : b$
s. § 4, 12.)

d) $i_1, J: i_2 = n$. — Es ist $i_1 : i_2 = n - 1$, also $i_2 = \frac{i_1}{n-1}$,
vergl. nun a). — Determ.: $n > 1$. — Hierher noch: geg. i_1
und $b:c$ oder $b:q$. (i_1 und $a:h$ s. § 4, 13.)

§ 6. Fortsetzung. Gemischt-quadratische Gleichungen.

Gegeben:

1) $c, a + b = s$. — $a^2 + (s - a)^2 = c^2$, $a(s - a) = \frac{s^2 - c^2}{2}$.

Determ.: Da $c < s$ sein muss, ist die rechte Seite der Gleichung +. Die beiden Zeichen geben die beiden Seiten. a und b reell: $2c^2 > s^2$. (Vergl. § 3, B, 1^b.)*)

2) $c, b - a = t$. — $a^2 + (a + t)^2 = c^2$, $a(a + t) = \frac{c^2 - t^2}{2}$. — Determ.: Da $c > t$ sein muss, ist die rechte Seite +, daher $a +$ für das obere Z. Das untere Z. giebt absolut b . — (Vergl. § 3, B, 1^a.)

Wie heissen die 1) und 2) entsprechenden Aufg. für das Rechteck?

3) $a + b = s, i$. — $a(s - a) = 2i$. S. § 3, B, 2^b).

Determ.: $\alpha)$ $a +$ für beide Z. — $\beta)$ a reell: $s > 2\sqrt{2}i$.

Bilde die entsprechende Rechtecksaufg.! Determ.: $s > 2\sqrt{i}$.
D. h. Unter den Rechtecken mit geg. Inhalt ist das Quadrat dasjenige mit dem kleinsten Umfang oder unter den Rechtecken mit geg. Umfang hat das Quadrat den grössten Inhalt.

Spezieller Fall: Ein Rechteck zu zeichnen, dessen Inhalt dem m -fachen eines Rechtecks mit den Seiten p, q und dessen Umfang dem n -fachen eines Rechtecks mit den Seiten u, v gleich ist.

4) $b - a = t, i$. — $a(a + t) = 2i$. § 3, B, 2^a). — Determ.: Stets möglich.

1*) Geg. Umfang u und c . — Es ist $u - c = s$. — Anwendung: Einem Quadrat ein Quadrat mit der Seite c einzuzeichnen, sodass dessen Ecken auf die Seiten des ersteren fallen.

Wie heisst die entsprechende Rechtecksaufg.? Anwendung derselben:

Einem Rechteck mit den Seiten p, q ein Rechteck von geg. Inhalt i um- oder einzubeschreiben, sodass dessen Seiten gleichen Abstand von den Seiten des ersteren haben. Wegen der speziellen Eigenschaft der verlangten Figur kommt hier noch die Bedingung $i > p \cdot q$ oder $i < p \cdot q$ hinzu.

5) c, b soll $= \sqrt{ac}$ sein. — $a(a+c) = c^2$.

Determ.: $\alpha)$ $a +$ für das obere Z. $\beta)$ a stets $< c$.

6) a, b soll $= \sqrt{ac}$ sein. — $c(c-a) = a^2$.

Determ.: $\alpha)$ $c +$ für das obere Z. $\beta)$ a stets $< c$.

7^a) c , und es soll $c = \sqrt{a(a+b)}$ sein. — Giebt $a = b$, d. h. ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck. In der That ist hier $c = \sqrt{2a^2}$.

7^b) c , und es soll $c = \sqrt{2b(a+b)}$ sein. — $b^2(c^2 - b^2) = \frac{c^4}{8}$.

Determ.: $\alpha)$ b^2 stets $+$ und reell. Die beiden Zeichen geben b^2 und $c^2 - b^2 = a^2$. $\beta)$ c stets $> b$.

8) c , und es soll sein $a:b = b:a+b$. — $b^2(c^2 - b^2) = \frac{c^4}{5}$.

Determ.: $\alpha)$ b^2 stets $+$ und reell. Die beiden Zeichen geben b^2 und $c^2 - b^2 = a^2$. $\beta)$ c stets $> b$.

9) $J, a:b = b:a+b$. — $b^2(b^2 - 2J) = 4J^2$. — $b^2 = J + \sqrt{5J^2}$, $a^2 = b^2 - ab = b^2 - 2J$.

Determ.: $b^2 +$ für das obere Z. Das untere Z. giebt absolut a^2 .

$a+b$ oder $b-a$ und a und b stehen im goldenen Schnitte, s. § 3, B, 3.

10) J und Umfang u . — Aus $a \cdot b = 2J$ und $a+b+\sqrt{a^2+b^2} = u$ erhält man $a\left(\frac{4J+u^2}{2u} - a\right) = 2J$.

Determ.: $\alpha)$ Die beiden Zeichen geben die beiden Katheten a und b . (b braucht nicht besonders berechnet zu werden, weil die Gleichungen für a und b symmetrisch sind.) $\beta)$ a reell führt auf die quadr. Ungleichung: $16J^2 - 24Ju^2 +$

$u^4 > 0$, oder $J \left(J - \frac{3}{2} u^2 \right) > -\frac{u^4}{16}$. Hier sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- a) $J > \frac{3}{2} u^2$: die Ungleichung ist von selbst erfüllt.
 b) $J < \frac{3}{2} u^2$: 1) $J > \frac{3}{4} u^2$: $J > \frac{u^2}{4} (3 + 2\sqrt{2})$. 2) $J < \frac{3}{4} u^2$: $J < \frac{u^2}{4} (3 - 2\sqrt{2})$.

Setzt man $J = v^2$, so erhält man folgende Bestimmung:

- a) $v^2 > \frac{3}{2} u^2$ oder $v > \frac{u}{2} \sqrt{6}$: stets möglich.
 b) $v^2 < \frac{3}{2} u^2$: 1) $v^2 > \frac{3}{4} u^2$ oder $v > \frac{u}{2} \sqrt{3}$: $v > \frac{u}{2}$.
 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$. 2) $v^2 < \frac{3}{4} u^2$ oder $v < \frac{u}{2} \sqrt{3}$: $v < \frac{u}{2} \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Konstruiere diese Grenzwerte!

Eine andere Lösung für diese Aufgabe s. unten, 29).

Welche Rechtecksaufg. entsprechen 5) — 10)?

In den Aufg. 11—17 ist die Determ. durch die Festsetzung $a < b$ oder ihr gleichwertige erweitert worden.

Geg. 11) $a, q, -p(p+q) = a^2$.

Determ.: $\alpha) p +$ für das obere Z. $\beta) p$ stets $< a$.

Geometr. Lösung: An einen Kreis mit dem Durchmesser q wird eine Tangente von der Länge a gelegt u. s. w.

12) $a:q = m$ und eine der Strecken p, b, c, h . Hier ist $a < b$, oder $p < q$, je nachdem $m^2 < 2$. — Geg.

$$\alpha) p, -a \left(a - \frac{p}{m} \right) = p^2.$$

Determ.: $\alpha) a +$ für das obere Z. $\beta) a$ stets $> p$.

b) b . — Aus $a = mq$, $b \cdot h = a \cdot q$, $b^2 = h^2 + q^2$ erhält man $a^2(a^2 + b^2) = m^2 b^4$.

Determ.: $a^2 +$ für das obere Z.

c) c . — Aus $a = mq$, $b^2 = c \cdot q$, $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $a \left(a + \frac{c}{m} \right) = c^2$.

Determ.: $\alpha) a +$ für das obere Z. $\beta) a$ stets $< c$.

d) h . — Aus $a = mq$, $h^2 = p \cdot q$, $a^2 = p^2 + h^2$ folgt $p^2(p^2 + h^2) = m^2 h^4$.

Determ.: $p^2 +$ für das obere Z.

Geometr. Lösung: Konstruiere ein Dreieck, in welchem $a:q = m$, so ist dasselbe dem gesuchten ähnlich, u. s. w.

13^a) $c:h = m$, a . — Ähnlich wie vorhin erhält man $c^2(a^2 m^2 - c^2) = a^4 m^2$.

Determ.: $\alpha)$ $c^2 +$ für beide Z. $\beta)$ c^2 reell: $m > 2$.
 $\gamma)$ $c > a$. Ist für beide Z. mit Rücksicht auf $\beta)$ erfüllt.

$\delta)$ Ist $a \leq b$, daher $c^2 \geq 2a^2$, so gilt das obere (untere) Z.

13^b) $c:h = m$, p . — $c(m^2 p - c) = p^2 m^2$.

Determ.: $\alpha)$ $c +$ für beide Z. $\beta)$ c reell: $m > 2$.

$\gamma)$ c stets $\geq 2p$ für das $\left. \begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Z. Das untere Z. gilt also, wenn der grössere Abschnitt q geg. ist. — Geometr. Lösung wie bei 12).

Geg. eine Strecke und die Summe oder Differenz der Quadrate zweier andern Strecken.

14) c , $a^2 + h^2 = s^2$. — Aus $a^2 + h^2 = s^2$, $a^2 - h^2 = p^2$, $a^2 = c \cdot p$ folgt $p(2c - p) = s^2$. — Determ.: $\alpha)$ $p +$ für beide Z. $\beta)$ p reell: $c > s$. $\gamma)$ $2p < c$: für das obere Z. unmöglich; für die Gültigkeit des untern muss sein $c^2 > \frac{4}{3}s^2$. — Ist $b^2 + h^2 = s^2$ geg., so gilt für q dieselbe Gleichung wie oben für p . Das obere Z. ist auch unbrauchbar, weil $q < c$ sein muss, das untere erfüllt die Bedingung $2q > c$ für $c^2 < \frac{4}{3}s^2$.

15) c , $a^2 + p^2 = s^2$. — $p(p + c) = s^2$.

Determ.: $\alpha)$ $p +$ für das obere Z. $\beta)$ $2p < c$: $c^2 > \frac{4}{3}s^2$. — Ist $b^2 + q^2 = s^2$ geg., so heisst die Determ.:
 $\alpha)$ wie vorhin. $\beta)$ $q < c$: $c^2 > \frac{s^2}{2}$, $\gamma)$ $2q > c$: $c^2 < \frac{4}{3}s^2$.

16) c , $h^2 - p^2 = t^2$. — $p\left(\frac{c}{2} - p\right) = \frac{t^2}{2}$.

Determ.: $\alpha)$ $p +$ für beide Z. $\beta)$ p reell für $c^2 > 8t^2$.
 $\gamma)$ $2p < c$: für beide Z. erfüllt. — Ist $q^2 - h^2 = t^2$
 geg., so lautet die Gleichung $q\left(q - \frac{c}{2}\right) = \frac{t^2}{2}$. Determ.: $\alpha)$

$q +$ für das obere Z. $\beta)$ $q < c : c > t$. $\gamma)$ $2q$ stets $> c$.

17) $c, a^2 + q^2 = s^2$. — $q(q - c) = s^2 - c^2$.

Determ.: I) $s > c$: $\alpha)$ $q +$ für das obere Z. $\beta)$ Nach
 der Gleichung ist $q < c$ unmöglich.

II) $s < c$: $\alpha)$ q reell: $c^2 < \frac{4}{3}s^2$. $\beta)$ $q +$ für beide Z.
 $\gamma)$ Nach der Gleichung ist stets $q < c$. $\delta)$ $2q$ stets

$\geq c$ für das $\left. \begin{matrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{matrix} \right\}$ Z. Das untere Z. gilt also, wenn
 $b^2 + p^2 = s^2$ geg. ist. — Behandle ebenso

18) $a, b^2 + h^2 = s^2$, 19) $a, h^2 - q^2 = t^2$.

20) Geg. $p, a + c = s$. — $a(a + p) = ps$.

Determ.: $\alpha)$ $a +$ f. d. obere Z. $\beta)$ $a > p : s > 2p$.

21) $p, c - a = t$. — $a(a - p) = p \cdot t$.

Determ.: $\alpha)$ $a +$ für das obere Z. $\beta)$ a stets $> p$.

22) $p, c + h = s$. — $h(h + p) = p(s - p)$.

Determ.: $\alpha)$ $h + : s > p$.

23) $p, c - h = t$. — $h(h - p) = p \cdot (t - p)$.

Determ.: I) $t > p$. $\alpha)$ $h +$ für das obere Z. $\beta)$ h stets $> p$.

II) $t < p$. $\alpha)$ $h +$ für beide Z. $\beta)$ h reell: $t > \frac{3}{4}p$. $\gamma)$ h
 stets $< p$. D. h. I) gilt, wenn der kleinere, II), wenn der
 grössere Hyp.-Abschnitt geg. ist.

24) $h, a + b = s$. — Aus $a + b = s, a \cdot b = c \cdot h, a^2 + b^2 = c^2$
 erhält man die für $a(s - a)$ quadratische Gleichung: $a^2(s - a)^2 +$
 $2h^2a(s - a) = h^2s^2$.

Da $s > a$ sein muss, kann nur die $+$ Wurzel gebraucht
 werden:

$$a(s - a) = h\sqrt{h^2 + s^2} - h^2.$$

Determ.: $\alpha)$ $a +$ f. beide Z. $\beta)$ a reell: $s > 2\sqrt{2}h^2$.

25) $h, b - a = t$. — Ähnlich wie vorhin erhält man:

$$a(a + t) = h\sqrt{h^2 + t^2} + h^2.$$

Determ.: $a +$ für das obere Z.

Anmerkung. Die Aufgaben, wo geg. sind $a+c, h; c-a, h; a+b, p; b-a, p; a+h$ und b oder $q; c+h$ und c oder a führen auf nicht reduzierbare Gleichungen höheren Grades.

Geg. der Radius des einbeschr. Kreises r und

26) c . — Man ziehe die Radien nach den Berührungspunkten und setze den der Hyp. anliegenden Abschnitt einer Kathete $= x$, so sind die Katheten $x+r$ und $c-x+r$ und daher $(x+r)^2 + (c-x+r)^2 = c^2$, woraus $x(c-x) = r(c+r)$.

Determ.: α) Die beiden Wurzeln geben die Abschnitte der Hyp. zu beiden Seiten des Berührungspunktes, oder: ihre Summen mit r geben die Katheten. — β) x reell: aus

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 > r(c+r) \text{ folgt } r < -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{2}}.$$

Geometr. Lösung: Verbindet man den Mittelp. O mit den Endpunkten A und B der Hyp., so ist $\triangle AOB$ konstruierbar aus $AB=c$, $\angle AOB=135^\circ$ und der Höhe r . — Leite die obige Determ. für r aus dieser Konstruktion ab!

27) Umfang u . — Es ist $c = \frac{u}{2} - r$, vergl. nun 26).

28) J . — Es ist $u = \frac{2J}{r}$, daher $c = \frac{J}{r} - r$.

29) Geg. J und u . — Es ist $r = \frac{2J}{u}$ und $c = \frac{u}{2} - \frac{2J}{u}$.

§ 7. Aufgaben über spezielle, durch einen Bestandteil bestimmte Dreiecke.

Rein-quadratische Gleichungen.

Gesucht 1) Ein Quadrat, welches einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a gleich ist. — Seite $= \frac{1}{2} \sqrt{a \sqrt{3} a^2}$.

2) Ein gleichschenkl.-rechtwinkeliges Dreieck, welches dem gleichseit. Dreieck gleich ist. Kathete $= \sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt{3 a^2}$.

Ein gleichseitiges Dreieck (Seite $= a$, Höhe $= h$), von dem geg. ist:

3) Inhalt $= c^2$. — $a^2 = \frac{2c}{\sqrt{3}} \cdot 2c$, worin $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ die Seite eines gleichseit. Dreiecks mit der Höhe c ist.

4) Inhalt = dem eines gleichschenkl. rechtw. Dreiecks mit der Kathete c . $a^2 = \frac{2c}{\sqrt{3}} \cdot c$.

$$5) a + h = s. \quad a = 2(2s - \sqrt{3}s^2).$$

$$6) a - h = t. \quad a = 2(2t + \sqrt{3}t^2).$$

Geometr. Lösung: a) Benutze ein Hilfsdreieck mit der Seite $a + h$ oder $a - h$. b) Zeichne ein dem gesuchten ähnliches Dreieck. c) Teile s , bez. t im Verhältnis $2:\sqrt{3}$ ($a:h = 2:\sqrt{3}$).

$$7) a + R = s. \quad (R = \text{Radius des umbeschr. Kreises.}) \quad a = \frac{s}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

$$8) a - R = t. \quad a = \frac{s}{2}(3 + \sqrt{3}).$$

Geometr. Lösung: a) und b) analog 6. c) Teile s , bez. t im Verhältnis $\sqrt{3}:1$.

$$9) a + r = s \quad (r = \text{Radius des einbeschr. Kreises.}) \quad a = \frac{2s}{11}(6 - \sqrt{3}).$$

$$10) a - r = t. \quad a = \frac{2s}{11}(6 + \sqrt{3}).$$

Geometr. Lösung: a) Zeichne ein gleichschenkl. Dreieck aus der Summe (bez. Differenz) von Basis und Höhe = s (bez. t) und dem Winkel an der Spitze = 120° . b) Zeichne ein dem ges. Dreieck ähnliches. c) Teile s , bez. t im Verhältnis $2\sqrt{3}:1$.

Gesucht ein gleichschenkl. rechtwinkl. Dreieck (Kathete = a , Hyp. = c), von welchem geg. ist:

$$11) a + c = s. \quad a = s(\sqrt{2} - 1).$$

$$12) c - a = t. \quad a = t(\sqrt{2} + 1).$$

13) Umfang u . — $a = \frac{u}{2}(2 - \sqrt{2})$. — Geom. Lösung analog den Lösungen der vorhergehenden Aufg.

Gesucht ein rechtwinkeliges Dreieck (kleinere Kath. = a) mit dem einen spitzen Winkel von 30° , welches gleich ist:

$$14) \text{ einem Quadrat mit der Seite } c. \quad a^2 = \frac{2c}{\sqrt{3}} \cdot c.$$

$$15) \text{ einem gleichseit. Dreieck mit d. S. } c. \quad a^2 = \frac{c^2}{2}.$$

16) einem gleichschenkl.-rechth. Dreieck mit der Kathete

$$c : a^2 = \frac{c}{\sqrt{3}} \cdot c.$$

Gesucht ein ebensolches Dreieck, von dem geg. ist:

17) Summe oder Differenz aus der grösseren Kathete und der Hyp. — Vergl. 5) und 6).

18) Summe (s) oder Differenz (t) der Katheten. —

$$a = \frac{s}{2}(\sqrt{3} - 1), \text{ bez. } a = \frac{t}{2}(\sqrt{3} + 1).$$

19) Umfang u . — $a = \frac{u}{6}(3 - \sqrt{3})$.

Geom. Lösung analog den Lösungen der vorhergeh. Aufg.

Hieran schliessen sich entsprechende Aufgaben über ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel von 30° . — Vergl. auch 7) und 8).

20) Von einem gleichschenkligen Dreieck (Schenkel $= a$) mit dem Basiswinkel von 75° ist der Inhalt $= c^2$ geg. — $a = 2c$. — (Drücke den Inhalt durch den Schenkel und die Schenkelhöhe aus!)

21) Ein dem genannten Dreieck gleiches gleichseitiges (Seite $= x$) zu zeichnen. $x^2 = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

Anhang zu § 7. Aufgaben über das regelmässige Vieleck.

1) Ein regelm. Vieleck zu zeichnen, dessen Inhalt $i_n = c^2$ ist.

Drücke den Radius r des umbeschr. Kreises durch c^2 aus.

2) Geg. die Summe oder Differenz s der Seiten a_m und a_n zweier demselben Kreise einbeschr. regelm. Vielecke.

Z. B. $a_8 + a_{12} = s$. — $r = s(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, d. h.:

Beschreibe einem Kreise mit dem Radius s ein regelm. Acht- und Zwölfeck ein, bilde die Differenz, bez. Summe u der Seiten derselben und zeichne schliesslich $u\sqrt{3} + u\sqrt{2}$.

Geometr. Lösung: Sei O der Mittelpunkt des Kreises, AB und BC (C auf dem Bogen zwischen A und B gelegen)

a_m und a_n , so ist $\triangle ABC$ konstruierbar aus $AB + BC$,
 $\angle ACB = \angle BCO + \angle ACO = 2\left(R - \frac{R}{m}\right)$ und AC , welches
 Basis des gleichschenkligen Dreiecks ACO mit $\angle AOC =$
 $\frac{4R}{m} - \frac{4R}{n}$ ist.

3) Geg. die Summe oder Differenz s der Seiten b_m und
 b_n zweier demselben Kreise umschriebenen regelm. Viel-
 ecke.

Bestimme den Radius r des Kreises. Z. B. $b_8 + b_{12} = s$:

$$r = \frac{s}{2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{s}{8} \sqrt{2} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

4) Geg. die Summe oder Differenz s der Seiten a_m und
 b_n zweier regelm. Vielecke, von denen das eine einem Kreise
 (Radius $= r$) eingeschrieben, das andere demselben Kreise
 umschrieben ist.

Z. B. $a_6 - b_8 = s$: $r = s(3 + 2\sqrt{2})$.

§ 8. Aufgaben über Dreiecke, in welchen ein Winkel von 60° , 30° , 45° u. s. w. vorkommt.

Gleichungen teils linear (3) und 4) der einzelnen
 Gruppen), teils gemischt-quadratisch.

Bezeichnungen: die den geg. Winkel A einschliessenden
 Seiten AC und $AB = b$ und c , die Gegenseite $BC = a$, die zu
 c gehörige Höhe $CD = h$, der Inhalt J .

I) $\angle A = 60^\circ$. — Geg.

1) $a, b + c = s$. — Gleichungen: $a^2 = h^2 + (s - b - AD)^2$,
 $AD = \frac{b}{2}$, $h = \frac{b}{2} \sqrt{3}$. Daraus $b(s - b) = \frac{s^2 - a^2}{3}$.

Determ.: α) Da $s > a$ sein muss, ist die rechte Seite
 $+$, also $b +$ für beide Z. β) b reell: $2a > s$, also
 $2a > s > a$.

Anwendung: In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes
 gleichseit. Dreieck mit der Seite a einzuzichnen. (Die ent-
 sprechende Aufgabe für das Quadrat s. § 6, 1.)*

Geom. Lösung: Konstr. $\triangle ABC$ aus $\angle A$, $b+c$, a durch ein Hilfsdreieck. Analog die Lösungen der folg. Aufg.

2) a , $b-c=t$. — Ähnlich wie vorhin erhält man $b(b-t)=a^2-t^2$.

Determ.: Da $a > t$ sein muss, ist die rechte Seite +, also $b+$ für das obere Z.

3) c , $a+b$. — Ganz ähnlich erhält man $b = \frac{(s+c) \cdot (s-c)}{2s-c}$.

4) c , $a-b=t$. — $b = \frac{(c+t) \cdot (c-t)}{2t+c}$.

5) $b+c=s$, J . — Aus $2J=c \cdot h$ und $h = \frac{b}{2} \sqrt{3}$ findet sich $c(s-c) = \frac{4J}{\sqrt{3}}$. — Determ.: $\alpha)$ $c+$ für beide Z.

$\beta)$ c reell: $s^2 > \frac{16J}{\sqrt{3}}$. — $J=u^2$ gesetzt: $s > 2\sqrt{2u \cdot \frac{2u}{\sqrt{3}}}$.

6) $b-c=s$, J . — $c(c+t) = \frac{4J}{\sqrt{3}}$. Determ.: $c+$ für das obere Z.

Geg. $a+c=s$ und J führt auf eine kubische Gleichung.

7) a , J . — Gleichungen: $a^2 = h^2 + \left(c - \frac{b}{2}\right)^2$, $h = \frac{b}{2} \sqrt{3}$, $c \cdot h = 2J$. Daraus: $c^2 \left(a^2 + \frac{4}{3} J \sqrt{3} - c^2\right) = \frac{16}{3} J^2$.

Determ.: $\alpha)$ Aus den Bestimmungsgleichungen ergibt sich, dass $a^2 + \frac{4}{3} J \sqrt{3} = b^2$, die beiden Wurzeln geben also c^2 und b^2 , das Dreieck ist somit durch $\angle A$, b , c eindeutig bestimmt. — $\beta)$ c^2 reell: $J^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a^2 J < \left(\frac{a}{2}\right)^4$:

$\alpha)$ $J < \frac{\sqrt{3}}{6} a^2$ oder $\frac{a^2}{2\sqrt{3}}$: die Ungleichung ist von selbst erfüllt.

$\beta)$ $J > \frac{\sqrt{3}}{6} a^2$: $J < \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$, d. h. $J < \text{Inhalt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite } a$. — Einfacher die geometr. Lösung.

II) $\angle A = 120^\circ$. — Geg.

1) $a, b + c = s$. — Gleichungen: $a^2 = h^2 + (s - b + AD)^2$,
u. s. w. wie in I). — $b(s - b) = s^2 - a^2$.

Determ.: α) Da $s > a$, ist die rechte Seite +, also $b +$
für beide Z. β) b reell: $2a > s\sqrt{3}$, also $\frac{2a}{\sqrt{3}} > s > a$.

Anwendung: In ein regelmässiges Sechseck ein anderes
regelm. Sechseck so einzuzeichnen, dass die Ecken desselben
auf die Seiten des ersteren fallen.

Bilde noch die 2)–6) in I) entsprechenden Aufgaben.

III) $\angle A = 30^\circ$. — Geg.

1) $a, b + c = s$. — Gleichungen: $a^2 = h^2 + (s - b - AD)^2$,
 $AD = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, $h = \frac{b}{2}$. — $b(s - b) = \frac{s^2 - a^2}{2 + \sqrt{3}} = (s^2 - a^2)$
 $(2 - \sqrt{3})$.

Determ.: α) Da $s > a$, ist die rechte Seite +, also $b +$
für beide Z. β) b reell: $2a > s\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. (D. h. $2a$
grösser als die Seite des einem Kreise mit dem Radius s
einbeschriebenen regelm. Zwölfecks). γ) Die beiden Zeichen
geben b und c .

Bilde die 2)–6) in I) entsprechenden Aufgaben. Für

5) heisst die Lösung $c(s - c) = 4J$, für 6) $c(c + t) = 4J$.

IV) $\angle A = 150^\circ$. — Geg.

1) $a, b + c = s$. — Gleichungen: $a^2 = h^2 + (s - b + AD)^2$,
u. s. w. wie in III). $b(s - b) = \frac{s^2 - a^2}{2 - \sqrt{3}} = (s^2 - a^2)(2 + \sqrt{3})$.

Determ.: Ganz entsprechend III), 1). b reell: $2a > s$
 $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, oder $2a\sqrt{2 - \sqrt{3}} > s$. D. h.? — U. s. w.

V) $\angle A = 45^\circ$. — Geg.

1) $a, b + c = s$. — Aus $a^2 = h^2 + (s - b - AD)^2$,
 $AD = h$, $h = \frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt $b(s - b) = \frac{s^2 - a^2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{s^2 - a^2}{2}$
 $(2 - \sqrt{2})$.

Determ.: α) Da $s > a$, ist die rechte Seite +, also
 $b +$ für beide Z. β) b reell: $2a > s\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. D. h. $2a$
grösser als die Seite des dem Kreise mit dem Radius s ein-
beschriebenen regelm. Achtecks.

$$2) \ a, \ b - c = t. \quad - \quad b(b - t) = \frac{a^2 - t^2}{2 - \sqrt{2}}.$$

Determ.: $\alpha)$ Da $t < a$, ist die rechte Seite $+$, daher $b +$ für das obere Z.

$$3) \ c, \ a + b = s. \quad - \quad c = \frac{s^2 - c^2}{2s - c\sqrt{2}}.$$

Determ.: Da $s > c$, ist c stets $+$.

$$4) \ c, \ a - b.$$

5) $b + c = s, \ J. \quad - \quad c(s - c) = 2J\sqrt{2}. \quad - \quad \text{Determ.: } \alpha)$
 $c +$ für beide Z. $\beta)$ c reell: $s^2 > 8J\sqrt{2}$.

6) $b - c = t, \ J. \quad - \quad c(c + t) = 2J\sqrt{2}. \quad \text{Determ.: } c +$
für das obere Zeichen.

7) $a, \ J. \quad - \quad \text{Aus } a^2 = h^2 + (c - h)^2, \ c \cdot h = 2J \text{ folgt}$
 $c^2(a^2 + 4J - c^2) = 8J^2.$

Determ.: $\beta)$ c^2 reell giebt die Ungleichung: $J^2 - \frac{1}{2}a^2J$
 $< \left(\frac{a}{2}\right)^4.$

a) $2J < a^2$: Die Ungleichung ist von selbst erfüllt.

b) $2J \geq a^2$: $J < \left(\frac{a}{2}\right)^2(1 + \sqrt{2}).$

$\alpha)$ Aus den Bestimmungsgleichungen ergibt sich, dass
 $a^2 + 4J - c^2 = 2h^2 = b^2$, die beiden Wurzeln der Gleichung
für c^2 geben also die Quadrate der den $\angle A$ einschliessenden
Seiten, das Dreieck ist somit eindeutig bestimmt. (Zeichnet
man das Dreieck aus $\angle A$, c und a , so erhält man wohl im
allgem. zwei Dreiecke über c mit verschiedenen Seiten b ,
doch ist von ihnen nur das eine brauchbar, da zu einem be-
stimmten Werte von c nur ein einziger Wert von b gehört.)

VI. Bilde die entsprechenden Aufg. für $\angle A = 135^\circ$.

§ 9. Aufgaben über ähnliche Dreiecke im gleichschenkligen Dreieck.

Bezeichnungen: Im gleichschenkligen Dreieck ABC
(AB die Basis) werden die Höhen CD und BE gefällt,
welche sich in F schneiden. Man setze $AB = a, AC =$

$BC=b$, $CD=h$, $BE=k$, $DF=p$, $BF=q$, $AE=u$. —
 $\angle C$ ist spitz oder stumpf für $a \lesseqgtr 2h$, $a \gtrless 2p$, $b \gtrless q$, $h \gtrless p$,
 $2a^2 \gtrless u^2$, $a^2 \lesseqgtr 2k^2$, $a^2 \lesseqgtr 2b^2$.

Rein-quadratische Gleichungen.

Gegeben:

1) h , k . — Da $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, ist $h:k = \frac{a}{2}$:
 $\sqrt{a^2 - k^2}$, $a = \frac{2hk}{\sqrt{4h^2 - k^2}}$. — Determ.: $\alpha)$ a reell: $2h > k$.
 $\beta)$ $a < 2h:k^2 < 2h^2$.

Geometr. Lösung: Ziehe $DG \parallel BE$, so ist $DG = \frac{k}{2}$ und
 $\triangle CDG$ konstruierbar. — Oder: durch $h:k = \frac{a}{2}:u$ ist ein
dem $\triangle ABE$ ähnliches bestimmt, u. s. w.

2) p , u . — $\triangle BFD \sim \triangle BAE$, somit $p:u = \frac{a}{2}$:
 $\sqrt{a^2 - u^2}$, woraus $a^2 = \frac{2pu}{\sqrt{4p^2 - u^2}}$. — Determ.: $\alpha)$ a reell:
 $2p > u$. $\beta)$ $a > 2p:u^2 > 2p^2$.

Geom. Lösung: durch $2p:y = a:k$ ist ein dem $\triangle ABE$
ähnliches bestimmt.

3) b , q . — $\triangle BFD \sim \triangle CAD$, somit $b:q = \frac{a}{2}$:
 $\sqrt{q^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, $a = \frac{2bq}{\sqrt{b^2 + q^2}}$.

4) $b:a = m$, p . — Aus $b = m \cdot a$ und $p:\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$:
 $\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ folgt $a = 2p\sqrt{4m^2 - 1}$. — Determ.: $\alpha)$ a
reell: $2m > 1$. $\beta)$ $a > 2p:2m^2 > 1$.

5) $b:a = m$, q . — Entsprechend 4) findet man $a = \frac{q}{m}$.
 $\sqrt{4m^2 - 1}$.

Determ.: $\alpha)$ $2m > 1$. — $\beta)$ $b > q:2m^2 > 1$.

Die geom. Lösungen von 3)–5) sind analog denen von
2). — In den folg. Aufg. ist geg. $J = c^2$ und:

6) $b:a=m$. — Gleichungen: $b:a=m$, $2J=a \cdot h$,
 $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Daraus $a^2 = 4c \sqrt{\frac{c^2}{4m^2-1}}$. — Determ.:
 Wie 5).

7) $h:k=m$. — Gleichungen: $h=m \cdot k$, $2J=a \cdot h$,
 $a \cdot h = k \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Daraus $h^2 = c \sqrt{(4m^2-1) \cdot c^2}$. —
 Determ.: $\alpha)$ h reell: $2m > 1$. — $\beta)$ S. 1). $k^2 < 2h^2:2m^2 > 1$.

8) $\frac{a}{2}:u=m$. — Gleichungen: entweder $a=2m \cdot u$,
 $2J=b \cdot k$, $a:u=b:\frac{a}{2}$ ($\triangle ABE \sim \triangle ACD$), $k^2=a^2-u^2$, oder:
 $a=2m \cdot u$, $2J:k \cdot u=m^2$ ($\triangle ABE \sim \triangle ACD$), $k^2=a^2-u^2$. —
 Daraus $a^2 = 8c \sqrt{\frac{c^2}{4m^2-1}}$. — Determ.: $\alpha)$ a reell: $2m > 1$.
 $\beta)$ $2a^2 > u^2:8m^2 > 1$.

9) $\frac{a}{2}:p=m$. — Gleichungen: $a=2mp$, $2J:a \cdot p=m^2$
 ($\triangle ACD \sim \triangle FBD$). — $a^2 = \frac{4c^2}{m}$. — Determ.: $a > 2p$:
 $m > 1$.

10) $b:q=m$. — Da $b:q=\frac{a}{2}:p$, so ist diese Aufg. mit
 9) identisch.

11) $h:p=m$. — Gleichungen: $h=mp$, $2J=a \cdot h$,
 $\frac{a}{2}:p=h:\frac{a}{2}$. Daraus $a^2 = \frac{4c^2}{\sqrt{m}}$, $h^2 = c^2 \sqrt{m}$. — Determ.:
 $h > p:m > 1$.

Ist ausser J eine der Strecken p, q, u geg., so resultieren
 Gleichungen höheren Grades.

Geg. 12) $\triangle ACD:\triangle ABE=n$ und eine der Strecken
 a, b, h, k, u . — Da $\triangle ACD \sim \triangle ABE$, so ist $n = \frac{b^2}{a^2} =$
 $\frac{h^2}{k^2} = \frac{a^2}{4u^2}$. Ist daher z. B. b geg., so folgt sofort $a^2 = \frac{b^2}{n}$. —
 Determ.: $\alpha)$ $a < 2b:n > \frac{1}{4}$. $\beta)$ $a^2 < 2b^2:2n > 1$.

13) $\triangle ACD:\triangle FBD=n$ und eine der Strecken a, b ,
 h, p, q . — Wie bei 12). Ist b oder q geg., so ist nach Be-
 rechnung von q , bez. b die Aufg. auf 3) zurückgeführt.

14) $\triangle ACD : \triangle ABE = n$ und p . — Gleichungen:
 $n = \frac{a^2}{4u^2}$, $p : \frac{a}{2} = u : k$, $k^2 = a^2 - u^2$. Daraus $a = 2p \sqrt{4n - 1}$.

Determ.: $\alpha)$ a reell: $n > \frac{1}{4}$. $\beta)$ $a > 2p : 2n > 1$.

15) $\triangle ACD : \triangle ABE = n$ und q . — Die zweite der
 vorigen Gleichungen heisst hier $q : \frac{a}{2} = a : k$. — $a = q \sqrt{4 - \frac{1}{n}}$.

Determ.: Wie bei 14).

16) $\triangle ACD : \triangle FBD = n$ und k . — Gleichungen:
 $n = k^2 : \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $a \cdot h = b \cdot k$, $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, oder auch: $n =$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 : p^2$, $\frac{a}{2} : q = k : a$, $q^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + p^2$. — $a = k \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. —

Determ.: $\alpha)$ $a > k$: stets erfüllt. $\beta)$ $a^2 < 2k^2 : n > 1$.

17) $\triangle ACD : \triangle FBD = n$ und u . — $a = u \sqrt{1 + n}$. —
 Determ.: Wie 16).

Gemischt-quadratische Gleichungen.

Gegeben:

1) h, u . — Gleichungen: $h : \frac{a}{2} = k : u$, $k^2 = a^2 - u^2$. Dar-
 aus $a^2(a^2 - u^2) = 4h^2u^2$.

Determ.: $\alpha)$ $a^2 +$ und daher a reell f. d. obere Z. —
 Das untere Z. giebt absolut $a^2 - u^2$, d. h. k^2 . — $\beta)$ $a^2 < 2k^2 : u^2 < 2h^2$.

2) q, u . — Aus $q : a = p : u$ und $q^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + p^2$ folgt
 $a^2(4q^2 - a^2) = 4q^2u^2$.

Determ.: $\alpha)$ $a^2 +$ f. beide Z. Die beiden Wurzeln geben
 a^2 und $4p^2$. $\beta)$ a^2 reell: $q > u$. $\gamma)$ $a < 2q$ (oder $a > u$):
 ist für beide Z. erfüllt.*) $\delta)$ $a > 2p$: für a^2 ist das obere
 Z. zu nehmen, das untere gilt für $a < 2p$.

3) $b : k = m, a$. — Aus $b : k = m$, $b \cdot h = b \cdot k$, $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

*) Geht schon aus den Bestimmungs-Gleichungen hervor.

folgt $h(am-h) = \frac{a^2}{4}$. — Determ.: $\alpha)$ h reell: $m > 1$. $\beta)$

$a < 2h$: für h ist das $\left. \begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Z. zu nehmen.

Geom. Lösung: Konstr. ein dem $\triangle BEC$ ähnliches, u. s. w. — Behandle ebenso die Fälle 4) und 5), wo m und p oder u geg. sind.

6) $h:u = m, J$. — Gleichungen: $h:u = m, u:\frac{a}{2} = a:b$,
 $2J = a \cdot h, b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$. — Daraus $h^4(h^4 + J^2) = (2J^2m)^2$. —

Aus h findet sich $a = \frac{2J}{h}$. — Ist $J = c^2$, so wird $h^2 =$

$$c \cdot \sqrt{c \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + (2mc)^2} - \frac{c}{2} \right)}.$$

Determ.: $\alpha)$ $h^4 +$ f. d. obere Z., daher h^2 reell. $\beta)$
 S. 1. $u^2 < 2h^2:2m^2 > 1$.

§ 10. Transversalen. Lineare Gleichungen.

Geg. $\angle A$ und 2 Punkte B und C auf den Schenkeln desselben. Eine Gerade $XY \parallel BC$ so zu ziehen (X auf AB , Y auf AC), dass sie noch einer Bedingung genügt.

Bezeichnungen: $BC = a, AC = b, AB = c, BX = x, AY = y, XY = z$. — Es sind 3 Fälle zu unterscheiden: A) X liegt zwischen A und B , B) X liegt auf der Verlängerung von AB , C) X liegt auf der Rückwärtsverlängerung von AB . —

Gleichungen: A) $c:x - x = b:y, z:a = y:b$.

B) $c:x + x = b:y, z:a = y:b$.

C) $c:x - c = b:y, z:a = y:b$.

Determ.: A) $x + u. < c$. B) $x +$. C) $x + u. > c$.

Man kann die Aufg. auch so fassen: Geg. $\triangle ABC$, XY ist $\parallel BC$ zu ziehen, wenn man die Erweiterungen B) und C) eintreten lässt. Soll XY nicht $\parallel BC$, sondern in einer anderen Richtung verlaufen, so ziehe man $BF \parallel$ zur letzteren. Soll Y hier speziell auf AC selbst liegen, so tritt noch die Determ. $y < b$ hinzu (für A) u. B), für C) ist diese Beschränkung nicht zu erfüllen), ausserdem muss

$\angle ABF < 2R - \angle A$ sein, wenn nicht XY in den Nebenwinkel-Raum fallen soll.

1) $BX:AY = m$. — A) $x = \frac{b \cdot c}{b + \frac{c}{m}}$. — Determ.: x stets $+ \text{ und } < c$.

B) $x = \frac{\frac{b \cdot c}{\frac{c}{m} - b}}$. — Determ.: $x + : c > bm$.

C) $x = \frac{b \cdot c}{b - \frac{c}{m}}$. — Determ.: $\alpha) x + : c < bm$. $\beta) x$ stets $> c$.

1)* Soll $XY \parallel BF$ sein, so tritt für $b:AF = p$. — Determ.: für $y < b$:

A) $\alpha) p < b: y$ stets $< b$. $\beta) p > b: p \cdot c < b(mp + c)$.

B) $\alpha) p < b: p \cdot c < b(c - pm)$. $\beta) p > b$: unmöglich.

2) $XY:BX = m$. — A) $x = \frac{ac}{a + mc}$. Determ.: x stets $< c$.

B) $x = \frac{ac}{mc - a}$. — Determ.: $x + : cm > a$.

C) $x = \frac{ac}{a - mc}$. Determ.: $\alpha) x + : cm < a$. $\beta) x$ stets $> c$.

2)* $XY \parallel BF$ analog 1)*. — Determ. für $y < b$. A) $\alpha) p < b: y$ stets $< b$. $\beta) p < b$. Ist $CH \parallel BF$, so muss sein $XY < CH$. B) $\alpha) p < b: XY > BF$. $\beta) p > b$: unmöglich.

3) Es sei $AP \perp BC$ und Q Schnittp. von AP u. XY . Dann soll $XY:PQ = m$ sein, d. h. es soll dem $\triangle$ ein Rechteck mit geg. Seitenverhältnis eingezeichnet werden, dessen eine Seite auf BC fällt. — $AP = h$, $PQ = u$.

A) $u = \frac{ah}{a + mh}$. — Determ.: u stets $< h$. — B) $u = \frac{ah}{mh - a}$. — Determ.: $u + : m \cdot h > a$. — C) $u = \frac{ah}{a - mh}$. — Determ.: $\alpha) u + : m \cdot h < a$. $\beta) u$ stets $> h$.

4) $BX:XY = XY:AY$. — Zu den eingangs angeführten Gleichungen tritt noch $x \cdot y = z^2$.

A) $x = \frac{a^2 c}{a^2 + bc}$. — Determ.: x stets $< c$.

B) $x = \frac{a^2 c}{bc - a^2}$. — Determ.: $x + : bc > a^2$.

C) $x = \frac{a^2 c}{a^2 - bc}$. — Determ.: $\alpha) x + : bc < a^2$. $\beta) x$ stets $> c$. — 4)* analog 1)*.

5) $BX:XY = XY:AX$. — A) $x = \frac{a^2 c}{a^2 + c^2}$. B) $x = \frac{a^2 c}{c^2 - a^2}$.

C) $x = \frac{a^2 c}{a^2 - c^2}$.

Determ. analog der vorigen. — 5)* $XY \parallel BF$. — Determ. analog der zu 2)*.

6) $x + m \cdot y = s$. — A) $x = \frac{c(s - mb)}{c - mb}$. — Determ.: $\alpha) x + :$ für $s \geq m \cdot b$ muss sein: $c \geq mb$. $\beta) x < c$: für $s \geq m \cdot b$ muss sein: $s \leq c$.

B) $x = \frac{c(s - m \cdot b)}{c + m \cdot b}$. — Determ.: $x + : s > m \cdot b$.

C) $x = \frac{c(s + m \cdot b)}{c + m \cdot b}$. — Determ.: $x > c : s > c$. — 6)* $XY \parallel BF$. Analog 1)*.

7) $x - m \cdot y = s$. — Man setze in 6) für $m \rightarrow m$. — Determ.: A) $x < c : s < c$. B) $x + : c > bm$. C) $\alpha) x + :$ Wie 6) A) α . — $\beta) x > c$: für $s \geq mb$: muss sein $s \leq c$.

8) $m \cdot y - x = s$. — Man setze in 6) für $m \rightarrow m$ und für $s \rightarrow s$.

Determ.: A) $\alpha) x + : mb > s$. $\beta) x$ stets $< c$. B) $x + :$ für $s \geq mb$ muss sein $c \leq mb$. C) $\alpha) x + : mb > c$. $\beta) x$ stets $> c$.

Spez. Fall von 8): $XY \parallel BC$ so zu ziehen, dass der Umfang des Dreiecks $AXY =$ dem des Trapezes $BCYX$.

Es ist $m = 1$, $2s = a + b - c$, und man erhält für A) $x = \frac{c(b + c - a)}{2(b + c)}$. — Determ.: Stets möglich, da $b > a - c$.

Ist $XY \parallel BF$, so wird in diesem spez. Falle $x = \frac{c}{2(p + c)}$ ($2p + c = (a + b)$). — Determ.: $\alpha) x + : 2p > a + b - c$.

$\beta) y < b$: 1) $p < b$: y stets $< b$. 2) $p > b$: $p(a + c - b) < 2b \cdot c$.

$$9) PQ + m \cdot XY = s. \text{ S. 3. — A) } u = \frac{h(m \cdot a - s)}{m \cdot a - h}.$$

Determ.: $\alpha) u +$: für $s \geq m \cdot a$ muss sein $h \geq m \cdot a$. $\beta) u < h$: für $s \geq am$ muss sein $s \leq h$.

Z. B. $m = 1$, d. h. dem $\triangle$ ein Rechteck von geg. Umfang $= 2s$ einzuzeichnen: $u = \frac{h(a-s)}{a-h}$. — Bilde die Lösungen für B) und C)!

10) Behandle ebenso $PQ - m \cdot XY = s$ und 11) $m \cdot XY - PQ = s$.

12) $BX + m \cdot CY = s$. — A) $x + m \cdot (b - y) = s$. Setze in 7, A) für $s s - m \cdot b$. B) $x + m \cdot (y - b) = s$. Setze in 6, B) für $s s + m \cdot b$. C) $x + m \cdot (y + b) = s$. Setze in 6, C) für $s s - mb$.

13) $BX - m \cdot CY = s$. — A) Setze in 6, A) für $s s + m \cdot b$. B) Setze in 7, B) für $s s - m \cdot b$. C) Setze in 7, C) für $s s + m \cdot b$.

14) $m \cdot CY - BX = s$. — A) Setze in 6, A) für $s m \cdot b - s$. B) Setze in 8, B) für $s m \cdot b + s$. C) Setze in 8, C) für $s s - m \cdot b$.

15) und 16) $BX + m \cdot XY = s$. — Vertausche in den Lösungen von 6) u. 7) b mit a .

17) $XY = m \cdot (BX + AY)$. — Zu den allgemeinen Gl. tritt $z = m \cdot (x + y)$. A) $x = \frac{c(a - m \cdot b)}{mc + a - mb}$.

Determ.: $\alpha) x +$: für $a > mb$ ist x stets $+$, für $a < mb$ muss sein $m(b - c) > a$. $\beta) x < c$ nur für $a > mb$.

B) $x = \frac{c(a - mb)}{mc - (a - mb)}$. — Determ.: $x +$: für $a > mb$ muss sein $m(b + c) > a$, für $a < mb$: $m(b + c) < a$, d. h. m jedenfalls < 1 .

C) $x = \frac{c(mb - a)}{mc + mb - a}$. — Determ.: $\alpha) x +$: für $a < mb$ ist x stets $+$, für $a > mb$ muss sein $m(b + c) < a$, d. h. m jedenfalls < 1 . $\beta) x > c$ nur für $a > mb$.

$$18) XY = m \cdot (BX - AY). \quad - \quad A) \quad x = \frac{c(a+mb)}{mc+a+mb}.$$

Determ.: x stets $+$ und $< c$.

$$B) \quad x = \frac{c(a+mb)}{mc-(a+mb)}. \quad - \quad \text{Determ.: } x + : mc > a + mb.$$

a) $c < b$: unmöglich. b) $c > b$: $m(c-b) > a$, d. h. m jedenfalls > 1 .

$$C) \quad x = \frac{c(a+mb)}{a+mb-mc}. \quad - \quad \text{Determ.: } x + : mc < a + mb.$$

a) $c < b$: x stets $+$. b) $c > b$: $m(c-b) < a$.

Behandle ebenso 19) $XY = m \cdot (AY - BX)$, 20) $XY = BX - m \cdot AY$, 21) $XY = m \cdot AY - BX$.

22) $XY = m \cdot (BX + CY)$. — Zu den allgemeinen Gl. tritt hier in A) $z = m(x + b - y)$, in B) $z = m(x - b + y)$, in C) $z = m(x + b + y)$.

$$A) \quad x = \frac{a \cdot c}{a+m(b+c)}. \quad - \quad \text{Determ.: } x \text{ stets } < c.$$

$$B) \quad x = \frac{a \cdot c}{m(b+c)-a}. \quad - \quad \text{Determ.: } x + : m(b+c) > a.$$

C) $x = \frac{a \cdot c}{a-m(b+c)}$. — Determ.: a) $x + : a > m(b+c)$, d. h. m jedenfalls < 1 . β) x stets $> c$.

$$23) XY = m \cdot (BX - CY). \quad - \quad A) \quad x = \frac{a \cdot c}{a+mc-mb}.$$

Determ.: a) $x +$: für $b > c$ muss sein $a > m(b-c)$, für $b < c$ ist x stets $+$. β) $x < c$ nur für $b < c$.

B) $x = \frac{a \cdot c}{mc-mb-a}$. — Determ.: $x +$: a) $c < b$: unmöglich. b) $c > b$: $m(c-b) > a$, d. h. m jedenfalls > 1 .

C) $x = \frac{a \cdot c}{a+bm-cm}$. — Determ.: a) $x +$: a) $c < b$: x stets $+$, b) $c > b$: $m(c-b) < a$. β) $x > c$ nur für $c > b$.

Wie geht die Lösung für $XY = m \cdot (CY - BX)$ aus der vorigen hervor?

24) und 25) Behandle ebenso: $XY = BX + m \cdot CY$.

26) $XY = m(BX + AY) + t$, worin t irgend eine geg. Strecke bedeutet.

A) $x = \frac{c(a-mb+t)}{a-mb+mc}$. — Determ.: a) $x +$: a) Ist $a+t > mb$, so muss auch sein $: a > m(b-c)$: von selbst für $b < c$ er-

füllt. b) $a + t < mb : a < m(b - c)$, für $b < c$ unmöglich. —
 $\beta) x < c$: Für a) muss $t < mc$, für b) $t > mc$ sein. —
 Löse noch B) und C).

Transversalen im Trapez.

Geg. Trapez $BCDE$. $XY \parallel BC$ so zu ziehen (X auf BE), dass noch einer Bedingung genügt wird. — Ist der Schnittpunkt der Verlängerungen von BE und CD A , so sind in Bezug auf die Lage von X gegen die P. A und B dieselben Fälle wie in § 10 zu unterscheiden. Bezeichnungen: $BC = a$, $CD = d$, $DE = e$, $BE = f$, $AB = c$, $AC = b$. —

Da $c:f = b:d = a:a - e$, so können b und c und damit die früheren Formeln, soweit sie direkt anwendbar sind, durch die Seiten des Trapezes ausgedrückt werden.

Solche unmittelbar übertragbare Aufgaben haben überhaupt nur dann eine besondere Bedeutung, wenn die Determ. $x < f$ oder $y < d$ eingeführt wird. — Eine direkte Lösung erhält man, wenn man $DK \parallel BE$ zieht (K auf BC). In manchen Fällen kann man hierdurch die Resultate ebenfalls den früheren durch Buchstaben-Vertauschung entnehmen, indem man a mit $a - e$, c mit f , b mit d vertauscht, z. B. in 4), 5), 6), u. a. m.

1) $BX:DY = m$. — Ziehe $DK \parallel BE$ (K auf BC) und vergl. § 10, 1. — Dabei beachte, dass XY schon den Raum des Scheitelwinkels von $\angle CDK$ schneidet, wenn $x > f$ wird. Für $x < AB$ muss sein nach C: $af < med$. — Ist XY nicht $\parallel BC$, sondern $\parallel BF$, so ziehe $DI \parallel BE$ (I auf BF) und vergl. § 10, 1.* In der Determ. dafür, dass Y auf CD selbst liegt, kommt noch hinzu $\angle ABF > \angle ABD$ und, falls X auch zwischen B und E liegen soll: $x < f$.

Allgemeine Behandlung: Geg. auf dem einen Schenkel des $\angle A$ ein P. B , auf dem andern zwei P. F und D . Ziehe $XY \parallel BF$ so, dass $BX:DY = m$. A) X zwischen B und A . I) $AY > AD$. — $AF = p$, $AD = q$,

$$x = \frac{c(p - q)}{p + \frac{c}{m}} \quad \text{Determ.: } x \text{ stets } + \text{ und } < c.$$

II) $AY < AD$, $x = \frac{c(q-p)}{\frac{c}{m}-p}$. Determ.: $\alpha) x + :$ Für

$q > p$ muss sein $m \cdot c > p$. $\beta) x < c : mq < c$.

B) X auf der Verl. von AB : I) $x = \frac{c(p-q)}{\frac{c}{m}-p}$. Determ.: x

$+ :$ analog A) II.

II. $x = \frac{c(q-p)}{\frac{c}{m}+p}$. Determ.: $x + : q > p$.

C) X auf der Rückwärts-Verl. von AB : I) $x = \frac{c(q-p)}{\frac{c}{m}-p}$.

Determ.: $\alpha) x + :$ analog A) II. $\beta) x > c : mq > c$.

II) $x = \frac{c(q+p)}{\frac{c}{m}+p}$. Determ.: $x > c : mq > c$. —

Soll speziell im Trapez $BCDE$ X sich nur zwischen B und E , Y nur zwischen C und D bewegen, so gilt für x nur der Wert A I) mit der Beschränkung $x < f$, ausserdem muss sein $\angle ABF > \angle ABD$ und $y < d$. Letztere Bedingung ist für $p - q < d$ stets, für $p - q > d$ dann erfüllt, wenn $mpd > c(p - q - d)$. (Vergl. die entsprechende Determ. in § 10,1*), A.) —

2) $XY : BX = m$. a) Identisch mit § 10,2. — X liegt zwischen B und E , wenn $x < f$, d. h. nach A, wenn $a(c - f) < c \cdot mf$, oder mit Rücksicht auf $c : f = a : a - e$, wenn $e < m \cdot f$. —

2)* $XY \parallel BF$. — Wie § 11,2*). — Soll X zwischen B und E , Y zwischen C und D liegen, so muss sein 1) $x < f$, 2) $\angle ABF > \angle ABD$, 3) $\alpha) DF > DC$. Zieht man CH und $EG \parallel BF$, so muss sein $EG < XY < CH$. — $\beta) DF < DC$. Zieht man $DM \parallel BF$, so muss sein $DM > XY$. —

b) Direkt: Ziehe $DK \parallel BE$, Z Schnittp. von DK u. XY :

Gl.: A) X zw. B und A : $\frac{z-e}{a-e} = \frac{f-x}{f} = \frac{y}{d}$. B) x auf der Verl.

von $DK: \frac{z-e}{a-e} = \frac{f+x}{f} = \frac{y}{d}$. C) x auf der Rückwärtsverl.

von $BA: \frac{z+e}{a-e} = \frac{x-f}{f} = \frac{y}{d}$. — *).

3) Dem Trapez ein Rechteck mit geg. Seitenverhältnis einzuzeichnen, dessen eine Seite auf BC fällt. —

a) Aus § 10,3. — Ist $DR \perp BC$ und $=k$, so liegt X zwischen B und E für $u < k$, was mit Bezug auf $a:h = a-e:k$ $e < mk$ giebt. — b) Direkt wie 2). —

4) und 5) $Bx + m \cdot DY = s$. — Ziehe $DK \parallel BE$, so sind die Aufg. identisch mit § 10,6 und 7). — Vergl. 1). —

6) $m \cdot DY - BX = s$. — Vergl. § 11,8. — Spez. Fall: Umfang des Trapezes $BCYX =$ dem des Trap. $XYDE$. —

Je nachdem $a+d \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} e+f$, ist $y-x=s$ oder $x-y=s$ (§ 10, 7) zu setzen. —

Für $XY \parallel BF$ berücksichtige noch die Bedingungen 1) $x < f$, 2) a) $\angle EBD < \angle EBF$, b) $y < d$.

Hierher auch die § 10, No. 12, 13, 14 entsprechenden Aufgaben.

7) Dem Trapez ein Rechteck mit geg. Umfange einzuschreiben.

a) Identisch mit § 10, 9. — $u = \frac{k(a-s)}{(a-e)-k}$. Determ. $\alpha) u + :$ für $a \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} s$ muss sein $a-e \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} k$.

$\beta) u < k$: für $a \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} s$ muss sein $s \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} k+e$.

b) Ziehe $DK \parallel BE$ u. s. w., **) —

8) $BX + m \cdot XY = s$. — a) Identisch mit § 10, 15 und 16. Dazu noch die Bedingung $x < f$. — b) Wie bei 7, b). —

In § 10, 22–25 sind die analogen Trapez-Aufg. ohne weiteres enthalten. — Die Aufg. $XY = m (BX + DY)$ im

*) Bei A) ist noch zu unterscheiden, ob $BX \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} BE$.

**) In a) erhält man u , wenn man in der Dreiecksformel für $h \frac{ak}{a-e}$, in b), wenn man für a $a-e$ und s $s-e$ setzt. — In 8b) hat man für a $a-e$, für c f und für s $s-m \cdot e$ zu substituieren.

Trapez geht aus 26) durch die Substitution $t = -e$ hervor.
— Dieselbe kann auch analog 1) allgemein behandelt werden.
Dann wird dabei 22) in § 10 mit gelöst.

§ 11. Transversalen. Lineare Gleichungen. Fortsetzung: Teilungen.

1) Geg. $\angle A$ und auf dem einen Schenkel desselben Punkt P . PE so zu ziehen, dass $\triangle APE$ den geg. Inhalt i hat. —

Aufl. Man fälle $EG \perp AP$ und setze $AP = p$, so ist $EG = \frac{2i}{p}$.

Geometr. Lösung. Verwandle i in ein $\triangle$ mit $\angle A$ und dieses in ein anderes mit Ecke P . —

Anwendung: Von einem auf der Seite AB des $\triangle ABC = I$ gelegenen P . P (oder speziell einer Ecke) aus $\triangle PAE = i$ abzuschneiden. Liegt E auf der Verlängerung von AB , und soll i ganz innerhalb I fallen, so mache man entweder $\triangle PCG = i - \triangle PCA$, oder $\triangle PBG = I - i$. Kürzer geometrisch: Ziehe durch E die Parallele zu PC und verbinde den P , in welchem diese BC schneidet, mit P .

Spez. Fall: $\triangle ABC$ von P aus in n gleiche Teile zu teilen. Setze $i = \frac{m}{n} \cdot I$, so ist $EG = \frac{2 \cdot m \cdot I}{n \cdot p}$. Oder:

Ziehe PC , wodurch $\triangle APC = F$ entsteht. Dann ist $AE:AC = \frac{m}{n} \cdot I:F$, und da $I:F = AP:AB$, ist auch $AE:AC = \frac{m}{n} \cdot AP:AB$, woraus AE folgt. —

2) Vieleck $ACDE \dots = I$ von A aus in n gleiche Teile zu teilen. —

Ziehe AC und schneide von A aus im $\triangle ABC$ die Dreiecke ABM , AMN u. s. w. $= \frac{I}{n}$ ab. Sei AX die letzte dieser Geraden, so dass $\triangle AXC = f < \frac{I}{n}$. Schneide nun vom $\triangle ACD$ $\triangle ACY = \frac{I}{n} - f$, $\triangle AYZ = \frac{I}{n}$ ab, u. s. w.:

oder kürzer: verlängere XC bis z. Schnittp. U mit der nächsten auf $\angle B$ bezüglichen Teilungslinie (sodass also $\triangle AXU = \frac{I}{n}$) und trage $\triangle ACU$ in $\angle ACD$ ein (ziehe durch U die Parallele zu AC u. s. w.), u. s. w.

Sind konvexe Winkel vorhanden, so ist dann, wenn eine oder mehrere der von A aus gezogenen Diagonalen ausserhalb des Vielecks fallen, die Teilung erst nach vorhergegangener Lösung der Aufgabe möglich: ein $\triangle$ v. e. ausserhalb gelegenen P . aus zu teilen, vergl. § 13.

3) $\triangle ABC$ von einem P . P im Innern aus in n gleiche Teile zu teilen. —

Ziehe PA, PB, PC und schneide etwa vom $\triangle PAB$ von AP aus $\frac{I}{n}$ ab, u. s. w. $\rightarrow$ Entsprechend wird ein Vieleck ohne konvexe Winkel von einem Punkte im Innern aus geteilt. —

§ 12. Transversalen. Rein-quadratische Gleichungen.

Geg. $\angle A$ und 2 P . B und C auf den Schenkeln. Bezeichnungen wie in § 10.

Ziehe $XY \parallel BC$ so, dass 1) $BX \cdot CY = p^2$, (p eine geg. Strecke). — Für alle 3 Lagen des P . X ist $x^2 = \frac{c \cdot p^2}{b}$.

— Determ.: A) $x < c: p^2 < b \cdot c$. — B) $x > c: p^2 > b \cdot c$. —

2) $XY \cdot AY = p^2$. — $y^2 = \frac{b \cdot p^2}{a}$. Determ.: A) $y < b: p^2 < ab$. —

Teilungen und Verwandlungen.

3) Geg. $\angle A$ und die P . B und C auf den Schenkeln. Ziehe $XY \parallel BC$ so, dass $\triangle AXY = i$. —

a) Ist wieder $AB = c$, $\triangle ABC = I$, so ist $AX^2: c^2 = i: I$, daraus AX . — Ist die zu c gehörige Höhe im $\triangle ABC = k$, so wird $AX^2 = \frac{2i \cdot c}{k}$. — Z. B. $i = \frac{m}{n} I: AX^2 = \frac{m}{n} \cdot c^2$.

b) Führt man AQ (§ 10, 3) ein, so ist analog $AQ^2 = \frac{2i \cdot h}{a}$.

3*) Soll der Inhalt des Trapezes $BXYC = F$ sein, so ist $i = I - F$. Daher z. B. $AD^2 = \frac{I-F}{I} \cdot c^2 = c^2 - \frac{2F \cdot c}{k}$ oder $AQ^2 = h^2 - \frac{2F \cdot h}{a}$.

4) Von $\triangle ABC = I$ durch $XY \parallel BF$ $\triangle AXY = i$ abzuschneiden.

I) $AF < AC$. a) $i < \triangle ABF$: schneide wie vorhin i von $\triangle ABF$ ab. b) $i < \triangle ABF$: schneide im $\triangle BCF$ durch $XY \parallel BF$ $\triangle CXY = I - i$ ab, falls kein Teil von i ausserhalb $\triangle ABC$ fallen soll, was nur für $i < I$ möglich ist.

II) $AF > AC$. Ziehe $CG \parallel BF$. a) $i < \triangle ACG$: schneide i von $\triangle ACG$ ab.

b) $i > \triangle ACG$: schneide im $\triangle BCG$ durch $XY \parallel CG$ $\triangle I - i$ ab, falls i wieder ganz innerhalb $\triangle ABC$ liegen soll. —

Spez. Fall: $i = \frac{m}{n} I$. Trage $\frac{I}{n}, \frac{2I}{n}$ u. s. w. in $\triangle ABF$ von A aus ein, bis die m te Teilungslinie über BF oder CG hinausfallen würde. Dann schneide im $\triangle BCF$ bez. $\triangle BCG$ von C bez. B aus $\frac{I}{n}, \frac{2I}{n}$ u. s. w. bis $\frac{n-m}{n} I$ ab, so ist das übrig bleibende Viereck das letzte n tel. —

5) $\triangle ABC$ in $\triangle AXY$ zu verwandeln, in welchem $XY \parallel BF$.

a) Sei die zu $AB = c$ gehörige Höhe im $\triangle ABF = l$, so ist nach 1) $AX^2 = \frac{2i \cdot c}{l}$, oder, da $2i = c : k$ ist: $AX^2 = \frac{c^2 \cdot k}{l}$. b) Einfacher: setzt man $AF = p$, so ist $AY^2 = \frac{i}{I} p^2 = b \cdot p$, da ja $i : I = b : p$. — c) Fälle XM und $BN \perp AC$, so ist sowohl $AY : XM = b : BN$, als auch $AY : p = XM : BN$, woraus wieder $AY^2 = l \cdot p$. — d) Da $\triangle ABC$ und $\triangle AXY$ $\angle A$ gemein haben, so ist $b \cdot c = AX \cdot AY$, ausserdem $AY : p = AX : c$.

5)* $\triangle ABC$ in $\triangle AXY$ zu verwandeln, in welchem $XY \parallel BC$ und für $\angle BAC$ ein anderer Winkel XAY getreten ist. — 1) Es sei $AX = x, AY = y, D$ Schnittp. von

AY und BC , $BD = d$, so ist $x \cdot y = a \cdot c$ und $x : y = c : d$,
woraus $x^2 = \frac{a \cdot d^2}{c}$. — 2) Verwandle $\triangle ABC$ erst in ein $\triangle$
mit dem $\angle XAY$ und dieses in ein $\triangle AXY$ nach 3). —
Daran schliesst sich leicht der Fall, dass XY nicht $\parallel BC$,
sondern $\parallel BF$ sein soll. —

Aufgaben über das Trapez.

6) Aufg. 3)* lautet allgemein: $XY \parallel BC$ so zu
ziehen, dass Trapez $BCXY = F$ sei. —

A) X zwischen A und B , $i = I - F$: $AQ^2 = h^2 - \frac{2F \cdot h}{a}$.

Determ.: $\alpha)$ AQ reell: $I > F$. $\beta)$ AQ stets $< h$.

B) X auf der Verl. von AB : $i = I + F$, $AQ^2 = h^2 + \frac{2F \cdot h}{a}$. Determ.: Stets möglich. C) auf der Rückwärts-

Verl. von AB : $i = F - I$: $AQ^2 = \frac{2F \cdot h}{a} - h^2$.

Determ. AQ reell: $I > F$. —

Ist noch $DE \parallel BC$ geg. ($DE < BC$), so stellt A) die
Aufgabe dar:

Vom Trapez $BCDE$ durch $XY \parallel BC$ ein Trapez mit
der Fläche F abzuschneiden. Ist h die Höhe des Trapezes,
 e die kleinere Parallele (DE), so ist $h = \frac{k \cdot a}{a - e}$. Soll XY
speziell zwischen BC und DE liegen, so muss sein $AQ >$
 $h - k$ oder $k(a + e) > 2F$. —

Direkte Lösung. Ziehe $DK \parallel BE$ und setze $XY = z$,
den zwischen XY und BC gelegenen Höhenabschnitt $= u$,
so ist 1) $(a + z) \cdot u = 2 \cdot F$. 2) $k : k - u = a - e : z - e$, woraus
 $z^2 = a^2 - \frac{2F(a - e)}{k}$.

Determ.: $\alpha)$ z reell: $\frac{a^2 k}{a - e} > 2F$, d. h. $a \cdot h > 2F$ wie
oben. $\beta)$ $z < e : k(a + e) > 2F$.

Löse ebenso B) und C) direkt: B) $z^2 = a^2 + \frac{2F(a - e)}{k}$.

C) $z^2 = \frac{2F(a - e)}{k} - a^2$.

Spez. Fall: Teilung des Trapezes in n gleiche Teile:

$2F = \frac{m}{n} \cdot (a+e) \cdot k$. Man erhält in A) $z^2 = a^2 - \frac{m}{n}$.
 $(a^2 - b^2)$ und $AQ^2 = h \left(h - \frac{m}{n} \cdot \frac{h(a^2 - e^2)}{a^2} \right)$ oder auch $AQ =$
 $\frac{k}{a-e} \sqrt{a^2 - \frac{m}{n} \cdot (a-e)^2}$.

7) Trapez $BCDE$ unter Beibehaltung von BC und $\angle C$ in Trapez $BCXY$ zu verwandeln, in welchem $\angle XBC$ geg. ist. — Schneiden sich BX und CY in O , so liegt Aufg. 6, A) vor.

a) Schneidet BX DE in M und ist $DM = g$, so hat man F mit $\frac{(a+e) \cdot k}{2}$ und e mit g zu vertauschen. Dann wird $z^2 = g(a+e) - a \cdot e$.

b) Verlängert man BX u. CD bis O u. fällt $OQ \perp XY$, so ist nach 6, A) $OQ^2 = h^2 - \frac{h(a+e)}{s} \cdot k$.

Determ.: X zwischen A und O , so lange $\triangle BCO >$ Trapez $BCDE$. — Ist $\triangle BCO <$ Trapez $BCDE$, so vergl. 6, C) und B).

8) Trapez $BCDE$ in Trapez $BGYX$ zu verwandeln, in welchem $BG = s$ geg. u. $GY \parallel CD$ ist. — A) a) Verlängere BX u. GY bis O und falle $OQ \perp XY$, so ist wie vorhin $OQ^2 = h^2 - \frac{h(a+e)}{s} \cdot k$. — Determ.: $\triangle BOG >$ Trapez $BCDE$. — b) Ziehe DH u. $YJ \parallel BE$ u. setze XY wieder $= z$, die Höhe des neuen Trapezes $= u$, dann ist $(a+e) \cdot k = (s+z) \cdot u$ u. $u:k = s-z:a-e$, woraus $z^2 = s^2 - (a^2 - e^2)$.

Anmerkung: Für u erhält man eine quadr. Gleichung von der Form $x(a-x) = p^2$. Von den beiden Wurzeln kann nur die kleinere gebraucht werden, weil die grössere für z etwas Negatives geben würde. (Die grössere ist $h-u$).

Behandle ebenso B) und C). — Schneidet in 7) BX die Seite CD zwischen C u. D , oder in 8) GY die Seite BE zw. B u. E (ist also $s < a-b$), so vergl. 6 C), oder, falls es nur auf die Richtungen von BX , bez. GY , nicht auf $\angle ABC$, bez. $\angle YGB$ selbst ankommt, 6, B).

9) Trapez $BCDE$ in Trapez $BGYX$ zu verwandeln, in welchem $BG = s$ und die Richtungen der nicht parallelen

Seiten geg. sind. — A) a) Schneiden BX u. GY die Seite DE in M und N , so ziehe YJ und $NH \parallel BM$ und setze $MN = g$. Dann ist $(a+e) \cdot k = (s+z) \cdot u$ u. $u:k = s-z:s-g$, woraus $z^2 = s^2 - (a+e) \cdot (s-g)$. — b) Für OQ erhält man denselben Wert wie in 7) und 8), alle diese Aufg. sind also nicht wesentlich verschieden. Die Determ. lautet immer: $\triangle BGO > \text{Trapez } BCDE$.

Spez. Fall: Ist das geg. Trapez ein $\triangle BCD$ mit der Höhe k , d. h. $e = 0$, so ist $z^2 = s^2 - a(s-g)$ und $OQ^2 = h^2 - \frac{h \cdot a \cdot k}{s}$. Für $s = a$ wird $z^2 = ag$, $OQ^2 = h(h+k)$.

Ein Vieleck durch Parallelen in gleiche Teile zu teilen.

a) Die Richtung der Parallelen ist die einer Seite AB des Vielecks.

1. Lösung. Verwandle das Vieleck in ein $\triangle$, dessen eine Seite auf AB fällt, teile das $\triangle$ durch Parallelen zu AB nach 1, a) und trage die entstehenden Trapeze nach der Aufg. 7) in das Vieleck von AB aus ein. Aus dem Vieleck herausfallende Figuren werden als Trapeze in das Vieleck wieder eingetragen.

2. Lösung. Sei der Inhalt des Vielecks $= J$, so trage man $\frac{J}{n}$ von AB oder auch einer Ecke beginnend ein und verfähre mit herausfallenden Figuren wie vorher. $\frac{J}{n}$ erhält man z. B. einfach, wenn man das Vieleck in ein Dreieck verwandelt und dasselbe durch Gerade von einer Ecke aus teilt.

b) Keine der Vielecksseiten hat die geg. Richtung.

1. Lösung. Verwandle das Vieleck in ein $\triangle$, dessen eine Seite auf eine Vielecksseite fällt, teile dasselbe durch Parallelen zur geg. Richtung und trage die Teile, etwa von einer Ecke aus beginnend, ein.

2. Lösung. Verwandle das Vieleck in ein anderes, in welchem eine Seite XY die geg. Richtung hat, und verfähre wie bei a). Sei z. B. im Vieleck $ABCD \dots NBB'$ parallel zu dieser Richtung gezogen (B' zwischen A u. N) gelegen),

so verwandle $\triangle ABB'$ in Trapez $BB'XY$ (Aufg. 7) oder $\triangle ZAB$, das durch Verlängerung der Seiten AC und BC entsteht, in $\triangle ZXY$. — 3. Lösung. Man trage von irgend einer Ecke aus $\frac{J}{n}$ ein u. s. w. wie bei a), 2. Lösung. — a) und b) unterscheiden sich also nicht, wenn die Eintragung von einer beliebigen Ecke aus vorgenommen werden kann.

§ 13. Transversalen. Gemischt-quadratische Gleichungen.

Geg. $\angle A$ und 2 P. B u. C auf den Schenkeln. $XY \parallel BC$ so zu ziehen, dass noch eine Bedingung erfüllt wird.

1) $BX \cdot AY = p^2$. — A) $x \cdot (c - x) = \frac{p^2 \cdot c}{b}$. — Determ.:

a) Die beiden Z. geben 2 Punkte x . β) x reell: $p^2 < 4b \cdot c$.

γ) x stets $< c$. — B) $x(c + x) = \frac{p^2 \cdot c}{b}$. Determ.: $x +$ f. d.

obere Z. — C) $x(x - c) = \frac{p^2 \cdot c}{b}$. Determ.: α) $x +$ f. d. obere

Z. β) x stets $> c$.

1)* Im Trapez $BCDE$ soll sein: $BX \cdot DY = p^2$. Ziehe $DK \parallel BE$, so ist für $\triangle KDC$ die Aufg. identisch mit 1. Determ.: A) X zwischen B u. E . x reell: $p^2 < 4df$. Ist

$BA > x > BE$, also $x < \frac{af}{a-e}$, so muss nach 1, C) sein:

$$p^2 < \frac{adef}{(a-e)^2}.$$

2) $BX \cdot XY = p^2$. — A) $x(c - x) = \frac{p^2 \cdot c}{a}$. Determ.:

a) Die beiden Z. geben 2 P. X . β) x reell: $4p^2 < ac$. γ)

x stets $< c$. — B) $x(c + x) = \frac{p^2 \cdot c}{a}$. Determ.: $x +$ f. d.

obere Z. — C) $x(x - c) = \frac{p^2 \cdot c}{a}$. Determ.: α) $x +$ f. d. obere

Z. β) x stets $> c$.

2)* Im Trapez $BCDE$ soll sein $BX \cdot XY = p^2$.

Identisch mit 2), wenn man BE u. CD bis A verlängert. $c = \frac{af}{a-e}$. Determ.: A) 1) x reell: $4p^2 < \frac{a^2 f}{a-e}$.

2) $x < f$: a) Oberes Z.: $\alpha) a < 2e$: unmöglich. $\beta) a > 2e$: $p^2 > e.f.$ b) Unteres Z.: $\alpha) a > 2e$: $p^2 < e.f.$ $\beta) a < 2e$: unmöglich.

Es liegt also immer bloss der eine der beiden P. X zwischen B u. E , der andre zw. E u. A . — Direkte Lösung: Ziehe $DK \parallel BE$ u. s. w.

3) Dem $\triangle ABC$ ein Rechteck $XYNM$ mit dem Inhalt i einzubeschreiben, so dass MN auf BC fällt. — Es sei $AP \perp BC$, Q der Schnittp. v. AP u. XY , $PQ = u$, $AP = h$. —

A) $u(h - u) = \frac{i \cdot h}{a}$. — Determ.: $\alpha) u +$ für beide Z., also 2 P. Q und daher zwei verschiedene Rechtecke. $\beta) u$ reell: $4i < ah$, oder $2i < \triangle ABC$. $\gamma) u$ stets $< h$. — Z. B. $i = m \cdot \triangle ABC$, worin $2m < 1$ sein muss, giebt $2u = h + \sqrt{(1 - 2m) \cdot h^2}$. — B) $u \cdot (u + h) = \frac{i \cdot h}{a}$. — Determ.: $u +$ f. d. obere Z. — C) $u(u - h) = \frac{i \cdot h}{a}$. Determ.: $u +$ f. d. obere Z. und stets $> h$. — In B) u. C) existiert also immer eine, aber auch nur eine Lösung.

3)* Dieselbe Aufg. für das Trapez. — Identisch mit 3).

$h = \frac{k \cdot a}{a - e}$. Determ.: A) 1) u reell: $4i < \frac{a^2 k}{a - e}$.

2) $u < k$: a) Oberes Z.: Für $a < 2e$ ist u stets $> k$. Für $a > 2e$ muss sein $i > ek$. b) Unteres Z. Für $a < 2e$ muss sein $i < ek$. Für $a > 2e$ ist stets $u < k$. — Z. B. $i = m$. Trapez giebt $u = \frac{k}{2(a - e)} (a + \sqrt{a^2 - 2m(a^2 - e^2)})$.

Determ.: u reell: $a^2(2m - 1) \leq 2me^2$, stets erfüllt, wenn $2m < 1$. — $u < k$: a) Oberes Z. Für $a < 2e$ unmöglich. Für $a > 2e$ muss sein $m(a + e) > 2e$ oder $ma > (2 - m)e$, stets für $m > \frac{2}{3}$ erfüllt. b) Unteres Z. Für $a < 2e$ muss sein $m(a + e) < 2e$ oder $m \cdot a > (2 - m)e$, stets für $m < \frac{2}{3}$ erfüllt. Für $a > 2e$ ist stets $u < k$. —

4) $BX^2 + AY^2 = XY^2$. — A) $x \left(x + \frac{2c(a^2 - b^2)}{c^2 + b^2 - a^2} \right) = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{c^2 + b^2 - a^2}$

Determ.: I) $c^2 + b^2 > a^2$, d. h. $\angle A$ ist spitz. a) $a > b$: x reell und $+$ für das obere Z., ausserdem stets $< c$. b) $a < b$: x imaginär. — II) $c^2 + b^2 < a^2$, d. h. $\angle A$ stumpf. Dann ist $a > b$ und x reell und $+$ für das obere Z., aber stets $> c$. —

B) $x \left(x - \frac{2c(a^2 - b^2)}{c^2 + b^2 - a^2} \right) = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{c^2 + b^2 - a^2}$. Determ.: I) $c^2 + b^2 > a^2$. a) $a > b$: x reell und $+$ für das obere Z. b) $a < b$: x imaginär oder —. II) $c^2 + b^2 < a^2$: x stets —, daher B) bloss für das spitzw. $\triangle$ möglich. (Dass I b) und II unbrauchbar sein müssen, geht sofort aus der Gleichung für diese Fälle hervor.)

C) Man erhält für x dieselbe Gleichung wie in A). Daher lautet die Determ.: x reell, $+$ und $> c$ für $c^2 + b^2 < a^2$, d. h. für ein stumpfw. $\triangle$. —

Ist $\angle A$ ein Rechter, so sind B) und C) unmöglich, für A) ist $x = \frac{c}{2}$. —

Behandle ähnlich: 5) $BX^2 - AY^2 = XY^2$, 6) und 7) $BX^2 \pm CY^2 = XY^2$, 8) $BX^2 + XY^2 = AY^2$. —

9) $BY = y$ (Y auf AC) so zu ziehen, dass $BY^2 = AY \cdot CY$.

$AY = x$, $BH \perp AC$ und $AH = p$. — A) $AY > AC$. I) $\angle A$ spitz. Gl.: 1) $y^2 = x \cdot (x - b)$, 2) $y^2 = (c^2 - p^2) + (p - x)^2$. — $x = \frac{c^2}{2p - b}$. — Determ.: α) $x + : 2p > b$. β) $x > b$ oder, was nach der 1. Gl. dasselbe ist, y reell: $2p < b + \frac{c^2}{b}$. — II) $\angle A$ stumpf. Für $p - x$ tritt $p + x$, oder für $p - p$. — Determ.: x stets —, also unmöglich.

B) $AY < AC$. I) $\angle A$ spitz. 1) $y^2 = x(b - x)$, 2) wie in A). Daraus $x \left(\frac{2p + b}{2} - x \right) = \frac{c^2}{2}$. Determ.: α) x reell:

$2c^2 < \left(\frac{2p+b}{2}\right)^2$. β) $x < b$ (oder y reell): a) $2p > 3b$: unmöglich für das obere Z., für das untere muss sein $2p > b + \frac{c^2}{b}$.
b) $2p < 3b$: x stets $< b$ für das untere Z., für das obere, wenn $2p < b + \frac{c^2}{b}$. — II) $\angle A$ stumpf. Für p tritt $-p$. Determ.: a) $b > 2p$.
 α) x reell: $2c^2 < \left(\frac{b-2p}{2}\right)^2$. β) x stets $> b$. b) $b < 2p$: unmöglich. —

C) Y auf der Rückwärts-Verl. von AC . I) $\angle A$ spitz.
1) $y^2 = x(b+x)$, 2) $y^2 = (c^2 - p^2) + (x+p)^2$. — $x = \frac{c^2}{b-2p}$.
Determ.: $x + : 2p < b$. — II) $\angle A$ stumpf. In den Gl. A) tritt für $p - p$. — $x = \frac{c^2}{b+2p}$. Die Werte von x in C) sind entgegengesetzt gleich denen in A).

10) BY so zu ziehen, dass $AY:BY = m$. — Es gelten die vorigen Bezeichnungen. —

A) Y liegt auf dem andern Schenkel selbst. I) $\angle A$ spitz. 1) $x:y = m$. 2) $y^2 = (c^2 - p^2) + (p^2 - x)^2$. — $x(x + \frac{2m^2 \cdot p}{1-m^2}) = \frac{m^2 c^2}{1-m^2}$. Determ.: a) $1 > m$: x reell und $+$ für das obere Z. b) $1 < m$. α) $x +$ für beide Z., also 2 P. Y . β) x reell: $m^2(c^2 - p^2) < c^2$, oder wenn man $c^2 - p^2 = k^2$ setzt: $m \cdot k < c$. II) $\angle A$ stumpf. In Gl. 2) tritt für $p - p$. Determ.: a) $1 > m$: x reell und $+$ für das obere Z. b) $1 < m$: x stets $-$, also unmöglich. —

B) Y liegt auf der Rückwärts-Verl. des andern Schenkels. I) $\angle A$ spitz: identisch mit A, II. — II) $\angle A$ stumpf: identisch mit A, I. —

Geometr. Lösung. Entweder mittelst des Apollonischen Ortes oder durch Konstruktion eines $\triangle BAY$ ähnlichen Dreiecks u. s. w.

§ 14. Fortsetzung. Teilungen.

1) Im $\triangle ABC$ $XY \parallel BC$ so zu ziehen, dass sich das abgeschnittene $\triangle$ zum Rest wie dieser zum ursprünglichen $\triangle$ verhält. — $XY = z$, $PQ = u$:

$$1) \frac{z(h-u)}{(a+z) \cdot u} = \frac{(a+z) \cdot u}{a \cdot h}, \quad 2) z:a = h-u:h. \quad -$$

$u(3h-u) = h^2$. — Determ.: α) u stets reell u. + f. beide Z. β) $u < h$ nur f. d. untere Z. — u hängt nur von h , z nur von a ab. — Wie heissen die Lösungen, wenn X auf den Verlängerungen von AB liegt?

2) Der Rest soll sich zum abgeschnittenen $\triangle$ wie dieses zum ursprünglichen $\triangle$ verhalten. — Führt man $AQ = x$ ein, so erhält man $x^2(x^2 + h^2) = h^4$. Determ.: α) $x^2 +$ f. d. obere Z. β) x stets $< h$. Die Einführung von u giebt eine für $u^2 - 2uh$ quadr. Gl. — Erweitere die Aufg. wie 1).

3) Geg. $\angle A$ u. $P.O$ ausserhalb desselben. Den Winkel durch eine Gerade OXY so zu schneiden, dass $\triangle AXY = i$ wird. — Ziehe $OG \parallel AX$ (G der Schnittp. mit der verlängerten AY), falle $YF \perp AX$ und verlängere sie bis zum Schnittp. H mit OG . — $FH = k$, $OG = p$, $AX = x$, $YF = y$.

$$\text{Gl.: } 1) x \cdot y = 2i, \quad 2) y:k + y = x:p. \quad - \quad x \left(x + \frac{2i}{k} \right) = \frac{2i \cdot p}{k}. \quad -$$

Determ.: x reell u. + f. d. obere Z. — Die Konstr. ist unmöglich, wenn O innerhalb des Scheitelwinkels von $\angle A$ liegt.

Anwendung. $\angle A$ ist Winkel im $\triangle ABC$, von welchem $\triangle AXY = i$ abzuschneiden ist. X und Y sollen auf den Seiten selbst (nicht ihren Verlängerungen) liegen: a) O liegt auf der Verl. von BC . Determ.: $i < \triangle ABC$. b) O liegt so, dass OC die Seite AB in M schneidet. Determ.: $i < \triangle ACM$. c) OC schneidet die Verl. von AB . Determ.: Trifft OB die Seite AB in N , so muss sein $i < \triangle ABN$.

Spez. Fall: $\triangle ABC$ von O aus in n gleiche Teile zu teilen. — In b) u. c) schneide erst von $\triangle AMC$, bez. $\triangle ABN$ $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$ u. s. w. des $\triangle ABC$ ab, fällt dann eine Teilungslinie

auf die Verl. von AC oder AB , so schneide vom Scheitel des $\angle B$, bez. $\angle C \frac{1}{n}$ u. s. w. des $\triangle ABC$ ab.

Anmerkung. Das rein-geometrische Eintragen der ausserhalb des Dreiecks fallenden Stücke nach § 11, 1) ist hier nicht anwendbar, weil die innerhalb und ausserhalb des Dreiecks gelegenen Abschnitte der von O gezogenen Teilungslinien nicht mehr eine Gerade bilden.

Ein Vieleck durch Gerade von einem Punkte ausserhalb aus in n gleiche Teile zu zerlegen. — Sei z. B. Sechseck $ABCDEF$ geg. und O liege so, dass die Geraden OA, OB, OC, OF, OD, OE in der angegebenen Reihe auf einander folgen. Schneide von $\angle A \frac{J}{n}$ u. s. w. ab. Die letzte, mte , Teilungslinie sei OB' , B' zwischen A und B gelegen. Verlängere AF' und BC bis zum Schnittp. P und schneide von $\angle P \triangle PAB \pm \frac{m+1}{n} J$ ab, u. s. w. Die letzte, pte , dieser Geraden sei OC' , C' zwischen B und C . Verlängere AF u. CD bis Q , schneide von $\angle Q$ Viereck $QFED \pm \frac{n-(p+1)}{n} J$ ab. Die letzte, rte , dieser Teilungslinien sei OF' , F' zw. A u. F . Verlängere EF u. CD bis zum Schnittp. R , schneide von $\angle R \triangle RDE \pm \frac{n-(r+1)}{n} J$ ab. Sei die letzte, ste , dieser Geraden OD' , so schneide schliesslich von $\angle E \frac{n-(s+1)}{n} J$ ab, u. s. w.

4) Die vorige Aufg. für einen innerhalb des Winkels gelegenen $P. O$. — Die vorigen Konstruktionen und Bezeichnungen führen zur Gl. $x \left(\frac{2i}{k} - x \right) = \frac{2ip}{k}$.

Determ.: $\alpha) x + f$ beide $Z.$, also 2 Lösungen. $\beta) x$ reell: $i > 2pk$.

Anwendung. $\angle A$ ist Winkel im $\triangle ABC$. X und Y sollen auf den Seiten AB u. AC selbst liegen. — a) O auf BC : die Aufg. ist unmöglich.

b) O innerhalb des Dreiecks (O auf AB oder AC , s. § 11, 1). OC treffe AB in M , OB die Seite AC in N . $AM = d$.

Determ.: I) $i > 2pk$. II) $c > x > d$:

a) Oberes Z. α) $dk > i$. Damit $x > d$, muss sein $2i(d-p) > d^2k$ oder $i > \triangle ACM$. Damit $c > x$, muss sein $2i(c-p) < c^2k$, oder $i < \triangle ABN$. — β) $dk < i$: x stets $> d$. Für $c > x$ muss sein, falls $ck > i$: $2i(c-p) < c^2k$ oder $i < \triangle ABN$, falls $ck < i$, ist c stets $< x$, also die Lösung nicht zulässig.

b) Unteres Z. α) $dk > i$. x stets $< d$, also die Lösung nicht zulässig. β) $dk < i$. Damit $x > d$, muss sein $i < \triangle ACM$. $c > x$: falls $ck > i$, ist c stets $> x$, falls $ck < i$, muss sein $i > \triangle ABN$.

2 Lösungen erhält man also für ein reelles i dann, wenn $i > dk$ und ausserdem i sowohl $< \triangle ACM$ als auch $< \triangle ABN$.

Spez. Fall: $i = \frac{1}{n} \cdot \triangle ABC$. Determ.: I) x reell: Drückt man $\triangle ABC$ durch c und die zugehörige Höhe und k durch diese Höhe, d u. p aus, so erhält man $n \cdot 4p(d-p) < cd$. II) $c > x > d$. Setze oben für i seinen Wert.

Die Teilung des Dreiecks in n Teile durch Gerade, welche durch denselben P. O im Innern gehen, ist unmöglich, da die Abschnitte sich zum Teil decken würden.

Anwendung von 3) u. 4):

$\triangle ABC$ in ein $\triangle$ mit $\angle A$ zu verwandeln, dessen Gegenseite durch einen geg. P. P geht.

a) P ausserhalb des $\angle A$. S. Aufg. 3). b) P innerhalb. Aufg. 4).

Determ.: x reell: ist die zu c gehörige Höhe l , so muss sein $cl > 4pk$, oder, wenn man $k = \frac{l(c-p)}{c}$ substituiert: $c^2 > 4p(c-p)$, was stets erfüllt ist.

5) $\angle A$ durch XY so zu schneiden, dass $XY = s$ und $\triangle AXY = i$ wird.

Fälle von P. C auf AY und von YCF u. $YG \perp AX$. Sei $AC = b$, $CF = l$, $AF = p$, $AX = x$, $YG = y$, $AG = u$ u. $\angle A$ spitz, so ist: 1) $x \cdot y = 2i$. 2) $l : y = p : u$. 3) $s^2 = (u-x)^2 + y^2$.

— Daraus $x^2 \left(\frac{4ip}{l} + s^2 - x^2 \right) = \left(\frac{2ib}{l} \right)^2$.

Beschreibt man mit s als Radius um X einen Kreis, so

so erhält man im allgem. 2 P. Y , von denen bloss der eine brauchbar ist, da nicht beide Dreiecke den Inhalt i haben können. Man berechnet aus 1) y , welche Grösse hierdurch eindeutig bestimmt ist.

Determ.: α) Die beiden Z. geben x^2 u. $4Y^2 = y^2 + u^2$, also nur 2 congruente Lösungen. β) x^2 reell: Für $2il < p \cdot s^2$ ist x^2 stets reell. Für $2il > p \cdot s^2$ muss sein: $4il < s^2(p+b)$.

Ist $\angle A$ stumpf, so heisst die Gl. 3): $s^2 = (u+x)^2 + y^2$. — $x^2 \left(s^2 - \frac{4pi}{l} - x^2 \right) = \left(\frac{2ib}{l} \right)^2$.

Determ.: I) $s^2 > \frac{4ip}{l}$. α) Wie vorhin. β) x^2 reell: $4il < s^2(b-p)$. II) $s^2 < \frac{4ip}{l}$: x^2 wird —, d. h. unmöglich.

Soll $\triangle AXY$ innerhalb des $\triangle ABC$ liegen, so muss noch $x < c$ und $y < l$ sein.

Spez. Fall: $\triangle ABC$ in ein $\triangle AXY$ zu verwandeln, welches denselben $\angle A$ besitzt, und in welchem $XY = s$ ist: $2i = cl$. — Determ.!

Geometr. Lösung: Verwandle $\triangle ABC$ in ein $\triangle$ mit der Seite s , sodann dieses unter Beibehaltung von s in ein anderes, in welchem der s gegenüberliegende Winkel $= \angle A$ ist.

6) Geg. auf den Schenkeln des $\angle A$ die P. B u. C . XY so zu ziehen, dass $BX:AY = m$ und $\triangle AXY = i$.

Sei $BX = x$, $AY = y$, die zu AX gehörige Höhe im $\triangle AXY = z$, die zu AB gehörige im $\triangle ABC = l$.

A) X zwischen A u. B . 1. Lösung: $x:y = m$, $(c-x) \cdot z = 2i$, $z:l = y:b$. Daraus $x(c-x) = 2m \cdot \frac{i \cdot b}{l}$. — $y = x:m$. — 2. Lösung: $x:y = m$, $\triangle ABC:i = b:c:(c-x) \cdot y$.

Determ.: α) $x + f$ beide Z. β) x reell: $2mi \cdot b < \left(\frac{c}{2} \right)^2 \cdot l$. γ) x stets $< c$.

Soll XY innerhalb $\triangle ABC$ fallen, so kommt noch hinzu: δ) $y < b$. Hier sind folg. Fälle möglich:

1) Oberes Z.: a) $bm < \frac{c}{2}$: unmöglich. b) $bm > \frac{c}{2}$: für $bm > c$ ist y stets $< b$, für $bm < c$ ist $y < b$, wenn $2i > l(c - mb)$.

2) Unteres Z.: a) $bm > \frac{c}{2}$: y stets $< b$. b) $bm < \frac{c}{2}$: $2i < l(c - mb)$. — Also stets 2 Lösungen, wenn $bm > c$, ausserdem für $c > bm > \frac{c}{2}$, falls $2i > l(c - mb)$. Nur eine Lösung, wenn im letztgenannten Falle $2i < l(c - mb)$ oder wenn für $bm < \frac{c}{2}$ $2i < l(c - mb)$. Keine Lösung, wenn für $bm < \frac{c}{2}$ $2i > l(c - mb)$.

Z. B. $m = 1$. Determ.: x reell: $2ib < \left(\frac{c}{2}\right)^2 l$. $y < b$:

Für $b > c$ 2 Lösungen, ebenso für $c > b > \frac{c}{2}$, falls $2i > l(c - b)$, weil die Bedingung für die Gültigkeit des oberen Z.: $2i > l(c - b)$ sich mit der für das Reelle verträgt — $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ ist stets $> b(c - b)$ — andernfalls bloss eine. Für $b < \frac{c}{2}$ keine Lösung. —

Ist speziell $i = \frac{1}{n}$. $\triangle ABC$ und $m = 1$, so wird die Determ.: x reell: $4b < nc$. Z. B. a) $n = 2$: x reell für $b < \frac{c}{2}$, daher keine Lösung. b) $n = 4$: x reell: $b < c$. Zwei Lösungen für $b > \frac{3}{4}c$, eine für $\frac{3}{4}c > b > \frac{c}{2}$, keine für $b < \frac{c}{2}$. —

Behandle die Fälle B) und C), wo X auf der Verl. von AB liegt! —

7) Wie 6), aber $BX:CY = m$. — A) a) X zw. B und A , Y zw. C und A . —

$$x \cdot (x - (c + bm)) = m \cdot b \left(\frac{2i}{l} - c \right). \quad - \quad y = b - \frac{x}{m}.$$

Determ. für x : I) $2i > cl$. a) x reell und + f. d. obere Z. β) x stets $> c$, also unmöglich.

II) $2i < cl$. a) x reell und + f. beide Z. β) $x < c$: f. d. obere Z. unmöglich, f. d. untere Z. stets erfüllt (für $c \geq bm$). —

Determ. für y : nach der Determ. für x , II, β) gilt bloss das untere Z., dann ist y stets reell, $+$ und $< b$. —

b) X zw. B und A , Y auf der Verl. von CA . Für $b - y$ tritt $y - b$, daher für $m - m. - x (x - (c - b m)) = m \cdot b \left(c - \frac{2i}{l} \right) - y = b + \frac{x}{m}$.

Determ. für x : I) $2i > cl$. α) x reell: $2i < \frac{l(c+mb)^2}{4bm}$.

β) $x \geq 0$ + f. beide Z., wenn $c \geq bm$. γ) x stets $< c$. —

II) $2i < cl$: α) x reell und $+$ f. d. obere Z. β) x stets $< c$.

Determ. für y : y stets reell und $+$, wenn x reell und $+$, ausserdem stets $> b$. —

B) a) X auf der Verl. von AB , Y zw. A und C . — Setze in A, a) für $x - x$, für $m - m. - x (mb - c - x) = mb \left(\frac{2i}{l} - c \right) - y = b - \frac{x}{m}$.

Determ. für x : I) $2i > cl$. α) x reell: $2i < \frac{l(c+mb)^2}{4mb}$.

β) $x \geq 0$ für beide Z., wenn $mb \geq c$. —

II) $2i < cl$. x + f. d. obere Z.

Determ. für y : y stets reell und $+$, wenn x reell und $+$, ausserdem ist y stets $< b$.

b) X und Y auf den Verl. von AB und AC . — Setze in

a) für $m - m. - x (x + c + mb) = mb \cdot \left(\frac{2i}{l} - c \right)$.

Determ. für x : I) $2i > cl$: x reell und $+$ f. d. obere Z. II) $2i < cl$: x stets —, also unmöglich. — Determ. für y : y stets reell, $+$ und $> b$ f. d. obere Z. —

C) X und Y auf den Rückwärts-Verl. von AB und AC . —

$x (x - (bm + c)) = mb \left(\frac{2i}{l} - c \right)$. Vergl. A, a). —
 $y = \frac{x}{m} - b$.

Determ. für x : I) $2i > cl$. $\alpha)$ x reell und $+$ f. d. obere Z. $\beta)$ x stets $> c$. II) $2i < cl$. $x > c$ f. d. obere Z.

Determ. für y : I) y stets reell und $+$ f. d. obere Z. II) y $+$ f. d. obere Z. —

Hieran könnte man noch die Fälle schliessen, wo X auf dem einen Schenkel, X auf der Rückwärts-Verl. des anderen liegt, und umgekehrt, wo also vom Nebenwinkelraum des geg. Winkels $\triangle AXY = i$ abgeschnitten wird. —

8) Geg. $BX + AY = s$, $\triangle AXY = i$. —

$$A) x(x - (c + s)) = \frac{2ib}{l} - cs. \quad - \quad y = s - x.$$

Determ. für x : I) $\frac{2ib}{l} > cs$: x reell und $+$ f. d. obere Z., aber stets $> c$, also unmöglich.

II) $\frac{2ib}{l} < cs$: $\alpha)$ x reell und $+$ f. beide Z. $\beta)$ f. d. obere Z. ist x stets $> c$, f. d. untere Z. stets $< c$.

Determ. für y : Nach II) $\beta)$ gilt blos das untere Z.

$\alpha)$ y stets $+$. $\beta)$ $y \leq b$: a) $2b > s - c$: $2i \leq l(b - (s - c))$.
b) $2b < s - c$. y ist stets $> b$.

$$B) x(x - (s - c)) = cs - \frac{2ib}{l}. \quad - \quad \text{Determ. für } x. \text{ I) } \frac{2ib}{l} > cs.$$

$\alpha)$ x $+$ f. beide Z., wenn $c < s$. $\beta)$ x reell: $\frac{2ib}{l} < \left(\frac{s+c}{2}\right)^2$.

II) $\frac{2ib}{l} < cs$: x stets $+$ f. d. obere Z. —

Determ. f. y . I) $\alpha)$ y $+$ f. b. Z. $\beta)$ y reell, wenn x reell. $\gamma)$ $y \leq b$:

Oberes Z. a) $2b > s + c$: y stets $< b$. b) $2b < s + c$: $2i \leq l(c + s - b)$.
Unteres Z. a) $2b > s + c$: $2i \geq l(c + s - b)$. b) $2b < s + c$: y stets $> b$.

II) $\alpha)$ Nur das obere Z. ist nach der Determ. für x brauchbar. $\beta)$ $y \leq b$: wie I, $\gamma)$, oberes Z.

$$C) x(c + s - x) = cs + \frac{2ib}{l}.$$

Determ. für x . $\alpha)$ $x +$ f. beide Z. $\beta)$ x reell: $\frac{2ib}{l} < \left(\frac{c-s}{2}\right)^2$. $\gamma)$ $x > c$. a) Oberes Z. $x \geq c$ für $c \leq s$. b) Unteres Z. Wie a). —

Determ. für y . $\alpha)$ $y +$ f. beide Z., wenn $c < s$, f. d. untere allein, wenn $c > s$. $\beta)$ y reell, wenn x reell.

Anmerkung: Die Gleichungen bleiben die nämlichen, wenn man in A) u. B) y auf der Rückwärts-Verl. von AC und in C) auf AC selbst abträgt. Man erhält dann zu jedem $\triangle AXY$ noch ein $\triangle AXY'$ in den Nebenwinkelräumen des $\angle A$. Der geometrische Grund für die Gleichheit der Dreiecke AXY u. AXY' ist leicht zu sehen.

Dieselbe Bemerkung gilt für 6), sowie für 9) u. 10).

9) Geg. $BX - AY = t$. — Vertausche in 8) s mit t und b mit $-b$.

$$A) \ x(c+t-x) = \frac{2ib}{b} + ct. \quad -y = x - t.$$

Determ. für x . Die Gl. für x stimmt überein mit der in 8, C), daher die Determ. mit den nötigen Veränderungen daraus zu entnehmen: $\alpha)$ u. $\beta)$ wie oben. $\gamma)$ $x < c: c > t$. —

Determ. für y . $\alpha)$ $y +$ für beide Z., wenn $c > t$, für das obere allein, wenn $c < t$. $\beta)$ y reell, wenn x reell. $\gamma)$ $y \leq b$.

Oberes Z. a) $2b > c - t: 2i \geq l(c - b - t)$. b) $2b < c - t: y$ stets $> b$. — Unteres Z. a) $2b > c - t: y$ stets $< b$. b) $2b < c - t: 2i \leq l(c - b - t)$. — Behandle noch B) und C).

10) Geg. $AY - BX = t$. Setze in 9) für t $-t$. A) $x(c - t - x) = \frac{2ib}{l} - ct$. —

Determ. für x . I) $\frac{2ib}{l} > ct$. $\alpha)$ $x \geq 0$ für beide Z., wenn $c \geq t$. $\beta)$ x reell: $\frac{2ib}{l} < \left(\frac{c+t}{2}\right)^2$. $\gamma)$ x stets $< c$. — II) $\frac{2ib}{l} < ct$. $\alpha)$ x stets $+$ f. d. obere Z. $\beta)$ x stets reell. $\gamma)$ x stets $< c$. —

Determ. für y . I) $\alpha)$ y stets $+$ für beide Z. $\beta)$ y reell, wenn x reell. $\gamma)$ $y \leq b$: Oberes Z. a) $2b > c + t: 2i \geq l$

$(c+t-b)$. b) $2b < c+t$: y stets $> b$. — Unteres Z. a) $2b > c+t$: y stets $< b$. b) $2b < c+t$: $2i \leq l(c+t-b)$. — II) a) Nur das obere Z. nach der Determ. für x brauchbar, obwohl y f. beide Z. +. β) $y \leq b$ wie I, γ), ob. Z. — Behandle B) u. C).

Anwendung. XY so zu ziehen, dass der Umfang des $\triangle AXY =$ dem des Vierecks $BXYC$ und $\triangle AXY = i$.

Die Aufg. hat bloss einen Sinn, wenn X zw. A und B und Y zw. A u. C fällt. In den anderen Fällen ist sie entweder unmöglich, oder schon durch die Bedingung, dass die Umfänge der genannten Figuren gleich sein sollen, bestimmt.

Man setze in 10, A) $2t = a + b - c$. Ist $a + b + c = 2u$, so lautet dann die Gl.: $x(2c - u - x) = \frac{2ib}{l} - c(u - c)$. — Im allgem. 2 Lösungen.

11) $AX + AY = s$. — Setze: A): in 10, A) $t = s - c$ oder in 9, A) $b = c - s$, je nachdem $s \geq c$. B): in 8, A) $s = s - c$. C) in 8, A) $s = s + c$.

12) $AX - AY = t$. — Setze: A): in 8, A) $s = c - t$. B): in 10, A) $t = c - t$, bez. in 9, A) $t = t - c$. C): in 9, A) $t = c + t$.

13) $AY - AX = t$. — Setze: A): in 8, A): $s = c + t$. B): in 10, A) $t = t + c$. C): in 9, A) $t = c - t$, bez. in 10, A) $t = t - c$.

§ 15. Aufgaben über Sehnen, Secanten und Tangenten.

Der Kreis ist gegeben.

1) Geg. Punkt P und ein Kreis um O mit dem Radius r . Durch P eine Gerade so zu legen, dass sie durch die Peripherie in geg. Verhältnis geteilt wird.

A) P innerhalb des Kreises. — Sei die gesuchte Sehne XPY , $XP = x$, $PY = y$ und $x < y$, $XP:YP = m$, also $m < 1$, der kleinere Abschnitt AP des Durchmessers $APB = p$, so bestehen die Gl.: $x:y = m$, $x \cdot y = p(2r - p)$. — $x = \sqrt{mp(2r - p)}$.

Determ.: $\alpha)$ x stets reell. Zwei symmetrische Lösungen, da der mit x als Radius beschr. Kreis den geg. Kreis zweimal schneidet. Dieselbe Bemerkung gilt für die anderen Aufg. dieser Art. $\beta)$ $x > p : m(2r - p) > p$. Dadurch ist von selbst $y < 2r - p$ erfüllt, da ja durch die Punkte P u. X Punkt Y mitbestimmt ist.

Setze für m spezielle Werte, entweder bestimmte Zahlen < 1 , oder Streckenverhältnisse, z. B. $m = \frac{p}{2r}$, u. s. w.

Anmerkung: Da $p : 2r - p$ beliebig klein gemacht werden kann, ist die Aufg. für jedes noch so kleine m möglich.

B) P ausserhalb d. Kr. — Die gesuchte Secante sei PXY , die von P durch O gezogene $PAOB$, so ist nach den vorigen Festsetzungen $x : y = m$, $x \cdot y = p \cdot (2r + p)$. — $x = \sqrt{mp \cdot (2r + p)}$. — Determ.: $x > p : m(2r + p) > p$, wodurch auch $y < 2r + p$ erfüllt. — m kann beliebig klein werden.

Aufg. 1) ist spez. Fall der Aufg., wo das Produkt und Verhältnis zweier Strecken geg. sind. Das Besondere liegt (abgesehen von dem bestimmten Werte des Produkts) aber in dem Hinzutreten der Determ. $x > p$.

2) Durch P eine Gerade so zu legen, dass die Sehne $XY = a$ ist.

A) P innerh. d. Kr. — $x(a - x) = p \cdot (2r - p)$.

Determ.: $\alpha)$ $x + f.$ beide Z. $\beta)$ x reell: $a > 2\sqrt{p(2r - p)}$, d. h. die auf dem Durchmesser im P senkrechte Sehne ist die kleinste aller Sehnen, die sich durch P ziehen lassen. $\gamma)$ $x > p$: $\alpha)$ $a < 2p$ ist nach $\beta)$ für ein reelles x unmöglich. $\beta)$ $a > 2p$: $x > p$ für $a < 2r$. — Übrigens folgt von selbst schon aus $a < 2r$ das Erfülltsein von $x > p$, denn es muss sich stets durch P eine Sehne ziehen lassen, welche $< 2r$ und $> 2\sqrt{p(2r - p)}$ ist.

Bemerkung. Sowie man nach $\beta)$ für einen geg. P stets die kleinste noch zulässige Sehne findet, erhält man für ein geg. a die Grenzlage des P , indem man auf dem Durchmesser eine Senkrechte $= \frac{a}{2}$ errichtet, durch ihren End-

punkt die Parallele zum Durchm. zieht und vom Schnittpunkt derselben mit der Kreislinie die Senkrechte auf den Durchmesser fällt.

Geometr. Lösung: Die Sehnen von der Länge a sind die Tangenten eines Kreises um O , dessen Radius $= \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.
 Lege durch P die Tangenten an denselben.

Zusatz. Aus der leicht abzuleitenden Gl. $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = (r-p)^2 - \left(r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$ folgt auch $x(a-x) = p(2r-p)$, also ein zweiter, von der Ähnlichkeitslehre unabhängiger Beweis für den durch diese Gl. ausgedrückten Lehrsatz.

B) P ausserhalb. — $x(a+x) = p(2r+p)$, oder auch, wenn t die Länge der von P an den Kreis gelegten Tangente ist: $x(a-x) = t^2$.

Determ. $\alpha) x +$ f. d. obere Z. $\beta) x > p: a < 2r$. Vgl. Bemerkung zu A, γ).

Geom. Lösung wie in A). — Über die in den Bestimmungs-Gl. ausgedrückten Sätze vergl. auch Zusatz zu A).

Spez. Fälle. Behandle für A) u. B): $a = r$, $a = 2r - p$, $a = p$, $a = \frac{r}{2}$, $a^2 = p \cdot (r + 4p)$, u. s. w.

Man erhält Grenzwerte für das Verhältnis $p:r$, falls man für a den geg. Wert in die allgemeinen Ungleichungen substituiert. In A) müssen die aus $a > 2\sqrt{p(2r-p)}$ u. $a < 2r$ erhaltenen Ungleichungen sich mit einander vertragen, wie dies z. B. für $a^2 = p(r + 4p)$ der Fall ist. Die Fälle $a \cdot 2r = p^2$, $a \cdot p = r(2r-p)$ u. a. geben für A) cubische Ungl. als Bedingungen für das Reelle. Soll nur über die Lösbarkeit der Aufg. für ein geg. p entschieden werden, so genügt oben genannte Konstruktion für die Grenzlage des P. P .

Für B): 1) $a \cdot p = r \cdot t$. — $t < p$, oder, wenn $t = \sqrt{p(2r+p)}$ substituiert wird: $2r < 3p$. — 2) $a^2 = p \cdot t$. — Biquadr. Ungleichung zwischen p u. r . Setzt man speziell $p = r$, so ist die Aufg. stets, für $p = 2r$ nie lösbar. 3) $a^2 = 2rt$. — $t < 2r$ oder $p < \sqrt{5r^2 - r}$. — U. s. w.

3) Bestimme P . P auf einer Sehne $AB = l$ oder deren Verlängerung oder auf einer Tangente so, dass die Sehne XY einer von ihm aus durch den Kreis gelegten Geraden, deren einer Abschnitt $PX = c$ ist, die Länge a habe. — $AP = x$. — Da es 2 P . P (in gleichen Abständen von der Sehnenmitte) und durch jeden derselben zwei Gerade von der verlangten Eigenschaft giebt, entstehen 2 Paare symmetrischer Lösungen.

A) P zwischen A und B . — $x(l - x) = c(a - c)$.

Determ.: α) Da $a > c$, ist $x + f$. beide Z . — β) x reell: $l > 2\sqrt{c(a - c)}$. Geometrische Deutung dieser Ungl.! Auflösung nach c : a) $2c > a$, d. h. c der grössere Abschnitt: x ist stets reell für $a < l$, für $a > l$, wenn $2c > a + \sqrt{a^2 - l^2}$. b) $2c < a$: x ist stets reell für $a < l$, für $a > l$, wenn $2c < a - \sqrt{a^2 - l^2}$. — Aufl. nach a : $a < \frac{l^2}{4c} + c$. γ) x stets $< l$. δ) $a < 2r$.

B) P auf der Verlängerung von AB . — $x(l + x) = c(a + c)$, (c der kleinere Abschnitt). — Determ.: α) $x + f$. d. obere Z . β) $a < 2r$.

Ist die Länge der Tangente t geg., welche von P aus an den Kreis gelegt werden soll, so ist $x(l + x) = t^2$.

C) P auf der Tangente. $x^2 = c(a + c)$. — Determ.: $a < 2r$.

Geom. Lösung. P ist der Schnittp. der Geraden und der Kreislinie, deren Punkte die Potenz $c(a - c)$, bez. $c(a + c)$ für den geg. Kreis haben. Welches sind die Radien dieser Kreise?

A) u. B) sind spez. Fälle der Aufg. § 6, 3 u. 4. Hier tritt aber noch die Beschränkung $a < 2r$ hinzu.

Spez. Fälle. In der Ungleichung für das Reelle in A) kommen 3 Grössen vor. Soll sie nur 2 enthalten, so ist entweder 1) eine der 3 Grössen als fest gegeben oder 2) durch eine der anderen oder beide ausgedrückt zu denken, oder endlich 3) zwei der Grössen sind als Funktionen einer und derselben in der Ungl. nicht vorkommenden Grösse, etwa von r , gegeben. Beispiele: Zu 2): $c = m \cdot a$, also das Verhältnis

der Abschnitte der durch P zu legenden Geraden ist bestimmt*); $a = m \cdot l$; $l = m \cdot c$ (m ist fest gegeben als Zahl oder als Verhältnis zweier Strecken). Ferner $a \cdot c = l^2$; u. s. w.

Zu 3): $a = m \cdot r$ ($m \leq 2$) u. $c = n \cdot r$; $a = m \cdot r$ u. $c \cdot r = l^2$; u. s. w.

4) Durch P eine den Kreis in X u. Y schneidende Gerade so zu legen, dass $PY + m \cdot PX = s$ ist. — $PX = x$, $PY = y$.

A) P innerhalb. $x(s - mx) = p \cdot (2r - p)$. — $y = s - mx$.

Determ.: α) x u. y sind + für beide Wurzeln. β) x u. y reell: $s^2 > 4mp(2r - p)$. γ) Es ist zu untersuchen, ob $x > y$. a) Oberes Zeichen: Für $m \leq 1$ ist stets $x > y$, für

$m > 1$ ist $x < y$, wenn $s^2 < (1 + m)^2 \cdot p(2r - p)$. NB. Die Bedingung für $x < y$ verträgt sich stets mit derjenigen f. d. Reellen, da $(1 + m)^2$ stets $> 4m$. Die Bedingung für $x > y$ zieht von selbst die f. d. Reellen nach sich. b) Unteres Z.

Für $m < 1$ ist $x < y$, wenn $s^2 > (1 + m)^2 \cdot p(2r - p)$, für $m \geq 1$ ist stets $x < y$. — d) Ist $x < y$, so ist nun zu unter-

suchen, wenn $x > p$. a) Oberes Z. Für $s > 2mp$ ist x stets $> p$, für $s < 2mp$ ist $x > p$, falls $s > 2r + (m - 1)p$. Die Bedingung für $x < y$ verträgt sich mit $s > 2mp$, insofern m , bez. p immer entsprechend gewählt werden kann. b) Unteres Z. Für $s > 2mp$ ist $x > p$, wenn $s < 2r + (m - 1)p$, für $s < 2mp$ ist x stets $< p$. — Soll $x > y$ sein, so muss $x < 2r - p$ oder $y > p$ werden.

1. Beispiel: $m = 2$. Determ.: β) $s^2 > 8 \cdot p(2r - p)$.

γ) a) $x < y$, wenn $s^2 < 9p(2r - p)$. b) x stets $< y$. d) $x < y$.

*) Z. B. die durch P zu legende Gerade soll nach dem goldenen Schnitte durch die Kreislinie geteilt werden. Ist c der kleinere Abschnitt, so ist dann $2m = 3 - \sqrt{5}$.

a) Für $s > 4p$ ist x stets $> p$, für $s < 4p$ ist $x > p$, falls $s > 2r + p$. b) Für $s > 4p$ ist $x > p$, wenn $s < 2r + p$, für $s < 4p$ ist x stets $< p$.

2. Beispiel: $m = \frac{1}{2}$. Determ.: $\beta) s^2 > 2p(2r - p)$. $\gamma) a)$

x stets $> y$. b) $x \leq y$, wenn $s^2 \geq \frac{9}{4}p(2r - p)$. $\delta) x < y$.

a) Hier unbrauchbar. b) Für $s > p$ ist $x > p$, wenn $s < 2r - \frac{p}{2}$.

B) P ausserhalb. $x(s - mx) = p(2r + p)$. — Determ.: $\alpha), \beta), \gamma)$ wie vorhin, nur tritt für $2r - p > 2r + p$; $\delta)$ für $s \geq 2r + (m - 1)p$ tritt $s \geq 2r + (m + 1)p$. — Soll x den grösseren Abschnitt PY bezeichnen, so muss $y > p$ werden. —

Z. B. $m = 2$, $m = \frac{1}{2}$, u. s. w.

Behandle ebenso die Aufg.:

$y - mx = t$. Setzt man hierin für $m \frac{1}{m}$ u. f. $t \frac{t}{m}$, so wird der Fall $m \cdot y - x = t$ mit gelöst.

5) Auf der Sehne $AB = l$ oder einer Tangente P . P durch seinen Abstand von dem ihm näheren Endpunkte der Sehne $AP = x$ so zu bestimmen, dass die Sehne XY einer durch ihn gelegten Geraden, deren einer Abschnitt $PX = c$ geg. ist, $= m \cdot x$ sei.

A) P zwischen A und B . — $x(l - x) = c(mx - c)$, daher $x(x - (l - cm)) = c^2$.

Determ.: $\alpha) x +$ f. d. obere Z. D. untere Z. giebt den absoluten Wert von x in B), falls hier c den kleineren Abschnitt bedeutet. $\beta) x < l: c < m \cdot l$. $\gamma) mx < 2r$. I) mx stets $> 2r$, wenn $4r < m(l - cm)$. II) $4r > m(l - cm)$ giebt:

$c(2r - c) > \frac{2r}{m} \left(l - \frac{2r}{m} \right)$. a) $m \cdot l < 2r: mx$ stets $< 2r$, da

$2r > c$. b) $ml > 2r$: Damit zunächst überhaupt $mx \leq 2r$ werden könne, muss $ml < 2r + \frac{m^2}{2} \cdot r$ sein. Für $c > r$ muss

ausserdem $c < r + \sqrt{r^2 - \frac{2r}{m} \left(l - \frac{2r}{m} \right)}$, für $c < r$ aber $c > r -$

$\sqrt{r^2 - \frac{2r}{m} \left(l - \frac{2r}{m} \right)}$ sein.

Z. B. $c = \frac{r}{m}$, $l = m \cdot r$, worin $m < 2$ sein muss, da $l < 2r$.

Determ.: $\beta)$ $m > 1$. $\gamma)$ II) a) $m^2 < 2 : mx$ stets $< 2r$.
b) $m^2 > 2$. Die allgemeine Bedingung für $mx < 2r$ ist hier $m < 2$, also stets erfüllt. Da c nach $\beta) < r$, muss sein $\frac{3}{2} > m(m-1)$ oder $2m < 1 + \sqrt{7}$.

Behandle ferner: $2c = m \cdot l$, speziell $m = 2$; $c = m \cdot l$.

B) P liegt auf der Verlängerung von AB . — c der kleinere Abschnitt. $x(l+x) = c(mx+c)$, daher $x(x+l-cm) = c^2$.

Determ.: $\alpha)$ $x +$ f. d. obere Z. D. untere Z. giebt absolut A), oder auch, wenn $l < x$, die Strecke PB , falls c der grössere Abschnitt PY ist. $\beta)$ $mx < 2r$. I) $m \cdot x$ stets $> 2r$ für $4r + ml < m^2 \cdot c$. II) Ist $4r + ml > m^2 \cdot c$, so muss sein: $c(2r+c) < \frac{2r}{m} \left(l + \frac{2r}{m} \right)$. Besteht übrigens die letztere Ungleichung, so ist auch stets $4r + ml > m^2 \cdot c$.

Z. B. $c = \frac{r}{m}$, $l = m \cdot r$, worin $m < 2$. Det.: $\beta) 2m \cdot (m-1) > -3$, stets erfüllt.

Falls $c = PY$, vergl. die Bemerkung in $\alpha)$. $l < x$ für $c > ml$. Weitere Determ.: $\beta)$ $mx < 2r$: Zunächst muss sein: $4r + ml > m^2 \cdot c$, sodann $c(c-2r) < \frac{2r}{m} \left(\frac{2r}{m} - l \right)$. a) $ml < 2r$: x stets $< 2r$ für $c < 2r$, für $c > 2r$ muss ausserdem $c < r + \sqrt{r^2 + \frac{2r}{m} \left(\frac{2r}{m} - l \right)}$ sein. b) $ml > 2r$: für $c < 2r$ ist $x < 2r$ nach den Bedingungen unter A), $\gamma)$, b), für $c > 2r$ ist x stets $> 2r$.

Z. B. $m \cdot c = r$, $l = m \cdot r$. Determ.: $\alpha)$ $m < 1$. $\beta)$ a) $x < 2r$ für $2m > 1$, f. $2m < 1$ muss $1 < m + \sqrt{m^2 + 4 - 2m^3}$ sein, was stets der Fall ist.

Behandle ferner für A) u. B): $2 \cdot c = m \cdot l$, speziell $m = 2$; $c = 2 \cdot m \cdot l$; $c = ml$.

C) P auf einer Tangente. — $x^2 = c(mx+c)$, $x(x-cm) = c^2$. Determ.: $\alpha)$ $x +$ f. d. obere Z. D. untere Z. giebt absolut PB , wenn c der grössere Abschnitt ist. $\beta)$ $mx < 2r$: zu-

nächst muss sein $4r > m^2 \cdot c$, sodann $c(2r + c) < \left(\frac{2r}{m}\right)^2$. —

Vergl. § 6, 12.

Z. B. $mc = r$. Determ.: $\beta) m < \frac{3}{2}$.

$c = m \cdot r$ giebt eine biquadr. Ungleichung; für $m = 1$ stets möglich. — $c = 2mr$ giebt keine Lösung.

Falls $c = PY$, vergl. die Bemerkung in a). Die Determ. folgt aus der entsprechenden in B) für $l = 0$.

6) Durch den geg. P. P eine Gerade so zu ziehen, dass sie durch die Kreislinie nach dem goldenen Schnitte geteilt wird.

I) P innerhalb d. K. Abschnitt $PX = x$, $PY = y$, $x < y$. — $x \cdot y = p(2r - p)$, $x(x + y) = y^2$, daraus $x^2(x^2 + p(2r - p)) = p^2 \cdot (2r - p)^2$, $y^2 = x^2 + xy = x^2 + p \cdot (2r - p)$. — Determ.:

a) $x^2 +$ f. d. obere Z. Das untere Z. giebt absolut y^2 .

$\beta) x > p : p < r(3 - \sqrt{5})$.

II) P ausserhalb. A) $XY : PX = PX : PY$, oder $y - x : x = x : y$. — Man erhält $x^2(x^2 + p(2r + p)) = p^2(2r + p)^2$, $y^2 = x^2 + x \cdot y$. — Determ.: a) Wie in I. $\beta) x > p : p < r(1 + \sqrt{5})$.

B) $PX : XY = XY : PY$, oder $x : y - x = y - x : y$. — Man erhält $x^2(3p(2r + p) - x^2) = p^2(2r + p)^2$, $y^2 = 3xy - x^2$.

Determ.: a) x^2 u. $y^2 +$ und reell f. beide Z. $\beta) x$ stets $> p$ f. d. obere Z., f. d. untere muss sein $p < r(\sqrt{5} - 1)$.

§ 16. Fortsetzung. Der Kreis wird gesucht.

1) Geg. 2 sich in P schneidende Gerade MN , RS und auf MN 2 Punkte A u. B oder 1 Punkt T ; e. Kreis zu zeichnen, der durch A u. B geht, bez. MP in T berührt, und von RS die Strecke $XY = a$ abschneidet.

A) 2 P. A u. B geg. — a) A u. B auf derselben Seite von P . — Bezeichnungen: $AB = l$, $AP = k$ ($AP < BP$).

$PX = x$ ($PX < PY$). — $x(a + x) = k(k + l)$. — Determ.:

a) $x +$ f. d. obere Z., d. untere Z. giebt absolut PY . — x

kann von P aus beiderseits auf RS abgetragen werden, also 2 P. X u. X' und daher 2 verschiedene Kreise.

Geom. Lösung: Legt man irgend einen Kreis durch A u. B und zieht von P aus eine Gerade so durch denselben, dass die Sehne $= a$ wird, so ist der äussere Abschnitt $= x$. Am einfachsten beschreibt man den Hilfskreis über a als Durchmesser.

b) A u. B auf entgegengesetzten Seiten von P . — $x(a-x) = k(l-k)$. — Determ.: a) Die beiden Z. geben die beiden Abschnitte PX u. PY . — 2 Lösungen, je nachdem der kürzere Abschnitt auf PR oder PS abgetragen wird.

β) x reell: $a > 2\sqrt{k(l-k)}$.

B) P, T gegeben. $PT = t$. — $x(a+x) = t^2$. — Determ. wie in A, a).

Spez. Fall: Der gesuchte Kreis soll RS berühren. A, a). $x^2 = k(k+l)$. Zwei Kreise. — Geom. Lösung analog der obigen b) Unmöglich. B) $x = t$.

2) Wie 1), für Strecke a ist aber $y + m \cdot x = s$ geg.

A) a). $x(s - m \cdot x) = k(k+l)$. — Determ.: vergl. § 18, 4, die Bedingung $x > p$ bleibt hier weg. — Im allgem. (für $m > 1$) 4 Lösungen.

b) $x(s - m \cdot x) = k(l-k)$. — Wie vorhin. 4 Lösungen.

B) $x(s - m \cdot x) = t^2$. — Determ. wie § 18, 4), A), nur tritt für $p(2r-p)$ hier t^2 .

Behandle weiter: $\text{geg. } y - m \cdot x = t, m \cdot y - x = t$.

3) Geg. P, T auf MN und ein Kreis um O . E. K. zu zeichnen, der MN in T berührt und den geg. K. unter der Sehne $AB = a$ ($a < 2c$) schneidet.

Analysis. Suche den Schnittp. P der Geraden MN und AB . Von ihm aus lege eine Gerade so durch den geg. Kreis, dass Sehne $AB = a$ wird. Durch T und einen der P. A oder B ist der gesuchte Kreis bestimmt. — 2 Lösungen, da sich von P aus zwei solche Gerade durch den Kreis ziehen lassen. —

Bezeichnungen: Fälle $OQ \perp MN$ und setze $TQ = q$, $OQ = p$, den Radius des geg. Kreises $= r$, $TP = x$, $PO = z$.

Da der Kreis, welcher MN berührt, ganz auf der einen Seite dieser Geraden liegen muss, so kann P nie innerhalb d. K. um O , also zwischen A und B liegen. —

A) MN schneidet den geg. Kreis nicht. — a) P und Q auf derselben Seite von T . Gl.: $x^2 = (z-r)(z+r)$, $z^2 = p^2 + (x-q)^2$, daraus für $p^2 + q^2 = s^2$: $x = \frac{s^2 - r^2}{2q}$. Determ. $x +$: $s > r$, d. h. T muss ausserhalb des geg. K. liegen. — b) T zwischen P und Q . $x^2 = (z-r)(z+r)$, $z^2 = p^2 + (x+q)^2$, daraus $x = \frac{r^2 - s^2}{2q}$. Determ.: $x +$: $r > s$, d. h. T innerhalb d. K., was hier unmöglich ist. —

B) MN schneidet den Kreis. — a) P und Q auf derselben Seite von T . Wie A, a), nur kommt noch, weil P ausserhalb d. geg. K. liegen muss, die Determ. hinzu: $x < q - \sqrt{r^2 - p^2}$: stets erfüllt. — b) T zwischen P und Q . Wie A, b). Determ. $x > \sqrt{r^2 - p^2} - q$: stets erfüllt. — (Ist die blosse Umkehrung der vorangehenden Ungleichung.)

Je nachdem also T ausserhalb oder innerhalb d. geg. K. liegt, ist die Aufg. so lösbar, dass P u. Q auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite von T liegen. —

Anmerkung. Soll der gesuchte Kreis den geg. berühren, so ist diese Aufg. nicht spezieller wie die vorige, da ja c in den Gleichungen nicht vorkommt.

Geometr. Lösung: Das Centrum des gesuchten K. ist eine Ecke eines Dreiecks, von dem eine Seite (s), die Differenz oder Summe der beiden andern Seiten (r) und der einer Seite gegenüberl. Winkel geg. sind.

3a) Stellt man die Gleichungen unter der Voraussetzung eines innerhalb des Kreises gelegenen P . P auf, so geben dieselben im allgem. ebenfalls eine Lösung, d. h. einen P , welcher gleiche Potenz hat in Bezug auf den gegebenen und den durch T gehenden Kreis. Hier bedeutet aber TP keine Tangente, sondern die Hälfte der Sehne im gesuchten Kreis, welche auf dem durch P gelegten Durchmesser desselben senkrecht steht.

a) P u. Q auf derselben Seite von T . — Gl.: $x^2 = (r+z)$.

$(r-z)$, $z^2 = p^2 + (x-q)^2$. Daraus die quadr. Gleichung:
 $x(x-q) = \frac{r^2 - s^2}{2}$. —

Determ. I) $s > r$, d. h. T ausserhalb. $\alpha)$ $x +$ f. beide Z. $\beta)$ x reell: $s^2 < r^2 + \frac{q^2}{2}$. $\gamma)$ $x > q - \sqrt{r^2 - p^2}$. Ist mit Rücksicht auf $\beta)$ f. beide Z. erfüllt. II) $s < r$, d. h. T innerhalb. $\alpha)$ $x +$ f. d. obere Z. $\beta)$ $x < q + \sqrt{r^2 - p^2}$: stets erfüllt. $b)$ P und Q auf entgegengesetzten Seiten von T . —

Für x tritt $-x$, daher: $x(x+q) = \frac{r^2 - s^2}{2}$. Determ. I) $s > r$: unmöglich. II) $s < r$: $\alpha)$ $x +$ f. d. obere Z. $\beta)$ $x < \sqrt{r^2 - p^2} - q$: stets erfüllt. —

4) Für P . T ist Sehne $CD = l$ auf MN geg., welche vom gesuchten Kreise abgeschnitten werden soll. — $CQ = q$, $CP = x$, $CP < DP$. —

I) P soll ausserhalb d. geg. K. liegen. — Dann liegt auch P nie zwischen C und D . —

A) MN schneidet den geg. Kreis nicht. — a) P und Q auf derselben Seite von C . — $x(l+x) = (z-r)(z+r)$, $z^2 = p^2 + (x-q)^2$. — $x = \frac{s^2 - r^2}{2q + l}$. — Determ.: $x +$: $s > r$, d. h. C ausserhalb d. K. $b)$ C zwischen P und Q . Für $x - q$ tritt $x + q$. $x = \frac{r^2 - s^2}{l - 2q}$. Determ.: $x +$: Ist $s \geq r$, so muss sein $2q \geq l$. —

B) MN schneidet d. geg. K. — a) P und Q auf derselben Seite von C : Wie in A, a). $\alpha)$ $x +$: $s > r$. $\beta)$ x stets $< q - \sqrt{r^2 - p^2}$. $b)$ C zwischen P und Q . Wie A, b). Zur Determ. kommt noch für $s < r$: $\beta)$ $x > \sqrt{r^2 - p^2} - q$: stets erfüllt. —

II) P soll zwischen A und B liegen. — Dann liegt auch P stets zwischen C und D und MN schneidet den Kreis.

a) P und Q auf derselben Seite von C : $x(l-x) = (r+z)(r-z)$, $z^2 = p^2 + (q-x)^2$. — $x = \frac{s^2 - r^2}{2p - l}$. Determ.

$\alpha) x + :$ ist $s \geq r$ (C ausserhalb oder innerhalb), so muss sein $2q \geq l$. $\beta) x < q + \sqrt{r^2 - p^2}$: Für $x < q$ von selbst erfüllt, für $x > q$ muss $x < l$ sein. — Ist $s > r$, so kommt noch hinzu: $\gamma) x > q - \sqrt{r^2 - p^2}$: von selbst erfüllt, wenn $x > q$, falls $x < q$, muss $x < l$ sein. $\beta)$ und $\gamma)$ zusammengefasst: Liegt C ausserhalb, so muss sein: $x < l$, oder $l(2q - l) > s^2 - r^2$; liegt C innerhalb, so muss ebenfalls sein $x < l$, oder $l(l - 2q) > r^2 - s^2$. (Für $x < q$ nach $\alpha)$ von selbst erfüllt.) Setzt man hierin für s^2 seinen Wert, so erhält man im letzteren Falle $l > q + \sqrt{r^2 - p^2}$, d. h. P, D muss ausserhalb liegen. Im ersteren Falle folgt für $q \geq l$: D innerhalb.

$b) C$ zwischen P und Q . — Für $q - x$ tritt $q + x$. $x = \frac{r^2 - s^2}{2q + l}$. Determ.: $\alpha) x + : r > s$, d. h. C innerhalb.
 $\beta) x < \sqrt{r^2 - p^2} - q : \frac{r^2 - s^2}{2q + l} < l(l + 2q)$, d. h. D liegt ausserhalb. —

Die folgenden §§ mussten mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum gekürzt werden.

§ 17. Aufgaben über das allgemeine Dreieck.

Bezeichnungen: Die Seiten a, b, c , und zwar $b > c$, die zu a gehörige Höhe h , der kleinere der auf a gebildeten Abschnitte p , der grössere $q = a - p$. — Gleichungen: 1) $h^2 = b^2 - (a + p)^2$, je nachdem $\angle B$ spitz oder stumpf, 2) $h^2 = c^2 - p^2$. — Für die Determ. berücksichtige, dass $b + c > a$ für $b < a$ und $a + c > b$ oder $a > b - c$ für $b > a$ sein muss, (dass $a + b > c$, folgt schon aus $b > c$). — Geg.:

1) $b + c = s, a, p$. — $\alpha) \angle B$ spitz: $b = \frac{s}{2} + \frac{a(a - 2p)}{2s}$. — $c = s - b$.

Determ.: $\alpha) s > a$. $\beta) a > b - c : s > a - 2p$ schon durch $\alpha)$ erfüllt.

$b) \angle B$ stumpf: $b = \frac{s}{2} + \frac{a(a + 2p)}{2s}$. — Determ.: $\alpha) s > a$. $\beta) a > b - c : s > a + 2p$, dadurch $\alpha)$ mit erfüllt.

2) $b - c = t$, a , p . — a) $\angle B$ spitz: b wie in 1, a) (für s tritt t). — $c = b - t$.

Determ.: $\alpha) b + c > a: t < a - 2p$. $\beta) t < a$ schon durch $\alpha)$ erfüllt.

b) $\angle B$ stumpf: b wie in 1, b). — Determ.: $\alpha) t < a + 2p$. $\beta) t < a$, dadurch $\alpha)$ mit erfüllt.

3) $b + c = s$, a , q . — a) $\angle B$ spitz: $b = \frac{s}{2} + \frac{a(2q-a)}{2s}$. —

Determ.: $\alpha) s > a$. $\beta) a > b - c: s > 2q - a$. Da $q < a$, ist $\beta)$ durch $\alpha)$ erfüllt.

b) $\angle B$ stumpf: b wie in a). — Determ.: $\alpha) s > a$. $\beta) a > b - c: s > 2q - a$. Da $q > a$, ist $\alpha)$ durch $\beta)$ erfüllt.

4) $b - c = t$, a , q . — a) $\angle B$ spitz: b wie in 3, a). Determ.: $\alpha) b + c > a: t < 2q - a$. $\beta) t < a$ schon durch $\alpha)$ erfüllt. — b) $\angle B$ stumpf: b wie in 3, b). Determ.: $\alpha) b + c > a: t < 2q - a$. $\beta) t < a$, dadurch $\alpha)$ mit erfüllt.

5) $b + c = s$, a , h . — $b(s - b) = \frac{a^2 h^2}{s^2 - a^2} + \frac{s^2 - a^2}{4}$, mag $\angle A$ spitz oder stumpf sein. — $c = s - b$.

Determ.: $\alpha)$ Da $s > a$ sein muss, ist b (u. c) + f. beide Z. $\beta) b$ reell: $s^2 > a^2 + 4h^2$. $\gamma) b - c$ stets $< a$.

6) $b - c = t$, a , h . — $b(b - t) = \frac{a^2 h^2}{a^2 - t^2} + \frac{a^2 - t^2}{4}$, also wie in 5). $c = b - t$.

Determ.: $\alpha)$ Da $t < a$ sein muss, ist die rechte Seite +, also b + f. d. obere Z. $\beta) b + c > a$: stets erfüllt für $t < a$.

§ 18. Aufgaben, in welchen ein Kreis konstruiert werden soll, der geg. Gerade oder Kreise berührt und dessen Mittelpunkt auf e. geg. Geraden oder e. geg. Kreise liegt.

1) Geg. 2 Kreise um O u. P (Radien R , r) und e. Gerade $MN \perp OP$, welche OP in Q schneidet. E. Kreis zu konstr., der die geg. K. berührt und dessen Mittelp. auf MN liegt. — $OP = a$, $PQ = p$.

Anwendung der Aufg. 1—4 in § 17. Gliederung: A) Der eine Kreis ausserhalb des andern, B) die K. schneiden sich, C) der eine K. innerhalb des andern. Weiter ist zu unterscheiden: I) Q auf der Verlängerung von OP , II) Q zwischen O u. P . III) Q auf der Verl. von PO . Endlich: Die Berührung findet statt a) bei beiden K. von aussen, b) u. c) beim grösseren von aussen, beim kleineren von innen oder umgekehrt, d) bei beiden von innen.

Determ.: Ausser den schon a. a. O. angeführten Beschränkungen beachte, dass der Radius x des gesuchten K. $+$ sein muss. Ein $-x$ giebt die Lösung für die entgegengesetzte Berührung, in a) also für d), in b) für c).

Spez. Fall: Geg. für den K. um O nur Punkt O , d. h. $R = o$.

2) Wie 1), Gerade MN ist aber $\parallel OP$. — Anwendung der Aufg. 5 u. 6 in § 17. Gliederung: A), B), C), a)—d). — Determ.: Wie 1). x ist Wurzel einer quad. Gleichung, die 2. Wurzel giebt absolut die entgegengesetzte Berührung.

Spez. Fall: Geg. für den K. um O Punkt O .

3) Geg. e. P. O , zwei beliebige Gerade MN u. RS . E. K. zu konstr., der durch O geht, MN in Y berührt und dessen Mittelp. X auf RS liegt. — Ziehe XY und falle $OP \perp MN$ u. $OZ \perp XY$. RS schneide OP in U , MN in V . — $OP = a$, $PV = q$, $PU = s$, $OX = XY = x$, $PY = y$.

A) O zwischen P u. U oder auf der Verlängerung von PU (X zw. U u. V oder auf der Verl. von VU). Gl.: 1) $y^2 + (x - a)^2 = x^2$, 2) $x : q \mp y = s : q$, je nachdem Y zw. V u. P oder auf der Verl. von VP liegt.

B) O auf der Verl. von UP (X auf der Verl. von UV). Gl. 2): $x : y - q = s : q$. — Gem.-quadr. für x . Im allgem. 2 Lösungen.

Determ.: $x +$ reell. — Spez. Fälle: a) $\angle UVP = 45^\circ$, 60° , u. s. w. b) $a = s$, d. h. O liegt auf U : einfacher direkt. U. s. w.

4) Geg. 2 Kreise um O u. Q (Radien R , r) u. die G. $MN \perp OQ$, welche OQ in P schneidet. E. K. zu konstr., der den K. um O u. MN berührt und dessen Mittelp. X auf der

Kreislinie um Q liegt. — Fälle $XY \perp OP$, verbinde X mit P . U , in welchem der ges. Kreis MN berührt, so ist $PY = x$. — $OP = a$, $PQ = p$. Gliederung: A) Der eine K. ausserhalb des andern, B) die K. schneiden sich, C) der K. um Q innerh. des K. um O , D) der K. um O innerh. des K. um Q . Weiter ist die Lage des P gegen O u. Q zu berücksichtigen, sowie ob dabei P ausser- oder innerhalb des K. um O zu liegen kommt. Liegt P innerhalb, so kann wieder Y mit O 1) auf derselben, 2) auf entgegenges. Seite von P liegen. Schliesslich a) äussere, b) innere Berührung. — Gleichung f. A, a), P auf d. Verl. von OQ : $(R+x)^2 - (a-x)^2 = r^2 - (p-x)^2$. — In den übrigen Fällen a) ist hierin je nach der Lage der Gebilde $a-x$ mit $a+x$ u. $p-x$ mit $p+x$ zu vertauschen. In b) tritt für $R+x$ $R-x$.

Determ.: x reell u. +, ausserdem muss Y innerh. des K. um Q liegen.

Spez. Fall: Für den Kreis um O P. O geg. — Gliederung: A) O ausserhalb, B) O innerh. d. K. um Q . Ausserdem I) P auf der Verl. von OQ , II) P zw. O u. Q . III) P auf der Verl. von QO . — Liegt O auf der Peripherie, so ist $x^2 = 2r(a-x)$, wie auch direkt leicht erhalten wird (x Kathete in einem rechth. $\triangle$ mit der Hyp. $2r$).

5) Geg. 3 Kreise um O , P , Q , mit den Radien R , r , ϱ . E. K. zu konstr. (Radius x), der die K. um O u. P berührt u. dessen Mittelp. auf dem K. um Q liegt. — Fälle $XY \perp OP$. — $OP = a$, $PQ = p$, $PY = y$. Für den Fall, dass die K. sämtlich ausserh. einander liegen u. f. d. Berührung v. aussen: $(R+x)^2 - (a-y)^2 = (r+x)^2 - y^2 = \varrho^2 - (p-y)^2$. — Gem.-quadr. für x .

Spez. Fall: Für den Kreis um O P. O geg.: $R = o$. Gliederung: A) Die Kreise schneiden sich nicht. B) Die K. schneiden sich oder der eine liegt innerh. des andern. I) P auf der Verl. von OQ , II) P zwischen O u. Q . Bei B) ausserdem noch zu unterscheiden, ob O u. Y auf derselben oder auf entgegenges. Seite von P liegen. Schliesslich äussere und innere Berührung.

Determ.: $x +$ u. reell, ausserdem Y innerh. d. K. um Q .

Z. B. O auf d. K. um Q , also etwa $a = p + q$, worin speziell $q = r$ gesetzt werden kann. Direkt wie der entsprechende Fall in 4).

§ 19. Aufg. über das Rechteck im Kreise. — Geg. der Radius des Kreises.

I) Hierher die Aufg. über das rechth. $\triangle$, bez. Rechteck, in welchen die Hypotenuse (Durchmesser des Kreises), bez. Diagonale geg. ist. Vergl. §§ 4—6. Nach § 6, 1 ist unter den Rechtecken in demselben Kreise das Quadrat das mit dem grössten Umfange und nach § 1, 9 auch das mit dem grössten Inhalt. — Ferner:

1) Dem K. ein Rechteck so einzubeschr., dass das durch die Endpunkte der zwei auf einander senkrechten, den Rechtecksseiten parallelen Durchmesser und die Ecken des Rechtecks gelegte Achteck den Inhalt i hat. — Gemischt-quadr. für die Seiten. Determ.: Regelmässiges Achteck $> i >$ Quadrat.

2) Der Rhombus, dessen Seiten die in den Ecken des Rechtecks gelegten Tangenten sind, hat den Inhalt i . — Bestimme aus i und r die Seite des Rhombus. — Determ.: $i >$ unbeschriebenes Quadrat.

II) Ein Rechteck dem Halbkreise einzubeschr., so dass eine Seite x auf den Durchmesser fällt. Andere Seite $= y$. Geg. 1) $x:y$, 2) $x.y$, 3) $x+y$, 4) Diagonale, 5) $x^2 = 2r.y$, 6) $y^2 = 2r.x$, 7) $2y^2 = r.x$. 1) u. 2) gehen ohne Rechnung aus den entsprechenden Aufg. in I) hervor, 3), 5), 6), 7), sind gemischt-, 4) rein-quadr.

III) Ein Rechteck einem Segment so einzubeschr., dass Seite x auf die Sehne s fällt. Sei $\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = p$, die andere Seite y , so ist: $r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y+p)^2$. — Determ.:

$\alpha)$ $x +$, $\beta)$ x reell, $\gamma)$ $x < a$, $\delta)$ $x < s$. Je nachdem $a \geq s$, zieht die eine der Bedingungen $\gamma)$ und $\delta)$ die andere nach sich. (Dass $y + p$ stets $< r$ ist, folgt schon aus der Gl.)

1) $x:y=m$. — Gemischt-quadr. — Stets möglich. 2) $x^2=s \cdot y$. — Gem.-quadr. — Stets möglich.

3) a) $x+y=r-p$. — Linear. — Determ.: $8r < 5s$.
b) $x+y=r\sqrt{5}-p$. Rein-quadr. — Determ.: $4r < s\sqrt{5}$
oder $r > p\sqrt{5}$. — c) Allgemein: $x+y=a$. — Gem.-quadr.

Die allgemeine Determ. ist umständlich. Spez. Fälle: $s =$ Seite des einbeschr. regulären 3-, 4-, u. s. w. Ecks, $a = m \cdot r$.

Z. B. $s = s_6 = r$, $2a = r$. Determ.: Es ist zwar $x +$ und reell f. beide Z., aber $< a$ nur f. d. untere Z. Dann ist von selbst $x < s$.

IV) Dem Sektor OAB Rechteck $UVXY$ (X auf dem Bogen AB) so einzubeschr., dass Seite UY auf OA fällt und $=b$ ist. — Fälle $AC \perp OB$ und $XZ \perp OB$, so ist $\triangle OAC \sim \triangle VXZ$, daraus XZ . — Hierauf kommt d. Aufg. zurück: das Rechteck so einzuzeichnen, dass 2 Ecken auf den Bogen fallen.

§ 20. Vermischte Aufgaben über den Kreis.

1) Geg. die Radien R, r zweier Kreise. Die Kreise selbst so zu zeichnen, dass ihre äussere gemeinsame Tangente auch den Kreis berührt, der jene Kreise von aussen tangiert und dessen Zentrum auf der Centrale liegt. — Radius $= \sqrt{R \cdot r}$.

2) Durch den Berührungspunkt A zweier Kreise eine die K. in X und Y schneidende Gerade so zu ziehen, dass $AX + m \cdot AY = s$. — $AX = x$: $x = \frac{Rs}{R+mr}$. — Determ.: $2R > x > 0$.

3) Dieselbe Aufg. für 2 ausserhalb einander liegende Kreise, deren Ähnlichkeitspunkt A ist; s die Entfernung zweier homologen Schnittp. — Für beide Ähnlichkeitsp. hat x denselben Wert wie 2). — Determ.: Die Centrale schneide den Kreis, auf welchem X liegt, in M und N , und zwar sei $AM < AN$, die von A aus an denselben K. gelegte Tangente berühre in U . a) X und Y sind die inneren Schnittp. Es muss sein $AU > X > AM$. b) X und Y sind die äusseren

Schnittp.: $AN > x > AM$. — Dazu noch für ein neg. $m : x > 0$.

4) Punkt X zu suchen derart, dass die von ihm an zwei sich nicht schneidende Kreise um O und P (Radien R, r) gelegten Tangenten gleich sind. — Fälle $XQ \perp OP$. $OQ = x$. A) Q und P auf derselben Seite von O . — $x = \frac{R^2 - r^2 + e^2}{2e}$, worin $OP = e$. — Determ.: x stets $+$, da $R > r$. Ferner ist stets $x > R$, mag der eine Kreis ausser- oder innerhalb des andern liegen, im erstern Falle auch $x < e - r$. B) O zwischen Q und P : unmöglich, weil $x -$.

5) Einem Halbkreis (Mittelp. O , Radius r) ist ein Kreis (Mittelp. P) einbeschrieben, dessen Durchmesser der Radius des Halbkreises ist. Konstruiere einen Kreis (Mittelp. X , Radius x), der den Halbkreis, dessen Durchmesser und den einbeschr. Kreis berührt. — Ziehe XO und XP , falle $XY \perp OP$, so ist XY auf doppelte Weise ausdrückbar. — $x = \frac{r}{4}$.

6) Einem Segment (Mittelpunkt O , Radius r , Höhe h) ist ein Kreis über der Höhe als Durchmesser einbeschrieben. Konstruiere einen K., der die geg. Kreise und den Durchmesser berührt. Analog 5). — $x = \frac{h(2r - h)}{4r}$. — Determ.: x und $OX = r - x$ sind $+$. Ferner $\triangle OXY$ stets konstruierbar, denn $OX > OY$, weil $x < \frac{h}{2}$.

7) Der Winkel eines Sektors (Mittelp. O , Radius R) wird halbiert und jeder Sektor-Hälfte ein Kreis einbeschrieben (Mittelp. P, Q , Radien r). Konstruiere einen K., der den Bogen des Sektors und beide einbeschr. Kreise berührt (Mittelp. X , Radius x). — Die K. um P, Q berühren die Halbierungslinie in U , $OU = a = \sqrt{R(R - 2r)}$. $\triangle PXU$ ist rechtwinklig. — $x = \frac{(R - a)^2}{2(R + r - a)}$. Determ.: $R - x$ stets $+$. — Löse die Aufg. auch für den Fall, dass die K. um P, Q den Sektor-Bogen von aussen berühren.

8) Geg. auf dem Durchm. $AB = 2 \cdot r$ eines Halbkreises $P. M.$ Konstruiere e. K. (Mittelp. X), der den Halbkreis und die beiden über $AM = 2a$ ($2a > r$) u. $BM = 2(r-a)$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreise (Mittelp. C und D) berührt. $XY \perp AB$. — XY auf dreierlei Weise ausdrückbar, also 2 Gleichungen. — $x = \frac{ar(r-a)}{r(r-a) + a^2}$. — Determ.: x und $r-x$ stets $+$. $\triangle CXD$ stets konstruierbar, weil stets $CD > CX > DX$, und ausserdem $CX + DX > CD$. — Spez. Fälle: $a = \frac{r}{2}$, $\frac{3}{4}r$, u. s. w.

9) Geg. ein Kreis um O (Radius r) und e. Gerade MN mit dem Abstände $OP = a$ von O . Auf MN Punkt Y ($PY = x$) von folgender Eigenschaft zu suchen: zieht man von Y aus eine Gerade YXZ durch den Kreis (X der 1., Z der 2. Schnittp.), so soll YX oder YZ die geg. Länge l haben und $XZ = PY$ sein.

A) y soll ausserhalb des K. liegen, $YX = l$. — OY auf doppelte Weise ausdrückbar: $a^2 + x^2 = (l + \frac{x}{2})^2 + r^2 - (\frac{x}{2})^2$, daher $x(x-l) = l^2 + r^2 - a^2$. Det. $\alpha)$ x hat einen oder 2 $+$ Werte, je nachdem $r^2 + l^2 \geq a^2$. $\beta)$ Für $r^2 + l^2 < a^2$ ist x reell, wenn $\frac{5}{4}l^2 + r^2 > a^2$. — $\gamma)$ Falls MN den K. schneidet, muss Y ausserhalb liegen, d. h. $x^2 > r^2 - a^2$: stets erfüllt. $\delta)$ $x < 2r$: $\alpha)$ Oberes Z. Für $4r < l$ unmöglich, für $4r > l$ muss sein $l < -r + \sqrt{4r^2 + a^2}$. $\beta)$ Unt. Z. Für $4r > l$ stets $x < 2r$, für $4r < l$ muss sein $l > -r + \sqrt{4r^2 + a^2}$.

Behandle B) Y ausserhalb, $YZ = l$. — C) Y innerhalb.

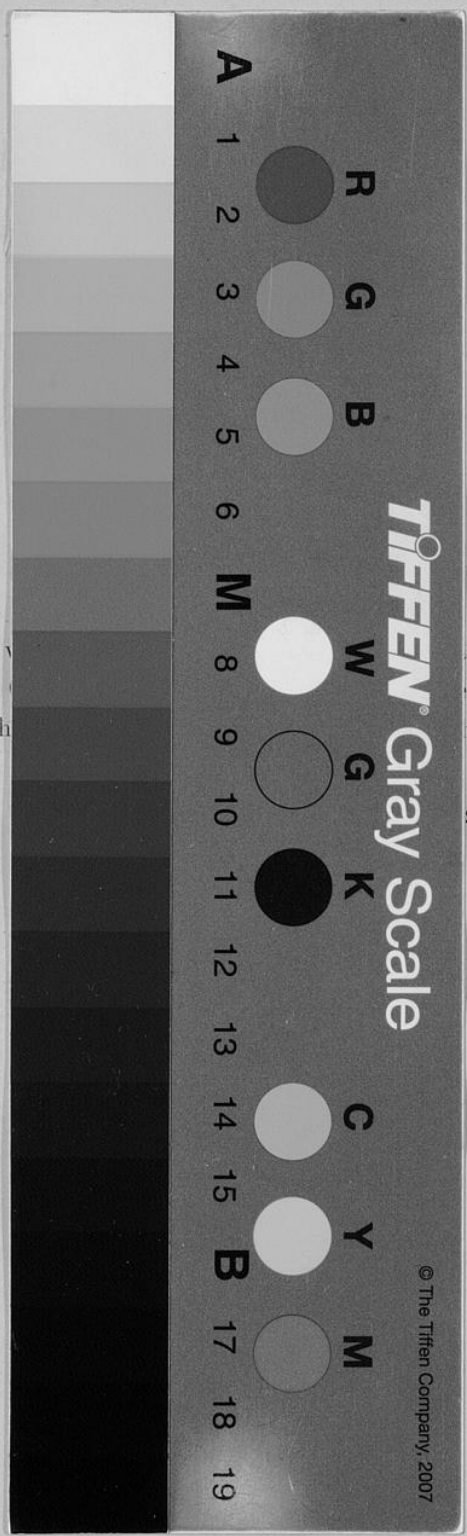
Dem wohlloblichen Magistrat zu Rochlitz statue ich für
die gütige Gewährung der zur Veröffentlichung meiner Arbeit
erforderlichen Mittel meinen ergebensten und herzlichsten
Dank ab.

Der Verfasser.

• Druck von Hesse & Becker in Leipzig.

Dem v
die gütige
erforderlich
Dank ab.

tte ich für
einer Arbeit
herzlichsten
sser.



TIFFEN® Gray Scale

© The Tiffen Company, 2007