

Die Lehre

von der

Bewegung fester Körper.

Ein Unterrichtsgang auf historischer Grundlage

von

Carl Albrich jun.

Beilage zu dem Hermannstädter Gymnasial-Programm 1901/2.

Hermannstadt.
Druck von W. Krafft.
1902.



*Gyma
7 (1902)*



Die Lehre von der Bewegung fester Körper.

Ein Unterrichtsgang auf historischer Grundlage

von

Carl Albrich jun.

Beilage zu dem Hermannstädter Gymnasial-Programm 1901/2.

Druck von W. Krell in Hermannstadt.

Die Lehre von der Bewegung fester Körper.

Ein Unterrichtsgang auf historischer Grundlage.

Von
Carl Wilhelm O. Krey.

Leipzig, Druck von W. Kraft in Hermannstadt, 1902.

Druck von W. Kraft in Hermannstadt.

§ 1. Gleichförmige Bewegung.

Ein Körper bewegt sich gleichförmig, wenn er in beliebig kleinen gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Unter der Geschwindigkeit (c) verstehen wir bei dieser Bewegung das Verhältnis von Weg (s) und Zeit (t). Wir haben also:

$$1. \quad c = \frac{s}{t}, \quad s = ct, \quad t = \frac{s}{c}$$

Es ist wichtig zu beachten, in welcher Verbindung in einem physikalischen Begriff die gebräuchlichen Masse für Länge und Zeit vorkommen. Nach dem Obigen ist die Geschwindigkeit gleich $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ also gleich $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$ oder gleich $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}$, wenn wir die Länge mit Metern, die Zeit mit Sekunden messen. Wir sagen daher die »Dimension« der Geschwindigkeit sei $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$.

Bemerkenswerte Geschwindigkeiten.

Fussgänger	1·6 m	Granate der 9 cm Feld-	
Pferd im Trab . . .	2— m	kanone	440 m
» » Galopp	4— m	Shrapnel der 7·5 cm	
Personenzug	8— m	Schnellfeuerkanone	500 m
Schnellzug	14—25 m	Kugel der 30·5 cm	
Kugel des Mannlicher-		Küstenkanone . .	700 m
gewehres	620 m	Schall in der Luft .	333 m
		Licht	40.000 Meilen.

Aufgaben. 1. Welche Strecke legt ein Eilzug (16 m) in 10 Stunden zurück? 2. In welcher Zeit gelangt ein Eilzug (16 m) von Hermannstadt bis Budapest? (Entf. 597 km.) 3. In welcher Zeit würde bei konstanter Geschwindigkeit die Kugel des 30½ cm Küstengeschützes auf dem Monde anlangen? 4. Der Orient-Expresszug fährt von Wien um 6 Uhr 46 Minuten abends ab und kommt um 11 Uhr abends in Budapest an, wie gross ist seine Geschwindigkeit? (Entf. Wien—Budapest 278 km.) 5. De la Vaulx flog bei einer seiner Ballonfahrten im Jahre 1900 in 35½ Stunden

von Paris nach Kiew. Die Entfernung der beiden Orte beträgt in der Luftlinie 2033 km. Welche Geschwindigkeit hatte der Ballon? 6. Wie gross ist infolge der Axendrehung der Erde die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem Parallelkreis von Hermannstadt ($\varphi = 45^\circ 47'9''$). 7. Welches ist, bei Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung, die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne, des Mondes bei seinem Lauf um die Erde. Ersteres in Meilen, letzteres in km auszurechnen.

§ 2. Ungleichförmige Bewegung.

Ein Körper hat eine ungleichförmige Bewegung, wenn er in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurücklegt. Bei dieser Bewegung können wir nicht von einer Geschwindigkeit überhaupt, sondern nur von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkt sprechen, wir verstehen darunter den Weg, den der Körper von diesem Zeitpunkte an in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn die Bewegung in eine gleichförmige überginge. Als einfachstes Beispiel einer ungleichförmigen Bewegung wird zunächst behandelt

§ 3. Der freie Fall.

Schon Aristoteles (384—322) hat erkannt, dass wir es hier mit einer beschleunigten Bewegung zu thun haben, er war aber im Einzelnen wenig klar über die Gesetze derselben, denn er war der Meinung, dass schwere Körper schneller fallen, als leichte (eine Münze und ein Blatt Papier). Es war ihm unbekannt, welche Rolle der Luftwiderstand bei den Bewegungen spielt, so erklärte er z. B. die Fortbewegung eines geworfenen Steines, nachdem derselbe die Hand verlassen, dadurch, dass die Luft in den vom Stein eben verlassenen Raum eindringe und ihm neue Bewegungsantriebe erteile. Das Mittelalter hat den Kenntnissen Aristoteles' hierüber nichts neues hinzugefügt (Physikbetrieb an den mittelalterlichen Schulen und Universitäten), erst Galilei hat neue Grundlagen gelegt.

Durch Fallversuche vom schiefen Turm in Pisa zeigt er im Jahre 1590, dass eine hundertpfündige und eine halbpfündige Kugel gleich schnell fallen und entwickelt mathematisch die Gesetze der beschleunigten Bewegung. Dies wurde möglich, da er das Trägheitsgesetz erkannt hatte:

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äussere Ursachen gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Hieraus ergibt es sich sofort, wie die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers wachsen wird. Da die Ursache dieser Bewegung das gleichbleibende Gewicht des Körpers ist, so wird die Geschwindigkeit, wenn sie bis zum Ende der ersten Sekunde auf g gewachsen ist, am Ende der zweiten Sekunde $2g$ sein, denn die in der ersten Sekunde erworbene Geschwindigkeit g bleibt bestehen und wird durch die gleiche Bewegungsursache in der zweiten Sekunde um ebensoviel vermehrt. Die Geschwindigkeit v am Ende der t -ten Sekunde ist demnach gt .

$$v = gt$$

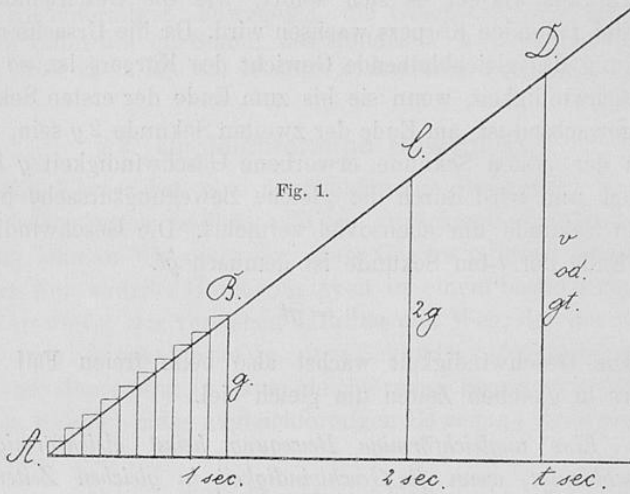
Die Geschwindigkeit wächst also beim freien Fall eines Körpers in gleichen Zeiten um gleich viel.

Eine ungleichförmige Bewegung heisst gleichförmig beschleunigt, wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleichviel zunimmt. Die Zunahme der Geschwindigkeit in einer Sekunde heisst die Beschleunigung.

Die Beschleunigung beim freien Fall bezeichnet man mit g (gravitas, Schwere) die Beschleunigung bei andern gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit a (acceleratio, Beschleunigung).

Nun soll auch der Weg berechnet werden, den ein frei fallender Körper in t Sekunden zurücklegt. Hierzu stellen wir uns zunächst vor, dass die Geschwindigkeit nicht, wie es tatsächlich der Fall ist, stetig, sondern ruckweise wächst, so zwar, dass sie gleich im ersten Moment der Bewegung auf $\frac{g}{10}$ wächst und dann $\frac{1}{10}$ Sekunden gleich bleibt, dann plötzlich auf $\frac{2g}{10}$ wächst und in der zweiten Zehntelsekunde wieder gleich bleibt u. s. f. Machen wir uns dies auch durch eine Zeichnung anschaulich! Auf einer horizontalen Linie (Fig. 1) tragen wir als Abscissen die Zehntel- und ganzen Sekunden in einem beliebigen Massstabe auf und errichten in den Anfangspunkten jeder Zehntelsekunde eine Normale (Ordinate) auf der wir die Geschwindig-

keiten $\frac{g}{10}, \frac{2g}{10}$ u. s. f. auftragen, dann stellt die treppenförmig begrenzte Linie AB den Geschwindigkeitsverlauf bei der von uns angenommenen Bewegung dar. Den Weg für diese Bewegung



können wir aber berechnen, er ist in jedem der angegebenen Intervalle, da innerhalb derselben die Bewegung gleichförmig ist, Geschwindigkeit mal Zeit.

Die Masszahl des Weges in jeder Zehntelsekunde ist also gleich der Masszahl des über jeder Zehntelsekunde stehenden Rechteckes. Der Weg während einer längeren Zeit wird dargestellt durch die Summe aller über dem betreffenden Zeitabschnitt stehenden Rechtecke. Diese vorgestellte Bewegung ist aber nicht die gleichförmig beschleunigte. Wir kommen ihr näher, wenn wir uns denken, dass die Geschwindigkeit nicht von Zehntel zu Zehntel, sondern von Hundertstel zu Hundertstel, oder von Milliontel zu Milliontel-Sekunde ruckweise anwächst. Der Weg würde dann dargestellt sein durch 100 bzw. Millionen Rechtecke. Gehen wir zur Wahrheit über, dass die Geschwindigkeit stetig wächst, so gehen die 10, 100, Millionen Rechtecke in das Dreieck über, welches gebildet wird aus der Zeitlinie (t), der Endgeschwindigkeit (gt) und der Geraden AD , welche den Geschwindigkeitsverlauf darstellt, die Masszahl des Weges in der Zeit t ist

sonach gleich der Masszahl der Fläche des Dreiecks AED , also gleich $\frac{vt}{2}$ oder $\frac{gt^2}{2}$. Die beiden Formeln:

$$2. \quad v = gt \text{ und } s = \frac{gt^2}{2} \text{ oder } s = \frac{vt}{2}$$

beschreiben demnach die Bewegung des freien Falles vollständig und gestatten, die Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit und den Weg in einer beliebigen Zeit zu bestimmen, wenn man nur die Beschleunigung g kennt.

Leite aus den Formeln und aus der Figur die Sätze ab:

Die Wege verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten.

Der Weg in der ersten Sekunde ist halb so gross als die Beschleunigung.

Die Wege in den einzelnen Sekunden verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Dimension der Beschleunigung. Die Beschleunigung ist der Geschwindigkeitszuwachs in einer Sekunde. Wächst die Geschwindigkeit in t Sekunden auf v so ist die Beschleunigung $= \frac{v}{t}$, da v gleich $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ ist, so ist $\frac{v}{t} = \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}^2}$.

Ist die Beschleunigung bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung nicht g sondern a , so gelten dieselben Schlüsse und dieselben Formeln

$$3. \quad v = at, \quad s = \frac{vt}{2} \text{ oder } s = \frac{at^2}{2}$$

§ 4. Experimenteller Nachweis der Formeln des § 3 nach Galilei mit der Fallrinne und Bestimmung von g .

Die Richtigkeit der soeben abgeleiteten Formeln durch Versuche an freifallenden Körpern zu führen, ist nur mit Hilfe sehr genauer Uhren möglich, Galilei war auf Sanduhren beschränkt, er verlangsamte daher die Bewegung, indem er Kugeln auf einer geneigten, mit einer Rinne versehenen Latte rollen liess (Fallrinne). Stellen wir eine solche Fallrinne so auf, dass der Weg in 6 Sekunden 36 dm beträgt, so ergibt der Versuch, dass die Wege in

1, 2, 3, 4, 5, 6 Sekunden
1, 4, 9, 16, 25, 36 dm sind.

Es ist somit nachgewiesen, dass die Wege sich wie die Quadrate der Zeiten, und die Wege in den einzelnen Sekunden wie die ungeraden Zahlen verhalten. Auch die am Ende jeder Sekunde stattfindende Geschwindigkeit lässt sich ermitteln, wenn man die Kugel nach 1, 2, 3 ... Sekunden auf eine horizontal gestellte Latte übergehen lässt. Man findet so, dass die Kugel in der nächstfolgenden Sekunde 2, 4, 6 ... dm zurücklegt.

Dass verschieden schwere Körper gleich schnell fallen, lässt sich ebenfalls zeigen, indem man nach einander eine Holz-, Elfenbein- und Metallkugel rollen lässt.

Aus dem Versuch an der Fallrinne kann auch die beim freien Fall auftretende Beschleunigung bestimmt werden. Wenn die

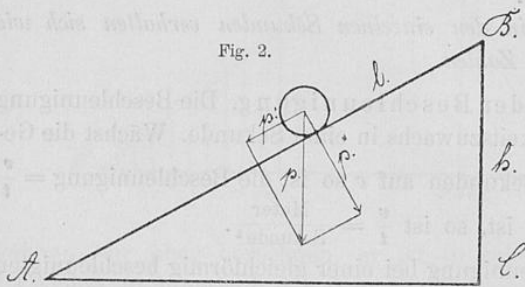


Fig. 2.

Kugel vom Gewicht p auf der schiefen Ebene AB (Fig. 2.) fällt, wirkt nicht ihr ganzes Gewicht p bewegend und beschleunigend. Es kann in 2 Komponenten p' parallel zur Länge

und p'' normal zu derselben zerlegt werden. Erstere wirkt bewegend, letztere als Reibung und macht das Resultat des Versuches ungenau. Für p' ergibt sich aus der Fig. die Proportion:

$$p' : p = h : l \text{ also } p' = p \cdot \frac{h}{l} = p \cdot \sin \alpha.$$

wenn der Neigungswinkel BAC mit α bezeichnet wird.

In demselben Verhältnis wie die Kraft wird auch die Beschleunigung a bei der Bewegung auf der schiefen Ebene kleiner sein, als jene beim freien Fall, sodass wir haben $a = g \cdot \sin \alpha$ also $g = \frac{a}{\sin \alpha}$. Geben wir demnach der schiefen Ebene irgend eine Neigung α , die wir mit dem Transporteur messen (z. B. $5^\circ 40'$) und bestimmen durch das Experiment a (90 cm) so ist

$$g = \frac{90}{0.099} = 909 \text{ cm/Sek.}^2$$

Der für unsere geogr. Br. richtige Wert wäre 980.6 cm. Der hier gefundene ist wegen der Reibung zu klein.

§ 5. Experimenteller Nachweis der Formeln des § 3 durch die Fallmaschine und Bestimmung von g .

Beschreibung der Fallmaschine. Gewichte der beiden Teller 25 g, beiderseits Gewichte zu je 73 g, auf einer Seite ein Übergewicht von 7.3 g. Der Versuch ergibt, dass der Fallweg in:

1, 2, 3 Sekunden
20, 80, 180 cm, demnach die Beschleunigung 40 cm ist.

Die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde muss also 40 cm, am Ende der zweiten Sekunde 80 cm sein. Um dies nachzuweisen, wird die durchbrochene Platte auf 20 cm, die volle auf 60 cm gestellt. Beim ersten Sekundenschlag geht der Teller durch die erste, beim zweiten trifft er auf die zweite Platte auf. Stellt man die durchbrochene Platte auf 80, die volle auf 160 cm, so geht der Teller beim zweiten Sekundenschlag durch 80 und nachdem das Übergewicht abgehoben wurde, trifft er bei dem dritten Sekundenschlag bei 160 cm ein. Auch aus diesem Versuch lässt sich g bestimmen. Es werden hier durch das Übergewicht von 7.3 g bewegt die beiden Teller, die darauf liegenden Gewichte und das Übergewicht selbst, zusammen 178.3 g. Wir haben nun folgende Überlegung anzustellen:

7.3 g erzeugen auf 178.3 g wirkend eine Beschleunigung von 40 cm

7.3 g erzeugen auf sich selbst wirkend, also frei fallend, eine Beschleunigung von g cm

demnach: $g : 40 = 178.3 : 7.3$, $g = 970 \text{ cm/Sek.}^2$

Dies Resultat kommt dem richtigen Wert näher, da hier die Reibung geringer ist. Wir werden später im Pendel ein Mittel kennen lernen, durch welches g mit grosser Genauigkeit gemessen werden kann.

Aufgaben über den freien Fall und die Fallmaschine:

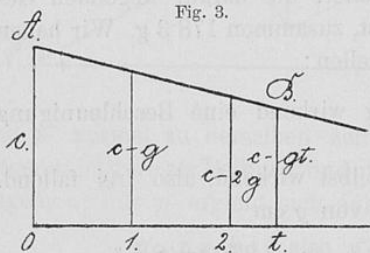
1. Welche Geschwindigkeit erlangt ein Körper, wenn er die Strecke s durchfällt? 2. Auf welchem Wege erlangt ein Körper die Geschwindigkeit v ? Die Lösung dieser beiden Aufgaben ergibt die wichtigen Formeln:

$$4. \quad v = \sqrt{2gs} \quad s = \frac{v^2}{2g}$$

3. Auf der Festung Königstein ist ein 190 m tiefer Brunnen, in welcher Zeit kommt ein Körper unten an? 4. Wir finden bei einem Versuch mit der Fallmaschine den Weg in 5 Sekunden zu 175 cm, wie gross ist hierbei die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit, wie gross der Fallweg in der 3. Sekunde? 5. Wir verwenden an der Fallmaschine, deren Teller zusammen 25 g wiegen auf beiden Seiten Gewichte von je 100 g, ein Übergewicht von 10 g, wie gross ist die Beschleunigung, wie gross der Fallweg in 3 Sekunden? 6. Man lässt in einen Schacht einen Stein fallen und hört den Schall des unten aufschlagenden Steines nach 8.2 Sekunden, wie tief ist der Schacht? 7. Von welcher Höhe muss ein Körper fallen, um eine Geschwindigkeit von 85 m zu erlangen. 8. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Körper, wenn er aus 100 m Höhe fällt.

§ 6. Senkrechter Wurf.

Wird einem Körper eine Geschwindigkeit c senkrecht nach aufwärts erteilt, so wird diese durch das Gewicht des Körpers in jeder Sekunde um g m vermindert, die Geschwindigkeit ist also nach t Sekunden: $v = c - gt$. Eine solche Bewegung, bei



welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleichviel abnimmt, nennen wir eine gleichförmig verzögerte. Die Ableitung der Formel für den Weg erfolgt nach derselben Methode wie beim freien Fall. Tragen wir wieder als Abscissen die Zeitabschnitte, als Ordinaten die Geschwindig-

keiten auf (Fig. 3), so ergibt sich der Weg in der Zeit t durch die Fläche des aus Zeitlinie Ot , Geschwindigkeitslinie AB , Anfangsgeschwindigkeit c und Endgeschwindigkeit v gebildeten Trapezes, demnach

$$s = \frac{c+v}{2} t \text{ oder } s = \frac{c+c-gt}{2} t = ct - \frac{gt^2}{2}$$

die Formeln

$$5. \quad v = c - gt \text{ und } s = \frac{c+v}{2} t \text{ oder } s = ct - \frac{gt^2}{2}$$

beschreiben daher die Bewegung des senkrechten Wurfs vollkommen und gestatten, jede diesbezügliche Frage zu beantworten.

Wie lange steigt der Körper? So lange, bis $c - gt = 0$ ist, er steigt also $t_1 = \frac{c}{g}$ Sekunden. Wie hoch steigt er? Die Formel $s = ct - \frac{gt^2}{2}$ beantwortet die Frage nach dem Weg. Da der Körper $\frac{c}{g}$ Sekunden steigt, haben wir hier $t = \frac{c}{g}$ zu setzen und erhalten die Steighöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ m. In welcher Zeit langt der Körper wieder unten an? Da er die Höhe $h = \frac{c^2}{2g}$ frei zu durchfallen hat, so ist diese Zeit $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{c^2}{2g}}{g}} = \sqrt{\frac{c^2}{g^2}} = \frac{c}{g}$. Der Körper braucht demnach dieselbe Zeit zum Herabfallen, als zum Aufsteigen. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an? Da die ganze Bewegung $\frac{2c}{g}$ Sekunden gedauert hat, so liefert die Formel $v = c - g \cdot \frac{2c}{g} = -c$. Die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung ist also ebenso gross, aber entgegengerichtet als zu Anfang. Die beiden letzten Resultate liessen sich voraussehen, da dieselbe Bewegungsursache — das Gewicht — beim Aufsteigen verzögernd, beim Fallen beschleunigend gewirkt hat.

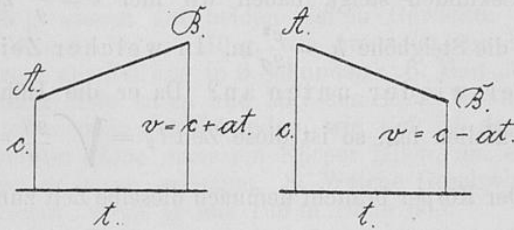
Aufgaben: 1. Wie hoch steigt die Kugel des Mannlicher-Gewehres, wenn sie senkrecht aufwärts geschossen wird? Welches ist ihre Geschwindigkeit nach 15 Sekunden und wie hoch befindet sie sich zu dieser Zeit? 2. Mit welcher Geschwindigkeit müsste eine Kugel senkrecht hinaufgeschossen werden, wenn sie 2000 m hoch steigen sollte? 3. Eine senkrecht aufwärts geschossene Kugel hat nach 5 Sekunden eine Geschwindigkeit von 400 m, wie gross war ihre Anfangsgeschwindigkeit? 4. Eine Kugel ist 5000 m hoch gestiegen, welche Anfangsgeschwindigkeit hatte sie und wie lang hat sie zum Aufsteigen gebraucht?

§ 7. Allgemeine Formeln für die gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung.

Ist bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit c , die Beschleunigung a , so wird die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um a vermehrt, sie ist also nach t Sekunden $v = c + at$. Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung ist $v = c - at$.

Durch dieselbe Betrachtung, wie im § 3 kann der Weg für jede beliebige gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung abgeleitet werden. Er ist nämlich dargestellt durch die Fläche des aus der Zeitlinie t , der Anfangsgeschwindigkeit c , der Endgeschwindigkeit v und der Geschwindigkeitslinie AB gebildeten Trapezes (Fig. 4), wobei die erste Zeichnung für die gleich-

Fig. 4.



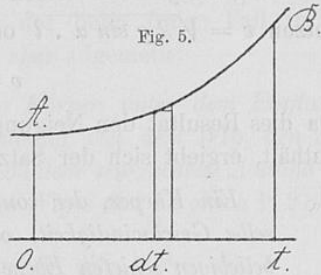
förmig beschleunigte, die zweite für die gleichförmig verzögerte Bewegung gilt. In jedem Falle ist der Weg $s = \frac{c+v}{2} t$. Durch Einsetzung der Werte für v ergibt sich für den ersten Fall $s = ct + \frac{at^2}{2}$ für den zweiten $s = ct - \frac{at^2}{2}$. Die Formeln

$$6. \quad v = c \pm at, \quad s = \frac{c+v}{2} t \text{ oder } s = ct - \frac{at^2}{2}$$

beschreiben demnach jede gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung vollständig. Im Besondern für $c = 0$ und $a = g$ den freien Fall, für $a = -g$ den senkrechten Wurf.

Die bei der Behandlung der gleichförmig beschleunigten und gleichförmig verzögerten Bewegung angewandte Methode, den Weg als Fläche des aus Zeitlinie, Geschwindigkeitslinie, Anfangs- und Endgeschwindigkeit gebildeten Trapezes bzw. Dreiecks darzustellen ist von Galilei in die Mechanik eingeführt und damit der Grund zu einer ganz neuen Behandlung der Mechanik gelegt worden (Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, 1638). Sie ist aber nicht nur auf die bisher behandelten Bewegungen, sondern ganz allgemein anwendbar. Denn soll z. B. für eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit mit der Zeit so wächst, wie die Ordinaten der Kurve AB (Fig. 5), der Weg berechnet werden, so stellen wir uns wie in § 3 vor, dass während einer unendlich kleinen Zeit dt die Geschwin-

digkeit konstant bleibt, dann ist die Masszahl des Weges für diese Zeit gleich der Masszahl des über dt stehenden Rechteckes und die Masszahl des während der ganzen Zeit t zurückgelegten Weges gleich der Summe aller über der Strecke $0t$ stehenden Rechtecke. Beim Übergang zur stetig wachsenden Geschwindigkeit geht die Summe dieser Rechtecke in die Fläche $0tAB$ über, die wir kurz Fläche der Geschwindigkeitskurve nennen, sodass wir ganz allgemein den Satz haben:



Die Masszahl des bei einer beliebigen Bewegung während der Zeit t zurückgelegten Weges ist gleich der Masszahl der Fläche des über diesem Zeitabschnitte stehenden Abschnittes der Geschwindigkeitskurve.

Aufgaben über verschiedene gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegungen: 1. Wie gross ist auf einer schiefen Ebene von 10° Neigung die Beschleunigung und welchen Weg legt ein Körper auf derselben in 5 Sekunden zurück? 2. Ein Personenzug erlangt in 2 Minuten seine volle Fahrgeschwindigkeit von 12 m, welche Beschleunigung erfährt er und welche Strecke legt er bis dahin zurück? 3. Ein Eilzug (16 m) wird durch Bremsen auf einem Weg von 200 m zum Stehen gebracht, welche Verzögerung hat er erfahren und wie lange hat seine Fahrt noch gedauert? 4. Eine Kanonenkugel mit 440 m Anfangsgeschwindigkeit hat nach 100 Schritt eine Geschwindigkeit von 430 m, welche Verzögerung hat sie durch den Luftwiderstand erfahren? 5. Eine Kanonenkugel verweilt $\frac{1}{300}$ Sekunden im Lauf, welche Beschleunigung hat sie erfahren, wenn ihre Geschwindigkeit 440 m beträgt?

§. 8. Fall auf der schiefen Ebene und auf einer beliebigen Kurve.

In § 4 ist gezeigt worden, dass die Beschleunigung eines Körpers, der auf einer schiefen Ebene von der Neigung α fällt $g \sin \alpha$ ist. Hieraus ergeben sich zwei wichtige Sätze, wenn wir 1. die Geschwindigkeit bestimmen, mit welcher der Körper am

Fuss der schiefen Ebene von der Länge l ankommt, 2. die Zeit berechnen, die hiezu erforderlich ist.

1. Die Formel 4 des § 5 liefert, wenn wir statt der Beschleunigung g beim freien Fall die hier auftretende $g \sin \alpha$ setzen $v = \sqrt{2 g \sin \alpha \cdot l}$ oder da $l \sin \alpha = h$ (Fig. 2.)

$$v = \sqrt{2 gh}$$

Da dies Resultat den Neigungswinkel der schiefen Ebene nicht enthält, ergibt sich der Satz:

Ein Körper, der von der Höhe h herabfällt, erlangt dieselbe Geschwindigkeit, ob er diese Höhe frei oder auf einer beliebigen schiefen Ebene durchfällt.

Dieser Satz ist zuerst von Galilei in allgemeinerer Form aufgestellt und auf andere Weise bewiesen worden. Seine Schlussfolgerung war diese: Die Schwere ist ein Streben der Körper nach dem Mittelpunkt der Erde, demnach wird ihre Wirkung dieselbe sein, wenn sie einen Körper der Erde gleichviel genähert hat, mag diese Annäherung auf noch so verschiedenem Wege erfolgt sein. Die Wirkung einer Kraft wird aber durch die Geschwindigkeit gemessen, die sie einem Körper erteilt hat,

also erreicht ein Körper dieselbe Geschwindigkeit, ob er die Höhe h frei oder auf einem beliebigen andern Wege durchfällt. (Experiment Galileis zur Bestätigung dieses Satzes.)

Wir beweisen diesen allgemeinen Satz auf Grund des von der schiefen Ebene soeben abgeleiteten, indem wir schliessen: Fällt ein Körper auf der beliebigen Kurve AE , Fig. 6, so ist

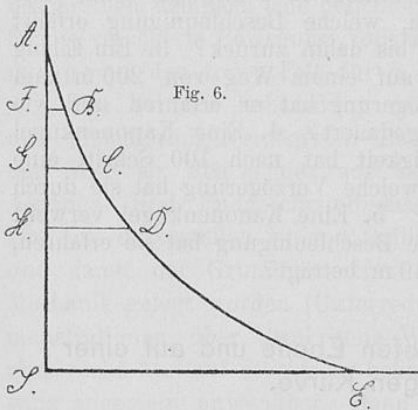


Fig. 6.

die im Endpunkte E erlangte Geschwindigkeit die Summe aller der Geschwindigkeiten, die er auf den unendlich kleinen Kurvenelementen AB , BC , CD u. s. w. erreicht hat. Jedes solche

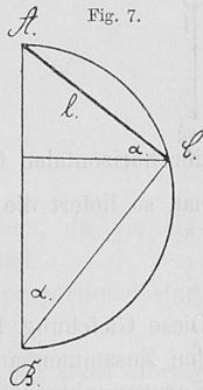
Element kann aber als schiefe Ebene von der Höhe AF , FG , GH u. s. w. angesehen werden, sodass die in B erlangte Geschwindigkeit gleich der beim freien Fall in F erlangten, die in C erlangte gleich der beim freien Fall in G erlangten, endlich die in E erreichte Geschwindigkeit der beim freien Fall in J erreichten gleich ist. Der Satz gilt also allgemein:

Die Geschwindigkeit, die ein Körper unter dem Einfluss der Schwere erlangt, ist unabhängig von dem Weg, den er zurückgelegt hat, nur abhängig von dem senkrechten Abstand h des Anfangs- und Endpunktes des Weges und ist gleich $\sqrt{2gh}$.

2. Die Zeit, in der ein Körper die schiefe Ebene von der Länge l (Fig. 7) und der Neigung α durchfällt, ist $t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$.

Beschreiben wir einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Höhe der schiefen Ebene (oder deren Verlängerung) liegt, dessen Peripherie durch C geht, so ist $\frac{l}{\sin \alpha} = AB$. Der Wert für t

geht über in $t = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g}}$. Dieselbe Zeit braucht der Körper auch um den Durchmesser des Kreises frei zu durchfallen. Da dies für jede beliebige von A ausgehende schiefe Ebene gilt, so haben wir den Satz:



Ein Körper durchfällt den senkrechten Durchmesser eines Kreises in derselben Zeit, in der er irgend eine von dessen oberem Endpunkte ausgehende Sehne durchfällt.

§ 9. Horizontaler Wurf.

Wird einem in O befindlichen Körper (Fig. 8) eine Geschwindigkeit c in horizontaler Richtung erteilt, so würde er vermöge dieser allein nach Verlauf von 1, 2, 3 ... Sekunden in A , B , C ankommen. Gleichzeitig zieht ihn aber sein Gewicht in einer Sekunde um 5 m, in 2 Sekunden um 20 m, in 3 Sekunden um 45 m nach abwärts, er wird also nach Verlauf von 1, 2,

3... Sekunden in D , E , F ankommen. Seine Bahn ist, da diese Einwirkungen stetig erfolgen, die krumme Linie $O D E F \dots$

Allgemein: Bezeichnen wir den Weg in horizontaler Richtung

mit x , den in vertikaler Richtung mit y , so ist:

$$7. \quad x = ct, \quad y = \frac{gt^2}{2}$$

Durch diese Formeln wird der Ort des Körpers zu einer beliebigen Zeit bestimmt.

Soll die Frage beantwortet werden, wie tief ist ein Körper gefallen, wenn er (mit

der horizontalen Geschwindigkeit c) die Strecke x zurückgelegt hat, so liefert die Gleichung $x = ct$, $t = \frac{x}{c}$. Hieraus

$$y = \frac{gx^2}{2c^2}$$

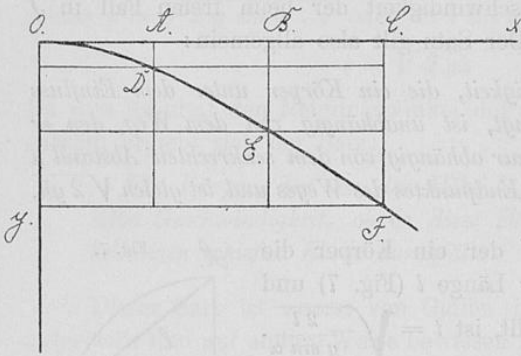
Diese Gleichung heisst die Gleichung der Wurfbahn, sie giebt den Zusammenhang zwischen den Abscissen und Ordinaten der Kurvenpunkte, sie zeigt, dass sich die Ordinaten zweier Punkte wie die Quadrate der Abscissen verhalten. Die analytische Geometrie lehrt, dass diese Gleichung eine Parabel darstellt.

§ 10. Parallelogramm der Bewegungen.

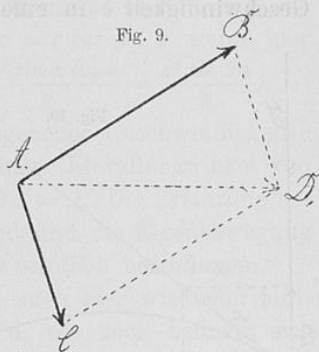
Die Bewegung des horizontalen Wurfes ist gleichfalls von Galilei zuerst in dieser Weise behandelt worden, er hat dabei den Satz vom Parallelogramm der Bewegungen für diesen besondern Fall ausgesprochen, den später Newton ganz allgemein aufgestellt hat:

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.

Fig. 8.



Anschaulich ausgedrückt: Wirken auf einen Körper in A zwei Bewegungsursachen, infolge deren er in der Zeit t den Weg AB beziehungsweise AC zurücklegen würde (Fig. 9), so kommt er nach Verlauf der Zeit t im andern Endpunkt D der Diagonale eines Parallelogramms an, das man aus diesen beiden Wegen konstruieren kann. Sind die beiden Bewegungen gleichförmig, so bewegt sich der Körper auf der Diagonale des Parallelogramms AD , ebenso wenn beide gleichmässig beschleunigt oder überhaupt gleichartig sind. Sind dagegen die Bewegungen ungleichartig, so gelangt der Körper auf einer Kurve von A nach D .



Wie von einem Parallelogramm der Wege können wir auch von einem Parallelogramm der Geschwindigkeiten sprechen, da die Geschwindigkeiten die Wege in einer Sekunde sind.

Und endlich, da die Wege den Kräften proportional sind, die auf den Körper wirken, gilt auch der Satz:

Wenn zwei Kräfte unter einem Winkel auf einen Körper wirken, bewegt er sich so, als ob er von einer einzigen Kraft bewegt würde, die der Richtung und Grösse nach durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird, das aus den beiden Kräften konstruiert werden kann.

Sind in Fig. 9 $AB = p$, $AC = q$ die beiden Kräfte und α der Winkel zwischen ihnen, so ist $AD = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos \alpha}$. Die beiden Kräfte p und q heissen die Seitenkräfte oder Komponenten, AD die Resultierende.

Zerlegung von Kräften (Bewegungen, Geschwindigkeiten). Ebenso wie wir statt zweier Kräfte AB und AC (Fig. 9), die auf einen Körper wirken, eine einzige AD setzen können, die dieselbe Wirkung hervorbringt, wie jene, können wir eine Kraft (Bewegung oder Geschwindigkeit) durch zwei andere AB und AC ersetzen. Gleich die folgende Aufgabe wird zeigen, wie fruchtbar eine solche Zerlegung der Geschwindigkeit werden kann.

§ 11. Schiefer Wurf.

Einem Körper werde eine Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Winkel α gegen die Horizontale erteilt (Fig. 10). Da die Schwere auf ihn senkrecht nach abwärts wirkt, zerlegen wir die Geschwindigkeit c in eine horizontale Komponente $c_1 = c \cos \alpha$

und in eine vertikale $c_2 = c \sin \alpha$, der die Schwere direkt entgegenwirkt. Die Geschwindigkeit des Körpers in horizontaler Richtung bleibt unverändert, jene in vertikaler Richtung ist nach t Sekunden

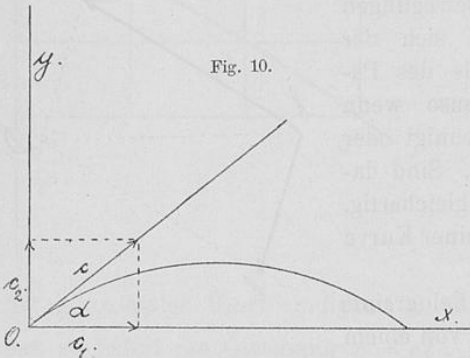


Fig. 10.

$$v = c_2 - gt = c \sin \alpha - gt.$$

Der Weg x in horizontaler Richtung ist gleichförmig, der Weg y in vertikaler Richtung gleichförmig verzögert, sodass:

$$8. \quad x = c \cos \alpha \cdot t, \quad y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Auch hier können dieselben Fragen gestellt und in der gleichen Weise beantwortet werden, wie beim senkrechten Wurf:

1. Wie lange, 2. Wie hoch steigt der Körper? 3. Nach wie viel Sekunden und 4. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an? Endlich 5. Wie weit kommt er in horizontaler Richtung?

1. Er steigt so lange, bis seine Geschwindigkeit in vertikaler Richtung 0 ist, demnach erhalten wir die Steigzeit t , aus der Gleichung $c \sin \alpha - gt_1 = 0$, $t_1 = \frac{c \sin \alpha}{g}$.

2. Die Steighöhe h ergibt sich aus der Formel für y , wenn wir hier den soeben für t_1 erhaltenen Wert einsetzen $h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

3. Der Körper kommt wieder unten an, wenn seine Höhe $y = 0$ ist, wenn also $c \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} = 0$, demnach hat die ganze Bewegung $t_2 = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ Sekunden gedauert, er hat also zum Herabfallen dieselbe Zeit gebraucht, wie zum Aufsteigen.

4. Die Geschwindigkeit beim Niederfallen erhalten wir aus $v = c \sin \alpha - gt = -c \sin \alpha$, wenn wir hier $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ setzen. Die vertikale Geschwindigkeit beim Niederfallen ist ebensogross als beim Aufsteigen, aber entgegengesetzt gerichtet.
5. Den ganzen Weg des Körpers in horizontaler Richtung, die Wurfweite w erhalten wir aus $x = c \cos \alpha \cdot t$ wenn hier $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ gesetzt wird, $w = \frac{2c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Hieraus ergibt sich, dass bei gegebener Geschwindigkeit c das Maximum der Wurfweite unter einem Elevationswinkel von 45° erreicht wird, denn für ihn ist $\sin 2\alpha = 1$. Die Erfahrung bestätigt dies nicht, da der Luftwiderstand und die Eigenbewegung eines geworfenen Körpers die Bahn wesentlich beeinflussen.

Gleichung der Wurfbahn. Wenn auch hier wie beim horizontalen Wurf die Frage gestellt wird, wie hoch befindet sich der Körper, wenn er in horizontaler Richtung den gegebenen Weg x zurückgelegt hat, so erhalten wir aus den beiden Gleichungen 8, wenn wir mit Hilfe der ersten t durch x ausdrücken und in die zweite einsetzen

$$9. \quad y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Diese Gleichung, die den Zusammenhang zwischen den Abscissen und Ordinaten eines jeden Punktes der Flugbahn enthält, ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel im höchsten Punkt der Bahn liegt.

Aufgaben: 1. Eine Kanonenkugel ($c = 448$ m) wird unter einem Elevationswinkel von $12^\circ 27'$ abgeschossen, beantworte die 5 oben allgemein gestellten Fragen für diesen besondern Fall. (Der Versuch ergibt die Wurfweite $w = 4000$ m). 2. Ein Manlichergewehr ($c = 620$) wird unter einem Elevationswinkel von $2^\circ 5'$ abgeschossen, wie weit fliegt das Geschoss? (Der Versuch ergibt 1125 m). 3. Unter welchem Elevationswinkel müsste die 9 cm Feldkanone ($c = 448$ m) abgeschossen werden, um ein 3000 m fernes in gleicher Höhe mit der Kanone befindliches Ziel zu treffen? (Die Erfahrung ergibt, dass der Winkel $7^\circ 54'$ sein muss). 4. Welche Anfangsgeschwindigkeit müsste eine Kugel haben, um unter einem Elevationswinkel von 10° 80 m hoch zu steigen? 5. Unter welchem Winkel muss die 9 cm Feldkanone aufgestellt werden, wenn sie ein 1000 m weites 20 m höher als die Kanone liegendes Ziel treffen soll?

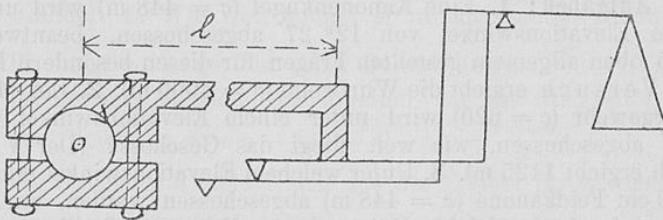
In den vorigen und diesem Paragraphen ist die Bewegung des horizontalen, senkrechten und schiefen Wurfes ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes behandelt worden, der eine grosse Rolle bei diesen Bewegungen spielt und dieselben wesentlich anders gestaltet. Newton hat die von Galilei begonnenen Untersuchungen über die Wurfbewegung fortgesetzt und die Lösung der Aufgabe für den Fall gesucht, jedoch nicht gefunden, dass der Luftwiderstand mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Johann Bernoulli gelang die Lösung allgemein, er fand die Wurfbahn auch unter der Annahme, dass der Luftwiderstand proportional einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit ist.

§ 12. Mass der Kraft.

Das in der Praxis übliche Kraftmass ist das Kilogramm, d. h. der Druck, den ein Liter Wasser von 4°C auf seine Unterlage ausübt. Wir werden später erfahren, warum dieses Mass nicht an allen Punkten der Erdoberfläche das nämliche ist. Der Unterschied dieses Druckes am Pol und Aequator beträgt 0.52% also bei 1000 g rund 5 g. Während dieser Unterschied bei vielen praktischen Messungen nicht ins Gewicht fällt, werden wir bei genauern Messungen darauf Rücksicht zu nehmen haben.

Messen der Kräfte. Kräfte können gemessen, d. h. mit dem Kilogramm verglichen werden durch eine Schalen- oder Federwage, grössere Kräfte mit einer eigens dazu konstruierten

Fig. 11.



Federwage, dem Dynamometer (Zugkraft eines Pferdes, einer Lokomotive u. s. w.) Die Kraft, welche eine Dampfmaschine an der Schwungradaxe ausübt, wird mit dem Pronyschen Dynamometer gemessen, das in Fig. 11 dargestellt ist. Der in der Figur schraffiert gezeichnete Hebel wird mit zwei Schrauben an die

Axe der Maschine gepresst und so lange Gewichte in die Schale der Dezimalwage gelegt, auf deren Brücke der Hebel drückt, bis die Wage Gleichgewicht anzeigt. Ist die Kraft, die der Dampf an der Schwungradaxe ausübt Q , die zugelegten Gewichte P , die Länge des Hebels l und der Radius der Schwungradaxe r , so haben wir $Q : 10 P = l : r$ demnach $Q = \frac{10 P l}{r}$ Kg.

Berechnung der Kraft. Eine Kraft kann berechnet werden aus der Beschleunigung, die sie einem Körper erteilt. Ein Beispiel wird dies klar machen. Wir legen auf die Fallmaschine, deren Teller zusammen 25 g wiegen, beiderseits Gewichte zu je 146 g, auf eine Seite ein Übergewicht x , das als Kraft wirkt und bestimmen durch das Experiment die Beschleunigung, wir finden sie gleich 21 cm. Nun haben wir folgende Überlegung

x g setzen in Bewegung $317 + x$ g und erzeugen eine Beschleunigung von 21 cm

x g frei fallend, also auf x g wirkend erzeugen eine Beschleunigung von 981 cm

daraus ergibt sich die Proportion

$$x : 317 + x = 21 : 981 \text{ also } x = 7 \text{ g.}$$

Die Wägung zeigt, dass das Gewicht 7.3 g wiegt. Das Resultat wird durch die Reibung ungenau.

Allgemein:

k Kilogramm auf sich selbst wirkend, also frei fallend, erzeugen eine Beschleunigung von g m

k Kilogramm auf p Kilogramm wirkend, erzeugen eine Beschleunigung von a m, mehr, wenn $p < k$; weniger wenn $p > k$

wir haben also die Proportion:

$$k : p = a : g \text{ also } k = \frac{p}{g} a.$$

Der Ausdruck $\frac{p}{g}$, der in jeder Kraftbestimmung vorkommt, wird Masse genannt und mit m bezeichnet. Dieser Quotient ist, wie sich auch das Gewicht eines Körpers auf der Erde ändern mag, derselbe, denn stets wird durch die veränderte Anziehungskraft p und g sich im selben Verhältnisse ändern. Demnach ist

auch die aus der Beschleunigung berechnete Kraft unabhängig vom Orte der Erdoberfläche, an welchem die Bestimmung vorgenommen wird. Wir haben also

10.

$$k = m a$$

als ein überall gleiches Kraftmass. Nach ihm ist diejenige Kraft gleich 1, welche der Masse 1 die Beschleunigung 1 erteilt. Dieses Masssystem heisst daher das absolute. Es bleibt noch übrig, seine Einheiten zu bestimmen. Dieselben sind folgenderweise festgestellt worden:

1. Als Einheit der Masse gilt die Masse von 1 cm³ Wasser. Sie wird mit Gramm bezeichnet. Wenn wir also im absoluten Masssystem von Gramm sprechen, so meinen wir damit die Masse von 1 cm³ Wasser, nicht das Gewicht p eines cm³ Wasser.
2. Als Einheit der Länge gilt das cm,
3. Als Einheit der Zeit die Sekunde.

Die Krafteinheit ist demnach diejenige Kraft, welche der Masse von einem Gramm eine Beschleunigung von einem Centimeter erteilt. Sie wird Dyne genannt.

Wie verhält sich diese Krafteinheit zu dem in der Praxis üblichen Kraftmass, dem Kilogramm?

Ein Gramm erteilt sich selbst in Hermannstadt durch seine Fallkraft eine Beschleunigung von rund 981 cm. Soll die Beschleunigung nur ein cm sein, so muss auch die bewegende Kraft nur der 981-te Teil von 1g also 1.02 Milligramm sein. Die Krafteinheit des absoluten Systems wird also in Hermannstadt durch ein Gewicht von 1.02 mg repräsentiert.

Ein Kilogramm ist aber $= 981 \times 1000 = 981000$ Dynen, denn es erteilt sich selbst, also 1000 Gramm eine Beschleunigung von 981 cm.

Dimension der Kraft. Da die Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, so ist die Dimension der Kraft $\frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Sekunde}^2}$.

Mechanik des Himmels.

§ 13. Kopernicus 1473—1543.

Hipparch's Theorie des Sonnensystems (um 150 v. Chr.) Korrektur des Systems durch Claudius Ptolemäus (Almagest 150 n. Chr.) Dieses System blieb bis auf Kopernicus herrschend. Dieser, durch seinen Lehrer Regiomontan für das Studium der Astronomie begeistert, suchte nach einer einfachern Erklärung für die Erscheinungen am Himmel und fand sie nach 23-jährigem Bemühen. Seine Theorie lässt sich kurz in drei Sätze zusammenfassen.

1. Die Erde dreht sich von West nach Ost um ihre Axe, daraus entspringt die tägliche scheinbare Bewegung der Himmelskörper von Ost nach West.
2. Die Erde vollendet ebenfalls in der Richtung von West nach Ost in einem Jahr den Lauf um die Sonne, wobei ihre Axe immer sich selbst parallel bleibt. Hieraus erklären sich die scheinbaren Veränderungen am Himmelsgewölbe und der Unterschied der Jahreszeiten.
3. Wie die Erde, laufen auch die Planeten um die Sonne, woher es kommt, dass wir sie zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Stellen des Himmels erblicken und bald vorwärts schreiten, bald stille stehen, bald rückwärts gehen sehen.

»Durch keine andere Anordnung,« sagt Kopernicus in seinem Werke, »habe ich eine so bewunderungswerte Symmetrie des Universums, eine so harmonische Verbindung der Bahnen finden können, als da ich die Weltleuchte, die Sonne, die ganze Familie der kreisenden Gestirne lenkend, wie in die Mitte des schönen Naturtempels, auf einen königlichen Thron gesetzt.«

Das Werk Kopernicus' »De revolutionibus orbium coelestium libri VI«, in welchem diese neue Theorie enthalten war, erschien im Jahre 1543. Als er schon auf dem Krankenbette lag, wurden ihm die ersten Exemplare überreicht. Er hat weder die Gleichgiltigkeit bemerkt, mit der man es aufnahm, noch die Verfolgungen erlebt, die die Anhänger seiner Lehre zu erdulden hatten. Galilei, einer der eifrigsten Verfechter derselben, musste sie 1633 vor der Inquisition abschwören. Die Gründe, welche gegen die

Axendrehung der Erde vorgebracht wurden, wurden alle zu Beweisen dafür. Unter ihnen fand sich die Behauptung, ein freifallender Körper müsse bei nach Osten rotierender Erde nach Westen abweichen. Galilei schon zeigte, dass dies ein Irrtum sei, da der Körper an der Geschwindigkeit der Erde teil habe. Ja durch den Fallversuch Reichs im Dreibrüderschacht in Freiberg (1831) wurde bei einer Fallhöhe von 158·54 m nachgewiesen, dass eben infolge der Axendrehung die Abweichung gerade eine östliche sein müsse (die Abweichung betrug 28·4 mm) und war genau so gross wie vorher berechnet worden war. Ebenso wurde eingewendet, die Körper müssten infolge der Axendrehung von der Erde weggeschleudert werden, wie die Wassertropfen von einem sich drehenden Rade, schon Galilei zeigte, dass diese durch die Rotation der Erde hervorgerufene Zentrifugalkraft sehr gering sei gegen die Anziehung der Erde. Wir werden im § 22 ihre Grösse bestimmen und gerade wieder in der Verschiedenheit der Schwere an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche einen Beweis für die Axendrehung der Erde finden.

§ 14. Kepler 1571—1630.

Kopernicus hatte die Bewegungen der Himmelskörper mit einer dem damaligen Stande der astronomischen Messungen genügenden Genauigkeit beschrieben und insbesondere dadurch eine grosse That vollbracht, dass er der Sonne den ihr gebührenden Platz anwies und durch die Lehre von der Rotation der Erde die ungeheuerlichen Geschwindigkeiten aus der Welt schaffte, die man annehmen musste, wenn das ganze Himmelsgewölbe sich in 24 Stunden um die Erde bewegen sollte. Die Winkelmessungen konnten zu Zeiten des Kopernicus höchstens mit 5' Genauigkeit angestellt werden. Als Tycho Brahe seine astronomischen Beobachtungen zuerst in Oranienburg später in Prag (1576—1601) mit bessern, damals den besten Instrumenten anstellte, die Winkelmessungen bis zu 1' zuliesse, erkannte er, dass die Bewegungen der Planeten sich aus kreisförmigen Bahnen nicht erklären liessen. Insbesondere die Bewegung des Mars war zu sehr vom Kreis verschieden, sodass Tycho das Kopernicanische System aufgab, ohne jedoch etwas besseres an dessen Stelle setzen zu können. Sein Assistent und nach Tychos Tode sein Nachfolger, Kepler,

dem nun das ganze Beobachtungsmaterial vorlag, fand aus den Beobachtungen des Mars, dass dessen Bahn eine Ellipse sei. Er hatte aus dem Gewirr der einzelnen Ortsbestimmungen des Planeten genialisch die tief verborgene Regelmässigkeit erkannt. Dass es gerade dieser Planet war, der zur Entdeckung der elliptischen Bahn führte, wird begreiflich, wenn man in der Tabelle (auf der letzten Seite) die Exzentrizitäten der Planetenbahnen vergleicht und bedenkt, dass die Beobachtung Merkurs, dessen Exzentrizität grösser ist, nicht gut möglich war, da er der Sonne zu nahe steht. (Zeichne nach den Angaben der Tabelle die Bahn des Merkur, Mars und der Erde.) Die weitere Untersuchung ergab, dass auch die Bahnen der andern Planeten Ellipsen seien. So stellte denn Kepler in seiner *Astronomia nova* 1609 das erste der unter seinem Namen bekannten Gesetze auf:

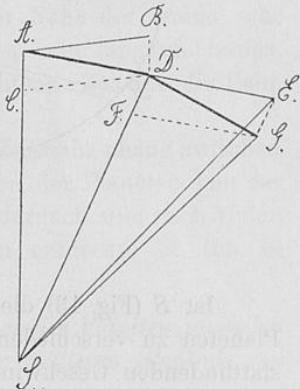
Die Bahnen aller Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne sich befindet.

Diesem schloss sich sofort das zweite an:

Die Planeten bewegen sich mit solchen Geschwindigkeiten in ihren Bahnen, dass die Radienvektoren (die von der Sonne nach den jeweiligen Orten der Planeten gezogenen Linien) in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben.

Fig. 12.

Dies zweite Gesetz kann leicht mathematisch nachgewiesen werden. Ein Planet besitze in A irgend eine Geschwindigkeit, vermöge deren er in der unendlich kleinen Zeit dt den Weg AB zurücklegen würde (Fig. 12.) Zugleich wird er von der Sonne in derselben Zeit um das Stück AC angezogen, er kommt dann nach Verlauf der Zeit dt in dem andern Endpunkt der Diagonale des Parallelogramms $ABCD$ an. In der nächsten Zeit dt würde er nach dem Trägheitsgesetz die AD gleiche Strecke DE zurücklegen, er wird aber wieder der Sonne genähert, diesmal um die Strecke DF , sodass er nach Verlauf des zweiten Zeitelementes dt in G ankommt u. s. f.



Da die Zeitelemente, also auch die Wege AD und DG unendlich klein sind, so können AD und DG als kleine Bogenstücke der Bahn angesehen werden. Es kann nun gezeigt werden, dass $ADS = DGS$ ist, denn

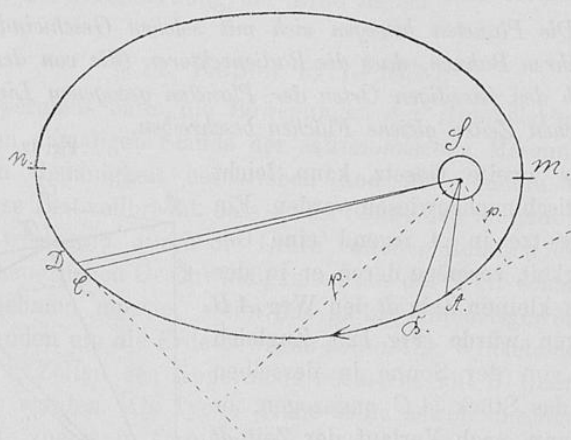
$ADS = DES$, weil diese beiden Dreiecke gleiche Grundlinien und denselben Scheitel haben.

$DES = DGS$, weil diese beiden Dreiecke dieselbe Grundlinie und gleiche Höhen haben,

also $ADS = DGS$. Es ist somit bewiesen, dass die von den Radienvektoren in kleinen gleichen Zeiten beschriebenen Flächen gleich sind. Da sich aber die in grössern Zeiten beschriebenen Flächen aus den in unendlich kleinen beschriebenen zusammensetzen, so gilt der Satz allgemein.

Aus diesem Satz lässt sich ein wichtiger Schluss auf die Geschwindigkeit der Planeten in verschiedenen Punkten ihrer Bahn ziehen.

Fig. 13.



Ist S (Fig. 13) die Sonne, A und C zwei Stellungen des Planeten zu verschiedenen Zeiten, sind v und v_1 die in A und C stattfindenden Geschwindigkeiten, so ist der in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegte Weg bei A gleich $v dt$, bei C gleich $v_1 dt$. Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz ist $ABS = CDS$ oder $v \cdot dt \cdot p = v_1 dt \cdot p_1$ also

$$v : v_1 = p_1 : p$$

d. h. *Die Geschwindigkeiten eines Planeten in verschiedenen Punkten seiner Bahn verhalten sich umgekehrt wie die Normalen, die man aus dem Mittelpunkt der Sonne auf die in den betreffenden Punkten gezogenen Tangenten errichten kann.*

Für eine Bewegung im Kreise folgt hieraus, dass die Geschwindigkeit konstant ist, denn hier haben alle Normalen die Länge des Radius.

Für die Erde ergibt sich, da sie sich am 21. Dezember in *m*, am 21. Juni in *n* befindet (Fig. 13), dass ihre Geschwindigkeit im Winter grösser ist, als im Sommer. In runden Zahlen ausgedrückt ist $S_m : S_n = 59 : 61$, also verhalten sich die Geschwindigkeiten in *m* und *n* wie $61 : 59$. Die Sommerhälfte unseres Jahres ist deshalb um 7 Tage 18 Stunden länger als die Winterhälfte. Auffallender ist dieser Unterschied der Jahreszeiten wegen der grössern Exzentrizität der Bahn bei Mars. Dort dauert für die Nordhalbkugel der Frühling 191, der Sommer 181, der Herbst $149\frac{1}{2}$, der Winter 147 Tage. Mit dem Fernrohr lässt sich die Wirkung dieser natürlich für die beiden Hemisphären entgegengesetzten Verteilung der Jahreszeiten feststellen.

Für die Kometen, die sehr lang gestreckte Bahnen haben (Exzentrizität des Encke'schen Kometen 0.846, des Pons-Brooks'schen 0.955, des Halley'schen 0.967) folgt aus dem für die Geschwindigkeit abgeleiteten Satz, dass sie in der Nähe der Sonne sehr rasch und bei Entfernung von derselben sehr langsam laufen. Deshalb sind sie auch nur kurze Zeit sichtbar. Zeichne die Bahn dieser Kometen.

Kepler war überzeugt, dass auch ein Zusammenhang zwischen den Umlaufszeiten und den Entfernungen der Planeten von der Sonne bestehen müsse. Er suchte lange darnach und nach vielen zum Teil recht seltsamen Vermutungen entdeckte er ihn in dem Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Dieses dritte Kepler'sche Gesetz ist in den *Harmonices mundi* 1619 veröffentlicht. Der Titel des Werkes war schön gewählt, es war damit in der That eine wunderbare Harmonie in

dem Planetensystem entdeckt und sehr bedeutend waren die Schlüsse, die Newton daran knüpfte.

Aufgabe: Prüfe die Richtigkeit des dritten Kepler'schen Gesetzes durch Vergleich der Erde und des Jupiter. Umlaufzeit des Jupiter 4332·58 Tage, der Erde 365·26 Tage. Entfernung des Jupiter von der Sonne in Sonnenhalbmessern 1116·97, der Erde in demselben Masse 214·76.

Kopernicus, Galilei und Kepler haben eine neue Weltanschauung begründet. Kopernicus als erster hat die Herrschaft des Aristoteles in der Astronomie gestürzt und so an dem Jahrhundert alten Fundament der Naturwissenschaften überhaupt zu rütteln begonnen, Galilei als hervorragendster Vertreter Kopernicanischer Ideen die physikalischen Grundlagen für ein neues Gebäude geschaffen und Kepler durch seine ausgezeichneten Beobachtungen die Ordnung im neuen System nachgewiesen.

Es blieb noch übrig, die bewegende Kraft zu finden und aus ihr die Notwendigkeit gerade dieser Ordnung nachzuweisen. Dieses leistete Newton. Doch vorher behandelte Christian Huyghens (1629—1695) das Problem der Zentralbewegung.

§ 15. Zentralbewegung.

Huyghens beantwortete die Frage: Welche Kraft muss thätig sein, wenn ein Körper sich mit der konstanten Geschwindigkeit c im Kreise vom Radius r bewegen soll? Ein Körper bewege sich im Kreise vom Radius r mit der Geschwindigkeit c . Dass diese konstant ist, geht aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz hervor. In A angekommen (Fig. 14, in der Figur ist unter E neben F noch der Buchstabe G zu setzen) hat er das Bestreben, in der Richtung der Tangente weiter zu gehen. Sein Weg in dieser Richtung, in der unendlich kleinen Zeit dt sei $AB = c dt$, er würde sich also, wenn er seiner Geschwindigkeit folgte, um BC vom Mittelpunkt des Kreises entfernen, in der Zeit $2 dt$ um EF . Soll er auf dem Kreise bleiben, so muss demnach eine Kraft thätig sein, die ihn in der Zeit dt um BC in der Zeit $2 dt$ um EF u. s. f. dem Mittelpunkt des Kreises nähert. Statt BC und EF können wir bei wirklich klein gewähltem dt BD und EG setzen. Die Strecken BD

und EG können nun geometrisch berechnet werden aus dem rechtwinkligen Dreieck ADH , wobei wir auch den Unterschied zwischen AB und AD vernachlässigen können.

$$AJ : AD = AD : AH \text{ oder, da } AJ = BD$$

$$BD : AD = AD : AH$$

$$BD : c dt = c dt : 2r$$

$$a) \quad BD = \frac{c^2 dt^2}{2r}$$

$$\text{ebenso} \quad EG = \frac{4c^2 dt^2}{2r} \text{ und für die Zeit } 3dt \text{ würden}$$

$$\text{wir auf gleiche Weise erhalten } \frac{9c^2 dt^2}{2r}.$$

Die Wege also, um welche ein Körper bei der kreisförmigen Zentralbewegung nach dem Mittelpunkt hin gezogen werden muss, wenn er nicht in der Richtung der Tangente weiter gehen soll, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten. Da dies dasselbe Verhältnis ist, wie bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, muss auch die Ursache die gleiche sein. Die Zentripetalkraft bei der kreisförmigen Bewegung ist also konstant. Wenn wir die Beschleunigung, die sie dem Körper erteilt, γ nennen, so können wir den Weg BD auch durch die bekannte

$$\text{Formel} \quad \frac{a dt^2}{2}$$

ausdrücken und erhalten

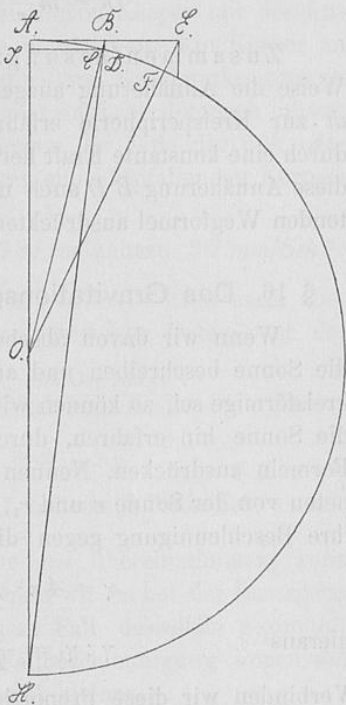
$$BD = \gamma \frac{dt^2}{2}.$$

Da nach Formel

$$a) \quad BD = \frac{c^2 dt^2}{2r} \text{ ist, so folgt}$$

$$\gamma \frac{dt^2}{2} = \frac{c^2 dt^2}{2r} \text{ also } \gamma = \frac{c^2}{r}$$

Fig. 14.



Die Kraft also, welche in O wirken muss, wenn der Körper im Kreise sich bewegen soll (Zentripetalkraft), ist $k = \frac{m c^2}{r}$.

Die Beschleunigung lässt sich, statt durch die Geschwindigkeit c , auch durch die Umlaufzeit T des Körpers ausdrücken, denn $c \cdot T = 2 r \pi$ daraus $c = \frac{2 r \pi}{T}$, also $\gamma = 4 \pi^2 \frac{r}{T^2}$.

Wir haben also für die Beschleunigung der Zentripetalkraft die Formeln:

$$\gamma = \frac{c^2}{r} \text{ oder } \gamma = 4 \pi^2 \frac{r}{T^2}$$

11. und für die Zentripetalkraft selbst

$$k = m \frac{c^2}{r} \text{ oder } k = 4 \pi^2 \frac{m r}{T^2}.$$

Zusammenfassung: Wir haben zuerst auf geometrische Weise die Annäherung ausgedrückt, die der Körper in der Zeit dt zur Kreisperipherie erfahren muss und gefunden, dass sie durch eine konstante Kraft hervorgerufen wird. Indem wir sodann diese Annäherung BD auch nach der für die konstante Kraft geltenden Wegformel ausdrückten, erhielten wir die Beschleunigung.

§ 16. Das Gravitationsgesetz, Newton 1643—1727.

Wenn wir davon absehen, dass die Planeten Ellipsen um die Sonne beschreiben und annehmen, dass die Bewegung eine kreisförmige sei, so können wir die Beschleunigung, die sie gegen die Sonne hin erfahren, durch die von Huyghens gefundenen Formeln ausdrücken. Nennen wir die Entfernungen zweier Planeten von der Sonne r und r_1 , ihre Umlaufzeiten T und T_1 und ihre Beschleunigung gegen die Sonne γ und γ_1 , so haben wir:

$$\gamma = 4 \pi^2 \frac{r}{T^2} \text{ und } \gamma_1 = 4 \pi^2 \frac{r_1}{T_1^2}$$

hieraus

$$\gamma : \gamma_1 = \frac{r}{T^2} : \frac{r_1}{T_1^2}$$

Verbinden wir diese Proportion mit dem dritten Gesetz Keplers

$$T^2 : T_1^2 = r^3 : r_1^3$$

indem wir das Verhältnis $T^2 : T_1^2$ der Nenner durch $r^3 : r_1^3$ ersetzen, erhalten wir

$$\gamma : \gamma_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}$$

Die Anziehung der Sonne nimmt also im umgekehrten Verhältnis mit dem Quadrate der Entfernung ab.

Newton war überzeugt, dass die hier auftretende Kraft identisch sei mit der Schwere der Körper auf der Erdoberfläche. Wenn dieser Gedanke richtig war, so musste er an der Bewegung des Mondes nachgewiesen werden können, die eben unter dem Einfluss der von der Erde ausgehenden Anziehung vor sich geht. Hierzu war es nötig erst zu zeigen, wie die Anziehung eines kugelförmigen Körpers auf eine ausserhalb befindliche Kugel sich äussert. Newton bewies, dass zwei Kugeln sich so anziehen, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Demnach konnte er nun die Anziehung der Erde auf einen an der Erdoberfläche befindlichen Körper mit der Anziehung des Mondes durch die Erde vergleichen. Ein Körper an der Erdoberfläche ist einen Erdradius vom Mittelpunkt entfernt, der Mond ist von ihm 60 Erdhalbmesser entfernt, demnach müsste die Beschleunigung γ des Mondes gegen die Erde der 60². oder der 3600. Teil von der Beschleunigung eines freifallenden Körpers sein, also

$$\gamma = 980.62 \text{ cm/Sek.}^2 : 3600 = 0.2724 \text{ cm nahezu } 2.7 \text{ mm/Sek.}^2$$

Die Beschleunigung des Mondes gegen die Erde kann aber andererseits aus den gemessenen astronomischen Daten nach der Formel

$$\gamma = 4 \pi^2 \frac{r}{T^2} = 4 \pi^2 \frac{382\,004\,280 \text{ m}}{2\,360\,592 \text{ Sek.}^2}$$

bestimmt werden. Hieraus ergibt sich

$$\gamma = 0.2706 \text{ cm/Sek.}^2 \text{ nahezu } 2.7 \text{ mm/Sek.}^2$$

Da die beiden Resultate sehr gut übereinstimmen, kann es als erwiesen angesehen werden, dass wir es bei der Bewegung des Mondes um die Erde mit einem Fall desselben gegen die Erde zu thun haben, nur ist die Fallbeschleunigung wegen der 60-mal grössern Entfernung 3600-mal kleiner.

Newton hatte demnach bewiesen, dass die Schwere, welche wir an den Körpern auf der Erde beobachten, ihrem Wesen nach identisch ist mit der bei der planetarischen Bewegung auftretenden Massenanziehung.

Die Anziehung zweier Körper ist aber nicht nur von dem Quadrate ihrer Entfernung, sondern auch von der Masse des angezogenen und anziehenden Körpers abhängig. Das erste können wir unmittelbar aus der Wirkung der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Körper erkennen, denn die 2, 3, ... n -fache Masse übt auf eine Federwage den 2, 3, ... n -fachen Druck aus. Das zweite ergibt sich daraus, dass die Anziehung der Erde offenbar 2, 3, ... n -mal so gross werden würde, wenn ihre Masse in jedem Punkt auf das 2, 3, ... n -fache vergrössert werden könnte, da dann jede Masse die frühere Anziehung ausüben und die einzelnen Kräfte sich addieren würden.

Ist also die Kraft, mit der die Masse 1, von der Masse 1 in der Entfernung 1 angezogen wird, gleich f , (Gravitationskonstante), so lautet der vollständige Ausdruck des Newton'schen Gesetzes

$$12. \quad k = f \frac{Mm}{r^2}$$

d. h. *Zwei Körper ziehen sich an mit einer Kraft, welche dem Produkt ihrer Massen direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.*

Newton blieb bei der Aufstellung des Gravitationsgesetzes nicht stehen. Er bewies durch mathematische Ableitungen, dass ein Planet notwendig eine Ellipse beschreibt, wenn er von der Sonne mit einer Kraft angezogen wird, die im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat seiner Entfernung von ihr steht und dass ebenso auch das zweite und dritte Gesetz sich mit Notwendigkeit aus dieser Anziehungskraft ergeben. Damit war denn die innere bewegende Ursache für die von Kepler entdeckte Harmonie in den Planetenbahnen gefunden.

Wenn wir nun mit Hilfe des Newton'schen Gesetzes die Anziehung zweier Weltkörper in dem üblichen Kraftmass berechnen wollen, so haben wir 1. die Gravitationskonstante und 2. die Massen der Weltkörper zu bestimmen.

§ 17. Bestimmung der Gravitationskonstante, der Masse und Dichte der Erde.

Zur Bestimmung der Gravitationskonstante ist es nötig, durch unmittelbare Messung die Kraft k zu bestimmen, mit der die Masse M die Masse m in der Entfernung r anzieht. Dies ist möglich auf Grund eines zuerst von Cavendish (1797) angestellten Versuches. An den Enden eines sehr leichten Hebels der in seiner Mitte an einem dünnen Drahte aufgehängt ist, sind (Fig. 15) zwei kleine Kugeln gleicher Masse m befestigt. Bringt man auf einer Seite der einen Kugel m in der Richtung der Tangente des Kreises, den sie beschreiben kann, eine grosse Kugel von der Masse M an, so wird durch ihre Anziehung auf m der Hebel aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt und der Faden solange gedreht werden, bis seine Drehkraft der Anziehungskraft das Gleichgewicht hält. Die Drehkraft k des Fadens, die Massen M und m und die Entfernung r ihrer Mittelpunkte können gemessen werden, so dass in der Gleichung $k = f \cdot \frac{Mm}{r^2}$ nur f unbekannt ist, demnach berechnet werden kann. Wenn M und m in Gramm, r in cm ausgedrückt werden, ergibt sich aus den Versuchen

$$f = 0.000\,000\,064\,8$$

d. h. die Masse von 1 g zieht die Masse von 1 g in der Entfernung von 1 cm mit einer Kraft von 0.000 000 064 8 Krafteinheiten an. Hieraus kann auch die Masse der Erde bestimmt werden, wenn wir das Newton'sche Gesetz z. B. auf die Masse von 1 g anwenden.

Wir wissen, dass dieses von der Erde mit 981 Krafteinheiten angezogen wird, andererseits können wir diese Kraft nach Newton ausdrücken durch die Formel

$$0.000\,000\,064\,8 \frac{M \cdot 1}{636\,670\,000\,cm^2},$$

wenn wir die Masse der Erde mit M bezeichnen.

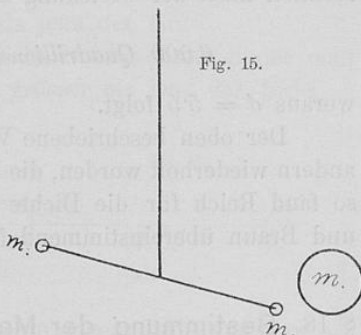


Fig. 15.

Aus der Gleichung:

$$981 = 0.000\,000\,064\,8 \frac{M \cdot 1}{636\,670\,000^2}$$

ergibt sich die Masse der Erde gleich rund 6000 Quadrillionen Gramm oder gleich 6 Quadrillionen Kilogramm.

Aus der Masse lässt sich auch die Dichte der Erde berechnen nach der Gleichung $M = 4\pi \frac{r^3 d}{3}$, in Zahlen:

$$6\,000 \text{ Quadrillionen} = 4\pi \cdot \frac{636\,670\,000^3 \cdot d}{3}$$

woraus $d = 5.5$ folgt.

Der oben beschriebene Versuch Cavendish's ist später von andern wiederholt worden, die Resultate stimmen ziemlich überein, so fand Reich für die Dichte der Erde 5.58, Baily 5.67, Boys und Braun übereinstimmend 5.527.

§ 18. Bestimmung der Masse anderer Weltkörper und Entdeckung des Neptun.

Das Gravitationsgesetz lieferte Newton auch ein Mittel, die Massen anderer Weltkörper mit jener der Erde zu vergleichen. Vergleichen wir z. B. die Anziehung der Sonne auf die Erde mit jener der Erde auf den Mond:

Die Beschleunigung des Mondes gegen die Erde haben wir in § 16 gefunden

$$\gamma = 4\pi^2 \frac{r}{t^2} = 0.2706 \text{ cm/Sek.}^2$$

Die Beschleunigung γ_1 der Erde gegen die Sonne finden wir ebenso

$$\gamma_1 = 4\pi^2 \frac{r_1}{T_1^2} = 0.5890 \text{ cm/Sek.}^2$$

wenn wir die Entfernung der Erde von der Sonne

$r_1 = 148\,626\,800$ Klm und $T_1 = 31\,577\,600$ Sekunden setzen.

Unmittelbar dürfen wir natürlich hieraus keinen Schluss auf das Verhältnis der Masse von Sonne und Erde ziehen, denn der Mond ist von der Erde rund 50 000, die Erde von der Sonne 20 Millionen Meilen also rund 400-mal weiter entfernt. Wir haben daher zu rechnen, wie gross wäre die Beschleunigung des

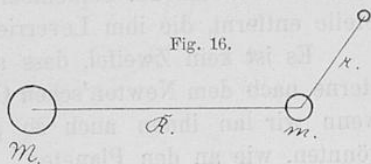
Mondes gegen die Erde, wenn er auch 20 Millionen Meilen von ihr abstünde? Sie wäre 400²-mal kleiner, also

$$\frac{0.2706}{160\,000} = 0.000\,001\,691 \text{ cm/Sek.}^2$$

diese Zahl ist 348 000-mal in 0.5890 enthalten. Die Sonne erteilt also einem andern Weltkörper bei gleicher Entfernung eine 348 000-mal grössere Beschleunigung als die Erde, ihre Masse ist demnach 348 000-mal grösser als jene der Erde.

Bei Zugrundelegung genauer Rechnungsdaten findet man die Masse der Sonne 322 800-mal grösser als jene der Erde.

Allgemein: Bezeichnet (Fig. 16) M , R Masse und Entfernung der Sonne von einem Planeten, m , r Masse des Planeten und die Entfernung seines Mondes, so ist nach Newton's



Gesetz die Beschleunigung des Planeten gegen die Sonne $\gamma = \frac{M}{R^2}$

die Beschleunigung des Mondes gegen den Planeten $\gamma_1 = \frac{m}{r^2}$

da γ und γ_1 andererseits $4\pi^2 \frac{R}{T^2}$ und $4\pi^2 \frac{r}{t^2}$ sind, so kann aus der Proportion

$$4\pi^2 \frac{R}{T^2} : 4\pi^2 \frac{r}{t^2} = \frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2}$$

das Verhältnis $M : m$ bestimmt werden, es ergibt sich

$$M : m = \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}.$$

Aufgabe: Bestimme das Verhältnis der Jupiter- zur Sonnenmasse. Umlaufzeit Jupiters 4332.58 Tage, des äussersten Jupitermondes 16.7 Tage. Entfernung Jupiters 121 391 Erdradien, des äussersten Jupitermondes 305 Erdradien.

Die Massen der Planeten, die keine Monde haben, können auf Grund anderer Rechnungen mit der Sonnenmasse verglichen werden. Die Tabelle auf der letzten Seite enthält die betreffenden Resultate.

Das Newton'sche Gesetz und die fortgeschrittene Mathematik hat aber durch die Entdeckung des Neptun noch mehr geleistet

als die Bestimmung der Massen der Weltkörper. In der Bahn des Uranus zeigten sich bald nach dessen Auffindung durch William Herschel (1781) Abweichungen von der Ellipse, die sich aus Störungen durch die bekannten Planeten nicht erklären liessen. Leverrier vermutete ihre Ursache in einem noch nicht bekannten Planeten und berechnete aus den beobachteten Störungen dessen Bahnelemente sowie den Ort, wo er sich zur Zeit befinden müsse. Dann forderte er Galle in Berlin — der eines der besten Fernrohre besass — auf, den Störplaneten zu suchen. Galle fand ihn noch an demselben Abend, wo er den Brief erhielt, am 23. September 1846, nicht ganz 1° von der Stelle entfernt, die ihm Leverrier bezeichnet hatte.

Es ist kein Zweifel, dass auch die Bewegung der Doppelsterne nach dem Newton'schen Gesetz berechnet werden könnte, wenn wir an ihnen auch so genaue Beobachtungen machen könnten, wie an den Planeten.

§ 19. Fallbeschleunigung auf andern Weltkörpern.

Die Masse der Erde sei M , ihr Radius R . Die Masse eines andern Weltkörpers M_1 sein Radius R_1 , die Beschleunigung auf der Erde g , die auf dem andern Weltkörper g_1 .

Wegen der verschiedenen Massen, wird sich $g_1 : g$ verhalten wie $M_1 : M$ wegen der Verschiedenheit der Radien wie $\frac{1}{R_1^2} : \frac{1}{R^2}$, da Masse und Radien verschieden sind, haben wir

$$g_1 : g = \frac{M_1}{R_1^2} : \frac{M}{R^2}$$

für den Mars z. B. ist $M_1 = 0.11 M$, $R_1 = 0.529 R$ also

$$g_1 : g = 1 : \frac{0.11}{0.529^2} = 3.9 m.$$

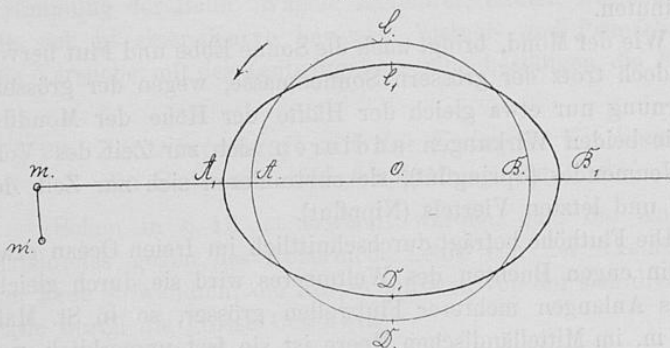
Aufgabe: Bestimme die Fallbeschleunigung auf der Sonne, dem Mond, dem Jupiter.

§ 20. Ebbe und Flut.

Die Anziehung zweier Körper ist gegenseitig. Nicht nur der Mond wird von der Erde angezogen, sondern ebenso die Erde vom Mond. Hieraus hat Newton das regelmässige wieder-

kehrende Steigen und Fallen des Meerwassers, die Ebbe und Flut, erklärt. In der Fig. 17 bedeute $ABCD$ den Äquator, O die normal zur Zeichenebene stehende Erdaxe, m den Mond.

Fig. 17.



Die Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt sei e , der Erdradius r , dann ist die Beschleunigung, welche der Mond den Punkten A, O, B der Erde erteilt,

$$\gamma_1 = f \frac{M}{(e-r)^2}, \gamma_2 = f \frac{M}{e^2}, \gamma_3 = f \frac{M}{(e+r)^2}$$

Die Beschleunigung des Punktes A gegen den Mond ist also grösser als die von O , die des Punktes B kleiner, da MO 60 Erdradien beträgt, so verhält sich

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{1}{59^2} : \frac{1}{60^2} = 60^2 : 59^2 = 1035 : 1,$$

γ_1 ist also um $3\frac{1}{2}\%$ grösser als γ_2 . Ist die Erde an den Punkten A und B mit Wasser bedeckt, so wird dieses in A steigen, während in B sich der Meeresboden stärker gegen den Mond hin bewegt als das Wasser, so dass dieses auch hier scheinbar steigt, von den Punkten C und C_1 fliesst es nach A und B ab, in C und C_1 sinkt der Meeresspiegel. Die Anschwellung in A und B heissen wir Flut, die Erniedrigung in C und C_1 Ebbe.

Aus der Zeichnung geht hervor, dass Ebbe an denjenigen Punkten der Erde stattfinden wird, für die der Mond auf- und untergeht, Flut an jenen, für welche er seine obere oder untere Kulmination erreicht. Wenn der Mond stillstünde, so würde jeder Ort zweimal des Tages Ebbe und zweimal Flut haben, da er

aber seine Stellung in der Richtung der Erdrotation verändert und am nächsten Tage z. B. in m_1 steht, so dauert es bis zur nächsten Kulmination um 50 Minuten mehr als 24 Stunden. Der Zeitunterschied zwischen zwei Fluten ist also 12 Stunden und 25 Minuten.

Wie der Mond, bringt auch die Sonne Ebbe und Flut hervor, die jedoch trotz der grössern Sonnenmasse, wegen der grössern Entfernung nur etwa gleich der Hälfte der Höhe der Mondflut ist. Die beiden Wirkungen addieren sich zur Zeit des Voll- und Neumondes (Springflut), sie subtrahieren sich zur Zeit des ersten und letzten Viertels (Nippflut).

Die Fluthöhe beträgt durchschnittlich im freien Ocean etwa 2 m, in engen Buchten des Weltmeeres wird sie durch gleichzeitiges Anlangen mehrerer Flutwellen grösser, so in St. Malo bis 16 m, im Mittelländischen Meere ist sie fast unmerklich, nur in den Buchten desselben (z. B. bei Venedig) steigt sie bis zu 1.3 m.

Ebenso wie auf das Wasser, wird der Mond natürlich auch auf die Luft, welche die Erde umgiebt, eine Anziehung üben und durch die Auflockerung der Luftmassen über A und B eine Erniedrigung des Barometerstandes zur Folge haben. Die Rechnung und die Beobachtungen von Liznar ergeben übereinstimmend, dass der Barometerstand durch die Mondflut um nur 0.122 mm erniedrigt wird, dies ist ein so geringer Einfluss, dass er nicht im entferntesten ausreicht, um irgend eine Wirkung des Mondes auf die Witterung zu erklären.

§ 21. Zentrifugalkraft.

In § 15 haben wir gesehen, wie Huyghens gezeigt hat, dass ein Körper, der mit der Geschwindigkeit c im Kreis vom Radius r sich bewegt, das Bestreben hat, sich mit der Beschleunigung:

$$\gamma = \frac{c^2}{r} = 4\pi^2 \frac{r}{T^2}$$

und wenn seine Masse m ist, mit der Kraft:

$$k = \frac{m c^2}{r} = 4\pi^2 \frac{m r}{T^2}$$

vom Mittelpunkt des Kreises zu entfernen, denn er muss mit dieser Beschleunigung, resp. dieser Kraft zum Mittelpunkt

hingezogen werden, um auf dem Kreise zu bleiben. Diese Kraft spürt man, wenn man einen Körper, der an einem Faden angebunden ist, im Kreise schwingt. Sie wächst, wie die Formel zeigt, mit der Masse, mit dem Quadrat der Geschwindigkeit und mit der Krümmung der Bahn. Wagen, Radfahrer, Läufer, Eisenbahnzug, die sich in einer Kurve bewegen, Vizinal- und Primärbahnen. Die Versuche mit der Zentrifugalmaschine bestätigen die Formel.

§ 22. Zentrifugalkraft auf der Erde, ihr Einfluss auf die Schwere und Abplattung der Erde.

Schon in § 13 ist erwähnt worden, dass die Anhänger Aristoteles' gegen des Kopernicus Lehre von der Axendrehung der Erde einwandten, die Körper müssten von der sich drehenden Erde durch die grosse Geschwindigkeit fortgeschleudert werden. Mit Hilfe der Huyghens'schen Formel lässt sich nun die Beschleunigung der infolge der Axendrehung der Erde auf die Körper an der Erdoberfläche ausgeübten Zentrifugalkraft bestimmen. Die Beschleunigung der Zentrifugalkraft am Äquator (Fig. 18) ist

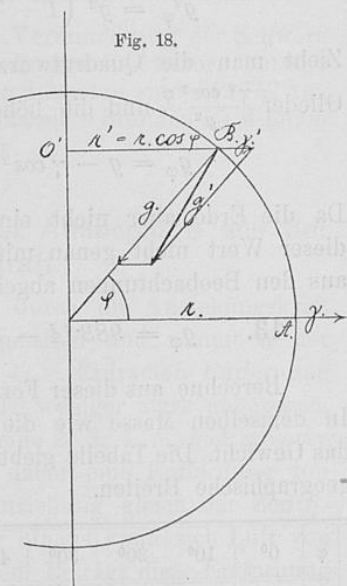
$$\gamma = 4\pi^2 \frac{r}{T^2} = 4\pi^2 \frac{636\,670\,000}{86\,164^2} = 3.4 \text{ cm/Sek.}^2$$

Die Beschleunigung der Zentrifugalkraft in der geographischen Breite φ ist

$$\gamma^1 = 4\pi^2 \frac{r_1}{T^2} = 4\pi^2 \frac{r}{T^2} \cos \varphi = 3.4 \cos \varphi \text{ cm/Sek.}^2$$

Am Äquator wirkt die Zentrifugalbeschleunigung der Schwere direkt entgegen. Wenn wir demnach die allein von der Anziehung der Erde herrührende Beschleunigung eines Körpers g nennen, so ist die am Äquator wirklich beobachtete Beschleunigung

$$g_0 = g - 3.4 \text{ cm/Sek.}^2$$



In der geographischen Breite φ wirkt die Zentrifugalbeschleunigung vom Mittelpunkt O^1 des Parallelkreises fort, die Anziehung der Erde nach dem Mittelpunkt O der Erde. Dort geben diese beiden Beschleunigungen g und $\gamma^1 = \gamma \cos \varphi$ eine Resultierende die nicht nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet ist und als Diagonale eines Parallelogrammes berechnet werden kann:

$$g_{\varphi}^2 = g^2 + (\gamma \cos \varphi)^2 - 2 g \gamma \cos^2 \varphi = \\ = g^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 \cos^2 \varphi}{g^2} - 2 \frac{\gamma \cos^2 \varphi}{g} \right).$$

Wenn man den Bruch $\frac{\gamma^2 \cos^2 \varphi}{g^2}$ als sehr klein gegenüber den andern Ausdrücken fortlässt, hat man

$$g_{\varphi}^2 = g^2 \left(1 - \frac{2 \gamma \cos^2 \varphi}{g} \right)$$

Zieht man die Quadratwurzel und lässt auch in dieser die Glieder $\frac{\gamma^2 \cos^2 \varphi}{g^2}$ und die höhern Potenzen fort, so ergibt sich

$$g_{\varphi} = g - \gamma \cos^2 \varphi = g - 3.4 \cos^2 \varphi$$

Da die Erde aber nicht eine vollkommene Kugel ist, stimmt dieser Wert nicht genau mit den Beobachtungen überein. Die aus den Beobachtungen abgeleitete Formel lautet

$$13. \quad g_{\varphi} = 983.14 - 5.09 \cos^2 \varphi$$

Berechne aus dieser Formel die Schwere für Hermannstadt. In demselben Masse wie die Beschleunigung ändert sich auch das Gewicht. Die Tabelle gibt die Werte von g für verschiedene geographische Breiten.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
g	978.1	978.2	978.7	979.3	980.2	981.1	981.9	982.6	983.0	983.2

Man erkennt, dass die Differenz von g_{90} und g_0 5.1 also rund $\frac{1}{2}\%$ beträgt. Zum erstenmal wurde die Verschiedenheit der Schwere im Jahre 1671 von Richer beobachtet (Ausführlicheres hierüber beim Pendel).

Eine Folge der Zentrifugalkraft ist die Abplattung der Erde an den Polen (Versuch Plateaus). Die Abplattung wurde von Huyghens und von Newton berechnet*) und durch spätere Gradmessungen bestätigt. Die von der französischen Akademie veranlassten, durch Bouguer und Condamine in Peru, durch Maupertuis und Clairault in Lappland ausgeführten, im Jahre 1742 vollendeten Messungen ergaben für einen Grad im Süden 57 097 Toisen, im Norden 56 960 Toisen. Auf Grund dieser und späterer Gradmessungen berechnete Bessel, dass die Gestalt der Erde die eines an den Polen abgeplatteten Rotationsellipsoides sei. Die Resultate seiner Rechnung finden sich in der Tabelle auf der letzten Seite.

Wirkung der Zentrifugalkraft auf andern Planeten. Grössere Abplattung des Jupiter $\frac{1}{16}$ und Saturn $\frac{1}{8}$, Ringe des letztern.

Aufgabe: Berechne wieviel die Verminderung der Schwere vom Pol bis zum Äquator auf dem Jupiter und Saturn beträgt. Die Äquatorialdurchmesser der beiden Planeten sind 143 757 km, beziehungsweise 119 075 km, die Rotationszeit 9 Stunden 55 Minuten beziehungsweise 10 Stunden 14 Minuten.

§ 23. Berechnung der Höhe der Atmosphäre aus der Zentrifugalkraft.

Die atmosphärische Luft wird durch die Anziehungskraft der Erde in deren Umgebung festgehalten und nimmt an der Rotation teil. Luftmoleküle in 2, 3, 4 ... Erdradien Entfernung werden von der Erde 4, 9, 16 ... -mal weniger stark angezogen, als auf der Oberfläche, besitzen aber eine 2, 3, 4 ... -mal grössere Zentrifugalkraft als diese. Es wird daher eine Entfernung von der Erdoberfläche geben, wo die Anziehung gleich der Zentrifugalkraft ist, über diese Entfernung hinaus kann sich Luft von merklicher Dichte nicht mehr befinden. Beträgt diese Entfernung x Erdradien, so ist hier die Beschleunigung der Schwere $\frac{g}{x^2}$, die Beschleunigung der Zentrifugalkraft $4\pi^2 \frac{xr}{T^2}$, wir haben daher zur Berechnung von x die Gleichung:

*) Sie fanden auf Grund der Formeln für die Zentrifugalkraft, dass die Abplattung $\frac{a-b}{a}$ wenigstens $\frac{1}{537}$, höchstens $\frac{1}{299}$ betragen könne.

$$\frac{g}{x^2} = 4\pi^2 \frac{xr}{T^2} \text{ und daraus } x = \sqrt[3]{\frac{g T^2}{4\pi^2 r}} \text{ Erdradien,}$$

$$\text{in Zahlen } x = \sqrt[3]{\frac{981 \cdot 86164^2}{4\pi^2 \cdot 6366700}} = 6.6 \text{ Erdradien.}$$

Die Luftschichte, welche an der Erdumdrehung teil hat, kann demnach nicht mehr als 5.6 Erdradien oder 35 650 km sein.

§ 24. Beharrung der freien Axe.

Wenn ein vollkommen symmetrischer Körper um seine Symmetrieaxe rotiert, besitzen symmetrisch gelegene Punkte gleiche Zentrifugalkräfte, der durch dieselben auf die Axe ausgeübte Zug hebt sich auf, sodass diese nach keiner Seite hin einen Zwang erleidet. Eine solche Axe nennen wir frei, sie behält ihre Lage im Raum bei, falls nicht etwa von aussen Kräfte auf den Körper wirken. Ein Beispiel dafür bietet ein in sehr rascher Drehung begriffener Kreisel, dessen Axe senkrecht auf

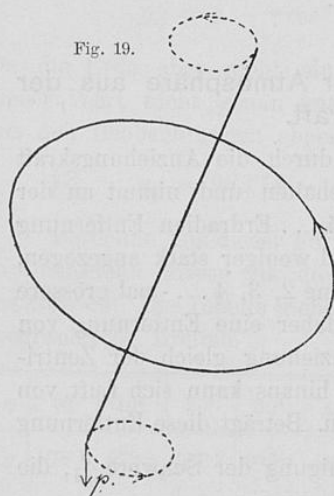


Fig. 19.

einer glatten Unterlage steht. Versucht man es, der Axe eine andere Stellung zu geben, so spürt man deutlich den Widerstand, den sie leistet. Ein weiteres Beispiel bietet ein Versuch mit dem Bohnenberger'schen Rotationsapparat, dessen

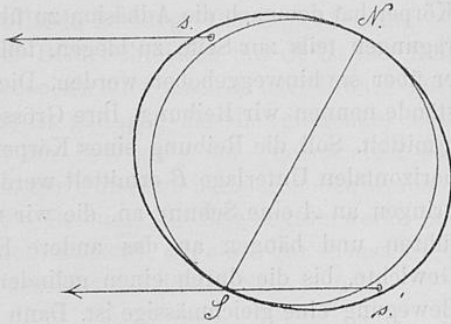
Kreisel in cardanischen Ringen drehbar ist. Geben wir der Axe dieses Apparates irgend eine Stellung gegen den Horizont und versetzen den Kreisel in Drehung, so behält sie unverändert ihre Lage im Raume bei.

Sucht dagegen eine verhältnismässig kleine Kraft die schief gestellte Axe aufzurichten, was bei

Bohnenbergers Apparat dadurch erreicht werden kann, dass an den die Axe tragenden Ring unten ein kleines Gewicht p angesetzt wird, so folgt die Axe nicht unmittelbar dieser Kraft, sondern beschreibt im Sinne der in der Fig. 19 angedeuteten

Pfeile einen Kegel. Die Erde besitzt eine freie Axe, die daher bei dem Lauf um die Sonne in nahezu paralleler Lage bleibt. Hieraus erklärt sich der regelmässige Wechsel der Jahreszeiten. Da die Erde aber nicht eine Kugel, sondern ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist, wird die Anziehung der Sonne auf den in der Figur besonders hervorgehobenen Wulst $s s^1$, der die Erde von der Kugelgestalt unterscheidet, die Tendenz haben, die Erdaxe aufzustellen. In Fig. 20 ist die Erde zur Zeit des Wintersolstitiums dargestellt, die Sonne hat man sich in der Richtung der Pfeile in 20 Millionen Meilen Entfernung zu denken. Ihre Anziehung auf den Wulst s ist grösser als auf s^1 , wir haben also dieselben Verhältnisse wie in Fig. 19 beim Bohnenbergerischen Kreisel, demnach auch denselben Effekt, die Erdaxe beschreibt in etwa 25 800 Jahren einen Kegel, in einem Jahr einen Bogen von $50.26''$, was wir an dem Vorücken des Frühlingspunktes erkennen.

Fig. 20.



§ 25. Bewegungshindernisse.

Wir haben bisher die Bewegungen unter der Voraussetzung betrachtet, dass ihnen kein Hindernis im Wege steht und sind zu Resultaten gelangt, die mit dem Versuch und der Erfahrung nicht vollkommen übereinstimmen, weil kein Körper auf der Erde sich völlig frei bewegen kann. Immer ist die Reibung und der Luftwiderstand zu überwinden. Nur die Weltkörper befinden sich in einem Mittel, welches ihrer Bewegung ein so geringes Hindernis entgegenstellt, dass trotz der jahrhundertlangen Beobachtung eine Abnahme ihrer Geschwindigkeit nicht festgestellt werden konnte. Im folgenden sollen die Hindernisse der Bewegung, die Reibung und der Luftwiderstand betrachtet werden.

a) Reibung.

Gleitende Reibung. Gleitet ein Körper über einen andern hin, so haften die sich berührenden Teile durch Adhäsion an einander, auch die Hervorragungen der beiden Körper greifen gleichsam wie die Zähne eines Rades in einander. Der gleitende Körper hat demnach die Adhäsion zu überwinden und die Hervorragungen teils zur Seite zu biegen, teils abzurechnen, teils muss er über sie hinweggehoben werden. Die Gesamtheit dieser Widerstände nennen wir Reibung. Ihre Grösse wird durch den Versuch ermittelt. Soll die Reibung eines Körpers A auf einer gegebenen horizontalen Unterlage B ermittelt werden, so legen wir A auf B , bringen an A eine Schnur an, die wir wagerecht über eine Rolle führen und hängen an das andere Ende der Schnur so lange Gewichte, bis die durch einen gelinden Stoss auf A eingeleitete Bewegung eine gleichmässige ist. Dann ist die durch die Gewichte ausgeübte Kraft gerade ausreichend, das Bewegungshindernis zu überwinden. Ist das Gewicht des bewegten Körpers P , das bewegende Gewicht p so ist $\frac{p}{P}$ der Reibungskoeffizient ρ .

Der Reibungskoeffizient giebt demnach an, den wievielten Teil der Last die zur Überwindung der Reibung erforderliche Kraft beträgt.

Die Versuche ergeben folgendes:

1. Die Reibung ist abhängig von der Natur der reibenden Körper. Sie ist umso grösser je rauher und weicher die Körper sind, durch Polieren und Schmieren wird sie geringer.
2. Sie wächst proportional mit dem Druck, denn bei grösserem Druck dringen die Unebenheiten tiefer in einander.
3. Sie ist bei gleichem Druck — vorausgesetzt, dass eine Deformation der Berührungsflächen nicht eintritt — unabhängig von der Grösse der Berührungsflächen, denn in demselben Verhältnis wie die Berührungsfläche grösser wird, wird der Druck auf die Flächeneinheit vermindert.
4. Sie ist grösser beim Übergang aus der Ruhe in die Bewegung als während der Bewegung, denn im erstern Falle hat die bewegende Kraft noch die Aufgabe, dem Körper eine Geschwindigkeit zu erteilen. Die folgende Tabelle enthält einige Reibungskoeffizienten:

		von der Ruhe aus	in der Bewegung
Holz	auf Holz ungeschmiert	0·50	0·34
»	» » geschmiert mit Schmalz	0·21	0·07
Metall	» Metall ungeschmiert	0·18	0·18
»	» » geschmiert mit Öl	0·12	0·07

Zapfenreibung und rollende Reibung. Die Zapfenreibung ist eine Art gleitender Reibung. Beim Schmieren mit Öl ist der Reibungskoeffizient für Schmiedeeisen auf Gusseisen oder Bronze 0·07.

Die rollende Reibung ist geringer als die gleitende, weil hier schon durch die Art der Bewegung die Unebenheiten des bewegten Körpers aus denen der Unterlage herausgehoben werden. Der Koeffizient der gesamten Reibung für Strassenfuhrwerke beträgt auf einer guten Asphaltstrasse 0·01, auf einer gut chaussierten Strasse 0·016—0·023, auf schlecht gehaltener Strasse 0·05.

b) Widerstand des Mittels.

Bewegt sich ein Körper von prismatischer Gestalt mit der Geschwindigkeit c , so muss er — wenn sein Querschnitt normal zur Bewegungsrichtung q ist — die Menge $q \cdot c$ des Mittels mit der Geschwindigkeit c vor sich hertreiben, wird seine Geschwindigkeit $2c$, so muss er die Menge $q \cdot 2c$ des Mittels mit der Geschwindigkeit $2c$ vor sich hertreiben. Im letztern Falle ist offenbar die hiezu erforderliche Leistung 4-mal so gross als im erstern. Der Widerstand des Mittels ist also proportional dem grössten zur Bewegungsrichtung normalen Querschnitt, der Dichte des Mittels und dem Quadrate der Geschwindigkeit. Er ist sehr abhängig von der Form des Körpers und natürlich bei spitz zulaufenden Körpern geringer als bei flachen. Dies Gesetz ist von Newton zuerst mathematisch abgeleitet, auch ist von ihm die Verschiedenheit des Widerstandes bei verschiedenen Körperformen berechnet worden.

Neuere Versuche (Bashforth London 1870) mit Langgeschossen von 220—475 m Geschwindigkeit ergaben, dass der Luftwiderstand der dritten Potenz der Geschwindigkeit proportional sei, dass aber für grosse Geschwindigkeitsänderungen sich kein Gesetz finden lasse.

Bei Eisenbahnzügen ist erfahrungsgemäss der Widerstand für jede Tonne Zugsgewicht durchschnittlich gleich $2.5 + 0.001 c^2$ kg, wenn c die Zuggeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde bedeutet. Man erkennt hieraus, dass zu dem Reibungswiderstand ein vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängiger Luftwiderstand hinzukommt.

Es wäre eine einseitige Betrachtung, wenn Reibung und Luftwiderstand bloss als Hindernisse der Bewegung angesehen würden, denn sie sind nötig zur Erzeugung vieler Bewegungen. Die Reibung unserer Füsse am Boden macht uns das Gehen möglich, die Reibung der Riemen am Schwungrad und den Transmissionen versetzt die Maschinen einer Fabrik in Thätigkeit, die Reibung der Lokomotivräder auf den Schienen lässt die Lokomotive den Widerstand überwinden, den die Wagen der Bewegung entgegensetzen u. s. f. Der Widerstand des Mittels macht es möglich, einen Kahn durch Rudern, das Schiff durch die Schraube zu bewegen, er ermöglicht den Vögeln das Fliegen, den Fischen das Schwimmen.

Aufgaben über die Reibung: 1. Welche Kraft ist nötig, um einen Schlitten von 600 kg Gewicht auf einer wagrechten Eisbahn (Reibungskoeffizient $\frac{1}{20}$) fortzuziehen? 2. Welche Kraft ist nötig, um einen Lastwagen von 2 Tonnen Gewicht auf wagrechter guter Strasse zu bewegen (Reibungskoeffizient 0.016)? 3. Wie gross muss die Zugkraft einer Lokomotive sein, wenn sie einen Güterzug von 300 Tonnen Gewicht mit 20 km Geschwindigkeit in der Stunde fortziehen soll? 4. Ein Personenzug von 200 Tonnen Gewicht und 14 m Geschwindigkeit bleibt, wenn der Dampf abgesperrt wird, nach 600 m stehen. Wie gross ist die durch die Widerstände herbeigeführte Verzögerung und wie gross sind die Widerstände selbst? 5. Die Widerstände einer Güterzugslokomotive betragen bei 15 km Geschwindigkeit 8% , das Gewicht der Lokomotive 38.5 Tonnen; welche Last kann die Lokomotive auf wagrechter Bahn befördern, wenn die Reibungswiderstände der Lastwagen 1.8% betragen?

§ 26. Arbeit, Effekt.

Zur Hebung eines Gewichtes von 1 kg auf 1 m Höhe ist eine Kraftäusserung nötig. Die Wirkung, welche diese hervor gebracht hat — bestehend in dem gehobenen Gewicht — kann

wieder Ursache einer Kraftäusserung werden, denn wenn das Gewicht sich von seiner Höhe herabbewegt, kann es auf jedem Punkte seines Weges einen Widerstand von 1 kg überwinden.

Wir brauchen uns nur etwa vorzustellen, dass das Gewicht an dem Kraftseil einer Rolle zieht, an dessen anderem Ende eine Last von ebenfalls einem Kilogramm hängt. Wenn die Reibung durch ein Übergewicht kompensiert und durch einen gelinden Stoss eine Bewegung eingeleitet wird, so zieht das herabgleitende Gewicht die Last hinauf. Oder wir denken uns das Kilogramm als treibendes Gewicht einer Pendeluhr, es wird dann während des Herabgleitens von seiner Höhe fortwährend den Druck von 1 kg auf das Räderwerk übertragen.

Wird das Gewicht 2 m hoch gehoben, so vermag es beim Herabgleiten auf einem Wege von 2 m den Druck oder Zug von 1 kg auszuüben. Trotzdem wir es in beiden Fällen mit der gleichen Kraft zu thun haben, sind doch die Kräfte bezüglich ihrer Leistungen mechanisch nicht gleichwertig.

Die Verschiedenheit der Leistung kommt offenbar in dem Produkte Kraft mal Weg zum Ausdruck. Man nennt dieses Produkt Arbeit und versteht demnach unter Arbeit die Überwindung eines Widerstandes auf jedem Punkte eines gewissen Weges oder da zur Überwindung eines Widerstandes eine gleich grosse Kraft erforderlich ist, Betätigung einer Kraft auf jedem Punkte eines gewissen Weges.

Als Einheit der Arbeit ist diejenige festgesetzt, welche geleistet wird, wenn ein Widerstand von 1 kg auf einem Wege von 1 m überwunden wird. Man nennt sie Meterkilogramm (mkg).

Die Arbeit A der Kraft k auf dem Wege s ist demnach gleich dem Produkte aus Kraft mal Weg.

14. $A = k \cdot s$ Meterkilogramm.

Zur Beurteilung der Leistung einer Kraft wird es aber notwendig sein, auch eine Zeitbestimmung hinzuzufügen.

Man nennt diejenige Arbeit, welche von einer Kraft in einer Sekunde geleistet wird, den Effekt der Kraft.

Wenn z. B. gesagt wird, der Effekt einer Kraft sei 80 mkg, so heisst das, die Kraft kann in einer Sekunde 80 mkg Arbeit leisten, also z. B. in einer Sekunde einen Widerstand von 80 kg auf einem Weg von 1 m, oder von 40 kg auf einem Weg von 2 m u. s. f. überwinden.

Bei grössern Arbeitsleistungen würden sich zu grosse Zahlen ergeben, wenn das Meterkilogramm in der Sekunde als Mass des Effektes beibehalten würde. In solchen Fällen wird die Leistung von 75 mkg in der Sekunde als Einheit des Effektes gewählt und mit dem Namen »Pferdekraft« bezeichnet, weil ein Pferd bei täglich 8-stündiger Arbeit durchschnittlich 75 mkg Arbeit in der Sekunde leistet. »Pferdekraft« bezeichnet also nicht eigentlich eine Kraft, sondern eine Arbeitsleistung von 75 mkg in der Sekunde. Wenn z. B. die Leistung einer Dampfmaschine 10 Pferdekraft beträgt, so ist damit gesagt, dass diese Maschine 750 mkg Arbeit in einer Sekunde verrichten kann.

Im absoluten Masssystem ist die Einheit der Arbeit jene Arbeit, welche 1 Dyne auf einem Weg von 1 cm leistet. Sie heisst Erg. Die Einheit des Effektes besitzt eine Kraft, wenn sie in einer Sekunde eine Arbeit von einem Erg leistet.

Da 1 kg = 981 000 Dynen ist, so ist ein Meterkilogramm gleich 98 100 000 Erg, eine Pferdekraft gleich $75 \times 98\,100\,000 = 736 \cdot 10^7$ Erg. Des leichtern Ausdrucks wegen nennt man 10^7 Erg ein Watt. Demnach ist eine Energie von einer Pferdekraft gleich 736 Watt.

Dimension der Arbeit:

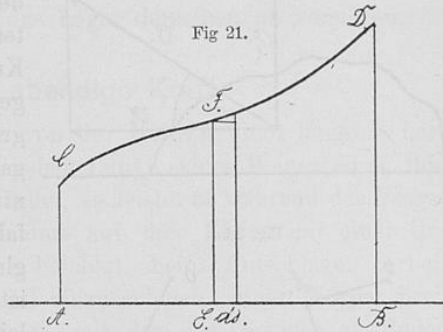
$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &= \text{Kraft} \times \text{Weg} = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2} \times \text{Länge} = \\ &= \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^2} \end{aligned}$$

Dimension der Energie:

$$\text{Energie} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^3}$$

Ist die Kraft nicht konstant während des Weges, so gelangen wir durch dieselbe Schlussweise zur Berechnung der Arbeit, wie in § 7 zur Berechnung des Weges. In Fig. 21 sei AB der Weg bei einer Bewegung, die Kurve CED stelle den Verlauf der

Kraft dar. Indem man annimmt, dass während eines unendlich kleinen Weges die Kraft konstant ist, ist die Arbeit auf diesem Wege gleich $F E \cdot ds$, sie wird also dargestellt durch die Fläche des über ds stehenden Rechteckes. Das gleiche gilt für alle andern unendlich kleinen Wegelemente, sodass die Arbeit während des ganzen Weges dargestellt wird durch die Summe aller unendlich kleinen Rechtecke. Beim Übergang zum wirklichen Kraftverlauf finden wir demnach, dass die Masszahl der Arbeit gleich der Masszahl der Fläche der Kraftkurve $CDBA$ ist. Die Fläche kann entweder berechnet oder gemessen werden. Indikation einer Dampfmaschine.



Aufgaben: 1. Die Wasserkraft für die Turbinen unseres Elektrizitätswerkes hat ein Gefälle von 30 m, eine Turbine verbraucht bei voller Leistung 0.9 m^3 in der Sekunde. Welches ist ihr absoluter Effekt in Pferdestärken? Welches ist ihre effektive Leistung, wenn der Wirkungsgrad 92 % beträgt? 2. Wieviel Pferdekkräfte sind nötig, um mittels einer Pumpe in jeder Minute 400 l Wasser aus einer Tiefe von 20 m zu heben, wenn die Hindernisse auf $\frac{1}{3}$ der Last geschätzt werden? 3. Ein Personenzug von 230 Tonnen Gewicht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 14 m. Der Widerstand beträgt $\frac{1}{100}$ der Last. Wie gross ist der Effekt der Lokomotive? 4. Ein Güterzug mit 20 Wägen (Gesamtgewicht 370 Tonnen) bewegt sich mit 20 km Geschwindigkeit in der Stunde (Widerstand 0.003). Welches ist der Effekt der Lokomotive? 5. Welches ist bei denselben Angaben der Effekt der Lokomotive, wenn sie auch eine Steigung von 10 % zu überwinden hat. 6. Mit welcher Geschwindigkeit kann eine Lokomotive von 700 Pferdekkräften einen Eilzug von 200 Tonnen Gewicht bewegen, wenn der Widerstand $\frac{1}{100}$ der Last beträgt? 7. Wie gross ist der Effekt einer Dampfmaschine von 60 Touren in der Minute, wenn der Durchmesser des Kolbens 60 cm, die Dampfspannung 5 Atmosphären und der Kolbenhub 50 cm beträgt. 8. Wie gross ist der Effekt einer gleichen Maschine, wenn die Spannung des Dampfes von 5 Atmosphären bis 2 Atmosphären gleichmässig abnimmt?

Albrich, Die Lehre von der Bewegung fester Körper.

4

§ 27. Berechnung der Arbeit, wenn die Krafrichtung mit der Bewegungsrichtung nicht übereinstimmt.

Fig. 22.

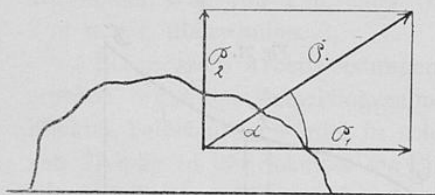
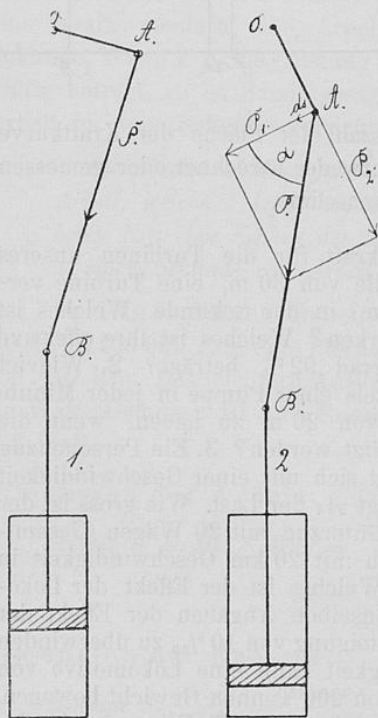


Fig. 23.



Wenn an einem Körper, der sich auf horizontaler Unterlage bewegt (Fig. 22), die Kraft P unter dem Winkel α gegen die Horizontale angreift, so leistet nicht die ganze Kraft Arbeit, sondern nur die in die Wegrichtung fallende Komponente P_1 , die gleich $P \cdot \cos \alpha$ ist. Demnach ist die auf dem Wege s geleistete Arbeit $P \cos \alpha \cdot s$.

Bilden also Kraft- und Wegrichtung den Winkel α , so ist die von der Kraft P auf dem Wege s geleistete Arbeit $P \cdot s \cdot \cos \alpha$.

Dieser Fall ist bei vielen Maschinen zu berücksichtigen. Ist z. B. Fig. 23, 1 diejenige Stellung einer Dampfmaschine, in der die Pleuelstange AB und die Kurbel OA einen rechten Winkel bilden, P die Kraft des Dampfes, so stimmt für den nächsten Augenblick die Kraft- und Bewegungsrichtung überein und die auf dem nächsten unendlich kleinen Weg ds geleistete Arbeit ist $P \cdot ds$.

In Stellung 2 dagegen bildet die Bewegungsrichtung ds (Tangente an den Kreis, welchen das Kurbelende A beschreibt), und Krafrichtung P (augenblickliche Stellung AB der Pleuelstange) einen Winkel α . Von den beiden Komponenten $P_1 = P \cos \alpha$

und $P_2 = P \sin \alpha$, in welche die Dampfkraft zerlegt werden kann, leistet nur die Komponente P_1 Arbeit und zwar ist die auf dem nächsten unendlich kleinen Wege ds geleistete Arbeit $P ds \cos \alpha$, die andere Komponente P_2 übt einen Zug an der Kurbelaxe O aus und hat die Tendenz, das Lager derselben zu zerstören.

§ 28. Lebendige Kraft.

Wenn ein Gewicht p von der Höhe h nicht langsam heruntergleitet, indem es auf jedem Punkt seines Weges einen ihm gleichen Widerstand überwindet, so leistet es während des Weges h keine Arbeit, aber es kommt auf dem Boden mit einer Geschwindigkeit v an, die es befähigt, beim Aufschlagen Arbeit zu leisten, etwa einen Nagel einzuschlagen, einen Körper breit zu drücken u. s. w. Die Kraft, mit der das Gewicht zu Boden gezogen wurde, hat hier die Wirkung hervorgebracht, der bewegten Masse eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen.

Wenn ein stehender Eisenbahnzug von der Masse m seine normale Geschwindigkeit v erreichen soll, so hat die Dampfkraft auf dem Wege, den der Zug bis zur Erreichung dieser Geschwindigkeit zurücklegt, ausser der Überwindung der Reibung und des Luftwiderstandes auch die Leistung zu vollbringen, dass er dem Eisenbahnzug die Geschwindigkeit v erteilt. Das Gleiche gilt für alle Maschinen im Anlauf.

Im folgenden sollen die zwei hier in Betracht kommenden Fragen beantwortet werden:

1. Welche Arbeit ist nötig, um einem Körper von der Masse m die Geschwindigkeit v zu erteilen?

Hierbei nehmen wir erstens auf die Bewegungshindernisse keine Rücksicht, sodass wir nur die Arbeit berechnen, die zur Erteilung der Geschwindigkeit erforderlich ist, zweitens, dass die Geschwindigkeit gleichmässig wächst von 0 bis v , dann wird die Kraft eine konstante sein.

Die Arbeit kann dann berechnet werden nach der Formel

$$A = k \cdot s.$$

Wenn es t Sekunden dauert, bis der Körper die Geschwindigkeit v erlangt, so ist die Beschleunigung $a = \frac{v}{t}$, demnach die Kraft $k = m \frac{v}{t}$, der Weg $s = \frac{vt}{2}$.

4*

Hieraus ergibt sich:

$$A = k \cdot s = \frac{mv}{t} \cdot \frac{vt}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Diese Formel zeigt zunächst, dass die aufgewendete Arbeit nicht abhängig ist von der Zeit, die zur Erlangung der Geschwindigkeit v erforderlich ist.

Ein Eisenbahnzug von 100 Tonnen Gewicht soll eine Geschwindigkeit von 12 m erhalten, welche Arbeit muss hiezu aufgewendet werden?

$$A = \frac{mv^2}{2} = \frac{10\,000 \cdot 144}{2} = 720\,000 \text{ mkg.}$$

2. Welche Arbeit leistet ein Körper von der Masse m und der Geschwindigkeit v , bis er seine Bewegung verliert?

Auch diese Frage soll unter der Voraussetzung beantwortet werden, dass die Abnahme der Geschwindigkeit gleichmässig erfolge, was dann der Fall sein wird, wenn der Widerstand w konstant ist. Die Abnahme der Geschwindigkeit auf Null geschehe in der Zeit t_1 . Dann ist die Verzögerung der Bewegung $\frac{v}{t_1}$, der Widerstand w , der diese Verzögerung an der Masse m hervorbringt, $\frac{mv}{t_1}$, der Weg, den der Körper zurücklegt $\frac{vt_1}{2}$ und die von ihm geleistete Arbeit:

$$15. \quad A = w \cdot s = \frac{mv}{t_1} \cdot \frac{vt_1}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Dieses Resultat zeigt erstens, dass auch hier die Arbeit unabhängig von der Zeit ist, in der der Körper seine Geschwindigkeit verliert und zweitens, da der Ausdruck identisch ist mit dem vorhin erhaltenen:

Die Arbeit, welche ein Körper von der Masse m und der Geschwindigkeit v leistet, bis er seine Geschwindigkeit verliert, ist ebensogross als jene Arbeit, welche erforderlich war, um ihm diese Geschwindigkeit zu erteilen.

Weil diese Arbeit von dem Körper geleistet werden muss, wenn er zur Ruhe gelangen soll, nennt man sie »lebendige Kraft« und bezeichnet sie mit L . Der Ausdruck ist insoweit glücklich gewählt, als diese Arbeitsfähigkeit oder »Energie« dem Körper

so innewohnt, wie Leben einem organischen Körper. So wie jedes Leben nach Bethätigung ringt, so die lebendige Kraft nach Arbeitsleistung. Der Dampfhammer schlägt durch seine lebendige Kraft das Eisen breit, der Rammklotz schlägt die Piloten in das Erdreich, das Geschoss der Kanonen dringt in Festungswälle ein, zerstört Panzerplatten, das Schwungrad einer Dampfmaschine bewirkt infolge seiner lebendigen Kraft einen gleichmässigen Lauf der Räder u. s. w. Der Ausdruck »lebendige Kraft« ist insofern unpassend, weil er etwas als Kraft bezeichnet, was in der That Arbeit ist. Er wurde von Leibniz in die Physik eingeführt zur Bezeichnung des Produktes mv^2 dem physikalisch eine Bedeutung nicht zukommt. Einwandfrei ist die andere Bezeichnung für die lebendige Kraft »Energie der Bewegung« oder »kinetische Energie.«

Aufgaben: 1. Wie gross ist die lebendige Kraft der Kugel des Mannlicher-Gewehres? Geschossgewicht 15·8 g, Geschwindigkeit 620 m. 2. Die Stahlgranate der 9 cm Kanone, deren Gewicht 6·36 kg und deren Geschwindigkeit 440 m beträgt, durchschlägt eine 9 cm starke schmiedeeiserne Platte. Welchen Widerstand hat die Platte? 3. Wie gross muss der Widerstand eines Zuges von 300 Tonnen und 10 m Geschwindigkeit durch Bremsen gemacht werden, wenn er nach 500 m stehen bleiben soll? 4. Wie gross ist der Luftwiderstand der 9 cm Granate, wenn die Geschwindigkeit nach 100 Schritten (75 m) von 440 m auf 434 m vermindert wird? 5. Von 2000 bis 2500 Schritt sinkt die Geschwindigkeit von 294 m bis 275 m, wie gross ist jetzt der Luftwiderstand? Hat der Luftwiderstand sich mit dem Quadrat der Geschwindigkeit vermindert? 6. Wie weit geht ein Eilzug von 200 Tonnen Gewicht, 0·01 Widerstand und 25 m Geschwindigkeit, wenn nicht gebremst wird, infolge seiner lebendigen Kraft?

§ 29. Energie der Lage, Spannkraft.

In § 26 haben wir gesehen, dass ein Körper vom Gewicht p , der sich h Meter über der Erdoberfläche befindet, die Arbeit $p \cdot h$ Meterkilogramm leistet, wenn er bis zur Erde heruntersinkt. Fällt er herunter, so erlangt er die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ und dann ist seine lebendige Kraft $\frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh = ph$. Er leistet in diesem Falle beim Aufschlagen dieselbe Arbeit, wie vorher beim langsamen Heruntergleiten. Von einem Körper, dem ver-

möge seiner Lage eine Arbeitsfähigkeit innewohnt, sagen wir, er besitze Energie der Lage oder Spannkraft oder potentielle Energie, potentielle Energie im Gegensatz zur kinetischen Energie oder lebendigen Kraft, weil diese Arbeit nicht notwendig geleistet werden muss. Das Wasser eines Gebirgssees, eines hochgelegenen Reservoirs, der Wasserdampf der Wolken, ein hochgelegener Felsblock, das Gewicht einer aufgezogenen Uhr, der vom Dampf gehobene Eisenhammer, eine aufgezogene Uhrfeder, der gespannte Hahn eines Gewehres besitzen Energie der Lage. Es bedarf einer Auslösung dieser Energie — Aufziehen der Schleusse, Loslösen des Dampfhammers, Antreiben des Pendels, Losdrücken des Hahnes — damit diese Energie Arbeit leistet.

§ 30. Erhaltung der Energie bei einem Körper, der sich unter dem Einfluss der Schwere bewegt.

Wenn ein Körper vom Gewicht p auf die Höhe h gehoben wurde, so ist an ihm die Arbeit $p \cdot h$ Meterkilogramm geleistet worden. Diese Arbeit kann der Körper wieder leisten, wenn er auf der ganzen Strecke den Widerstand p überwindet, oder wenn er ohne Widerstand frei fällt, ist die am Fuss der Höhe erlangte lebendige Kraft auch gleich ph , aber auch beim Fall auf einer beliebigen Kurve ist, wie wir in § 8 gesehen haben, die Geschwindigkeit ebenso gross, als ob er frei gefallen wäre, demnach auch die lebendige Kraft dieselbe.

Die Arbeit also, welche durch Heben eines Körpers geleistet wurde, kann er wieder leisten, wenn er aus dieser Höhe in seine frühere Lage gelangt. Die geleistete Arbeit ist nur abhängig von der Höhendifferenz der Anfangs- und Endlage, nicht abhängig von dem Wege, den der Körper zurückgelegt hat.

Ebenso ist die Energie eines senkrecht aufwärts geworfenen Körpers konstant.

Im ersten Augenblick ist sie lebendige Kraft $\frac{m c^2}{2}$.

Zur Zeit t ist sie lebendige Kraft $\frac{m v^2}{2}$ und Energie der Lage ps und zwar ist, da $v = c - gt$, $s = ct - \frac{gt^2}{2}$ die gesamte Energie nach t Sekunden

$$E = \frac{m v^2}{2} + p \cdot s = \frac{m (c - g t)^2}{2} + m g \left(c t - \frac{g t^2}{2} \right) = \frac{m c^2}{2}.$$

Auf dem höchsten Punkte ist die Energie der Lage

$$E = p \cdot h = m g \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{m c^2}{2}.$$

Im Momente des Niederfallens wieder lebendige Kraft $\frac{m c^2}{2}$.

Die Betrachtungen in den § 26–29 über Arbeit, Energie und lebendige Kraft sind von Robert Mayer, Arzt in Heilbronn, in die Physik eingeführt worden, seine erste Abhandlung, »Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur«, der sich eine Reihe weiterer anschloss, erschien im Jahre 1842. Mit diesen Ausführungen ist eine ganz neue, das Wesen der Kräfte im Innersten erfassende Formulierung des Begriffes Kraft geschaffen worden. Die Kraft ist hiernach Arbeitsfähigkeit von bestimmt angebbarer Grösse, die nicht bloss von dem Druck, sondern auch von den räumlichen Verhältnissen abhängt. Eine Wassermenge von 1 m³ übt einen Druck von 1000 kg aus, ob sie einen oder 30 m über einem gegebenen Flussniveau sich befindet, aber ihre Energie ist im ersten Falle 1000, im zweiten 30 000 mkg. Die Feder einer Uhr übt nahe denselben Druck auf das Uhrwerk, ob sie ganz aufgezogen ist oder nicht, aber die Energie, welche sie an das Uhrwerk abgeben kann, ist in den beiden Fällen verschieden.

Von ebenso grosser Bedeutung sind Mayers Ausführungen über die Erhaltung der Energie, die wir, soweit sie sich auf die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss der Schwere beziehen, kennen gelernt haben.

Mayer hat in seiner zweiten Abhandlung »Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhang mit dem Stoffwechsel« das Prinzip der Erhaltung der Energie ganz allgemein begründet, indem er nachwies, dass die Energie wohl ihre Erscheinungsform ändert, dass aber überall, wo ein Quantum Bewegung verschwindet, eine andere Energie, Wärme, Licht, Elektrizität, dafür erscheint. Er hat das Resultat seiner Untersuchung in dem Satz zusammengefasst:

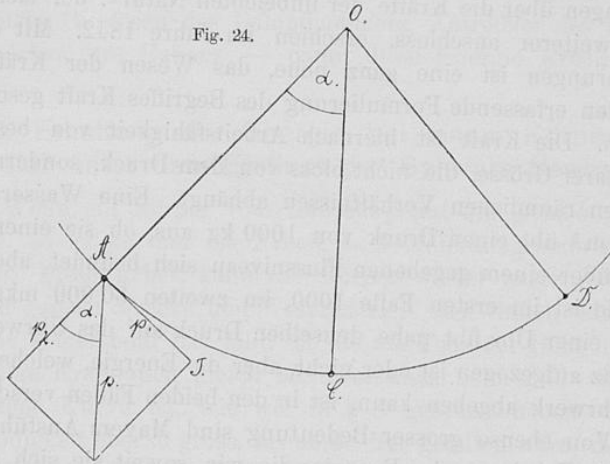
Bei allen physikalischen und chemischen Vorgängen bleibt die gegebene Kraft (wir müssen sagen Energie) eine konstante Grösse.

Wir werden bei der Behandlung der einzelnen physikalischen Disziplinen sehen, wie Mayer durch seine Untersuchungen der Begründer der modernen Physik geworden ist.

§ 31. Das mathematische Pendel

ist ein schwerer Punkt, der an einem gewichtslosen Faden aufgehängt, Schwingungen um einen festen Punkt ausführen kann. Annähernd kann eine an einem möglichst dünnen Faden aufgehängte nicht grosse Kugel als mathematisches Pendel angesehen

Fig. 24.



werden. Im folgenden sollen die Gesetze der Bewegung eines mathematischen Pendels festgestellt werden und zwar bestimmen wir 1. die Kraft, welche in den einzelnen Lagen des schweren Punktes bewegend wirkt und hieraus die Art der Bewegung, 2. die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Bahn, 3. die Zeit, welche zu einer Schwingung erforderlich ist (Schwingungszeit).

1. Der schwere Punkt werde in A (Fig. 24) losgelassen, sein Gewicht sei p , der Winkel von OA mit der Vertikalen α . Da sich der Punkt A nur in der Richtung der Tangente AT des Kreises bewegen kann, zerlegen wir das Gewicht p in die beiden Komponenten $p_1 = p \sin \alpha$ und $p_2 = p \cos \alpha$, von denen die erste in die Richtung der Bewegung fällt, also das Pendel beschleunigt, die zweite normal zur Bewegungsrichtung ist, den Faden spannt, zur Bewegung aber nichts beiträgt.

schwere Punkt die Strecke $AB = x$ zurückgelegt hat. Da keine Bewegungshindernisse zu überwinden sind, wird die in B erlangte lebendige Kraft gleich der Arbeit sein, die die bewegende Kraft auf dem Weg AB geleistet hat. Die Kraft in A ist ks , in B $k(s-x)$ in C Null. Die Kraftkurve verläuft also wie die Gerade EFC , demnach ist die von der bewegenden Kraft geleistete Arbeit durch das Trapez $ABFE$ gemessen und ist gleich:

$$\frac{ks + k(s-x)}{2} x = \frac{k(2s-x) \cdot x}{2},$$

diese Arbeit ist gleich der lebendigen Kraft $\frac{mv^2}{2}$ des Pendels, so dass wir haben:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(2s-x) \cdot x}{2} \text{ und } v = \sqrt{\frac{k}{m} (2s-x) \cdot x}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{(2s-x) \cdot x}$ besitzt eine leicht erkennbare geometrische Bedeutung.

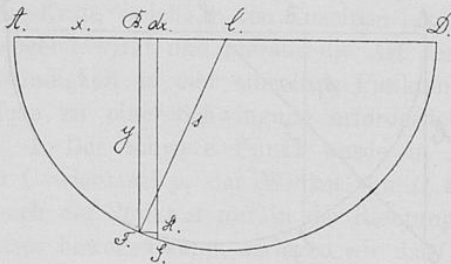
Wenn über AD ein Halbkreis gezeichnet und in B die Ordinate $y = BH$ errichtet wird, so ist

$BH^2 = y^2 = (2s-x) \cdot x$ und $y = \sqrt{(2s-x) \cdot x}$ demnach

$$16. v = y \sqrt{\frac{k}{m}} = y \sqrt{\frac{p}{ml}} = y \sqrt{\frac{mg}{ml}} = y \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Die Geschwindigkeit des schweren Punktes ändert sich also wie die Ordinate in dem über der Amplitude als Halbmesser beschriebenen Kreis.

Fig. 26.



3. Die wichtigste Frage ist jene nach der Schwingungszeit, d. h. der Zeit in der der schwere Punkt den Weg von A bis D zurücklegt (Fig. 26.)

Wir berechnen zuerst die unendlich kleine Zeit dt , in der das Pendel ein sehr kleines Stück dx dieses Weges zurücklegt,

weil wir während einer unendlich kleinen Zeit die Geschwindigkeit v als konstant ansehen und nach der Formel Geschwindigkeit $\times$ Zeit rechnen dürfen. Wir haben dann $dx = v dt$

also
$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{y \sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{dx}{y} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Zeit dt , für den nächsten unendlich kleinen Weg ist, da hier das y ein anderes ist: $\frac{dx}{y_1} \sqrt{\frac{l}{g}}$ u. s. f. Um die ganze Schwingungszeit zu erhalten, hätten wir alle diese Ausdrücke zu addieren. Diese haben aber ungleiche Nenner, es wäre zweckmässig, die Verschiedenheit in den Zähler zu verlegen. Dies gelingt durch Betrachtung der ähnlichen Dreiecke BFC und HFG , aus ihnen ergibt sich:

$$y : s = FH : FG$$

bezeichnen wir den unendlich kleinen Kreisbogen FG mit db , so erhalten wir, da $FH = dx$ ist:

$$y : s = dx : db \text{ und } dx = \frac{y \cdot db}{s}, \text{ hieraus}$$

$$dt = \frac{y \cdot db}{y \cdot s} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{db}{s} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die ganze Schwingungszeit t ist gleich der Summe aller dt , demnach

$$\begin{aligned} t &= \frac{db}{s} \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{db_1}{s} \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{db_2}{s} \sqrt{\frac{l}{g}} + \dots = \\ &= \frac{db + db_1 + db_2 + \dots}{s} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{s\pi}{s} \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$17. \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

als Schwingungszeit eines mathematischen Pendels von der Länge l .

Die Formel zeigt, dass die Schwingungszeit für kleine Schwingungen unabhängig von der Amplitude ist (Isochronismus der Pendelschwingungen), der Versuch bestätigt dies. Der Isochronismus ist schon 1583 von Galilei an den Schwingungen der Kronleuchter im Dom zu Pisa beobachtet werden.

Am selben Orte verhalten sich demnach die Schwingungszeiten zweier Pendel wie die Quadratwurzel aus ihren Längen:

$$t : t_1 = \sqrt{l} : \sqrt{l_1}.$$

Wenn also die Schwingungszeit eines Pendels 2, 3, ...-mal grösser werden soll, so muss seine Länge 4, 9, ...-mal grösser werden, denn dann verhält sich

$$t : t_1 : t_2 \dots = \sqrt{l} : \sqrt{4l} : \sqrt{9l} \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$$

für zwei gleich lange Pendel an verschiedenen Orten haben wir

$$t : t_1 = \sqrt{\frac{1}{g}} : \sqrt{\frac{1}{g_1}} = \sqrt{g_1} : \sqrt{g}.$$

§ 32. Das physische Pendel

besteht in seiner einfachsten Gestalt aus einer Stange, die mit einem linsenförmigen schweren Körper versehen ist und auf einer Schneide in einem geeigneten Lager schwingt. Die im vorigen § abgeleiteten Formeln gelten für das physische Pendel nicht mehr unmittelbar. Die Aufgabe, für ein solches die Schwingungszeit zu berechnen, ist allgemein nicht lösbar.

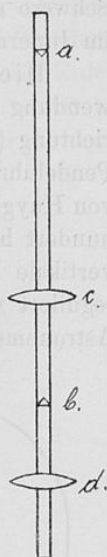
Ein physisches Pendel kann aus unzählig vielen mathematischen zusammengesetzt gedacht werden, indem man jedes Molekül desselben mit dem Aufhängepunkt durch eine starre Linie verbunden denkt. Jedem dieser gedachten mathematischen Pendel würde seine besondere Schwingungszeit zukommen, da sie aber alle fest miteinander verbunden sind, werden die kürzern die Schwingungszeit der längern beschleunigen, die längern die der kürzern verzögern. Es wird demnach einen Punkt am Pendel geben, der weder beschleunigt noch verzögert wird, er heisst der Schwingungspunkt, sein Abstand vom Aufhängepunkt die reduzierte Pendellänge, dieser Punkt schwingt gerade so, als ob er allein durch eine gewichtslose Linie mit dem Aufhängepunkt verbunden wäre.

Wenn nun auch die Aufgabe mathematisch nicht lösbar ist, den Schwingungspunkt eines physischen Pendels zu finden, so lässt sich doch durch Rechnung zeigen, dass dieser Punkt tiefer liegt, als der Schwerpunkt und dass die Schwingungszeit des Pendels sich nicht ändert, wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht.

Hierauf beruht eine Methode, ein physisches Pendel von bestimmter reduzierter Pendellänge z. B. 1 m herzustellen. Ein Pendel Fig. 27 ist mit zwei durch Mikrometer-

schrauben verschiebbaren Linsen *c*, *d* versehen und besitzt in einem Abstand von genau 1 m zwei Schneiden. Wenn man es durch Verschiebung der Linsen dahin gebracht hat, dass die Schwingungszeit des Pendels die gleiche ist, ob es in *a* oder *b* aufgehängt ist, so ist $ab = 1$ m die reduzierte Pendellänge und das Pendel schwingt dann genau so wie ein mathematisches von 1 m Länge. Ein so eingerichtetes Pendel heisst Reversionspendel.

Fig. 27.



Bestimmung von g mit dem Reversionspendel. Wenn das Reversionspendel, wie vorhin beschrieben wurde, justiert und seine Schwingungszeit bestimmt worden ist, so lässt sich aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ das g berechnen. Wir erhalten z. B. bei einem Versuch in Hermannstadt ($\varphi = 45^\circ 47.9'$) die Schwingungszeit $t = 1.0034$ Sekunden und hieraus $g = 980.2$ cm. Der genaue Wert wäre 980.7 cm. Warum ist dieser Wert nicht ganz genau, welche Korrektur wäre noch anzubringen? Diese Methode der Bestimmung von g ist bei Anbringung der nötigen Korrekturen sehr genau, denn die Pendellänge kann mit feinen Messapparaten bis auf 20-stel mm genau eingestellt und die Schwingungszeit durch Beobachtung einer grössern Anzahl von Schwingungen und Anwendung einer guten Uhr beliebig genau bestimmt werden.

Durch Pendelversuche ist der Einfluss der Axendrehung der Erde auf die Beschleunigung und die angenäherte Richtigkeit der in § aufgestellten Formel bewiesen worden. Doch ist diese Formel nicht genau, da die Erde nicht eine Kugel, sondern ein sehr unregelmässig gestalteter Körper ist, die aus den Pendelbeobachtungen sich ergebende Formel lautet:

$$g \varphi = 983.14 - 5.09 \cos^2 \varphi.$$

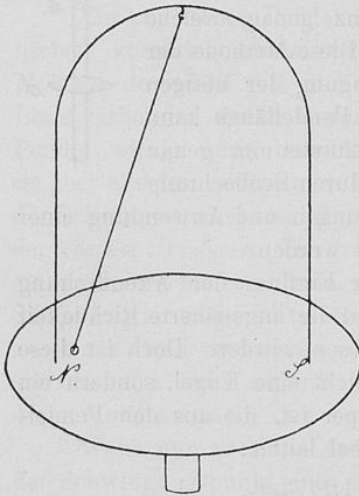
Die erste Beobachtung über die Verschiedenheit der Schwere an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche ist von Richer in Cayenne 1672 gemacht worden, als er dort im Auftrage der Pariser Akademie astronomische Beobachtungen machte. Er musste das Pendel der von Paris mitgebrachten Uhr um 1.25 Linien (2.8 mm) verkürzen, damit die Uhr in Cayenne richtig

ginge. Er sprach schon damals die Vermutung aus, dass die Schwere wegen der Axendrehung der Erde am Äquator geringer und dass vielleicht die Erde an den Polen abgeplattet sei.

Durch Pendelbeobachtungen wird ferner bestätigt, dass die Schwere auf den Bergen geringer ist, als im Thale, und ebenso im Innern der Erde geringer als an der Oberfläche.

Die Regulierung der Uhr ist die wichtigste Anwendung des Pendels. Huyghens ist als der Erfinder dieser Einrichtung (1657) zu bezeichnen, da eine von Galilei konstruierte Pendeluhr unbekannt geblieben war und erst auf die Nachricht von Huyghens Erfindung beschrieben wurde. Schon im 14. Jahrhundert hatte man Räderuhren, die durch Hemmungen (um eine vertikale Axe schwingende, mit Gewichten beschwerte Hebel) reguliert wurden, sie gingen aber sehr ungenau, sodass sich die Astronomen lieber der Sand- oder Wasseruhren zur genauen

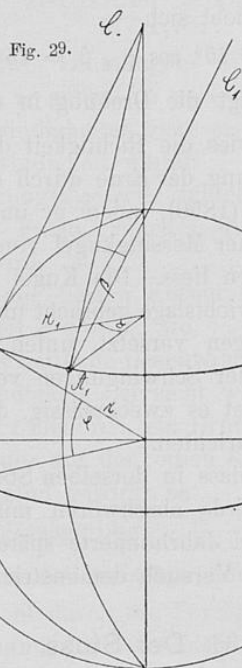
Fig. 28.



Ermittlung der Zeit bedienten. Tycho's Riesenuhr bedurfte täglicher Korrekturen. Die Regulierung der Uhr durch das Pendel erfolgt in der Art, dass das Pendel mit einem sogenannten Anker versehen wird, der in das Steigrad eingreift und bei jedem Hin- und Hergang das Steigrad um einen Zahn weiter gehen lässt, hiebei erhält es zugleich von dem Steigrad, das durch das Gewicht gedreht wird, einen Stoss, welcher ihm die lebendige Kraft wieder ersetzt, die es durch Reibung und Luftwiderstand verloren hat.

Beweis für die Axendrehung der Erde durch Foucaults Pendelversuch. Leon Foucault machte die Beobachtung, dass sich die Schwingungsebene eines Pendels nicht ändert, wenn der Aufhängepunkt gedreht wird. Ein einfacher Versuch zeigt dieses. Setzen wir das Gestell Fig. 28 auf die Schwungmaschine und lassen das Pendel nach der Richtung *ns* des Rahmens schwingen, so wird

bei der Drehung der Schwingmaschine der Rahmen sich um die unveränderte Schwingungsebene des Pendels drehen. Denken wir uns demnach ein Pendel direkt über dem Pol der Erde aufgehängt und seine anfängliche Schwingungsrichtung durch einen Strich auf dem Boden markiert, so wird nach dem soeben angestellten Versuch dieser Strich in einer Stunde um 15° , in zwei Stunden um 30° u. s. w. unter dem Pendel sich drehen, wenn die Erde sich in 24 Stunden um ihre Axe dreht.



Schwieriger ist die Betrachtung für einen andern Punkt der Erde. Ein Pendel werde am Punkt A der Erde, dessen geographische Breite φ sei, Fig. 29 in der Richtung des Meridians AC , die durch einen Strich auf dem Boden markiert wird, in Schwingungen versetzt. In einer Stunde sei A nach A_1 gekommen, dann ist die Schwingungsebene noch immer A_1C_1 , der Meridian hat seine Lage im Raum geändert, seine Richtung ist A_1C . Der Winkel $C_1A_1C = \beta$ soll bestimmt werden und zwar durch Rechnung und durch das Experiment.

Zum Zweck der Berechnung drücken wir den Bogen AA_1 einmal als Bogen im Kreis vom Radius r_1 und dann als Bogen im Kreisausschnitt des abgewickelten Kegelmantels AA_1C aus, dessen Seite $r \cot \varphi$ ist und erhalten

$$AA_1 = \frac{2r_1\pi\alpha}{360} = \frac{2r\pi\cos\varphi \cdot 15^\circ}{360}$$

und
$$AA_1 = \frac{2AC \cdot \pi \cdot \beta}{360} = \frac{2r\pi\cot\varphi \cdot \beta}{360}$$

durch Gleichsetzung ergibt sich

$$\beta \cdot \cot \varphi = 15^\circ \cos \varphi, \quad \beta = 15^\circ \cdot \sin \varphi.$$

Für Hermannstadt beträgt die Drehung in einer Stunde $10\frac{3}{4}^\circ$.

Leon Foucault bewies die Richtigkeit dieser Betrachtungen und damit die Axendrehung der Erde durch den berühmten nach ihm benannten Versuch (1850), indem er im Pantheon in Paris ein 11 m langes, mit einer Messingkugel von 5 kg Gewicht versehenes Pendel schwingen liess. Die Kugel wurde durch einen Faden aus der Gleichgewichtslage gebracht und durch Abbrennen desselben in Schwingungen versetzt, unten war sie mit einer Spitze zur Markierung der Schwingungen versehen. Wenn der Versuch gelingen soll, ist es zweckmässig, die Aufhängung des Pendels kardanisch einzurichten.

Es ist interessant, dass in derselben Stadt, wo Galilei 1633 die Axendrehung der Erde abschwören musste, in Rom, der Jesuitenpater Secchi zwei Jahrhunderte später dem Volk in der Ignatiuskirche Foucaults Versuch demonstrierte.

§ 33. Der Stoss.

Treffen zwei Körper mit ungleicher Geschwindigkeit zusammen, so wird eine Veränderung ihrer Geschwindigkeiten eintreten, da sie beim Stoss einen Druck auf einander ausüben. Der Stoss heisst gerade, wenn Stoss- und Bewegungsrichtung zusammenfällt, im andern Falle schief. Der Stoss ist zentral wenn die Stossrichtung durch die Schwerpunkte beider Körper geht, beim zentralen Stoss bleibt die Bewegung fortschreitend. Der Stoss ist exzentrisch, wenn die Stossrichtung nicht durch die Schwerpunkte der Körper geht, bei dem exzentrischen Stoss treten ausser der fortschreitenden noch drehende Bewegungen auf.

Die Mechanik hat die Frage zu beantworten, welches bei gegebenen Verhältnissen die Richtung und Grösse der neuen Geschwindigkeiten sein werden. Als die königliche Gesellschaft in London ihre Mitglieder im Jahre 1668 zur Lösung des Problems aufforderte, erfolgte dieselbe am vollständigsten durch Huyghens im Jahre 1669, schon Galilei hatte sich mit demselben beschäftigt, war aber nicht zur Lösung gelangt.

a) Gerader zentraler Stoss unelastischer Körper.

Lassen wir zwei Lehmkugeln in geradem zentralem Stoss aufeinander treffen, so gehen sie nach demselben, welches immer vorher ihre Geschwindigkeiten gewesen sein mögen, mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit weiter.

Diese Erfahrungsthatsache bildet die Grundlage für die Beantwortung der Frage, welches die Geschwindigkeit nach dem Stosse sein wird.

Die Massen der beiden Körper seien m und m_1 , die Anfangsgeschwindigkeit c und c_1 , wo $c > c_1$, sein möge, die zu berechnende gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse x . Bis diese Geschwindigkeit x erreicht wird, muss eine wenn auch noch so kurze Zeit t hiedurch, ein Druck p zwischen den Körpern bestanden haben, der auf den einen Körper verzögernd auf den andern beschleunigend gewirkt hat.

Grösse der Verzögerung $\frac{c-x}{t}$, Grösse der Beschleunigung $\frac{x-c_1}{t}$. Messen wir den zwischen den beiden Körpern bestanden Druck sowohl durch die Verzögerung des einen als auch durch die Beschleunigung des andern, so haben wir:

$$p = \frac{m(c-x)}{t}, \quad p = \frac{m_1(x-c_1)}{t}$$

demnach $m(c-x) = m_1(x-c_1)$ daraus

$$18. \quad x = \frac{mc + m_1c_1}{m + m_1}.$$

Besondere Fälle:

1. Sind die Massen der beiden Kugeln gleich, so wird die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoss gleich dem arithmetischen Mittel der Anfangsgeschwindigkeiten.

2. Sind auch die Geschwindigkeiten gleich aber entgegengerichtet, so wird $x = 0$.
3. Stösst eine Kugel von der Masse m und der Geschwindigkeit c gegen eine feste Wand, wo wir $m_1 = \infty$, $c_1 = 0$ zu setzen haben (jedoch erst dann, wenn in dem Ausdruck für x Zähler und Nenner durch m_1 dividiert worden ist) so wird $x = 0$.

Lebendige Kraft nach dem Stoss. Mit dem Stoss unelastischer Körper ist, wie die Rechnung zeigt, stets ein Verlust an lebendiger Kraft verbunden. Die Differenz der lebendigen Kräfte der beiden Kugeln vor und nach dem Stoss ist nämlich:

$$\frac{m c^2}{2} + \frac{m_1 c_1^2}{2} - \frac{m + m_1}{2} \cdot \left(\frac{m c + m_1 c_1}{m + m_1} \right)^2 = \frac{m m_1 (c - c_1)^2}{2 (m + m_1)}.$$

Da dieser Ausdruck stets positiv ist, so geht aus ihm hervor, dass die lebendige Kraft vor dem Stoss grösser ist, als nach demselben. Die hier verschwundene Energie der Bewegung hat die Form des Körpers geändert, Wärme erzeugt (die sich nachweisen lässt), Schallwellen erregt u. s. f. Mit Hilfe des ballistischen Pendels lässt sich nach obigen Formeln die Geschwindigkeit von Geschosskugeln bestimmen.

b) Gerader zentraler Stoss elastischer Körper.

Elastische Körper verhalten sich anfangs ebenso, wie unelastische, bis sie die gleiche Geschwindigkeit x erlangt haben. Behalten wir dieselben Bezeichnungen wie bei dem unelastischen Stosse bei, so verliert der erste Körper die Geschwindigkeit $c - x$, der zweite gewinnt an Geschwindigkeit $x - c_1$, sobald die Körper gleiche Geschwindigkeit erlangt haben, beginnt die Elastizität zu wirken und jeder der beiden Körper stellt seine frühere Gestalt wieder her, wobei der erste abermals $c - x$ an Geschwindigkeit verliert, der zweite $x - c_1$ gewinnt. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit der beiden Kugeln nach dem Stoss mit C und C_1 , so werden dieselben sein:

$$C = c - 2(c - x) = 2x - c$$

und

$$C_1 = c_1 + 2(x - c_1) = 2x - c_1$$

Setzen wir hier den in Punkt a dieses § für x erhaltenen Wert, so ergibt sich:

$$19. \quad C = \frac{2 m_1 c_1 + c (m - m_1)}{m + m_1} \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{2 m c + c_1 (m_1 - m)}{m + m_1}$$

Besondere Fälle:

1. Sind die Massen gleich, so wird $C = c_1$ und $C_1 = c$ d. h. die Kugeln tauschen beim Stoss ihre Geschwindigkeit aus. Versuch.
2. Stösst die Kugel von der Masse m und der Geschwindigkeit c gegen eine feste Wand, wo wir wieder $m_1 = \infty$, $c_1 = 0$ zu setzen haben, jedoch wieder erst dann, wenn in C Zähler und Nenner durch m_1 dividiert wurde, so erhalten wir $C = -c$, d. h. die Kugel wird mit entgegengesetzter Geschwindigkeit zurückgeworfen. Versuch.

Lebendige Kraft nach dem Stoss. Bei dem Stoss vollkommen elastischer Körper findet ein Verlust an lebendiger Kraft nicht statt. Die lebendige Kraft der beiden Kugeln nach dem Stoss ist

$$L = \frac{m [2 m_1 c_1 + c (m - m_1)]^2 + m_1 [2 m c + c_1 (m_1 - m)]^2}{2 (m + m_1)^2}$$

Da beim Erheben zum Quadrat die doppelten Produkte, als verschieden bezeichnet, wegfallen, wird

$$L = \frac{4 m m_1^2 c_1^2 + 4 m_1 m^2 c^2 + (m c^2 + m_1 c_1^2) (m^2 - 2 m m_1 + m_1^2)}{2 (m + m_1)^2},$$

endlich

$$L = \frac{(m c^2 + m_1 c_1^2) (m^2 + 2 m m_1 + m_1^2)}{2 (m + m_1)^2} = \frac{m c^2 + m_1 c_1^2}{2}.$$

c) Schiefer zentraler Stoss.

Stösst die Kugel A (Fig. 30) mit der Geschwindigkeit c , die mit der Stossrichtung den Winkel α bildet, gegen die ruhende B , so zerlegen wir die Geschwindigkeit c in die beiden Komponenten $c \cos \alpha$ und $c \sin \alpha$. Die letztere trägt zur Stosswirkung nichts bei und A behält diese Geschwindigkeit in derselben Richtung auch weiterhin bei. Die in der Stossrichtung liegende Komponente ändert sich und zwar tauschen die Kugeln, wenn sie elastisch

sind und gleiche Massen haben, ihre Geschwindigkeiten aus. B geht in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit $c \cdot \cos \alpha$ nach rechts, A geht mit der Geschwindigkeit $c \sin \alpha$, die sie behalten hat, nach aufwärts. Sind die

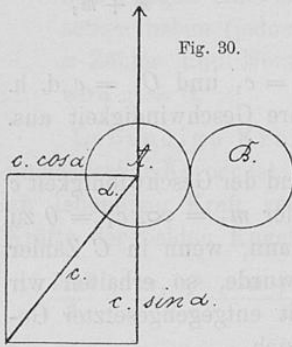


Fig. 30.

Kugeln unelastisch und haben gleiche Massen, so geht B mit der Geschwindigkeit $\frac{c \cos \alpha}{2}$ nach rechts, während A eine aus den Geschwindigkeiten $c \sin \alpha$ und $\frac{c \cos \alpha}{2}$ zusammengesetzte Geschwindigkeit haben wird.

Stösst die elastische Kugel A in derselben Richtung wie in Fig. 30 auf eine feste Wand, so wird die Komponente $c \cos \alpha$ beim Stoss in die entgegengerichtete umgewandelt und da die Geschwindigkeit $c \sin \alpha$ erhalten bleibt, so setzen sich die beiden Geschwindigkeiten zu einer Resultierenden, die gleich c ist und nach der andern Seite mit der Stossrichtung den Winkel α bildet, zusammen, d. h.

eine elastische Kugel wird so von der Wand zurückgeworfen, dass der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel ist.

Aufgaben: 1. Eine Flintenkugel aus Blei von 20 g Gewicht trifft mit 300 m Geschwindigkeit auf eine Stahlplatte. Welche Wärmemenge entwickelt sich in ihr, wenn ihre ganze Geschwindigkeit beim Stoss verloren geht? (424 mkg geben eine Wärmeinheit). **2.** Zwei elastische Kugeln von 4 bzw. 5 kg Gewicht stossen mit entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten von 10 bzw. 12 m aufeinander. Welches sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoss? **3.** Eine Billardkugel stösst mit einer Geschwindigkeit von 3 m auf eine ruhende, so dass der Winkel α (Fig. 30) 35° beträgt. Wie gehen die Kugeln weiter? **4.** Wie viel beträgt der Verlust an lebendiger Kraft beim Zusammentreffen zweier Kugeln, wenn $p = 8$ kg, $p_1 = 9$ kg, $c = 6$ m, $e_1 = 8$ m?

Konstanten des Sonnensystems.

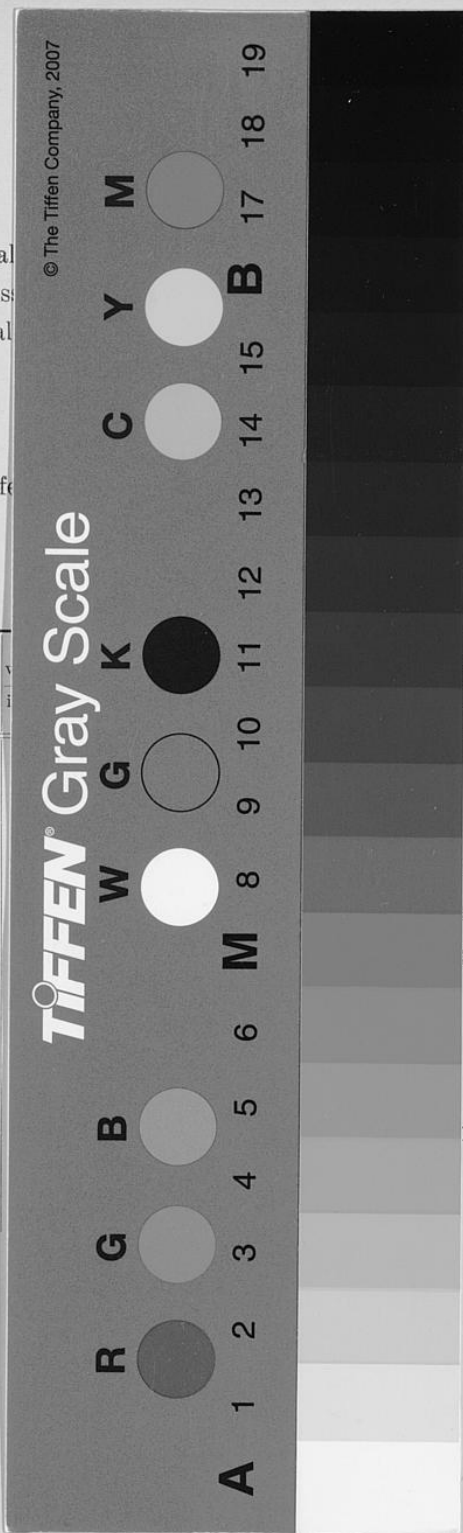
Äquatorialhalbmesser der Erde		6 377 397 m
Polarhalbmesser	» »	6 356 079 »
Mittlerer Halbmesser	» »	6 366 738 »
Abplattung	» »	$\frac{1}{299}$
Dichte	» »	5.5
Masse	» »	6×10^{24} kg
Mittlere Entfernung	» » von der Sonne	20.1 Mill. Meilen
» » » » »	» » dem Mond	51 800 Meilen
Sterntag		86 164 Sekunden.

Name des Körpers	Abstand v. d. Sonne	Durch- messer	Masse	Dauer einer Umdrehung um die Axe	Siderische Umlauf- zeit	Exzentri- zität der Bahn
	in Million. Meilen	im Vergleich m. d. Erde				
Sonne . .	—	108.6	322800	25 ^t 4 ^h 29'	—	—
Merkur . .	7.8	0.4	0.06	24 ^h	88 ^t	0.21
Venus . .	14.6	1	0.8	23 ^h 21' 22''	225 ^t	0.007
Erde . . .	20.1	1	1	23 ^h 56' 4''	365 ^t	0.017
Mars . . .	30.5	0.5	0.11	24 ^h 37' 23''	387 ^t	0.09
Jupiter . .	104.2	11	309	9 ^h 55' 37''	12 ^J	0.05
Saturn . .	191.1	9.3	92	10 ^h 14' 24''	29 ^J	0.06
Uranus . .	384.2	3.9	13.5	?	84 ^J	0.05
Neptun . .	602.0	3.8	22.5	?	165 ^J	0.009
Mond . .	—	0.27	0.012	27 ^t 7 ^h 43' 11''	—	0.05



Äquatorialhalbmessung
 Polarhalbmessung
 Mittlerer Halbmessung
 Abplattung
 Dichte
 Masse
 Mittlere Entfernung
 »
 Sterntag

Name des Körpers	
Sonne . .	
Merkur . .	
Venus . .	
Erde . . .	
Mars . . .	
Jupiter . .	
Saturn . .	
Uranus . .	
Neptun . .	
Mond . .	



7 397 m
 6 079 »
 6 738 »
 10²⁴ kg
 Mill. Meilen
 00 Meilen
 64 Sekunden.

Merische nlaufs- zeit	Exzenti- zität der Bahn
—	—
88 ^t	0·21
225 ^t	0·007
365 ^t	0·017
387 ^t	0·09
12 ^J	0·05
29 ^J	0·06
84 ^J	0·05
165 ^J	0·009
—	0·05

