

I.

Die auf den Mittelpunkt bezogene Fusspunktkurve der Ellipse.

Die Polargleichung dieser Kurve ist $r = a \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}$, wenn a die halbe grosse Achse und $\epsilon^2 \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ die numerische Exzentrizität bedeutet.

Die Gestalt derselben ist, so lange $\epsilon^2 < \frac{1}{2}$ ist, nahezu dieselbe wie die der Ellipse; ist dagegen $\epsilon^2 > \frac{1}{2}$, so hat die Kurve eine an den Enden der kleinen Ellipsenachse eingedrückte Form (ein spezieller Fall der Cassinoide). In beiden Fällen haben die Ellipse und ihre Fusspunktkurve die Endpunkte der Achsen und die daselbst gezogenen Tangenten gemeinschaftlich, im übrigen liegt die Fusspunktkurve ausserhalb der Ellipse.

Bemerkenswert ist die Quadratur der von der Fusspunktkurve eingeschlossenen Fläche. Es ist nämlich

$$f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi) d\varphi$$

$$f = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{2} a^2 \epsilon^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$f = \frac{1}{2} a^2 \left[\varphi \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} a^2 \epsilon^2 \cdot \frac{1}{2} \left[\varphi - \sin \varphi \cos \varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$f = \pi a^2 - \frac{1}{2} \pi \epsilon^2 \cdot a^2$$

oder $f = \frac{1}{2} \pi (a^2 + b^2)$ d. h. die Fläche, die von der Ellipsenfusspunktkurve begrenzt wird, ist dem arithmetischen Mittel

aus den Flächen des der Ellipse umgeschriebenen und des ihr eingeschriebenen Kreises gleich, während die Ellipsenfläche dem geometrischen Mittel aus diesen Kreisflächen gleich ist.

Die Rektifikation führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
 p &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} + \sqrt{\frac{a^2 \varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\
 p &= a \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - 2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \varepsilon^4 \sin^4 \varphi} \times \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\
 p &= a \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 (2 - \varepsilon^2) \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\
 &= 4a \int_0^{1/2\pi} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 (2 - \varepsilon^2) \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi
 \end{aligned}$$

Das hier auftretende Integral ist ein hyperelliptisches, welches jedoch, da $\varepsilon^2 < 1$ ist, in eine nach Potenzen von ε^2 fortschreitende Reihe verwandelt werden kann. Hier soll es nicht weiter untersucht werden.

Dagegen lässt sich die Komplanation und die Kubatur des von der Ellipsenfusspunktkurve beschriebenen Rotationskörpers leicht ausführen, wenn die kleine Achse der Ellipse Rotationsachse ist.

Im ersteren Falle findet man

$$f_0 = 2\pi \int_{-b}^b x ds = 2\pi \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r \cos \varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \sqrt{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^2 + \epsilon^4 \sin^2 \cos^2 \varphi} \, d(\sin \varphi)$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \sqrt{1 - 2\epsilon^2 \sin^2 \varphi + \epsilon^4 \sin^2 \varphi} \, d(\sin \varphi)$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - m^2 u^2} \, du, \text{ wenn } m^2 = \epsilon^2 (2 - \epsilon^2) \text{ ist,}$$

$$\text{daher } f_0 = 2\pi a^2 \left[\frac{1}{2} u \sqrt{1 - m^2 u^2} + \frac{1}{2m} \arcsin(mu) \right]_{-1}^1$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 - m^2} + \frac{1}{2m} \arcsin m + \frac{1}{2} \sqrt{1 - m^2} + \frac{1}{2m} \arcsin m \right]$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \left[\sqrt{1 - m^2} + \frac{1}{m} \arcsin m \right] \text{ oder}$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \left[\sqrt{1 - \epsilon^2 (2 - \epsilon^2)} + \frac{1}{\epsilon \sqrt{2 - \epsilon^2}} \arcsin(\epsilon \sqrt{2 - \epsilon^2}) \right]$$

$$f_0 = 2\pi a^2 \left[1 - \epsilon^2 + \frac{\arcsin(\epsilon \sqrt{2 - \epsilon^2})}{\epsilon \sqrt{2 - \epsilon^2}} \right]$$

Ist $\epsilon = 0$, so folgt $f_0 = 4\pi a^2$ (Kugeloberfläche).

Im letzteren Falle ergibt sich

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} r^3 \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} a^3 \sqrt{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^3} \cdot \cos \varphi \, d\varphi$$

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \sqrt{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^3} \cdot d(\sin \varphi)$$

Setzt man $\varepsilon \sin \varphi \equiv \sin \lambda$, so folgt

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \cos^3 \lambda \, d\left(\frac{1}{\varepsilon} \sin \lambda\right)$$

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \cos^4 \lambda \, d\lambda$$

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{4} \sin \lambda \cos^3 \lambda + \frac{3}{8} \sin \lambda \cos \lambda + \frac{3}{8} \lambda \right]_{-\lambda_0}^{\lambda_0}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \sin \lambda_0 \cos^3 \lambda_0 + \frac{3}{4} \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 + \frac{3}{4} \lambda_0 \right]$$

Nun ist $\sin \lambda_0 = \varepsilon$; $\cos \lambda_0 = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, also

$$V = \frac{1}{3} \pi a^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[\varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{3/2} + \frac{3}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{1/2} + \frac{3}{2} \arcsin \varepsilon \right]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi a^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[2\varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{3/2} + 3\varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{1/2} + 3 \arcsin \varepsilon \right]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi a^3 \cdot \left[(2 - 2\varepsilon^2) (1 - \varepsilon^2)^{1/2} + 3 (1 - \varepsilon^2)^{1/2} + \frac{3 \arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi a^3 \left[(5 - 2\varepsilon^2) (1 - \varepsilon^2)^{1/2} + \frac{3 \arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right]$$

Ist $\varepsilon = 0$, so erhalten wir

$$V = \frac{1}{6} \pi a^3 (5 + 3) = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ (Kugelvolumen).}$$

Im Anschluss hieran wollen wir die Anziehung des halben homogen vorausgesetzten Rotationskörpers auf seinen Mittelpunkt berechnen.

Wir erhalten

$$Z = \kappa \delta \int \frac{dm}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = \kappa \delta \int \int \int \frac{r^2 \, dr \, d\vartheta \, \cos \varphi \, d\varphi}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

$$Z = \kappa \delta \int_0^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \cos \varphi \sin \varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$Z = 2 \pi \kappa \delta \int_0^{1/2\pi} r \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi$$

$$Z = 2 \pi \kappa \delta \int_0^{1/2\pi} a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d(\sin \varphi)$$

$$Z = 2 \pi \kappa \delta a \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 v} \, dv, \text{ wenn } v \equiv \sin^2 \varphi$$

gesetzt wird; daher finden wir

$$Z = \pi \kappa \delta a \cdot \left[-\frac{2}{3 \varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2 v)^{3/2} \right]_0^1$$

$$Z = \pi \kappa \delta a \left[-\frac{2}{3 \varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2)^{3/2} + \frac{2}{3 \varepsilon^2} \right]$$

$$Z = \frac{2}{3} \frac{\pi \kappa \delta a}{\varepsilon^2} \left[1 - (1 - \varepsilon^2)^{3/2} \right]$$

$$Z = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \kappa \delta a}{\varepsilon^2} \cdot \left[1 - \frac{b^3}{a^3} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \kappa \delta}{a^2 \varepsilon^2} \cdot (a^3 - b^3)$$

$$Z = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \kappa \delta}{a^2 - b^2} \cdot (a^3 - b^3) = \frac{2}{3} \pi \kappa \delta \cdot \frac{a^2 + a b + b^2}{a + b}$$

Setzen wir $b = a$, so erhalten wir

$$Z = \frac{2}{3} \pi \kappa \delta \cdot \frac{3a}{2} = \pi \kappa \delta a$$

(Anziehung der homogenen Halbkugel auf ihren Mittelpunkt).

Zum Schlusse soll noch untersucht werden, welche anziehende Kraft eine Planetenbewegung in der zentrischen Ellipsenfusspunktkurve hervorbringen müsste.

Aus den Gleichungen

$\frac{d^2 x}{dt^2} = f \cdot \frac{x}{r}$ und $\frac{d^2 y}{dt^2} = f \cdot \frac{y}{r}$, in denen f die vom Pol ausgehende Zentralkraft bezeichnet, folgt

1) $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = a c$, wobei $c = \frac{dy}{dt}$ für $t = 0$ und $x = a$ ist, und

$$2) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2 \int f \cdot dr + C$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right] \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right] \cdot \frac{a^2 c^2}{r^4} \end{aligned}$$

somit

$$\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] \cdot \frac{a^2 c^2}{r^4} = 2 \int f dr + C$$

Setzt man $r = \frac{1}{\rho}$, so erhält man

$$\left[\left(-\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right] \cdot a^2 c^2 \rho^4 = -2 \int \frac{f}{\rho^2} d\rho + C$$

$$\text{oder } a^2 c^2 \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2\right] = -2 \int \frac{f}{\rho^2} d\rho + C.$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$a^2 c^2 \left[2 \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + 2\rho \frac{d\rho}{d\varphi}\right] = -\frac{2f}{\varphi^2} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$\text{mithin } f = -a^2 c^2 \left[\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho\right] \rho^2,$$

oder indem wir wieder r statt ρ einführen

$$f = -\frac{a^2 c^2}{r^2} \left[1 + \frac{2}{r^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right]$$

Ist nun $r = a \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}$, so ergibt sich

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^2 \epsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r}$$

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -a^2 \epsilon^2 \cdot \frac{r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a^2 \epsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^3}$$

Demgemäss ist

$$f = -\frac{a^2 c^2}{r^3} \cdot \left[1 + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{a^1 \varepsilon^1 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \cdot a^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a^2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^3} \right]$$

$$f = -\frac{a^2 c^2}{r^7} \cdot \left[r^4 + 3 a^1 \varepsilon^1 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a^2 \varepsilon^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right]$$

Nun ist $\sin^2 \varphi = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}$ und $\cos^2 \varphi = \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}$, daher durch Substitution

$$f = -\frac{a^2 c^2}{r^7} \cdot \left[r^4 + 3 (a^2 - r^2) (r^2 - b^2) + r^2 (2r^2 - a^2 - b^2) \right]$$

$$f = -\frac{2 (a^2 + b^2) a^2 c^2}{r^5} + \frac{3 a^4 b^2 c^2}{r^7} \text{ d. h. die Planeten-}$$

bahn wäre eine zentrische Ellipsenfusspunktkurve, wenn eine Zentralkraft vorhanden wäre, welche zum Teil umgekehrt proportional der 5. Potenz der Entfernung anziehend, zum andern Teil umgekehrt proportional der 7. Potenz derselben abstossend wirkte; ausserdem müsste beim Beginn der Bewegung der Planet im Endpunkt der grossen Achse stehen und senkrecht zu dieser die Geschwindigkeit c haben.

II.

Die Kurve, deren Bogen $= r\varphi$ ist.

Zählt man die Bogen von der positiven Seite der Abscissenachse aus, so ist

$$r\varphi = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2} d\varphi$$

mithin

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} &= r + \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} \\ r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= r^2 + 2 r \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \varphi^2 \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \\ 0 &= 2 r \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} - (1 - \varphi^2) \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0 \text{ und } (1 - \varphi^2) \frac{dr}{d\varphi} = 2 r \varphi$$

Erstere ergibt $r = C$, also eine Kreislinie; letztere liefert

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \frac{2\varphi}{1 - \varphi^2}$$

also durch Integration

$$\lg r = 2 \int \frac{\varphi d\varphi}{1 - \varphi^2} + C$$

$$\lg r = -\lg (1 - \varphi^2) + C$$

$$r = \frac{c}{1 - \varphi^2}, \text{ wobei } C = \lg c \text{ ist.}$$

Diese Polargleichung repräsentiert demnach die gesuchte Kurve. Man erkennt aus der Gleichung sofort, dass die Kurve aus zwei kongruenten Teilen besteht, die symmetrisch zur Abscissenachse liegen. Setzt man $\varphi = \pm 1$, so ist $r = \infty$, d. h. zwei durch den Pol gehende Gerade, die mit der Abscissenachse die Winkel von $\pm 57^\circ 17' 44,8''$ einschliessen, sind Asymptoten.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse ds , dessen Katheten dr und $r d\varphi$ sind, erhalten wir die Gleichung

$$\operatorname{tg} (\tau - \varphi) = \frac{rd \varphi}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$$

wobei τ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Punkte (r, φ) mit der positiven Seite der Abscissenachse einschliesst.

Wenden wir obige Gleichung auf unsere Kurve an, so finden wir

$$\operatorname{tg} (\tau - \varphi) = \frac{\frac{c}{1 - \varphi^2}}{\frac{2 c \varphi}{(1 - \varphi^2)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \varphi^2}{\varphi}$$

Also ist für $\varphi = 0$

$$\operatorname{tg} \tau = \infty$$

mithin $\tau = \frac{1}{2} \pi$, während $r = c$ ist.

Die Kurve hat also einen Scheitel, dessen Entfernung vom Pole $= c$ ist und in welchem die Tangente auf der Abscissenachse senkrecht steht. Die Kurve gleicht daher einigermaßen dem auf der positiven Seite liegenden Aste einer Hyperbel, welche dieselben Asymptoten hat.

Wie in I. wollen wir noch die Frage erörtern, bei welcher Zentralkraft diese hyperbelähnliche Kurve Planetenbahn sein könnte. Es ist

$$f = -c^2 \rho^2 \left[\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho \right]$$

$$f = -c^2 \rho^2 \left[-\frac{2}{c} + \rho \right]$$

$$f = \frac{2c}{r^2} - \frac{c^2}{r^2} \text{ d. h. die Zentralkraft müsste aus einem}$$

im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernung abstossenden und einem im kubischen Verhältnisse anziehenden Teile bestehen; ausserdem müsste die Scheitelschwindigkeit des Planeten $= 1$ und seine Entfernung vom Pole $= c$ sein, wenn $t = 0$ ist.



III.

Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punkt seiner Oberfläche.

Die Anziehung eines solchen Ellipsoides mit verkürzter Rotationsachse wird gewöhnlich für innere und äussere Punkte durchgeführt; ein Punkt der Oberfläche wird dann ersetzt durch einen derselben unendlich nahen inneren oder äusseren Punkt.

Gleichwohl ist es nicht uninteressant, die Anziehung auf einen Punkt der Oberfläche unabhängig zu berechnen.

Legen wir zu diesem Zwecke durch den gegebenen Punkt und die Rotationsachse die Y-Z-Ebene, so dass die Y-Achse parallel zu einem Äquatordurchmesser wird, ziehen wir ferner die X-Achse senkrecht zur Y-Z-Ebene, so ist die Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - p)^2}{a^2} + \frac{(z - q)^2}{b^2} = 1$$

wenn p und q die Koordinaten des Mittelpunktes bezeichnen. Ferner ist

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

wobei ϑ der Winkel ist, den die Projektion des Radius Vektors mit der $+$ -Richtung der X-Achse einschliesst, während φ den Neigungswinkel desselben gegen die X-Y-Ebene bezeichnet.

Dann ist $X = 0$

$$Y = \kappa \delta \iint r \cos^2 \varphi \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$Z = \kappa \delta \iint r \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

Hiebei bezeichnet κ die Gravitationskonstante, δ die Dichtigkeit des Ellipsoides.

Die Gleichung desselben in Polarkoordinaten ist

$$\frac{r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + (r \sin \vartheta \cos \varphi - p)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \varphi - q)^2}{b^2} = 1$$

Hieraus folgt

$$b^2 r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 2 b^2 p r \sin \vartheta \cos \varphi + b^2 p^2 + a^2 r^2 \sin^2 \varphi - 2 a^2 q r \sin \varphi + a^2 q^2 = a^2 b^2$$

oder

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) r^2 - 2 (a^2 q \sin \varphi + b^2 p \sin \vartheta \cos \varphi) r + a^2 q^2 + b^2 p^2 = a^2 b^2$$

Nun ist aber der gegebene Punkt der Oberfläche zugleich ein Punkt der Meridianellipse, also

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \text{ oder } a^2 q^2 + b^2 p^2 = a^2 b^2$$

folglich ist

$$r = \frac{2 (a^2 q \sin \varphi + b^2 p \cos \varphi \sin \vartheta)}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}$$

Durch Substitution erhalten wir

$$Y = 2 \kappa \delta a^2 q \iint \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta \\ + 2 \kappa \delta b^2 p \iint \frac{\cos^3 \varphi \sin^2 \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta$$

wobei $N \equiv a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$ ist.

Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, denken wir uns in dem angezogenen Punkte eine Tangente an die Meridianellipse gezogen und diese um die Z-Achse gedreht, so entsteht eine Doppelkegelfläche; innerhalb der oberen Kegelfläche (nach der $+z$ -Richtung) liegt ein Teil des Ellipsoides, der andere Teil desselben liegt ausserhalb des Doppelkegels, während die untere Kegelfläche (nach der $-z$ -Richtung) keinen Punkt des Ellipsoides einschliesst.

Nennt man die Neigung der Seitenlinie dieses Doppelkegels gegen die X-Y-Ebene φ_0 (im absoluten Sinne genommen), so durchläuft ϑ im oberen Kegel für die Integration alle Werte von 0 bis 2π , ausserhalb des Doppelkegels dagegen nur die Werte von 0 bis π , während die Werte von φ im oberen Kegel von φ_0 bis $\frac{1}{2}\pi$, ausserhalb des Doppelkegels von $-\varphi_0$ bis $+\varphi_0$ sich erstrecken. Es ist also

$$Y = 2 \kappa \delta a^2 q \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta \\ + 2 \kappa \delta b^2 p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^\pi \frac{\cos^3 \varphi \sin^2 \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta$$

$$+ 2 \kappa \delta a^2 q \int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} \int_0^{2 \pi} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta$$

$$+ 2 \kappa \delta b^2 p \int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} \int_0^{2 \pi} \frac{\cos^3 \varphi \sin^2 \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta$$

Nun ist $\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{N} d\varphi = - \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\cos^2 \varphi}{N} d(\cos \varphi)$

$$= - \left[f(\cos \varphi) \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0}$$

$$= - f(\cos \varphi_0) + f(\cos[-\varphi_0])$$

$$= 0$$

Ferner ist $\int_0^{2 \pi} \sin \vartheta d\vartheta = - \left[\cos \vartheta \right]_0^{2 \pi}$

$$= - \cos 2 \pi + \cos 0$$

$$= 0$$

Demgemäss vereinfacht sich der Wert von Y auf

$$Y = 2 \kappa \delta b^2 p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{\pi} \frac{\cos^3 \varphi \sin^2 \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta$$

$$+ 2 \kappa \delta b^2 p \int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} \int_0^{2 \pi} \frac{\cos^3 \varphi \sin^2 \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta$$

Da aber

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \pi \text{ und } \int_0^{2 \pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \pi \text{ ist, so finden wir}$$

$$Y = \pi \kappa \delta b^2 p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\cos^3 \varphi \, d\varphi}{N} + 2 \pi \kappa \delta b^2 p \int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} \frac{\cos^3 \varphi \, d\varphi}{N}$$

Ferner

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 \varphi \, d\varphi}{N} &= \int \frac{\cos^2 \varphi \cdot d(\sin \varphi)}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \int \frac{(1 - u^2) \, du}{a^2 u^2 + b^2 - b^2 u^2} \\ &= \int \frac{1 - u^2}{b^2 + c^2 u^2} \, du \\ &= \int \left[-\frac{1}{c^2} + \frac{a^2}{c^2 (c^2 u^2 + b^2)} \right] \, du \\ &= -\frac{u}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{bc} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{cu}{b} \right) \end{aligned}$$

wobei $c^2 = a^2 - b^2$ und $\sin \varphi \equiv u$ gesetzt wurde.

Daher kommt

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = -\frac{2 \sin \varphi_0}{c^2} + \frac{2 a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} &= -\frac{1}{c^2} + \frac{a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c}{b} \right) \\ &\quad + \frac{\sin \varphi_0}{c^2} - \frac{a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right) \end{aligned}$$

Durch Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} Y &= \pi \kappa \delta b^2 p \cdot \left[-\frac{2 \sin \varphi_0}{c^2} + \frac{2 a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right) \right] \\ &\quad + 2 \pi \kappa \delta b^2 p \\ &\quad \cdot \left[-\frac{1}{c^2} + \frac{a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c}{b} \right) + \frac{\sin \varphi_0}{c^2} - \frac{a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right) \right] \\ Y &= 2 \pi \kappa \delta b^2 p \left[-\frac{1}{c^2} + \frac{a^2}{c^3 b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c}{b} \right) \right] \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\frac{c}{a} \equiv \varepsilon_1$, so bekommen wir nach einigen Reduktionen

$$Y = 2 \pi \kappa \delta p \cdot \frac{1}{\varepsilon_1^3} \left[\arcsin \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \right] \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}$$

oder

$$Y = \frac{3}{2} \kappa M \cdot \frac{p}{a^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1^3} \left[\arcsin \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \right]$$

Entwickeln wir $\arcsin \varepsilon_1$ und $\varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}$ in Potenzreihen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon_1^3} \left[\arcsin \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_1^3} \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_1^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\varepsilon_1^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\varepsilon_1^7}{7} + \dots \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon_1^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \varepsilon_1^7 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_1^3} \cdot \left[\frac{2}{3} \varepsilon_1^3 + \frac{1}{5} \varepsilon_1^5 + \frac{3}{28} \varepsilon_1^7 + \dots \right] \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \varepsilon_1^2 + \frac{3}{28} \varepsilon_1^4 + \dots \end{aligned}$$

Mithin ist

$$Y = \kappa M \cdot \frac{p}{a^3} \cdot \left[1 + \frac{3}{10} \varepsilon_1^2 + \frac{9}{56} \varepsilon_1^4 + \dots \right]$$

In ähnlicher Weise finden wir

$$\begin{aligned} Z &= 2 \kappa \delta a^2 q \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_{\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{N} d\varphi d\vartheta \\ & \quad + 2 \kappa \delta b^2 p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta \\ & \quad + 2 \kappa \delta a^2 q \int_{\varphi_0}^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{N} d\varphi d\vartheta \\ & \quad + 2 \kappa \delta b^2 p \int_{\varphi_0}^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \vartheta}{N} d\varphi d\vartheta \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta = - \left[\cos \vartheta \right]_0^{\pi} = - \cos \pi + \cos 0 = 2$$

daher mit Benützung der obigen Gleichungen

$$Z = 2 \pi \kappa \delta a^2 q \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{N} d\varphi \\ + 4 \pi \kappa \delta a^2 q \int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{N} d\varphi$$

Ferner ist

$$\int \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int \frac{\sin^2 \varphi \, d(\sin \varphi)}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \\ = \int \frac{u^2 \, du}{a^2 u^2 + b^2 - b^2 u^2} \\ = \int \frac{u^2 \, du}{b^2 + c^2 u^2} \\ = \int \left[\frac{1}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 u^2} \right] du \\ = \frac{u}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{1}{bc} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c u}{b} \right)$$

daher

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = 2 \left[\frac{\sin \varphi_0}{c^2} - \frac{b}{c^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right) \right]$$

und

$$\int_{\varphi_0}^{1/2 \pi} = \frac{1}{c^2} - \frac{b}{c^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c}{b} \right) - \frac{\sin \varphi_0}{c^2} + \frac{b}{c^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right)$$

also

$$Z = 4 \pi \kappa \delta a^2 q \left[\frac{\sin \varphi_0}{c^2} - \frac{b}{c^3} \arctg \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right) \right] \\ + 4 \pi \kappa \delta a^2 q \left[\frac{1}{c^2} - \frac{b}{c^3} \arctg \left(\frac{c}{b} \right) - \frac{\sin \varphi_0}{c^2} \right. \\ \left. + \frac{b}{c^2} \arctg \left(\frac{c \sin \varphi_0}{b} \right) \right]$$

$$Z = 4 \pi \kappa \delta a^2 q \left[\frac{1}{c^2} - \frac{b}{c^3} \arctg \left(\frac{c}{b} \right) \right]$$

oder

$$Z = \kappa M \cdot \frac{q}{b^3} \cdot \frac{3}{\varepsilon_2^3} \left[\varepsilon_2 - \arctg \varepsilon \right]$$

wobei $\frac{c}{b} \equiv \varepsilon_2$ ist. (M Masse des Ellipsoides, κ die Gravitationskonstante).

Entwickeln wir $\arctg \varepsilon_2$ in eine Potenzreihe, so finden wir

$$Z = \kappa M \cdot \frac{p}{b^3} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} \varepsilon_2^2 + \frac{3}{7} \varepsilon_2^4 - \dots \right]$$

Sind ε_1 und ε_2 kleine Brüche, so kann man sich bei den Werten von Y und Z mit je drei ersten Gliedern obiger Reihen begnügen. Bezeichnet man die Abplattung mit α , so ist

$$\varepsilon_1^2 = 2\alpha - \alpha^2 \text{ und } \varepsilon_2^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \text{ oder } \varepsilon_2^2 = (2\alpha - \alpha^2) \\ (1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots)$$

$\varepsilon_2^2 = 2\alpha + 3\alpha^2$, wenn man die höheren Potenzen von α vernachlässigt.

Dadurch erhalten wir die Gleichungen

$$Y = \kappa \cdot \frac{Mp}{a^3} \cdot \left[1 + \frac{3}{5} \alpha + \frac{12}{35} \alpha^2 \right] \equiv \kappa \cdot \frac{Mp}{b^3} \cdot A$$

$$Z = \kappa \cdot \frac{Mq}{b^3} \cdot \left[1 - \frac{6}{5} \alpha - \frac{3}{35} \alpha^2 \right] \equiv \kappa \cdot \frac{Mq}{b^3} \cdot B$$



IV.

Freie Oberfläche einer homogenen flüssigen Masse,
die um eine Gerade rotiert.

Hat die rotierende Masse die Form eines Rotations-
ellipsoides und sind x und y die Koordinaten eines Punktes
einer Meridianellipse, so sind die hydrostatischen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\kappa \cdot \frac{Mx}{a^3} \cdot A + \omega^2 x &= \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \text{und} \quad -\kappa \cdot \frac{My}{b^3} \cdot B &= \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} -\kappa \frac{Mx}{a^3} \cdot A \cdot dx + \omega^2 x \, dx - \kappa \cdot \frac{My \, dy}{b^3} B &= \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right] \end{aligned}$$

Durch Integration finden wir

$$-\kappa \cdot \frac{M}{a^3} \cdot A \cdot \frac{1}{2} x^2 - \kappa \cdot \frac{M}{b^3} \cdot B \cdot \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 = \frac{p}{\delta} + C;$$

dabei bedeutet ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation,
 p den Druck, δ die Dichtigkeit.

An der Oberfläche ist für $x = 0$; $y = b$ und für $y = 0$;
 $x = a$; mithin

$$\begin{aligned} -\kappa \cdot \frac{M}{a^3} \cdot A \cdot a^2 + \omega^2 a^2 &= \frac{2p_0}{\delta} \\ -\kappa \cdot \frac{M}{b^3} \cdot B \cdot b^2 &= \frac{2p_0}{\delta} \end{aligned}$$

Durch Vergleichung folgt

$$-\kappa \cdot \frac{M}{a} \cdot A + \omega^2 a^2 = -\kappa \cdot \frac{M}{b} \cdot B$$

$$\text{also} \quad \omega^2 a^2 = \kappa M \left(\frac{A}{a} - \frac{B}{b} \right)$$

oder da $b = a (1 - \alpha)$ ist

$$\omega^2 a^2 = \kappa M \cdot \left[\frac{A}{a} - \frac{B}{a(1-\alpha)} \right]$$

$$\omega^2 a^3 = \kappa M \left[A(1-\alpha) - B \right] (1+\alpha)$$

$$\omega^2 a^2 = \kappa M \cdot \left(\frac{4}{5} \alpha + \frac{22}{35} \alpha^2 \right)$$

Beschränkt man sich für den Fall eines kleinen α auf die 1. Potenz, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{5 a^3 \omega^2}{4 \kappa M}$$

Nun ist $\frac{\kappa M}{a^2} \cdot \left(1 + \frac{3}{5} \alpha \right) = g_a$ (Beschleunigung am Äquator durch die Schwere), daher

$$\frac{a^2}{\kappa M} = \frac{1 + \frac{3}{5} \alpha}{g_a}$$

mithin

$$\alpha = \frac{5 a \omega^2}{4} \cdot \frac{1 + \frac{3}{5} \alpha}{g_a}$$

$$4 g_a \alpha = 5 a \omega^2 + 3 a \omega^2 \cdot \alpha \quad \text{also}$$

$$\alpha = \frac{5 a \omega^2}{4 g_a - 3 a \omega^2}$$

Wäre die Erde homogen und flüssig, so folgte aus obiger Gleichung

$$\alpha = \frac{5 \cdot 0,034}{4 \cdot 9,814 - 3 \cdot 0,034} = \frac{1}{230,3}$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Resultierenden von X und Y gegen die Äquatorebene mit ψ , so ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Y}{X} = \frac{\kappa \frac{M_y}{b^3} \cdot B}{\kappa \frac{M_x}{a^3} \cdot A} = \frac{a^3 y B}{b^3 x A}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a^3 B}{b^3 A} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \left(1 + \frac{6}{5} \alpha \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

während $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \beta = (1 - 2\alpha) \operatorname{tg} \beta$ sich ergibt, wenn β die geographische Breite bedeutet und die höheren Potenzen von α vernachlässigt werden.

Ist z. B. $\alpha = \frac{1}{300}$ und $\beta = 49^\circ 21'$ (Breite von Neustadt),

so folgt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{149}{150} \operatorname{tg} 49^\circ 21'$

also $\varphi = 49^\circ 10'$, während

$$\operatorname{tg} \psi = 1,004 \operatorname{tg} 49^\circ 10'$$

also $\psi = 49^\circ 18'$ ist.

Der Unterschied zwischen dem Neigungswinkel der Resultierenden (Schwere) und der geozentrischen Breite beträgt in diesem Falle (bei homogener Erde) nur $8'$.

Nun ist klar, dass dieser Unterschied noch kleiner ausfällt, wenn wie bei der Erde die Dichtigkeit gegen den Mittelpunkt zunimmt; man kann daher den Winkel ψ mit φ ohne bedeutenderen Fehler verwechseln und erhält dann folgende Annäherungs-Rechnung:

$$-g_r \cdot \frac{x}{r} + \omega^2 x = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-g_r \cdot \frac{y}{r} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$-g_r \cdot dr + \omega^2 x dx = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right)$$

$$-g_r \cdot dr + \omega^2 x dx = \frac{1}{\delta} \cdot dp$$

Sieht man von der Veränderlichkeit der Grösse g_r , die ja gering ist, für die Integration ab, so kommt

$$-g_r \cdot r + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 = \frac{1}{\delta} \cdot p + C$$

Hieraus $-g_a \cdot a + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 = \frac{1}{\delta} \cdot p_0$

und $-g_b \cdot b = \frac{1}{\delta} \cdot p_0$

also durch Vergleichung:

$$-g_a \cdot a + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 = -g_b \cdot b$$

$$\text{oder} \quad -g_a \cdot a + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 = -g_b a \cdot (1 - \alpha)$$

$$-g_a + \frac{1}{2} \omega^2 a = -g_b + g_b \cdot \alpha$$

$$\text{daher} \quad \alpha = \frac{g_b - g_a + \frac{1}{2} \omega^2 a}{g_b}$$

Da aber $g_a = g'_a$ (der durch die Zentrifugalkraft verminderten Schwere) $+ \omega^2 a$ ist, so finden wir durch Substitution

$$\alpha = \frac{g_b - g'_a - \frac{1}{2} \omega^2 a}{g_b}$$

Nehmen wir $g_b = 9,831$

$g'_a = 9,780$

$\omega^2 a = 0,034$ an, so erhalten wir

$$\alpha = \frac{9,831 - 9,780 - 0,017}{9,831} = \frac{1}{289,14}$$

Vergleichen wir damit die bekannte Clairaut'sche Formel, so bekommen wir

$$\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,034}{9,780} - \frac{9,831 - 9,780}{9,780} = \frac{1}{287,69}$$



V.

Bemerkungen zur Theorie der Planetenbewegung im widerstehenden Mittel.

Wir wollen zuerst annehmen, der Widerstand des Mittels sei der 1. Potenz der Geschwindigkeit proportional, so haben wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{x}{r} - \epsilon \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{x}{r} - \epsilon \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{y}{r} - \epsilon \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{y}{r} - \epsilon \frac{dy}{dt}$$

Hieraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = - \varepsilon \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) = - \varepsilon \cdot r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\lg \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) \right] = - \varepsilon$$

also 1) $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c_1 e^{-\varepsilon t}$

Nun ist $f = \frac{1}{2} \int r^2 d\vartheta$ daher

2) $2 \frac{df}{dt} = c_1 e^{-\varepsilon t}$ d. h. die Flächengeschwindigkeit

des Planeten nähert sich allmählich der konstanten Grenze 0, mit anderen Worten: der Planet bewegt sich in immer gerader werdender Kurve gegen das Zentrum.

Ferner folgt durch Integration

$$2 f = c_1 \int e^{-\varepsilon t} + C = - \frac{c_1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t} + C$$

Ist für $t = 0$ auch $f = 0$, so finden wir

3) $2 f = \frac{c_1}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t})$ d. h. die vom Radius Vektor

beschriebene Fläche nähert sich der konstanten Grenze $\frac{c_1}{2 \varepsilon}$.

Aus den Bewegungsgleichungen erhalten wir ferner

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = - \frac{2 k}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} - 2 \varepsilon \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

Nun ist $\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2$

$$= \left[\left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 + r^2 \right] \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2$$

$$= \left[\left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 + r^2 \right] \cdot \frac{c_1^2 e^{-2 \varepsilon t}}{r^4}$$

$$= \left[\left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \right] \cdot c_1^2 e^{-2 \varepsilon t}$$

Durch Substitution

$$c_1^2 \frac{d}{dt} \left\{ \left[\left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \right] e^{-2\varepsilon t} \right\} = 2k \frac{d\rho}{dt} - 2c_1^2 \varepsilon \left[\left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \right] e^{-2\varepsilon t}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } & -2c_1^2 \varepsilon \left[\left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \right] e^{-2\varepsilon t} \\ & + c_1^2 e^{-2\varepsilon t} \left[2 \frac{d\rho}{d\vartheta} \cdot \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} + 2\rho \frac{d\rho}{d\vartheta} \right] \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \\ & = 2k \frac{d\rho}{dt} - 2c_1^2 \varepsilon \left[\left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \right] e^{-2\varepsilon t} \end{aligned}$$

daher

$$4) \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} + \rho = \frac{k}{c_1^2} e^{2\varepsilon t}$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) folgt durch Elimination von t die Differentialgleichung der Planetenbahn, deren Integration jedoch kaum durchgeführt werden kann. —

Ist der Widerstand des Mittels der 2. Potenz der Geschwindigkeit proportional, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{x}{r} - \varepsilon \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{y}{r} - \varepsilon \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$5) r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c_1 e^{-\varepsilon s} \quad \text{oder} \quad 2 \frac{df}{dt} = c_1 e^{-\varepsilon s}$$

d. h. die Flächengeschwindigkeit nimmt mit wachsendem Bogen gegen 0 ab, oder: der Planet bewegt sich schliesslich nahezu geradlinig gegen die Zentralkörper.

Ferner ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = -\frac{2k}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} - 2\varepsilon \left(\frac{ds}{dt} \right)^3$$

Verfährt man wie oben, so folgt

$$6) \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} + \rho = \frac{k}{c_1^2} \cdot e^{2\varepsilon s}$$

In beiden Fällen sind also die Planetenbahnen vermutlich Spiralen, die nach vielen Umrundungen des Zentralkörpers zu diesem konvergieren.

Ist die Anziehung des Zentralkörpers nicht $k \rho^2$, sondern $f(\rho)$, so folgt

$$\frac{d^2 \rho}{d\vartheta^2} + \rho = \frac{f(\rho)}{c_1^2 \rho^2} \cdot e^{2 \varepsilon s}$$

so dass also der Fall der Natur noch der einfachste ist.

Da das Ende der Planetenbewegung nahezu geradlinig ist, so hat man hiefür die Gleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{s^2} - \varepsilon \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Diese Gleichung kann mittels des integrierenden Faktors $2 u \frac{ds}{dt}$ gelöst werden; man erhält

$$2 u \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \varepsilon u \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = -\frac{2k}{s^2} u \cdot \frac{ds}{dt}$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt} \left[u \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right] = 2 u \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{du}{ds} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

Bestimmt man u so, dass

$$\frac{du}{ds} = 2 \varepsilon u, \text{ daher } u = e^{2 \varepsilon s} \text{ wird, dann ist}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{2 \varepsilon s} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right] = -\frac{2k}{s^2} e^{2 \varepsilon s} \cdot \frac{ds}{dt}$$

mithin

$$e^{2 \varepsilon s} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2k \int \frac{e^{2 \varepsilon s}}{s^2} ds + C$$

Hieraus erhalten wir $\frac{ds}{dt} =$ einer Funktion von s . Wir wollen die Gleichung nicht weiterführen; es genügt, die Möglichkeit der Lösung dargetan zu haben.

Da die elliptischen Bahnelemente der Planeten mit den erforderlichen Störungskorrekturen vollständig ausreichen, um die Planetenörter für beliebige Zeitpunkte vorwärts und rückwärts zu bestimmen, so muss, wenn überhaupt ein widerstehendes Mittel bei der Planetenbewegung sich geltend macht, ε nahezu $= 0$, d. h. dieses Mittel so ausserordentlich dünn sein, dass es erst nach ungeheuren Zeiträumen von jetzt an gerechnet möglich sein wird, eine Verschiedenheit von den elliptischen Bahnen zu beobachten.

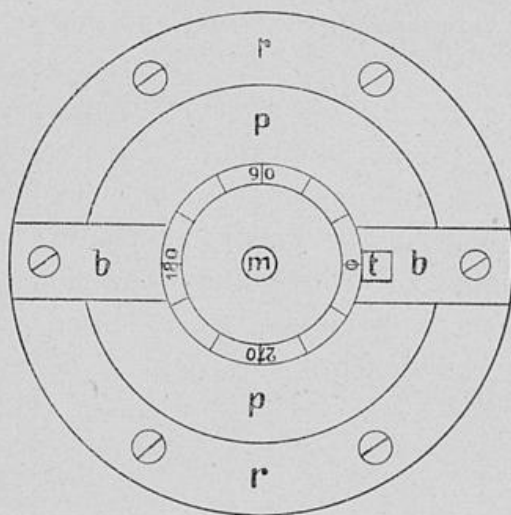
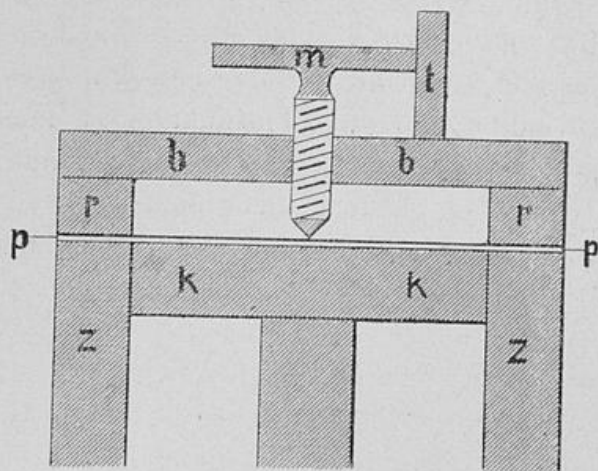
Anders liegt die Sache bei der ballistischen Kurve, wo ϵ eine merkliche Grösse besitzt. Auch hier kommen die obigen Differentialgleichungen in betracht; da nämlich die Wurfweite bei den grossen Geschützen bis zu 19,6 km, die Wurfhöhe ungefähr 6 km beträgt, kann man die Schwere-richtungen während der Geschossbewegung nicht als parallel, die Schwere selbst nicht als konstant betrachten. Für diesen Fall lässt sich die Gleichung 6) vielleicht annäherungsweise dadurch integrieren, dass man $\rho = \frac{1}{r_0 + h}$ setzt, ($r_0 \equiv$ Erdradius, $h \equiv$ Höhe des Geschosses über der Erdoberfläche) und die höheren Potenzen von $\frac{h}{r}$ vernachlässigt.

Ob dadurch freilich eine grössere Genauigkeit der ballistischen Theorie erreicht wird, bleibt fraglich, weil die Rotation des Geschosses, die dadurch bedingte Reibung der Geschossoberfläche an der Luft, die konische Pendelung u. s. w., zuletzt auch die Erdrotation doch nicht berücksichtigt sind.

VI.

Ein vom Quecksilberbarometer unabhängiges Aneroid.

Wird ein Metallzylinder, in welchem der Kolben bis zum abgeschliffenen Rande hinaufgeschoben ist, durch eine elastische Metallplatte luftdicht abgeschlossen, so muss, sobald der Kolben abwärts bewegt wird, zwischen der Kolbenfläche, die vorher die elastische Platte berührte, und dieser ein Vakuum entstehen; die Platte aber wird durch den Luftdruck einigermaßen eingedrückt. Die Tiefe, bis zu welcher die Platte sich senkt, lässt sich durch eine über der Mitte befindliche Mikrometerschraube messen, wenn dieselbe soweit der Platte nachgedreht wird, dass die Spitze der Schraube ihr Spiegelbild in der Platte berührt.



Zeichenerklärung:

- z bedeutet den metallenen Hohlzylinder,
- p „ die elastische Platte (1 mm),
- r „ den metallenen Ring (innerer Radius 4,15 cm),
- m „ die Mikrometerschraube mit geteiltem Kopf,
- b „ den Bügel, der die Mikrometerschraube trägt,
- t „ den Vertikalmasstab mit dem 0-Punkt der Schraubenstellung,
- k „ die Kolbenscheibe.

Die Eichung dieses Aneroidbarometers ist vom Quecksilberbarometer unabhängig; denn man braucht nur die Platte auf eine irgendwie geformte Röhre von entsprechender Endweite aufzuschrauben und die Eindrückung zu messen, welche die Platte erleidet, wenn z. B. eine Wassersäule von 15 m darauf drückt. Dieser Druck ist gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 1103,2 mm Höhe; dem halben Drucke entspricht eine halb so tiefe Eindrückung, dem 3. Teile des Druckes der 3. Teil u. s. f.

Nach diesen Angaben und nach Zeichnungen, die den vorstehenden entsprechen, fertigte mir Herr F. Ernecke (Präzisionsmechaniker), Berlin, ein Aneroid im Dezember 1887. Der Barometerstand ergibt sich nach der Formel $b = m \cdot \beta$, wobei β die Zahl der Grade bedeutet, um welche die Mikrometerschraube gedreht werden muss. Bei meinem Aneroid ist die Höhe eines Schraubenganges 0,5 mm und der Kopf der Schraube ist von 5 zu 5⁰ geteilt.

Die Eichung ergab, dass $m = 1,453$ gesetzt werden müsse, sodass also $515^0 = 747$ mm sind.

Die Spiegeleinstellung hat sich nicht bewährt, da die Spitze einmal etwas in die elastische Platte eindrang; besser dürfte ein Fühlhebel zur Anwendung kommen.

Der Kolben wird mittels einer sogen. „Schraube ohne Ende“ gehoben und gesenkt.



silberb
auf ein
weite
die Pl
darauf
Quecks
entspri
Drucke
N
stehend
mechar
Barome
bei β c
schraub
Höhe e
ist von
D
sodass
D
Spitze
dürfte
D
Ende“

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale



rs ist vom Queck-
taucht nur die Platte
entsprechender End-
zu messen, welche
sersäule von 15 m
dem Gewicht einer
dem halben Drucke
, dem 3. Teile des

ungen, die den vor-
er necke (Präzisions-
zember 1887. Der
el $b = m \cdot \beta$, wo-
che die Mikrometer-
em Aneroid ist die
r Kopf der Schraube

setzt werden müsse,

t bewährt, da die
e eindrang; besser
en.

n. „Schraube ohne