

§ 1. Gleichförmige Bewegung.

Ein Körper bewegt sich gleichförmig, wenn er in beliebig kleinen gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Unter der Geschwindigkeit (c) verstehen wir bei dieser Bewegung das Verhältnis von Weg (s) und Zeit (t). Wir haben also:

$$1. \quad c = \frac{s}{t}, \quad s = ct, \quad t = \frac{s}{c}$$

Es ist wichtig zu beachten, in welcher Verbindung in einem physikalischen Begriff die gebräuchlichen Masse für Länge und Zeit vorkommen. Nach dem Obigen ist die Geschwindigkeit gleich $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ also gleich $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$ oder gleich $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}$, wenn wir die Länge mit Metern, die Zeit mit Sekunden messen. Wir sagen daher die »Dimension« der Geschwindigkeit sei $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$.

Bemerkenswerte Geschwindigkeiten.

Fussgänger	1·6 m	Granate der 9 cm Feld-	
Pferd im Trab	2— m	kanone	440 m
» » Galopp	4— m	Shrapnel der 7·5 cm	
Personenzug	8— m	Schnellfeuerkanone	500 m
Schnellzug	14—25 m	Kugel der 30·5 cm	
Kugel des Mannlicher-		Küstenkanone . . .	700 m
gewehres	620 m	Schall in der Luft . .	333 m
		Licht	40.000 Meilen.

Aufgaben. 1. Welche Strecke legt ein Eilzug (16 m) in 10 Stunden zurück? 2. In welcher Zeit gelangt ein Eilzug (16 m) von Hermannstadt bis Budapest? (Entf. 597 km.) 3. In welcher Zeit würde bei konstanter Geschwindigkeit die Kugel des 30½ cm Küstengeschützes auf dem Monde anlangen? 4. Der Orient-Expresszug fährt von Wien um 6 Uhr 46 Minuten abends ab und kommt um 11 Uhr abends in Budapest an, wie gross ist seine Geschwindigkeit? (Entf. Wien—Budapest 278 km.) 5. De la Vaulx flog bei einer seiner Ballonfahrten im Jahre 1900 in 35½ Stunden

von Paris nach Kiew. Die Entfernung der beiden Orte beträgt in der Luftlinie 2033 km. Welche Geschwindigkeit hatte der Ballon? 6. Wie gross ist infolge der Axendrehung der Erde die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem Parallelkreis von Hermannstadt ($\varphi = 45^\circ 47'9''$). 7. Welches ist, bei Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung, die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne, des Mondes bei seinem Lauf um die Erde. Ersteres in Meilen, letzteres in km auszurechnen.

§ 2. Ungleichförmige Bewegung.

Ein Körper hat eine ungleichförmige Bewegung, wenn er in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurücklegt. Bei dieser Bewegung können wir nicht von einer Geschwindigkeit überhaupt, sondern nur von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkt sprechen, wir verstehen darunter den Weg, den der Körper von diesem Zeitpunkte an in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn die Bewegung in eine gleichförmige überginge. Als einfachstes Beispiel einer ungleichförmigen Bewegung wird zunächst behandelt

§ 3. Der freie Fall.

Schon Aristoteles (384—322) hat erkannt, dass wir es hier mit einer beschleunigten Bewegung zu thun haben, er war aber im Einzelnen wenig klar über die Gesetze derselben, denn er war der Meinung, dass schwere Körper schneller fallen, als leichte (eine Münze und ein Blatt Papier). Es war ihm unbekannt, welche Rolle der Luftwiderstand bei den Bewegungen spielt, so erklärte er z. B. die Fortbewegung eines geworfenen Steines, nachdem derselbe die Hand verlassen, dadurch, dass die Luft in den vom Stein eben verlassenen Raum eindringe und ihm neue Bewegungsantriebe erteile. Das Mittelalter hat den Kenntnissen Aristoteles' hierüber nichts neues hinzugefügt (Physikbetrieb an den mittelalterlichen Schulen und Universitäten), erst Galilei hat neue Grundlagen gelegt.

Durch Fallversuche vom schiefen Turm in Pisa zeigt er im Jahre 1590, dass eine hundertpfündige und eine halbpfündige Kugel gleich schnell fallen und entwickelt mathematisch die Gesetze der beschleunigten Bewegung. Dies wurde möglich, da er das Trägheitsgesetz erkannt hatte:

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äussere Ursachen gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Hieraus ergibt es sich sofort, wie die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers wachsen wird. Da die Ursache dieser Bewegung das gleichbleibende Gewicht des Körpers ist, so wird die Geschwindigkeit, wenn sie bis zum Ende der ersten Sekunde auf g gewachsen ist, am Ende der zweiten Sekunde $2g$ sein, denn die in der ersten Sekunde erworbene Geschwindigkeit g bleibt bestehen und wird durch die gleiche Bewegungsursache in der zweiten Sekunde um ebensoviel vermehrt. Die Geschwindigkeit v am Ende der t -ten Sekunde ist demnach gt .

$$v = gt$$

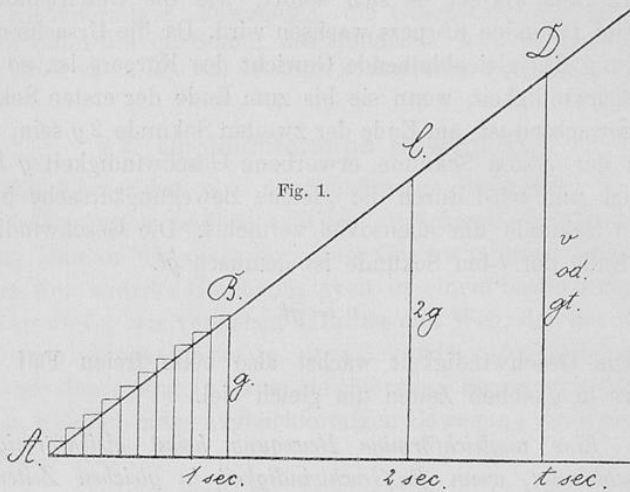
Die Geschwindigkeit wächst also beim freien Fall eines Körpers in gleichen Zeiten um gleich viel.

Eine ungleichförmige Bewegung heisst gleichförmig beschleunigt, wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleichviel zunimmt. Die Zunahme der Geschwindigkeit in einer Sekunde heisst die Beschleunigung.

Die Beschleunigung beim freien Fall bezeichnet man mit g (gravitas, Schwere) die Beschleunigung bei andern gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit a (acceleratio, Beschleunigung).

Nun soll auch der Weg berechnet werden, den ein frei fallender Körper in t Sekunden zurücklegt. Hierzu stellen wir uns zunächst vor, dass die Geschwindigkeit nicht, wie es tatsächlich der Fall ist, stetig, sondern ruckweise wächst, so zwar, dass sie gleich im ersten Moment der Bewegung auf $\frac{g}{10}$ wächst und dann $\frac{1}{10}$ Sekunden gleich bleibt, dann plötzlich auf $\frac{2g}{10}$ wächst und in der zweiten Zehntelsekunde wieder gleich bleibt u. s. f. Machen wir uns dies auch durch eine Zeichnung anschaulich! Auf einer horizontalen Linie (Fig. 1) tragen wir als Abscissen die Zehntel- und ganzen Sekunden in einem beliebigen Massstabe auf und errichten in den Anfangspunkten jeder Zehntelsekunde eine Normale (Ordinate) auf der wir die Geschwindig-

keiten $\frac{g}{10}, \frac{2g}{10}$ u. s. f. auftragen, dann stellt die treppenförmig begrenzte Linie AB den Geschwindigkeitsverlauf bei der von uns angenommenen Bewegung dar. Den Weg für diese Bewegung



können wir aber berechnen, er ist in jedem der angegebenen Intervalle, da innerhalb derselben die Bewegung gleichförmig ist, Geschwindigkeit mal Zeit.

Die Masszahl des Weges in jeder Zehntelsekunde ist also gleich der Masszahl des über jeder Zehntelsekunde stehenden Rechteckes. Der Weg während einer längeren Zeit wird dargestellt durch die Summe aller über dem betreffenden Zeitabschnitt stehenden Rechtecke. Diese vorgestellte Bewegung ist aber nicht die gleichförmig beschleunigte. Wir kommen ihr näher, wenn wir uns denken, dass die Geschwindigkeit nicht von Zehntel zu Zehntel, sondern von Hundertstel zu Hundertstel, oder von Milliontel zu Milliontel-Sekunde ruckweise anwächst. Der Weg würde dann dargestellt sein durch 100 bzw. Millionen Rechtecke. Gehen wir zur Wahrheit über, dass die Geschwindigkeit stetig wächst, so gehen die 10, 100, Millionen Rechtecke in das Dreieck über, welches gebildet wird aus der Zeitlinie (t), der Endgeschwindigkeit (gt) und der Geraden AD , welche den Geschwindigkeitsverlauf darstellt, die Masszahl des Weges in der Zeit t ist

sonach gleich der Masszahl der Fläche des Dreiecks AED , also gleich $\frac{vt}{2}$ oder $\frac{gt^2}{2}$. Die beiden Formeln:

$$2. \quad v = gt \text{ und } s = \frac{gt^2}{2} \text{ oder } s = \frac{vt}{2}$$

beschreiben demnach die Bewegung des freien Falles vollständig und gestatten, die Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit und den Weg in einer beliebigen Zeit zu bestimmen, wenn man nur die Beschleunigung g kennt.

Leite aus den Formeln und aus der Figur die Sätze ab:

Die Wege verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten.

Der Weg in der ersten Sekunde ist halb so gross als die Beschleunigung.

Die Wege in den einzelnen Sekunden verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Dimension der Beschleunigung. Die Beschleunigung ist der Geschwindigkeitszuwachs in einer Sekunde. Wächst die Geschwindigkeit in t Sekunden auf v so ist die Beschleunigung $= \frac{v}{t}$, da v gleich $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ ist, so ist $\frac{v}{t} = \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}^2}$.

Ist die Beschleunigung bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung nicht g sondern a , so gelten dieselben Schlüsse und dieselben Formeln

$$3. \quad v = at, \quad s = \frac{vt}{2} \text{ oder } s = \frac{at^2}{2}$$

§ 4. Experimenteller Nachweis der Formeln des § 3 nach Galilei mit der Fallrinne und Bestimmung von g .

Die Richtigkeit der soeben abgeleiteten Formeln durch Versuche an freifallenden Körpern zu führen, ist nur mit Hilfe sehr genauer Uhren möglich, Galilei war auf Sanduhren beschränkt, er verlangsamte daher die Bewegung, indem er Kugeln auf einer geneigten, mit einer Rinne versehenen Latte rollen liess (Fallrinne). Stellen wir eine solche Fallrinne so auf, dass der Weg in 6 Sekunden 36 dm beträgt, so ergibt der Versuch, dass die Wege in

1, 2, 3, 4, 5, 6 Sekunden
1, 4, 9, 16, 25, 36 dm sind.

Es ist somit nachgewiesen, dass die Wege sich wie die Quadrate der Zeiten, und die Wege in den einzelnen Sekunden wie die ungeraden Zahlen verhalten. Auch die am Ende jeder Sekunde stattfindende Geschwindigkeit lässt sich ermitteln, wenn man die Kugel nach 1, 2, 3 ... Sekunden auf eine horizontal gestellte Latte übergehen lässt. Man findet so, dass die Kugel in der nächstfolgenden Sekunde 2, 4, 6 ... dm zurücklegt.

Dass verschieden schwere Körper gleich schnell fallen, lässt sich ebenfalls zeigen, indem man nach einander eine Holz-, Elfenbein- und Metallkugel rollen lässt.

Aus dem Versuch an der Fallrinne kann auch die beim freien Fall auftretende Beschleunigung bestimmt werden. Wenn die

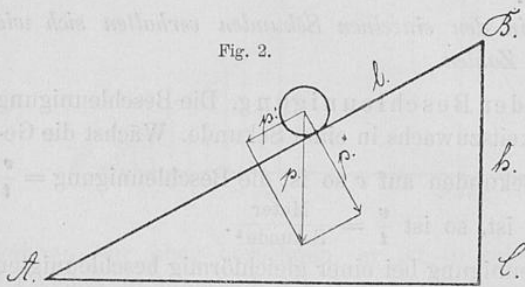


Fig. 2.

Kugel vom Gewicht p auf der schiefen Ebene AB (Fig. 2.) fällt, wirkt nicht ihr ganzes Gewicht p bewegend und beschleunigend. Es kann in 2 Komponenten p' parallel zur Länge

und p'' normal zu derselben zerlegt werden. Erstere wirkt bewegend, letztere als Reibung und macht das Resultat des Versuches ungenau. Für p' ergibt sich aus der Fig. die Proportion:

$$p' : p = h : l \text{ also } p' = p \cdot \frac{h}{l} = p \cdot \sin \alpha.$$

wenn der Neigungswinkel BAC mit α bezeichnet wird.

In demselben Verhältnis wie die Kraft wird auch die Beschleunigung a bei der Bewegung auf der schiefen Ebene kleiner sein, als jene beim freien Fall, sodass wir haben $a = g \cdot \sin \alpha$ also $g = \frac{a}{\sin \alpha}$. Geben wir demnach der schiefen Ebene irgend eine Neigung α , die wir mit dem Transporteur messen (z. B. $5^\circ 40'$) und bestimmen durch das Experiment a (90 cm) so ist

$$g = \frac{90}{0.099} = 909 \text{ cm/Sek.}^2$$

Der für unsere geogr. Br. richtige Wert wäre 980.6 cm. Der hier gefundene ist wegen der Reibung zu klein.

§ 5. Experimenteller Nachweis der Formeln des § 3 durch die Fallmaschine und Bestimmung von g .

Beschreibung der Fallmaschine. Gewichte der beiden Teller 25 g, beiderseits Gewichte zu je 73 g, auf einer Seite ein Übergewicht von 7.3 g. Der Versuch ergibt, dass der Fallweg in:

1, 2, 3 Sekunden
20, 80, 180 cm, demnach die Beschleunigung 40 cm ist.

Die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde muss also 40 cm, am Ende der zweiten Sekunde 80 cm sein. Um dies nachzuweisen, wird die durchbrochene Platte auf 20 cm, die volle auf 60 cm gestellt. Beim ersten Sekundenschlag geht der Teller durch die erste, beim zweiten trifft er auf die zweite Platte auf. Stellt man die durchbrochene Platte auf 80, die volle auf 160 cm, so geht der Teller beim zweiten Sekundenschlag durch 80 und nachdem das Übergewicht abgehoben wurde, trifft er bei dem dritten Sekundenschlag bei 160 cm ein. Auch aus diesem Versuch lässt sich g bestimmen. Es werden hier durch das Übergewicht von 7.3 g bewegt die beiden Teller, die darauf liegenden Gewichte und das Übergewicht selbst, zusammen 178.3 g. Wir haben nun folgende Überlegung anzustellen:

7.3 g erzeugen auf 178.3 g wirkend eine Beschleunigung von 40 cm

7.3 g erzeugen auf sich selbst wirkend, also frei fallend, eine Beschleunigung von g cm

demnach: $g : 40 = 178.3 : 7.3$, $g = 970 \text{ cm/Sek.}^2$

Dies Resultat kommt dem richtigen Wert näher, da hier die Reibung geringer ist. Wir werden später im Pendel ein Mittel kennen lernen, durch welches g mit grosser Genauigkeit gemessen werden kann.

Aufgaben über den freien Fall und die Fallmaschine:

1. Welche Geschwindigkeit erlangt ein Körper, wenn er die Strecke s durchfällt? 2. Auf welchem Wege erlangt ein Körper die Geschwindigkeit v ? Die Lösung dieser beiden Aufgaben ergibt die wichtigen Formeln:

$$4. \quad v = \sqrt{2gs} \quad s = \frac{v^2}{2g}$$

3. Auf der Festung Königstein ist ein 190 m tiefer Brunnen, in welcher Zeit kommt ein Körper unten an? 4. Wir finden bei einem Versuch mit der Fallmaschine den Weg in 5 Sekunden zu 175 cm, wie gross ist hierbei die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit, wie gross der Fallweg in der 3. Sekunde? 5. Wir verwenden an der Fallmaschine, deren Teller zusammen 25 g wiegen auf beiden Seiten Gewichte von je 100 g, ein Übergewicht von 10 g, wie gross ist die Beschleunigung, wie gross der Fallweg in 3 Sekunden? 6. Man lässt in einen Schacht einen Stein fallen und hört den Schall des unten aufschlagenden Steines nach 8.2 Sekunden, wie tief ist der Schacht? 7. Von welcher Höhe muss ein Körper fallen, um eine Geschwindigkeit von 85 m zu erlangen. 8. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Körper, wenn er aus 100 m Höhe fällt.

§ 6. Senkrechter Wurf.

Wird einem Körper eine Geschwindigkeit c senkrecht nach aufwärts erteilt, so wird diese durch das Gewicht des Körpers in jeder Sekunde um g m vermindert, die Geschwindigkeit ist also nach t Sekunden: $v = c - gt$. Eine solche Bewegung, bei

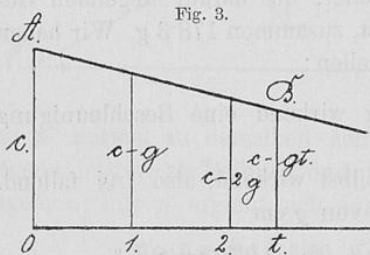


Fig. 3.

welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleichviel abnimmt, nennen wir eine gleichförmig verzögerte. Die Ableitung der Formel für den Weg erfolgt nach derselben Methode wie beim freien Fall. Tragen wir wieder als Abscissen die Zeitabschnitte, als Ordinaten die Geschwindig-

keiten auf (Fig. 3), so ergibt sich der Weg in der Zeit t durch die Fläche des aus Zeitlinie Ot , Geschwindigkeitslinie AB , Anfangsgeschwindigkeit c und Endgeschwindigkeit v gebildeten Trapezes, demnach

$$s = \frac{c+v}{2} t \text{ oder } s = \frac{c+c-gt}{2} t = ct - \frac{gt^2}{2}$$

die Formeln

$$5. \quad v = c - gt \text{ und } s = \frac{c+v}{2} t \text{ oder } s = ct - \frac{gt^2}{2}$$

beschreiben daher die Bewegung des senkrechten Wurfs vollkommen und gestatten, jede diesbezügliche Frage zu beantworten.

Wie lange steigt der Körper? So lange, bis $c - gt = 0$ ist, er steigt also $t_1 = \frac{c}{g}$ Sekunden. Wie hoch steigt er? Die Formel $s = ct - \frac{gt^2}{2}$ beantwortet die Frage nach dem Weg. Da der Körper $\frac{c}{g}$ Sekunden steigt, haben wir hier $t = \frac{c}{g}$ zu setzen und erhalten die Steighöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ m. In welcher Zeit langt der Körper wieder unten an? Da er die Höhe $h = \frac{c^2}{2g}$ frei zu durchfallen hat, so ist diese Zeit $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{c^2}{2g}}{g}} = \sqrt{\frac{c^2}{g^2}} = \frac{c}{g}$. Der Körper braucht demnach dieselbe Zeit zum Herabfallen, als zum Aufsteigen. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an? Da die ganze Bewegung $\frac{2c}{g}$ Sekunden gedauert hat, so liefert die Formel $v = c - g \cdot \frac{2c}{g} = -c$. Die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung ist also ebenso gross, aber entgegengerichtet als zu Anfang. Die beiden letzten Resultate liessen sich voraussehen, da dieselbe Bewegungsursache — das Gewicht — beim Aufsteigen verzögernd, beim Fallen beschleunigend gewirkt hat.

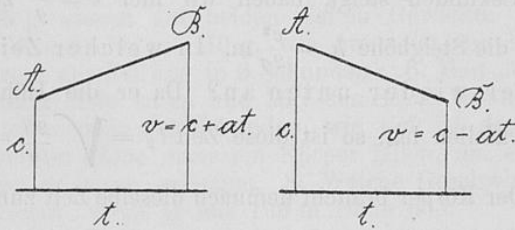
Aufgaben: 1. Wie hoch steigt die Kugel des Mannlicher-Gewehres, wenn sie senkrecht aufwärts geschossen wird? Welches ist ihre Geschwindigkeit nach 15 Sekunden und wie hoch befindet sie sich zu dieser Zeit? 2. Mit welcher Geschwindigkeit müsste eine Kugel senkrecht hinaufgeschossen werden, wenn sie 2000 m hoch steigen sollte? 3. Eine senkrecht aufwärts geschossene Kugel hat nach 5 Sekunden eine Geschwindigkeit von 400 m, wie gross war ihre Anfangsgeschwindigkeit? 4. Eine Kugel ist 5000 m hoch gestiegen, welche Anfangsgeschwindigkeit hatte sie und wie lang hat sie zum Aufsteigen gebraucht?

§ 7. Allgemeine Formeln für die gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung.

Ist bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit c , die Beschleunigung a , so wird die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um a vermehrt, sie ist also nach t Sekunden $v = c + at$. Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung ist $v = c - at$.

Durch dieselbe Betrachtung, wie im § 3 kann der Weg für jede beliebige gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung abgeleitet werden. Er ist nämlich dargestellt durch die Fläche des aus der Zeitlinie t , der Anfangsgeschwindigkeit c , der Endgeschwindigkeit v und der Geschwindigkeitslinie AB gebildeten Trapezes (Fig. 4), wobei die erste Zeichnung für die gleich-

Fig. 4.



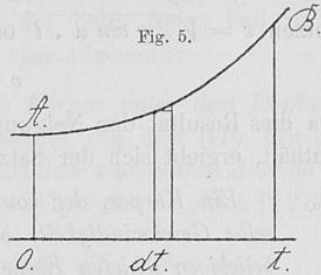
förmig beschleunigte, die zweite für die gleichförmig verzögerte Bewegung gilt. In jedem Falle ist der Weg $s = \frac{c+v}{2} t$. Durch Einsetzung der Werte für v ergibt sich für den ersten Fall $s = ct + \frac{at^2}{2}$ für den zweiten $s = ct - \frac{at^2}{2}$. Die Formeln

$$6. \quad v = c \pm at, \quad s = \frac{c+v}{2} t \text{ oder } s = ct - \frac{at^2}{2}$$

beschreiben demnach jede gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung vollständig. Im Besondern für $c = 0$ und $a = g$ den freien Fall, für $a = -g$ den senkrechten Wurf.

Die bei der Behandlung der gleichförmig beschleunigten und gleichförmig verzögerten Bewegung angewandte Methode, den Weg als Fläche des aus Zeitlinie, Geschwindigkeitslinie, Anfangs- und Endgeschwindigkeit gebildeten Trapezes bzw. Dreiecks darzustellen ist von Galilei in die Mechanik eingeführt und damit der Grund zu einer ganz neuen Behandlung der Mechanik gelegt worden (Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, 1638). Sie ist aber nicht nur auf die bisher behandelten Bewegungen, sondern ganz allgemein anwendbar. Denn soll z. B. für eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit mit der Zeit so wächst, wie die Ordinaten der Kurve AB (Fig. 5), der Weg berechnet werden, so stellen wir uns wie in § 3 vor, dass während einer unendlich kleinen Zeit dt die Geschwin-

digkeit konstant bleibt, dann ist die Masszahl des Weges für diese Zeit gleich der Masszahl des über dt stehenden Rechteckes und die Masszahl des während der ganzen Zeit t zurückgelegten Weges gleich der Summe aller über der Strecke $0t$ stehenden Rechtecke. Beim Übergang zur stetig wachsenden Geschwindigkeit geht die Summe dieser Rechtecke in die Fläche $0tAB$ über, die wir kurz Fläche der Geschwindigkeitskurve nennen, sodass wir ganz allgemein den Satz haben:



Die Masszahl des bei einer beliebigen Bewegung während der Zeit t zurückgelegten Weges ist gleich der Masszahl der Fläche des über diesem Zeitabschnitte stehenden Abschnittes der Geschwindigkeitskurve.

Aufgaben über verschiedene gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegungen: 1. Wie gross ist auf einer schiefen Ebene von 10° Neigung die Beschleunigung und welchen Weg legt ein Körper auf derselben in 5 Sekunden zurück? 2. Ein Personenzug erlangt in 2 Minuten seine volle Fahrgeschwindigkeit von 12 m, welche Beschleunigung erfährt er und welche Strecke legt er bis dahin zurück? 3. Ein Eilzug (16 m) wird durch Bremsen auf einem Weg von 200 m zum Stehen gebracht, welche Verzögerung hat er erfahren und wie lange hat seine Fahrt noch gedauert? 4. Eine Kanonenkugel mit 440 m Anfangsgeschwindigkeit hat nach 100 Schritt eine Geschwindigkeit von 430 m, welche Verzögerung hat sie durch den Luftwiderstand erfahren? 5. Eine Kanonenkugel verweilt $\frac{1}{300}$ Sekunden im Lauf, welche Beschleunigung hat sie erfahren, wenn ihre Geschwindigkeit 440 m beträgt?

§. 8. Fall auf der schiefen Ebene und auf einer beliebigen Kurve.

In § 4 ist gezeigt worden, dass die Beschleunigung eines Körpers, der auf einer schiefen Ebene von der Neigung α fällt $g \sin \alpha$ ist. Hieraus ergeben sich zwei wichtige Sätze, wenn wir 1. die Geschwindigkeit bestimmen, mit welcher der Körper am

Fuss der schiefen Ebene von der Länge l ankommt, 2. die Zeit berechnen, die hiezu erforderlich ist.

1. Die Formel 4 des § 5 liefert, wenn wir statt der Beschleunigung g beim freien Fall die hier auftretende $g \sin \alpha$ setzen $v = \sqrt{2 g \sin \alpha \cdot l}$ oder da $l \sin \alpha = h$ (Fig. 2.)

$$v = \sqrt{2 gh}$$

Da dies Resultat den Neigungswinkel der schiefen Ebene nicht enthält, ergibt sich der Satz:

Ein Körper, der von der Höhe h herabfällt, erlangt dieselbe Geschwindigkeit, ob er diese Höhe frei oder auf einer beliebigen schiefen Ebene durchfällt.

Dieser Satz ist zuerst von Galilei in allgemeinerer Form aufgestellt und auf andere Weise bewiesen worden. Seine Schlussfolgerung war diese: Die Schwere ist ein Streben der Körper nach dem Mittelpunkt der Erde, demnach wird ihre Wirkung dieselbe sein, wenn sie einen Körper der Erde gleichviel genähert hat, mag diese Annäherung auf noch so verschiedenem Wege erfolgt sein. Die Wirkung einer Kraft wird aber durch die Geschwindigkeit gemessen, die sie einem Körper erteilt hat,

also erreicht ein Körper dieselbe Geschwindigkeit, ob er die Höhe h frei oder auf einem beliebigen andern Wege durchfällt. (Experiment Galileis zur Bestätigung dieses Satzes.)

Wir beweisen diesen allgemeinen Satz auf Grund des von der schiefen Ebene soeben abgeleiteten, indem wir schliessen: Fällt ein Körper auf der beliebigen Kurve AE , Fig. 6, so ist

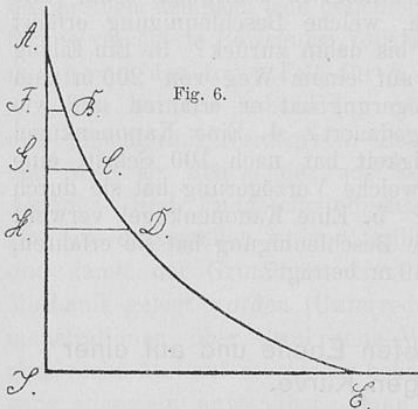


Fig. 6.

die im Endpunkte E erlangte Geschwindigkeit die Summe aller der Geschwindigkeiten, die er auf den unendlich kleinen Kurvenelementen AB , BC , CD u. s. w. erreicht hat. Jedes solche

Element kann aber als schiefe Ebene von der Höhe AF , FG , GH u. s. w. angesehen werden, sodass die in B erlangte Geschwindigkeit gleich der beim freien Fall in F erlangten, die in C erlangte gleich der beim freien Fall in G erlangten, endlich die in E erreichte Geschwindigkeit der beim freien Fall in J erreichten gleich ist. Der Satz gilt also allgemein:

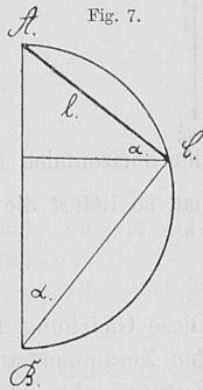
Die Geschwindigkeit, die ein Körper unter dem Einfluss der Schwere erlangt, ist unabhängig von dem Weg, den er zurückgelegt hat, nur abhängig von dem senkrechten Abstand h des Anfangs- und Endpunktes des Weges und ist gleich $\sqrt{2gh}$.

2. Die Zeit, in der ein Körper die schiefe Ebene von der Länge l (Fig. 7) und der Neigung α durchfällt, ist $t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$.

Beschreiben wir einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Höhe der schiefen Ebene (oder deren Verlängerung) liegt, dessen Peripherie durch C geht, so ist $\frac{l}{\sin \alpha} = AB$. Der Wert für t geht über in $t = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g}}$. Dieselbe Zeit

braucht der Körper auch um den Durchmesser des Kreises frei zu durchfallen. Da dies für jede beliebige von A ausgehende schiefe Ebene gilt, so haben wir den Satz:

Ein Körper durchfällt den senkrechten Durchmesser eines Kreises in derselben Zeit, in der er irgend eine von dessen oberem Endpunkte ausgehende Sehne durchfällt.



§ 9. Horizontaler Wurf.

Wird einem in O befindlichen Körper (Fig. 8) eine Geschwindigkeit c in horizontaler Richtung erteilt, so würde er vermöge dieser allein nach Verlauf von 1, 2, 3... Sekunden in A , B , C ankommen. Gleichzeitig zieht ihn aber sein Gewicht in einer Sekunde um 5 m, in 2 Sekunden um 20 m, in 3 Sekunden um 45 m nach abwärts, er wird also nach Verlauf von 1, 2,

3... Sekunden in D , E , F ankommen. Seine Bahn ist, da diese Einwirkungen stetig erfolgen, die krumme Linie $O D E F \dots$

Allgemein: Bezeichnen wir den Weg in horizontaler Richtung

mit x , den in vertikaler Richtung mit y , so ist:

$$7. \quad x = ct, \quad y = \frac{gt^2}{2}$$

Durch diese Formeln wird der Ort des Körpers zu einer beliebigen Zeit bestimmt.

Soll die Frage beantwortet werden, wie tief ist ein Körper gefallen, wenn er (mit

der horizontalen Geschwindigkeit c) die Strecke x zurückgelegt hat, so liefert die Gleichung $x = ct$, $t = \frac{x}{c}$. Hieraus

$$y = \frac{gx^2}{2c^2}$$

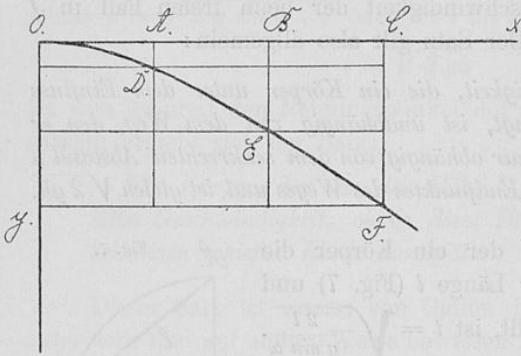
Diese Gleichung heisst die Gleichung der Wurfbahn, sie giebt den Zusammenhang zwischen den Abscissen und Ordinaten der Kurvenpunkte, sie zeigt, dass sich die Ordinaten zweier Punkte wie die Quadrate der Abscissen verhalten. Die analytische Geometrie lehrt, dass diese Gleichung eine Parabel darstellt.

§ 10. Parallelogramm der Bewegungen.

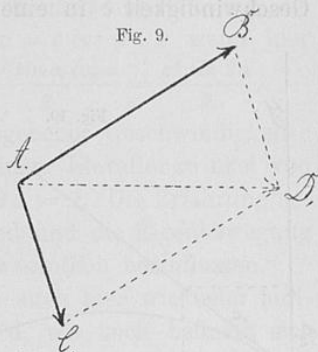
Die Bewegung des horizontalen Wurfes ist gleichfalls von Galilei zuerst in dieser Weise behandelt worden, er hat dabei den Satz vom Parallelogramm der Bewegungen für diesen besondern Fall ausgesprochen, den später Newton ganz allgemein aufgestellt hat:

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.

Fig. 8.



Anschaulich ausgedrückt: Wirken auf einen Körper in A zwei Bewegungsursachen, infolge deren er in der Zeit t den Weg AB beziehungsweise AC zurücklegen würde (Fig. 9), so kommt er nach Verlauf der Zeit t im andern Endpunkt D der Diagonale eines Parallelogramms an, das man aus diesen beiden Wegen konstruieren kann. Sind die beiden Bewegungen gleichförmig, so bewegt sich der Körper auf der Diagonale des Parallelogramms AD , ebenso wenn beide gleichmässig beschleunigt oder überhaupt gleichartig sind. Sind dagegen die Bewegungen ungleichartig, so gelangt der Körper auf einer Kurve von A nach D .



Wie von einem Parallelogramm der Wege können wir auch von einem Parallelogramm der Geschwindigkeiten sprechen, da die Geschwindigkeiten die Wege in einer Sekunde sind.

Und endlich, da die Wege den Kräften proportional sind, die auf den Körper wirken, gilt auch der Satz:

Wenn zwei Kräfte unter einem Winkel auf einen Körper wirken, bewegt er sich so, als ob er von einer einzigen Kraft bewegt würde, die der Richtung und Grösse nach durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird, das aus den beiden Kräften konstruiert werden kann.

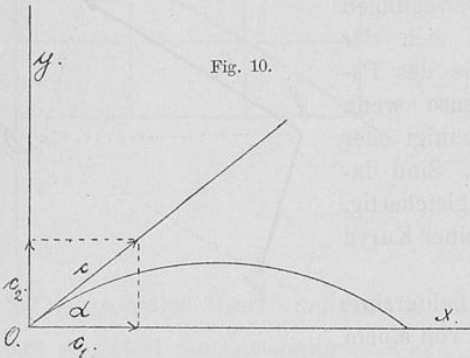
Sind in Fig. 9 $AB = p$, $AC = q$ die beiden Kräfte und α der Winkel zwischen ihnen, so ist $AD = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos \alpha}$. Die beiden Kräfte p und q heissen die Seitenkräfte oder Komponenten, AD die Resultierende.

Zerlegung von Kräften (Bewegungen, Geschwindigkeiten). Ebenso wie wir statt zweier Kräfte AB und AC (Fig. 9), die auf einen Körper wirken, eine einzige AD setzen können, die dieselbe Wirkung hervorbringt, wie jene, können wir eine Kraft (Bewegung oder Geschwindigkeit) durch zwei andere AB und AC ersetzen. Gleich die folgende Aufgabe wird zeigen, wie fruchtbar eine solche Zerlegung der Geschwindigkeit werden kann.

§ 11. Schiefer Wurf.

Einem Körper werde eine Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Winkel α gegen die Horizontale erteilt (Fig. 10). Da die Schwere auf ihn senkrecht nach abwärts wirkt, zerlegen wir die Geschwindigkeit c in eine horizontale Komponente $c_1 = c \cos \alpha$

und in eine vertikale $c_2 = c \sin \alpha$, der die Schwere direkt entgegenwirkt. Die Geschwindigkeit des Körpers in horizontaler Richtung bleibt unverändert, jene in vertikaler Richtung ist nach t Sekunden



$$v = c_2 - gt = c \sin \alpha - gt.$$

Der Weg x in horizontaler Richtung ist gleichförmig, der Weg y in vertikaler Richtung gleichförmig verzögert, sodass:

$$8. \quad x = c \cos \alpha \cdot t, \quad y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Auch hier können dieselben Fragen gestellt und in der gleichen Weise beantwortet werden, wie beim senkrechten Wurf:

1. Wie lange, 2. Wie hoch steigt der Körper? 3. Nach wie viel Sekunden und 4. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an? Endlich 5. Wie weit kommt er in horizontaler Richtung?

1. Er steigt so lange, bis seine Geschwindigkeit in vertikaler Richtung 0 ist, demnach erhalten wir die Steigzeit t , aus der Gleichung $c \sin \alpha - gt_1 = 0$, $t_1 = \frac{c \sin \alpha}{g}$.

2. Die Steighöhe h ergibt sich aus der Formel für y , wenn wir hier den soeben für t_1 erhaltenen Wert einsetzen $h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

3. Der Körper kommt wieder unten an, wenn seine Höhe $y = 0$ ist, wenn also $c \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} = 0$, demnach hat die ganze Bewegung $t_2 = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ Sekunden gedauert, er hat also zum Herabfallen dieselbe Zeit gebraucht, wie zum Aufsteigen.

4. Die Geschwindigkeit beim Niederfallen erhalten wir aus $v = c \sin \alpha - gt = -c \sin \alpha$, wenn wir hier $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ setzen. Die vertikale Geschwindigkeit beim Niederfallen ist ebensogross als beim Aufsteigen, aber entgegengesetzt gerichtet.
5. Den ganzen Weg des Körpers in horizontaler Richtung, die Wurfweite w erhalten wir aus $x = c \cos \alpha \cdot t$ wenn hier $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ gesetzt wird, $w = \frac{2c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Hieraus ergibt sich, dass bei gegebener Geschwindigkeit c das Maximum der Wurfweite unter einem Elevationswinkel von 45° erreicht wird, denn für ihn ist $\sin 2\alpha = 1$. Die Erfahrung bestätigt dies nicht, da der Luftwiderstand und die Eigenbewegung eines geworfenen Körpers die Bahn wesentlich beeinflussen.

Gleichung der Wurfbahn. Wenn auch hier wie beim horizontalen Wurf die Frage gestellt wird, wie hoch befindet sich der Körper, wenn er in horizontaler Richtung den gegebenen Weg x zurückgelegt hat, so erhalten wir aus den beiden Gleichungen 8, wenn wir mit Hilfe der ersten t durch x ausdrücken und in die zweite einsetzen

$$9. \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Diese Gleichung, die den Zusammenhang zwischen den Abscissen und Ordinaten eines jeden Punktes der Flugbahn enthält, ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel im höchsten Punkt der Bahn liegt.

Aufgaben: 1. Eine Kanonenkugel ($c = 448$ m) wird unter einem Elevationswinkel von $12^\circ 27'$ abgeschossen, beantworte die 5 oben allgemein gestellten Fragen für diesen besondern Fall. (Der Versuch ergibt die Wurfweite $w = 4000$ m). 2. Ein Manlichergewehr ($c = 620$) wird unter einem Elevationswinkel von $2^\circ 5'$ abgeschossen, wie weit fliegt das Geschoss? (Der Versuch ergibt 1125 m). 3. Unter welchem Elevationswinkel müsste die 9 cm Feldkanone ($c = 448$ m) abgeschossen werden, um ein 3000 m fernes in gleicher Höhe mit der Kanone befindliches Ziel zu treffen? (Die Erfahrung ergibt, dass der Winkel $7^\circ 54'$ sein muss). 4. Welche Anfangsgeschwindigkeit müsste eine Kugel haben, um unter einem Elevationswinkel von 10° 80 m hoch zu steigen? 5. Unter welchem Winkel muss die 9 cm Feldkanone aufgestellt werden, wenn sie ein 1000 m weites 20 m höher als die Kanone liegendes Ziel treffen soll?

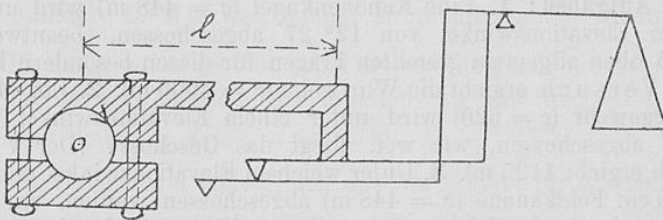
In den vorigen und diesem Paragraphen ist die Bewegung des horizontalen, senkrechten und schiefen Wurfes ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes behandelt worden, der eine grosse Rolle bei diesen Bewegungen spielt und dieselben wesentlich anders gestaltet. Newton hat die von Galilei begonnenen Untersuchungen über die Wurfbewegung fortgesetzt und die Lösung der Aufgabe für den Fall gesucht, jedoch nicht gefunden, dass der Luftwiderstand mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Johann Bernoulli gelang die Lösung allgemein, er fand die Wurfbahn auch unter der Annahme, dass der Luftwiderstand proportional einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit ist.

§ 12. Mass der Kraft.

Das in der Praxis übliche Kraftmass ist das Kilogramm, d. h. der Druck, den ein Liter Wasser von 4°C auf seine Unterlage ausübt. Wir werden später erfahren, warum dieses Mass nicht an allen Punkten der Erdoberfläche das nämliche ist. Der Unterschied dieses Druckes am Pol und Aequator beträgt 0.52% also bei 1000 g rund 5 g. Während dieser Unterschied bei vielen praktischen Messungen nicht ins Gewicht fällt, werden wir bei genauern Messungen darauf Rücksicht zu nehmen haben.

Messen der Kräfte. Kräfte können gemessen, d. h. mit dem Kilogramm verglichen werden durch eine Schalen- oder Federwage, grössere Kräfte mit einer eigens dazu konstruierten

Fig. 11.



Federwage, dem Dynamometer (Zugkraft eines Pferdes, einer Lokomotive u. s. w.) Die Kraft, welche eine Dampfmaschine an der Schwungradaxe ausübt, wird mit dem Pronyschen Dynamometer gemessen, das in Fig. 11 dargestellt ist. Der in der Figur schraffiert gezeichnete Hebel wird mit zwei Schrauben an die

Axe der Maschine gepresst und so lange Gewichte in die Schale der Dezimalwage gelegt, auf deren Brücke der Hebel drückt, bis die Wage Gleichgewicht anzeigt. Ist die Kraft, die der Dampf an der Schwungradaxe ausübt Q , die zugelegten Gewichte P , die Länge des Hebels l und der Radius der Schwungradaxe r , so haben wir $Q : 10 P = l : r$ demnach $Q = \frac{10 P l}{r}$ Kg.

Berechnung der Kraft. Eine Kraft kann berechnet werden aus der Beschleunigung, die sie einem Körper erteilt. Ein Beispiel wird dies klar machen. Wir legen auf die Fallmaschine, deren Teller zusammen 25 g wiegen, beiderseits Gewichte zu je 146 g, auf eine Seite ein Übergewicht x , das als Kraft wirkt und bestimmen durch das Experiment die Beschleunigung, wir finden sie gleich 21 cm. Nun haben wir folgende Überlegung

x g setzen in Bewegung 317 + x g und erzeugen eine Beschleunigung von 21 cm

x g frei fallend, also auf x g wirkend erzeugen eine Beschleunigung von 981 cm

daraus ergibt sich die Proportion

$$x : 317 + x = 21 : 981 \text{ also } x = 7 \text{ g.}$$

Die Wägung zeigt, dass das Gewicht 7.3 g wiegt. Das Resultat wird durch die Reibung ungenau.

Allgemein:

k Kilogramm auf sich selbst wirkend, also frei fallend, erzeugen eine Beschleunigung von g m

k Kilogramm auf p Kilogramm wirkend, erzeugen eine Beschleunigung von a m, mehr, wenn $p < k$; weniger wenn $p > k$

wir haben also die Proportion:

$$k : p = a : g \text{ also } k = \frac{p}{g} a.$$

Der Ausdruck $\frac{p}{g}$, der in jeder Kraftbestimmung vorkommt, wird Masse genannt und mit m bezeichnet. Dieser Quotient ist, wie sich auch das Gewicht eines Körpers auf der Erde ändern mag, derselbe, denn stets wird durch die veränderte Anziehungskraft p und g sich im selben Verhältnisse ändern. Demnach ist

auch die aus der Beschleunigung berechnete Kraft unabhängig vom Orte der Erdoberfläche, an welchem die Bestimmung vorgenommen wird. Wir haben also

10.

$$k = m a$$

als ein überall gleiches Kraftmass. Nach ihm ist diejenige Kraft gleich 1, welche der Masse 1 die Beschleunigung 1 erteilt. Dieses Masssystem heisst daher das absolute. Es bleibt noch übrig, seine Einheiten zu bestimmen. Dieselben sind folgenderweise festgestellt worden:

1. Als Einheit der Masse gilt die Masse von 1 cm³ Wasser. Sie wird mit Gramm bezeichnet. Wenn wir also im absoluten Masssystem von Gramm sprechen, so meinen wir damit die Masse von 1 cm³ Wasser, nicht das Gewicht p eines cm³ Wasser.
2. Als Einheit der Länge gilt das cm,
3. Als Einheit der Zeit die Sekunde.

Die Krafteinheit ist demnach diejenige Kraft, welche der Masse von einem Gramm eine Beschleunigung von einem Centimeter erteilt. Sie wird Dyne genannt.

Wie verhält sich diese Krafteinheit zu dem in der Praxis üblichen Kraftmass, dem Kilogramm?

Ein Gramm erteilt sich selbst in Hermannstadt durch seine Fallkraft eine Beschleunigung von rund 981 cm. Soll die Beschleunigung nur ein cm sein, so muss auch die bewegende Kraft nur der 981-te Teil von 1g also 1.02 Milligramm sein. Die Krafteinheit des absoluten Systems wird also in Hermannstadt durch ein Gewicht von 1.02 mg repräsentiert.

Ein Kilogramm ist aber $= 981 \times 1000 = 981000$ Dynen, denn es erteilt sich selbst, also 1000 Gramm eine Beschleunigung von 981 cm.

Dimension der Kraft. Da die Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, so ist die Dimension der Kraft $\frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Sekunde}^2}$.