

Unter den Problemen, die Anziehung der Körper auf materielle Punkte zu bestimmen, ist das der Anziehung des Ellipsoids das älteste und gehört nach dem Zeugnis Dirichlets zu den bedeutendsten der Integralrechnung. Mit ihm haben seit Newton viele und unter ihnen die namhaftesten Mathematiker sich beschäftigt. Es mögen hier nur die Namen Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Legendre, Laplace, Ivory, Gauß, Poisson, Dirichlet genannt werden.*) Die Wichtigkeit, die man dem Problem beilegt, erklärt sich daraus, daß die Himmelskörper im allgemeinen ellipsoide Gestalt haben.

Außer der Anziehung des Ellipsoids ist von verschiedenen Mathematikern die der Prismen, Cylinder, Kegel, Paraboloid, Hyperboloid, im allgemeinen von Körpern, die von Flächen 1ter und 2ter Ordnung begrenzt werden, bestimmt worden.

So weit mir bekannt, sind derartige Untersuchungen bisher nicht auf ringförmige Körper ausgedehnt worden, obgleich dieselben ein ähnliches Interesse in Anspruch nehmen können, wie die über die Attraktion der Ellipsoide. Denn nach der Kant-Laplace'schen Hypothese sind Planeten und Trabanten durch einen Ringzustand hindurchgegangen und in dem Ringsysteme des Saturn ist uns ein solcher Zustand erhalten geblieben.

Unter Ringkörpern sollen im Folgenden solche Körper verstanden werden, die man sich durch Rotation eines ebenen, begrenzten Flächenstücks um eine dasselbe nicht schneidende Gerade — die Ringachse — entstanden denken kann. Jede durch die Ringachse gelegte Ebene heiße Meridianebene, jede der beiden durch eine Meridianebene erzeugten Schnittflächen Querschnitt des Körpers.

Wären die Ringe des Saturn solche Ringkörper mit rechteckigem Querschnitt und homogener Masse, so würde allerdings für sie das Problem gelöst sein. Denn ein solcher Ringkörper ist nichts weiter als ein Hohlcylinder mit kreisförmiger Basis. Es ist aber durch nichts bewiesen, daß bei jenen Ringen der Querschnitt ein Rechteck ist, und es ist wohl möglich, daß derselbe der Form einer Ellipse sich nähert, bei der eine Achse gegenüber der andern außerordentlich verkürzt ist.

Im ganzen weiß man von der Beschaffenheit der Saturnringe wenig Sicheres. Es ist aber, worauf schon Laplace hingewiesen hat, wahrscheinlich, daß die Ringe nicht völlig gleichmäßig gestaltet sind, so wenig wie die Planeten mit mathematischer Genauigkeit Rotations-Ellipsoide sind. Nichtsdestoweniger wird die Bestimmung der Anziehung von Ringkörpern unter Annahme einer regelmäßigen Gestalt, also unter Festhaltung der oben aufgestellten Definition, ein Beitrag zur Theorie der Attraktion sein, welcher des Interesses nicht entbehrt.

Es soll also im Folgenden für einen solchen Ringkörper mit elliptischem Querschnitt das Potential bestimmt werden, d. h. diejenige Funktion, deren partielle Differentialquotienten nach den Koordinaten des angezogenen Punktes die Komponenten der Anziehung liefern.

In einer Abhandlung in Band 104 Heft 2 des Kronecker'schen (früher Crelle-Vorhard'schen) Journals habe ich allgemeine Formeln für das Potential der Ringkörper sowie insbesondere für einen Ringkörper mit kreisförmigem Querschnitt aufgestellt. Ich wiederhole hier — mit geringfügigen Abänderungen — den ersten allgemeinen Teil dieser Abhandlung, um dann zu dem speciellen Problem überzugehen.

Vergl. Grube, Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. Beilage zum Programm der Königl. Domschule zu Schleswig, Ostern 1883 und 1888.

I.

Ein Ringkörper sei mit Masse von überall gleicher Dichtigkeit, die wir gleich 1 setzen, erfüllt und wirke anziehend auf einen materiellen Punkt nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz. Den Körper denken wir uns zunächst verbunden mit einem rechtwinkligen Koordinatensysteme. Auf dies System bezogen, habe ein beliebiger Punkt des Körpers die Koordinaten ξ, η, ζ , der vom Körper angezogene Punkt P die Koordinaten α, β, γ . Ueber das System setzen wir nur fest, daß die Ringachse die H -Achse sei. Wenn e die Entfernung beider Punkte, ausgedrückt durch die Koordinaten derselben, bezeichnet, so ist das Potential des Ringkörpers

$$U = \iiint \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e},$$

wobei die Integration auf alle Punkte des Körpers auszudehnen ist.

Statt jener Koordinaten sollen nun cylindrische Koordinaten eingeführt werden. Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt und die Ringachse eine Meridianebene gelegt, ferner eine gerade Kreiscylinderfläche mit Radius r konstruiert, deren Achse die Ringachse ist, und betrachten wir die Schnittlinie beider Flächen als Y -Achse, die Schnittlinie der Meridianebene und der ΞZ -Ebene als X -Achse eines ebenen, rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist die räumliche Lage des Punktes bestimmt durch die auf jenes System bezogenen Koordinaten x und y und durch den Winkel φ , den die Meridianebene mit einer andern festen Meridianebene bildet. Letztere möge mit der ΞH -Ebene den Winkel ε einschließen. Setzen wir noch fest, daß die negative X -Achse vom Koordinatenanfang nach der Ringachse zu sich erstrecke und daß die H -Achse und die Y -Achse in Bezug auf positive und negative Richtung übereinstimmen, so hängen die Koordinaten beider Systeme durch folgende Gleichungen zusammen:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (r + x) \cos(\varphi - \varepsilon) \\ \eta &= y \\ \zeta &= (r + x) \sin(\varphi - \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Nun ist

$$d\xi d\eta d\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{vmatrix} d\varphi dx dy = (r + x) d\varphi dx dy.$$

Zu demselben Ausdruck für das Volumenelement gelangt man auch, wenn man den Körper durch unendlich viele Meridianebenen, ferner durch eine Schaar unendlich naher, der ΞZ -Ebene paralleler Ebenen und durch eine Schaar unendlich naher paralleler Kreis-Cylinderflächen in rechtwinklige, parallelpipetische Elemente zerlegt. Es ist somit der Ausdruck für das Potential in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} U &= \iiint \frac{(r + x) d\varphi dx dy}{e} \\ &= \int d\varphi \iint \frac{(r + x) dx dy}{e}. \end{aligned} \quad (2)$$

Hierbei erstreckt sich die Integration nach x und y über alle Punkte der durch eine Meridianebene entstehenden Schnittfigur, dann ist nach φ über den Umfang des Einheitskreises zu integrieren. e ist eine Funktion der neuen Koordinaten des Punktes P , die wir mit a, b, q_0 bezeichnen wollen, und der Koordinaten eines

Punktes der Schnittfigur x, y, φ . Nach Ausführung des Flächenintegrals werden die sich ergebenden Ausdrücke die Variable φ noch enthalten.

Es ist ersichtlich, daß man auf dieselbe Weise auch das Potential eines Teiles des Ringkörpers bestimmen kann. Man hat dann zuletzt nach φ nicht über den ganzen Umfang des Einheitskreises, sondern nur über einen Teil desselben zu integrieren.

Unbeschadet der Allgemeinheit der Entwicklung kann man festsetzen, daß die Haupt-Meridianebene den Punkt P enthalten soll, so daß $\varphi_0 = 0$ ist. Fällt man von P aus das Lot c auf die Ebene der Schnittfigur, so ist

$$e = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2},$$

wobei c eine Funktion des Winkels φ . Fällt man von P außerdem ein Lot auf die Ringachse, das mit m bezeichnet werden soll, verbindet die Endpunkte beider Lote durch eine Gerade, so schließt diese Linie mit dem Lote m den Winkel φ ein, und es ist, da diese Gerade die Länge $r + a$ hat,

$$\left. \begin{aligned} r + a &= m \cos \varphi \\ c &= m \sin \varphi \\ m^2 &= a^2 + r^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(Vergleiche die Figur.) Wir formen nun den Ausdruck für das Potential in folgender Weise um:

$$U = \iiint \frac{(r + a) + (x - a)}{e} d\varphi dx dy,$$

und unter Berücksichtigung der Relationen (3) ergibt sich dann

$$U = m \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \iint \frac{dx dy}{e} + \int_0^{2\pi} d\varphi \iint \frac{(x - a)}{e} dx dy. \quad (4)$$

Das im ersten Summanden vorkommende Flächenintegral ist das Potential der Schnittfläche; wir wollen dasselbe im Folgenden mit V bezeichnen; das Flächenintegral des zweiten Summanden soll mit V_1 bezeichnet werden.

Liegt der angezogene Punkt in der Ringachse, so ist $m = 0$ und es verschwindet der erste Summand in (4).

II.

Wir gehen nun zu unserm speciellen Fall über, indem wir annehmen, daß der Querschnitt eine elliptische Fläche sei, deren eine Achse der Ringachse parallel ist. Wir setzen fest, daß der Anfang des rechtwinkligen XY -Koordinatensystems der Mittelpunkt der Ellipse sein, die ZZ -Ebene also die Mittelpunkte aller Querschnitte enthalten soll. (Siehe Figur.) Die Halbachsen der Ellipse bezeichnen wir mit a_1 und a_2 , letztere sei der Ringachse parallel.

Es kommt zunächst darauf an, die Flächenintegrale V und V_1 zu bestimmen. Wie Herr E. Heine bei Bestimmung des Kreispotentials*) benutzen wir das bestimmte Integral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dw}{e^2 + w^2} = \frac{1}{e},$$

*) E. Heine, Das Potential eines homogenen Kreises, Crelle's Journal. Bd. 76, S. 271.

um in den Ausdrücken für V und V_1 rationale Nenner zu erhalten. Es ist dann

$$V = \iint \frac{dx dy}{e} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dw \int_{-q_1}^{+q_1} \int_{-q_2}^{+q_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{q_1^2}} \frac{dx dy}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2 + w^2}$$

$$V_1 = \iint \frac{(x-a) dx dy}{e} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dw \int_{-q_1}^{+q_1} \int_{-q_2}^{+q_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{q_1^2}} \frac{(x-a) dx dy}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2 + w^2}$$

Wir führen nun für x und y neue Koordinaten λ und μ ein durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= q_1 \lambda \cos \mu \\ y &= q_2 \lambda \sin \mu; \end{aligned}$$

dann ist

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{vmatrix} d\lambda d\mu = q_1 q_2 \lambda d\lambda d\mu.$$

Die Grenzen für λ sind 0 und 1, für μ 0 und 2π , und es ist

$$V = \frac{2q_1 q_2}{\pi} \int_0^\infty dw \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{(q_1 \lambda \cos \mu - a)^2 + (q_2 \lambda \sin \mu - b)^2 + c^2 + w^2} \quad (5)$$

$$V_1 = \frac{2q_1 q_2}{\pi} \int_0^\infty dw \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{(q_1 \lambda \cos \mu - a) d\mu}{(q_1 \lambda \cos \mu - a)^2 + (q_2 \lambda \sin \mu - b)^2 + c^2 + w^2} \quad (6)$$

III.

Um hier die Integrationen nach der Variablen μ ausführen zu können, benutzen wir eine Substitution, die zuerst Gauß in seiner Abhandlung „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta si ejus massa“ etc.*) angewandt hat. Es ist jedoch, weil sonst die dieser Abhandlung gesteckten Grenzen weit überschritten würden, nicht möglich, die ausführlichen, scharfsinnigen Entwicklungen des berühmten Mathematikers hier zu wiederholen. Wir müssen uns darauf beschränken, die für unsere Zwecke notwendigen Resultate jener Entwicklungen einfach anzugeben.

*) Gauß's Werke, herausgeg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 9.

Setzen wir zur Abkürzung $\varrho_1 \lambda = A$, $\varrho_2 \lambda = B$, $c^2 + w^2 = c_1^2$, und führt man für (7) μ die Variable ψ ein durch die Substitutionen:

$$\cos \mu = \frac{\alpha' + \alpha'' \cos \psi + \alpha''' \sin \psi}{\gamma' + \gamma'' \cos \psi + \gamma''' \sin \psi}, \quad \sin \mu = \frac{\beta' + \beta'' \cos \psi + \beta''' \sin \psi}{\gamma' + \gamma'' \cos \psi + \gamma''' \sin \psi}$$

und setzt man zur Abkürzung

$$t = \gamma' + \gamma'' \cos \psi + \gamma''' \sin \psi, \quad (8)$$

so können, wie Gauß zeigt, die 9 Größen α' α'' α''' β' u. s. w. so bestimmt werden, daß

$$(A \cos \mu - a)^2 + (B \sin \mu - b)^2 + c_1^2 = \frac{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi}{t^2} \quad (9)$$

wird, wobei G , G' , G'' die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{a^2}{A^2 + u} + \frac{b^2}{B^2 + u} + \frac{c_1^2}{u} = 1 \quad (10)$$

sind. Von dieser Gleichung wird nachgewiesen, daß sie immer eine positive und zwei negative Wurzeln besitzt, die nur in gewissen Grenzfällen in 0 übergehen. Die Größen G' und G'' sind daher positiv. Außerdem wird

$$A \cos \mu - a = \frac{-\alpha' G + \alpha'' G' \cos \psi + \alpha''' G'' \sin \psi}{A t}. \quad (11)$$

Die Koeffizienten α' α'' α''' u. s. w. können aber selbst durch A und B und die Wurzeln der Gleichung in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &= \sqrt{\frac{(A^2 + G)(B^2 + G)}{(G + G')(G + G'')}} \\ \gamma'' &= \sqrt{\frac{(A^2 - G')(B^2 - G')}{(G + G')(G'' - G')}} \\ \gamma''' &= \sqrt{\frac{(A^2 - G'')(B^2 - G'')}{(G + G'')(G' - G'')}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{\gamma' a A}{A^2 + G} = a A \sqrt{\frac{B^2 + G}{(A^2 + G)(G + G')(G + G'')}} \\ \alpha'' &= \frac{\gamma'' a A}{A^2 - G'} = a A \sqrt{\frac{B^2 - G'}{(A^2 - G')(G + G')(G'' - G')}} \\ \alpha''' &= \frac{\gamma''' a A}{A^2 - G''} = a A \sqrt{\frac{B^2 - G''}{(A^2 - G'')(G + G'')(G' - G'')}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

schließlich

$$\beta' = \frac{\gamma' b B}{B^2 + G}, \quad \beta'' = \frac{\gamma'' b B}{B^2 - G'}, \quad \beta''' = \frac{\gamma''' b B}{B^2 - G''}.$$

Dabei bleiben die Koeffizienten immer reell. Von den zahlreichen Beziehungen derselben unter sich und mit den Wurzeln der Gleichungen wollen wir noch folgende hervorheben, die wir später benutzen werden.

Setzt man in der Gleichung 3. Grades (10) für u die Wurzel G ein und multipliziert mit $A^2 B^2 - G^2$, so erhält man

$$\frac{a^2 (A^2 B^2 - G^2)}{A^2 + G} + \frac{b^2 (A^2 B^2 - G^2)}{B^2 + G} + \frac{c_1^2 (A^2 B^2 - G^2)}{G} = A^2 B^2 - G^2 \quad (13a)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{a^2 (A^2 B^2 - G^2)}{A^2 + G} &= \frac{a^2 A^2 B^2 - a^2 G^2 + a^2 A^2 G - a^2 A^2 G}{A^2 + G} \\ &= \frac{a^2 A^2 (B^2 + G)}{A^2 + G} - \frac{a^2 G (A^2 + G)}{A^2 + G} \end{aligned}$$

Dementsprechend sind die übrigen Glieder in (13a) umzuformen. Man erhält daher

$$\frac{a^2 A^2 (B^2 + G)}{A^2 + G} - a^2 G + \frac{b^2 B^2 (A^2 + G)}{B^2 + G} - b^2 G + \frac{A^2 B^2 c_1^2}{G} - c_1^2 G = A^2 B^2 - G^2 \quad (13b)$$

Entwickelt man die Gleichung (10) nach Potenzen von u , so ergibt sich

$$u^3 - (a^2 + b^2 + c_1^2 - A^2 - B^2)u^2 + (A^2 B^2 - A^2 b^2 - A^2 c_1^2 - B^2 a^2 - B^2 c_1^2)u - A^2 B^2 c_1^2 = 0$$

Wurzeln und Koeffizienten der Gleichung hängen nun durch folgende Relationen zusammen:

$$\begin{aligned} G - G' - G'' &= a^2 + b^2 + c_1^2 - A^2 - B^2 \\ G G' G'' &= A^2 B^2 c_1^2 \end{aligned}$$

Daher kann man die Gleichung (13b) in folgender Weise umformen

$$\frac{a^2 A^2 (B^2 + G)}{A^2 + G} + \frac{b^2 B^2 (A^2 + G)}{B^2 + G} - G (G - G' - G'' + A^2 + B^2) + G' G'' = A^2 B^2 - G^2$$

oder

$$\frac{a^2 A^2 (B^2 + G)}{A^2 + G} + \frac{b^2 B^2 (A^2 + G)}{B^2 + G} - (A^2 + G)(B^2 + G) + (G + G')(G + G'') = 0 \quad (14)$$

Es ergibt sich fernerhin, daß $d\mu = \frac{1}{t} d\psi$ ist und die Grenzen 0 und 2π auch für das transformierte Integral bestehen bleiben. Wir fahren nun nach diesen Angaben in unsern eigenen Entwicklungen fort.

IV.

Die in V und V_1 enthaltenen Integrale mit der Variablen μ (Formeln 5 und 6) gehen nun in folgende Form über unter Berücksichtigung der Relationen (7) bis (13):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{(\varrho_1 \lambda \cos \mu - a)^2 + (\varrho_2 \lambda \sin \mu - b)^2 + c^2 + w^2} = \int_0^{2\pi} \frac{t d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma' + \gamma'' \cos \psi + \gamma''' \sin \psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma' d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'' \cos \psi d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} + \int_0^{2\pi} \frac{\gamma''' \sin \psi d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} \end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die beiden letzten Integrale zwischen den Grenzen 0 und 2π verschwinden.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{(\varrho_1 \lambda \cos \mu - a) d\mu}{(\varrho_1 \lambda \cos \mu - a)^2 + (\varrho_2 \lambda \sin \mu - b)^2 + c^2 + w^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-\alpha' G + \alpha'' G' \cos \psi + \alpha''' G'' \sin \psi}{A (G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi)} d\psi \\
 &= \int_0^{2\pi} -\frac{\alpha' G}{A} \frac{d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha'' G' \cos \psi}{A (G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi)} d\psi \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha''' G'' \sin \psi}{A (G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi)} d\psi.
 \end{aligned}$$

Auch hier verschwinden die beiden letzten Integrale, so daß nur die beiden

$$\begin{aligned}
 J &= \gamma' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} \\
 J_1 &= -\frac{\alpha' G}{A} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi}
 \end{aligned}$$

weiter zu behandeln sind.

$$\text{Es ist nun } G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi = \frac{2G + G' + G''}{2} + \frac{(G' - G'') \cos 2\psi}{2},$$

daher, wenn man noch $2\psi = \chi$ setzt,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} &= \int_0^{4\pi} \frac{d\chi}{(2G + G' + G'') + (G' - G'') \cos \chi} \\
 &= \left[\frac{1}{V(2G + G' + G'')^2 - (G' - G'')^2} \arccos \frac{(2G + G' + G'') \cos \chi + (G' - G'')}{(2G + G' + G'') + (G' - G'') \cos \chi} \right]_0^{4\pi}.
 \end{aligned}$$

Durchläuft χ die Werte von 0 bis π , so durchläuft der Kosinus des Quotienten die Werte von +1 bis -1, der dazugehörige Bogen auch die Werte von 0 bis π u. so fort. Es ist daher

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{G + G' \cos^2 \psi + G'' \sin^2 \psi} &= \frac{4\pi}{V(2G + G' + G'')^2 - (G' - G'')^2} \\
 &= \frac{4\pi}{V4G^2 + 4G(G' + G'') + 4G'G''} = \frac{2\pi}{V(G + G')(G + G'')}.
 \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung der in (12) und (13) angegebenen Werte für γ' und α' erhält man daher

$$J = \frac{2\pi\gamma'}{V(G+G')(G+G'')} = \frac{2\pi V(A^2+G)(B^2+G)}{(G+G')(G+G'')}$$

$$J_1 = -\frac{2\pi G\alpha'}{A V(G+G')(G+G'')} = -\frac{2\pi a G}{(G+G')(G+G'')} \sqrt{\frac{B^2+G}{A^2+G}}$$

und die in (5) und (6) verzeichneten Ausdrücke nehmen die Form an

$$V = 2q_1 q_2 \int_0^\infty dw \int_0^1 \frac{V(A^2+G)(B^2+G)}{(G+G')(G+G'')} d\lambda^2 \quad (15)$$

$$V_1 = -2a q_1 q_2 \int_0^\infty dw \int_0^1 \frac{G}{(G+G')(G+G'')} \sqrt{\frac{B^2+G}{A^2+G}} d\lambda^2 \quad (16)$$

V.

Wir erinnern uns, daß $A = q_1 \lambda$, $B = q_2 \lambda$, G , $-G'$, $-G''$ aber die Wurzeln der Gleichung (10) sind, somit auch Funktionen der Größe λ . Es gelingt nun, die zu integrierenden Ausdrücke als Funktionen des Quotienten $\frac{B^2+G}{A^2+G}$ darzustellen, welchen wir alsdann als neue Variable einführen.

Zunächst formen wir den Ausdruck $(G+G')(G+G'')$ um; nach (14) ist

$$(G+G')(G+G'') = (A^2+G)(B^2+G) - \frac{a^2 A^2 (B^2+G)}{A^2+G} - \frac{b^2 B^2 (A^2+G)}{B^2+G} \quad (17)$$

$$\text{Da aber} \quad \frac{a^2}{A^2+G} + \frac{b^2}{B^2+G} + \frac{c_1^2}{G} = 1 \quad \text{ist,} \quad (17a)$$

so folgt

$$(A^2+G)(B^2+G) = a^2(B^2+G) + b^2(A^2+G) + \frac{c_1^2(A^2+G)(B^2+G)}{G}.$$

Setzt man diesen Wert in (17) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$(G+G')(G+G'') = \left[\frac{a^2(B^2+G)}{A^2+G} + \frac{b^2(A^2+G)}{B^2+G} \right] G + \frac{c_1^2(A^2+G)(B^2+G)}{G} \quad (18)$$

Setzt man nun

$$A^2+G = q_1^2 \lambda^2 + G = p \quad (19)$$

$$B^2+G = q_2^2 \lambda^2 + G = q,$$

so ergibt sich

$$B^2 G - A^2 G = p B^2 - q A^2$$

also

$$G = \frac{p B^2 - q A^2}{B^2 - A^2} = \frac{p q_2^2 - q q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} \quad (20)$$

und somit

$$(G+G')(G+G'') = \left[a^2 \frac{q}{p} + b^2 \frac{p}{q} \right] \frac{p q_2^2 - q q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 p q (q_2^2 - q_1^2)}{p q_2^2 - q q_1^2}.$$

Bezeichnen wir die zu integrierenden Ausdrücke in (15) und (16) mit F und F_1 , so ist

$$F = \frac{V A^2+G (B^2+G)}{(G+G')(G+G'')} = \frac{V p q}{\left(a^2 \frac{q}{p} + b^2 \frac{p}{q} \right) \frac{p q_2^2 - q q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 p q (q_2^2 - q_1^2)}{p q_2^2 - q q_1^2}}.$$

Dividiert man hier Dividendus und Divisor durch p , außerdem im letzten Gliede des Divisors Dividendus und Divisor nochmals durch p und schreibt dann v für $q : p$, so erhält man

$$F = \frac{\sqrt{v}}{\left(a^2 v + \frac{b^2}{v}\right) \frac{q_2^2 - v q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 (q_2^2 - q_1^2) v}{q_2^2 - v q_1^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{v}}{v (q_2^2 - q_1^2 v)} \cdot \frac{1}{\left(a^2 + \frac{b^2}{v^2}\right) \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 (q_2^2 - q_1^2)}{q_2^2 - v q_1^2}} \quad (21)$$

Ferner ist

$$F_1 = \frac{G}{(G + G') (G + G'')} \sqrt{\frac{B^2 + G}{A^2 + G}} = \frac{\frac{p q_2^2 - q q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}}}{\left(a^2 \frac{q}{p} + b^2 \frac{p}{q}\right) \frac{p q_2^2 - q q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 p q (q_2^2 - q_1^2)}{p q_2^2 - q q_1^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{q}{p}}}{\left(a^2 \frac{q}{p} + b^2 \frac{p}{q}\right) + \frac{c_1^2 p q (q_2^2 - q_1^2)^2}{(p q_2^2 - q q_1^2)^2}}$$

Dividiert man im letzten Gliede des Divisors Dividendus und Divisor durch p^2 und schreibt dann v für $q : p$, so ergibt sich

$$F_1 = \frac{\sqrt{v}}{a^2 v + \frac{b^2}{v} + \frac{c_1^2 v (q_2^2 - q_1^2)^2}{(q_2^2 - v q_1^2)^2}}$$

und durch weitere Umformung

$$F_1 = \frac{\sqrt{v}}{(q_2^2 - q_1^2) v} \cdot \frac{1}{\left(a^2 + \frac{b^2}{v^2}\right) \cdot \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 (q_2^2 - q_1^2)}{(q_2^2 - v q_1^2)^2}} \quad (22)$$

Die letzten Umformungen in den Ausdrücken für F und F_1 wurden mit Rücksicht auf die folgenden Entwicklungen vorgenommen. Indem wir jetzt v als eine neue Variable ansehen, müssen wir nun das Differential $d\lambda^2$ durch dv ausdrücken und die Grenzen für die neue Variable bestimmen.

Nach (19) ist $A^2 - B^2 = (q_1^2 - q_2^2) \lambda^2 = p - q$.

Aus Gleichung (17a) folgt unter Berücksichtigung des Wertes für G in (20)

$$a^2 + b^2 \frac{p}{q} + \frac{c_1^2 (q_2^2 - q_1^2)}{q_2^2 - \frac{q}{p} q_1^2} = p$$

und

$$a^2 \frac{q}{p} + b^2 + \frac{c_1^2 (q_2^2 - q_1^2)}{q_2^2 \frac{p}{q} - q_1^2} = q,$$

folglich durch Subtraktion

$$(q_1^2 - q_2^2) \lambda^2 = a^2 \left(1 - \frac{q}{p}\right) + b^2 \left(\frac{p}{q} - 1\right) + c_1^2 (q_2^2 - q_1^2) \left[\frac{1}{q_2^2 - \frac{q}{p} q_1^2} - \frac{1}{q_2^2 \frac{p}{q} - q_1^2} \right].$$

und setzt man $\frac{q}{p} = v$, so erhält man

$$(q_1^2 - q_2^2) \lambda^2 = a^2 (1 - v) + b^2 \left(\frac{1}{v} - 1 \right) + c_1^2 (q_2^2 - q_1^2) \left[\frac{1}{q_1^2 - v q_1^2} - \frac{1}{\frac{q_2^2}{v} - q_1^2} \right].$$

Differenziert man, so ergibt sich

$$(q_1^2 - q_2^2) \frac{d\lambda^2}{dv} = - \left(a^2 + \frac{b^2}{v^2} \right) + c_1^2 (q_2^2 - q_1^2) \left[\frac{q_1^2}{(q_2^2 - q_1^2 v)^2} - \frac{q_2^2}{(q_2^2 - q_1^2 v)^2} \right]$$

und schließlich

$$d\lambda^2 = \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{v^2} \right) \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{c_1^2 (q_2^2 - q_1^2)}{(q_2^2 - q_1^2 v)^2} \right] dv. \quad (23)$$

Der Faktor von dv ist nun derselbe, der als Divisor in den Ausdrücken für F und F_1 in (21) und (22) auftritt. Bezeichnen wir vorläufig die Grenzen für v mit v_0 und v_1 und setzen wir die in (21), (22) und (23) erhaltenen Ausdrücke in (15) und (16) ein, so ergibt sich

$$V = 2 q_1 q_2 \int_0^\infty dw \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{(q_2^2 - q_1^2 v) \sqrt{v}} \quad (24)$$

$$V_1 = - 2a q_1 q_2 \int_0^\infty dw \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \frac{dv}{\sqrt{v}}. \quad (25)$$

Die Integrationen nach v sind leicht auszuführen. Es ist

$$\int \frac{dv}{(q_2^2 - q_1^2 v) \sqrt{v}} = \frac{1}{q_1 q_2} \log \frac{q_2 + q_1 \sqrt{\frac{v}{v}}}{q_2 - q_1 \sqrt{\frac{v}{v}}},$$

$$\int \frac{dv}{(q_2^2 - q_1^2) \sqrt{v}} = \frac{2 \sqrt{v}}{q_2^2 - q_1^2}.$$

Es war

$$v = \frac{q}{p} = \frac{q^2 \lambda^2 + G}{q_1^2 \lambda^2 + G} \quad \text{und}$$

G die positive Wurzel der Gleichung (10). Für $\lambda = 0$ ist $v_0 = 1$; dies die untere Grenze. Für $\lambda = 1$ bezeichnen wir die positive Wurzel der Gleichung (10) mit s ; die Gleichung lautet dann

$$\frac{a^2}{q_1^2 + s} + \frac{b^2}{q_2^2 + s} + \frac{c^2 + w^2}{s} = 1; \quad (26)$$

es ist dann die obere Grenze für v

$$v_1 = \frac{q_2^2 + s}{q_1^2 + s}.$$

Somit ergibt sich

$$V = 2 \int_0^\infty \log \left[\frac{q_2 + q_1 \sqrt{\frac{q_2^2 + s}{q_1^2 + s}}}{q_2 - q_1 \sqrt{\frac{q_2^2 + s}{q_1^2 + s}}} \cdot \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \right] dw \quad (27)$$

$$V_1 = - \frac{4 e_1 e_2 a}{e_2^2 - e_1^2} \int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{e_2^2 + s}{e_1^2 + s}} - 1 \right] d w , \quad (28)$$

wobei w und s noch durch die Gleichung (26) zusammenhängen.

VI.

Wir führen nun statt w die Variable s ein, bestimmen zu diesem Zwecke w aus Gleichung (26) und benutzen den Buchstaben gleichzeitig als Funktionzeichen. Es ist

$$w(s) = \sqrt{s \left(1 - \frac{a^2}{e_1^2 + s} - \frac{b^2}{e_2^2 + s} \right) - c^2} . \quad (29)$$

Soll $w(s) = \infty$ werden, so muß $s = \infty$ sein; soll dagegen $w(s) = 0$ werden, so muß s einen bestimmten Wert s_0 annehmen, die positive Wurzel der Gleichung $w(s) = 0$ oder der Gleichung (26), wenn in derselben $w = 0$ gesetzt wird:

$$1 = \frac{a^2}{e_1^2 + s} + \frac{b^2}{e_2^2 + s} + \frac{c^2}{s} .$$

Diese Gleichung hat, wie aus den Gaußschen Entwicklungen hervorgeht, immer eine positive und zwei negative Wurzeln, so lange $c^2 > 0$ ist. Für den Fall, daß der Punkt P in die Ellipsebene rückt, also $c = 0$ wird, können 1 oder 2 dieser Wurzeln in 0 übergehen. Daß eine der Wurzeln verschwindet, lehrt unmittelbar Gleichung (29). Die beiden andern liefert dann die Gleichung 2ten Grades

$$1 - \frac{a^2}{e_1^2 + s} - \frac{b^2}{e_2^2 + s} = 0 . \quad (29a)$$

1. Liegt der Punkt in der Ellipsebene, aber außerhalb der Ellipse, so hat Gleichung (29a), da $\frac{a^2}{e_1^2} + \frac{b^2}{e_2^2} > 1$ ist, immer noch eine positive Wurzel. Es muß daher jene Wurzel der Gleichung 3ten Grades, die in 0 überging, eine der beiden negativen Wurzeln gewesen sein.

2. Rückt der Punkt in der Ellipsebene an die Ellipse heran und fällt schließlich mit einem Punkte der Grenzlinie zusammen, so wird die positive Wurzel der Gleichung (29a) immer kleiner, bis im Grenzfall die Gleichung in die Gleichung der Ellipse übergeht, d. h. die positive Wurzel derselben und auch der Gleichung 3ten Grades wird gleich 0.

3. Liegt der Punkt außerhalb der Ellipsebene, jedoch so, daß der Fußpunkt des Lotes c in die Ellipse fällt, so hat Gleichung (29a), da $\frac{a^2}{e_1^2} + \frac{b^2}{e_2^2} < 1$ ist, überhaupt keine positive Wurzel mehr. Rückt dann der Punkt in die Ellipse, wird also $c = 0$, so muß von den 3 Wurzeln der Gleichung (29) es hier ebenfalls die positive Wurzel sein, die verschwindet.

Wenn also der angezogene Punkt auf der Grenzlinie oder innerhalb der Fläche liegt, ist $s_0 = 0$ zu setzen.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$f(s) = \log \left[\frac{e_2 + e_1 \sqrt{\frac{e_2^2 + s}{e_1^2 + s}}}{e_2 - e_1 \sqrt{\frac{e_2^2 + s}{e_1^2 + s}}} \cdot \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \right] ,$$

so ist nach (27)

$$V = 2 \int_0^\infty f(s) \frac{d w}{d s} d s .$$

Integrieren wir hier durch Teile, so erhält man

$$V = 2 \left[w(s) f(s) \right]_{s_0}^{\infty} - 2 \int_{s_0}^{\infty} w(s) \frac{d f(s)}{d s} d s . \quad (30)$$

Es läßt sich nachweisen, daß das vom Integralzeichen freie Glied verschwindet. Für $s = s_0$ ist $w = 0$, $f(s)$ hat einen endlichen Wert, also verschwindet der ganze Klammerausdruck. Für $s = \infty$ nimmt er allerdings die Form $\infty \cdot 0$ an. Um den wahren Wert zu finden, bestimme man

$$\lim_{s = \infty} \frac{\frac{d f(s)}{d s}}{\frac{d}{d s} \left(\frac{1}{w(s)} \right)} .$$

Reduciert man den Ausdruck auf einen einfachen Quotienten, so ergibt sich, daß der Divisor nach s von höherem Grade ist, als der Dividendus, der Grenzwert des Quotienten gleich 0 ist.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d f(s)}{d s} &= \frac{d \log (q_2 \sqrt{q_1^2 + s} + q_1 \sqrt{q_2^2 + s})}{d s} - \frac{d \log (q_2 \sqrt{q_1^2 + s} - q_1 \sqrt{q_2^2 + s})}{d s} \\ &= - \frac{q_1 q_2}{s \sqrt{(q_1^2 + s)(q_2^2 + s)}} . \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in (31) ein, so ergibt sich

$$V = 2 q_1 q_2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{w(s)}{s \sqrt{(q_1^2 + s)(q_2^2 + s)}} d s^* . \quad (31)$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$f_1(s) = \sqrt{\frac{q_2^2 + s}{q_1^2 + s}} - 1 ,$$

so ergibt sich nach (28)

$$V_1 = - \frac{4 q_1 q_2 a}{q_2^2 - q_1^2} \int_{s_0}^{\infty} f_1(s) \frac{d w}{d s} d s ,$$

oder nach einer Integration durch Teile

$$V_1 = - \frac{4 q_1 q_2 a}{q_2^2 - q_1^2} \left[w(s) f_1(s) \right]_{s_0}^{\infty} + \frac{4 q_1 q_2 a}{q_2^2 - q_1^2} \int_{s_0}^{\infty} w(s) \frac{d f_1(s)}{d s} d s .$$

Auch hier kann man nachweisen, daß das vom Integralzeichen freie Glied verschwindet. Es ist ferner

$$\frac{d f_1(s)}{d s} = \frac{d}{d s} \left[\sqrt{\frac{q_2^2 + s}{q_1^2 + s}} - 1 \right] = - \frac{1}{2} \frac{q_2^2 - q_1^2}{(q_1^2 + s) \sqrt{(q_1^2 + s)(q_2^2 + s)}} ,$$

$$\text{daher} \quad V_1 = - 2 q_1 q_2 a \int_{s_0}^{\infty} \frac{w(s)}{(q_1^2 + s) \sqrt{(q_1^2 + s)(q_2^2 + s)}} d s . \quad (32)$$

*) Dies ist der Ausdruck für das Potential einer elliptischen Fläche. Auf andere Weise hat denselben Herr F. Grube in seinem Aufsatz „Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoïds“ in Borchardt's Journal, Bd. 69 abgeleitet.

VII.

Nun war nach (4) der Ausdruck für das Potential des Ringkörpers

$$U = \int_0^{2\pi} V m \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} V_1 d\varphi.$$

Setzt man hier die in (31) und (32) gefundenen Ausdrücke für V und V_1 ein, indem man zugleich beachtet, daß nach (3) $a = m \cos \varphi - r$ ist, so findet man

$$U = 2 \varrho_1 \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{w(s)}{V(\varrho_1^2 + s)(\varrho_2^2 + s)} \left[\frac{m \cos \varphi}{s} - \frac{m \cos \varphi - r}{\varrho_1^2 + s} \right] ds$$

oder nach weiterer Umformung

$$U = 2 \varrho_1 \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{(\varrho_1^2 m \cos \varphi + r s) w(s)}{s (\varrho_1^2 + s) V(\varrho_1^2 + s)(\varrho_2^2 + s)} ds. \quad (33)$$

Wir führen nun in $w(s)$ die Größe φ sowohl wie die auf das ursprüngliche rechtwinklige Koordinatensystem bezogenen Koordinaten des Punktes P ein durch die Relationen (3): $a = m \cos \varphi - r$, $c = m \sin \varphi$, $m^2 = a^2 + r^2$, indem wir noch beachten, daß $b = \beta$ ist. Dann ist nach (29)

$$\begin{aligned} \frac{w^2(s)}{s} &= 1 - \frac{a^2}{\varrho_1^2 + s} - \frac{b^2}{\varrho_2^2 + s} - \frac{c^2}{s} \\ &= 1 - \frac{m^2 \cos^2 \varphi - 2 m r \cos \varphi + r^2}{\varrho_1^2 + s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2 + s} - \frac{m^2 \sin^2 \varphi}{s} \\ &= 1 - \frac{m^2 \cos^2 \varphi}{\varrho_1^2 + s} + \frac{m^2 \cos^2 \varphi}{s} + \frac{2 m r \cos \varphi}{\varrho_1^2 + s} - \frac{r^2}{\varrho_1^2 + s} - \frac{m^2}{s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2 + s} \\ &= 1 + \frac{\varrho_1^2 m^2 \cos^2 \varphi + 2 m r s \cos \varphi}{s (\varrho_1^2 + s)} - \frac{r^2}{\varrho_1^2 + s} - \frac{m^2}{s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2 + s} \\ &= 1 + \frac{\varrho_1^4 m^2 \cos^2 \varphi + 2 m \varrho_1^2 r s \cos \varphi + r^2 s^2}{\varrho_1^2 s (\varrho_1^2 + s)} - \frac{r^2 s^2}{\varrho_1^2 s (\varrho_1^2 + s)} - \frac{r^2}{\varrho_1^2 + s} \\ &\quad - \frac{m^2}{s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2 + s} \\ &= \frac{(\varrho_1^2 m \cos \varphi + r s)^2}{\varrho_1^2 s (\varrho_1^2 + s)} + 1 - \frac{r^2}{\varrho_1^2} - \frac{m^2}{s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2 + s} \end{aligned}$$

und nach weiterer Umformung

$$w(s) = \sqrt{\frac{(\varrho_1^2 m \cos \varphi + r s)^2}{\varrho_1^2 (\varrho_1^2 + s)} - \frac{(r^2 - \varrho_1^2) s}{\varrho_1^2} - m^2 - \frac{\beta^2 s}{\varrho_2^2 + s}}$$

Setzt man nun $\varrho^2 : \varrho_1^2 = k$, also $\varrho_2^2 = \varrho_1^2 k$, führt statt s die Variable s' ein durch die Substitution $s = \varrho_1^2 s'$ und schreibt dann wieder s statt s' , so wird zunächst

$$w(s) = \sqrt{\frac{(m \cos \varphi + r s)^2 (s + k) - Q^2}{(s + 1)(s + k)}}, \quad (34)$$

wobei $Q^2 = (a^2 + r^2)(s + 1)(s + k) + \beta^2 s(s + 1) + (r^2 - \varrho_1^2)s(s + 1)(s + k)$ ist, und der Ausdruck für U geht über in folgenden:

$$U = 2 k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{(m \cos \varphi + r s) V(m \cos \varphi + r s)^2 (s + k) - Q^2}{s (s + 1)^2 (s + k)} ds, \quad (35)$$

worin Q^2 den in (34) angegebenen Wert besitzt und s_0 nun die positive Wurzel der Gleichung

$$(m \cos \varphi + r s)^2 (s + k) - Q^2 = 0$$

ist.

Dies ist der Ausdruck für das Potential eines homogenen Ringkörpers mit elliptischem Querschnitt, der für $k = 1$ in den von mir früher entwickelten Ausdruck für einen Ringkörper mit Kreisquerschnitt übergeht. Die partiellen Differentialquotienten nach den Koordinaten α, β, γ ergeben die Komponenten der Anziehung in der Richtung der Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems. Kommt es nur auf die Größe der Anziehung an, so kann man annehmen, daß die ΞH -Ebene mit der Hauptmeridianebene, in der der Punkt liegt, zusammenfällt. Dann wird $\gamma = 0$ und in (35) würde statt $m \alpha$ zu setzen sein. Die beiden Komponenten, deren Richtungen bezüglich der Ξ - und H -Achse parallel sind, bestimmen die ganze Anziehung vollständig, da wegen der symmetrischen Lage der durch die Hauptmeridianebene entstehenden Teile des Körpers die Richtung der anziehenden Kraft in diese Ebene hineinfällt.

Am einfachsten gestaltet sich der Ausdruck für die H -Komponente, da nur Q^2 die Größe β enthält. Um U nach β zu differenzieren, kann man ohne weiteres unter dem ersten Integralzeichen differenzieren. Die Differentiation des Integrals mit der Variable s erfordert zunächst eine Differentiation über die untere Grenze, sodann unter dem Integralzeichen. Der erste Teil fällt jedoch fort, da die zu integrierende Funktion für $s = s_0$ verschwindet. Man erhält daher, wenn die Komponente mit B bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} B &= 2 k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{m \cos \varphi + r s}{s (s + 1)^2 (s + k)} \cdot \frac{\partial V(m \cos \varphi + r s)^2 (s + k) - Q^2}{\partial \beta} ds \\ &= - 2 k \beta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{(m \cos \varphi + r s) ds}{(s + 1) (s + k) V(m \cos \varphi + r s)^2 (s + k) - Q^2}. \quad (36) \end{aligned}$$

Freilich stellen sich der Berechnung der Integrale nicht unbedeutende Schwierigkeiten entgegen, denn wir haben sowohl für das Potential wie für die Komponenten Integrale elliptischer Integrale. Wollte man auch die Reihenfolge der Integrationen umkehren, was zwar nicht direkt, aber immerhin möglich ist, so würden die Schwierigkeiten nicht gehoben, da auch das Integral nach der Variablen φ elliptisch ist. In dessen vereinfacht sich der Ausdruck für den speziellen Fall, daß der angezogene Punkt in der Rotationsachse liegt. Dann wird $m = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} = 0$, s_0 , die positive Wurzel der Gleichung (34), wird von φ unabhängig und man kann daher ohne weiteres die Reihenfolge der Integrationen umkehren und die Integration nach φ ausführen. Man erhält für die Komponente

$$B = - 4 \pi r k \beta \int_{s_0}^{\infty} \frac{s ds}{(s + 1) (s + k) \sqrt{r^2 s^2 (s + k) - Q^2}},$$

wobei $Q^2 = \beta^2 s (s + 1) + (r^2 - e_1^2) s (s + 1) (s + k)$ ist.

Dieser Ausdruck stellt zugleich die Größe der ganzen Anziehung dar. Durch weitere Umformungen ergibt sich

$$B = -4\pi r k \beta \int_{s_0}^{\infty} \frac{s}{(s+1)(s+k)} \frac{ds}{\sqrt{s [e_1^2 (s+1)(s+k) - r^2 (s+k) - \beta^2 (s+1)]}}.$$

Hierbei ist, da der Punkt ein äußerer ist (s. Abschnitt VI, S. 13, Fall 1), s_0 die positive Wurzel der Gleichung zweiten Grades

$$e_1^2 (s+1)(s+k) - r^2 (s+k) - \beta^2 (s+1) = 0.$$

Nennen wir die andere Wurzel s_1 , so kann man schreiben

$$B = -4\pi r k \beta \int_{s_0}^{\infty} \frac{s}{(s+1)(s+k)} \frac{ds}{\sqrt{s (s-s_0)(s-s_1)}}.$$

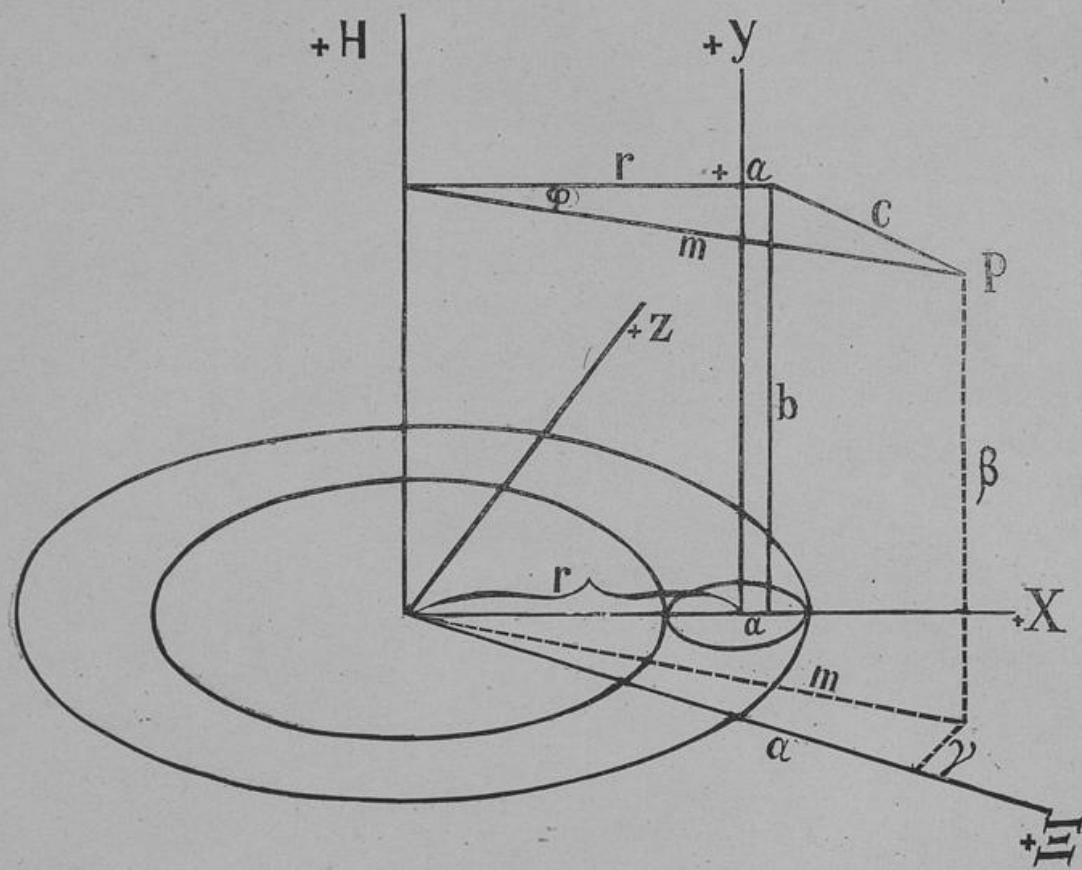
für welches Integral nun leicht die weiteren Reductionen vorgenommen werden können, um den nicht elliptischen Teil vom elliptischen zu trennen und letzteren in der kanonischen Form zu erhalten. Die Anziehung auf Punkte in der Ringachse kann daher als bekannt angesehen werden.

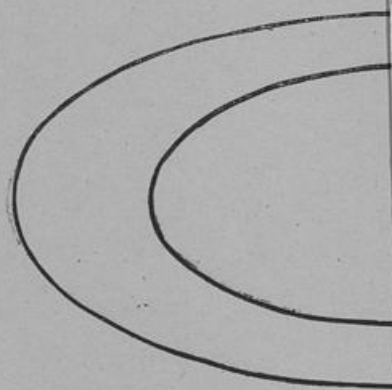
Nun hat Legendre gezeigt, daß, wenn man für einen beliebigen Rotationskörper, dessen Meridian durch den Aequator in zwei kongruente Teile geteilt wird, die Attraktion für die auf der verlängerten Rotationsachse liegenden Punkte kennt, daraus die Anziehung für jeden beliebigen äußeren Punkt gefunden werden kann und zwar mit Hilfe von Reihen und Kugelfunktionen. Diese Entwicklungen beziehen sich allerdings, so weit mir bekannt, nur auf Rotationskörper, die von der Rotationsachse durchschnitten werden. Es steht aber zu erwarten, daß jener Satz sich auch auf solche Rotationskörper ausdehnen läßt, wie die Ringkörper sind. Auch finde ich in einer Abhandlung von Herrn Karl Bremer: Beitrag zur Theorie des Potentials*), die Bemerkung, „daß Boole ebenfalls gezeigt hat, wie man für einen Rotationskörper das Potential in Bezug auf einen beliebigen äußeren Punkt unter Anwendung einfacher Quadraturen zurückführen kann auf das Potential in Bezug auf einen äußeren Punkt, der in der Rotationsachse liegt.“ Auf dem angedeuteten Wege wird es daher wohl möglich sein, die Anziehung der Ringkörper für äußere Punkte mit Hilfe derjenigen für Punkte auf der Rotationsachse darzustellen, worauf ich später zurückzukommen gedenke.

*) Beilage zum Programm des Großherzogl. Friedrich-Franz-Gymnasiums in Barchin. Ostern 1882.

Druckfehler.

- §. 6 letzte Zeile lies Vb. 3 statt Vb. 9.
§. 8 Zeile 10 von oben lies beim dritten Gliede des Aggregats u statt u^2 .
§. 11 " 4 " " fehlt im letzten Gliede des Divisors vor Q_2^2 die Klammer.
§. 10 " 5 " unten lies Q_2^2 statt 2 .
§. 13 " 2 " " lies als untere Grenze des Integrals s_0 statt 0.





+ H

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN Gray Scale

R G B

Y

C

K

G

W

M

6

5

4

3

2

1

A

19

18

17

16

15

14

13

12

11

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

-1

-2

-3

-4

-5

-6

-7

-8

-9

-10

-11

-12

-13

-14

-15

-16

-17

-18

-19

-20

-21

-22

-23

-24

-25

-26

-27

-28

-29

-30

-31

-32

-33

-34

-35

-36

-37

-38

-39

-40

-41

-42

-43

-44

-45

-46

-47

-48

-49

-50

-51

-52

-53

-54

-55

-56

-57

-58

-59

-60

-61

-62

-63

-64

-65

-66

-67

-68

-69

-70

-71

-72

-73

-74

-75

-76

-77

-78

-79

-80

-81

-82

-83

-84

-85

-86

-87

-88

-89

-90

-91

-92

-93

-94

-95

-96

-97

-98

-99

-100

-101

-102

-103

-104

-105

-106

-107

-108

-109

-110

-111

-112

-113

-114

-115

-116

-117

-118

-119

-120

-121

-122

-123

-124

-125

-126

-127

-128

-129

-130

-131

-132

-133

-134

-135

-136

-137

-138

-139

-140

-141

-142

-143

-144

-145

-146

-147

-148

-149

-150

-151

-152

-153

-154

-155

-156

-157

-158

-159

-160

-161

-162

-163

-164

-165

-166

-167

-168

-169

-170

-171

-172

-173

-174

-175

-176

-177

-178

-179

-180

-181

-182

-183

-184

-185

-186

-187

-188

-189

-190

-191

-192

-193

-194

-195

-196

-197

-198

-199

-200

-201

-202

-203

-204

-205

-206

-207

-208

-209

-210

-211

-212

-213

-214

-215

-216

-217

-218

-219

-220

-221

-222

-223

-224

-225

-226

-227

-228

-229

-230

-231

-232

-233

-234

-235

-236

-237

-238

-239

-240

-241

-242

-243

-244

-245

-246

-247

-248

-249

-250

-251

-252

-253

-254

-255

-256

-257

-258

-259

