

Über das logarithmische Potential einer Pascalschen Schnecke.

(Mit einer Figurentafel.)

In einer früheren Arbeit, welche dem Bericht über das Realgymnasium zu Frankfurt a/O vom Jahre 1892 beigegeben wurde, habe ich die Verteilung der Elektrizität auf der Fusspunktfläche einer Kugel behandelt. Es schien mir der Mühe wert, auch einmal für ebene Bereiche die entsprechende Aufgabe zu lösen. Demzufolge betreffen die vorliegenden Untersuchungen, unter Anwendung der Theorie des logarithmischen Potentials, die Verteilung gegebener Massen auf einer leitenden ebenen Fläche, welche von der Fusspunktkurve eines Kreises begrenzt wird. Es soll dabei die Einwirkung eines äusseren, aber in der Ebene des Systems liegenden Massenpunktes vorausgesetzt werden.

Die wichtigsten geometrischen Beziehungen der Fusspunktkurven eines Kreises habe ich in der genannten Abhandlung eingehend erläutert. Diese Kurven lassen sich als besondere Fälle des Cartesischen Ovals auffassen. Sie nehmen verschiedene Gestalt an, je nachdem der Pol, von welchem aus die Fusspunktkurve entworfen wird, innerhalb oder ausserhalb der Fläche des Kreises liegt oder ein Punkt des Kreisumfanges selbst ist. In den beiden ersten Fällen hat man es mit Pascalschen Schneckenlinien (*limaçons*) zu thun, die als Schnecke erster und als Schnecke zweiter Art zu unterscheiden sind. Im dritten Falle wird man auf eine Kardioide geführt.

Die in Rede stehenden Kurven werden auch durch Inversion eines Kegelschnitts von einem Brennpunkte aus erhalten. Die Schnecke erster Art ist das sphärische Spiegelbild einer Ellipse, die Schnecke zweiter Art dasjenige einer Hyperbel, während die Kardioide einer Parabel entspricht. Es ist ersichtlich, dass unsere Kurven den Kegelschnitten gegenüber den Vorteil gewähren, in allen drei Fällen allseitig geschlossen zu sein, ein Umstand, der die Lösung von Aufgaben, welche unter der Herrschaft des logarithmischen Potentials stehen, wesentlich erleichtert. In allen diesen Aufgaben aber handelt es sich — einem Ausspruche Heines zufolge — um die Überwindung der Schwierigkeiten, welche vorzugsweise aus der Entwicklung des Logarithmus einer Entfernung entspringen.

Hinsichtlich der Vorarbeiten führe ich folgendes an. Im Anschluss an Kirchhoffs grundlegende Abhandlung¹⁾ über den Durchgang der Elektrizität durch eine Ebene giebt Heine²⁾ das elektrische Potential einer elliptischen Platte bei beliebigen Einströmungspunkten, ohne jedoch den Logarithmus der Entfernung zweier Punkte selbst analytisch zu entwickeln. Herr C. Neumann beschränkt sich in seinem Werke³⁾ über das logarithmische Potential lediglich auf das Beispiel

¹⁾ Kirchhoff. Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Poggendorffs Annalen, Bd. 64, S. 497.

²⁾ E. Heine. Über die konstante elektrische Strömung in ebenen Platten. Borchardt, Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 79, S. 1.

³⁾ C. Neumann. Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. Leipzig 1877.

des Kreises. Herr A. B. Basset, auf dessen hierher gehörige Arbeiten¹⁾ der Verfasser durch die Güte des Herrn A. G. Greenhill aufmerksam gemacht wurde, beschäftigt sich vornehmlich mit der Berechnung der Potentiale von unendlichen Cylindern, deren Querschnitt ein Kegelschnitt oder seine auf Mittelpunkt oder Brennpunkt bezogene Inverse ist. Weiter hat Herr Thöldte²⁾ unter Benutzung Thomsonscher Koordinaten die Verteilung gegebener Massen auf zwei sich ausschliessenden Kreisen behandelt. Endlich mag nicht unerwähnt bleiben, dass die Pascalschen Schneckenlinien als krummlinige Koordinaten wohl zum erstenmal in einer Arbeit des Herrn Walte³⁾ Verwendung gefunden haben.

Der Zusammenhang der Thomsonschen Koordinaten mit den Pascalschen Schneckenlinien wird durch eine der Gleichung

$$x + iy = \frac{1}{c} (\xi + i\eta)^2$$

entsprechende quadratische Abbildung vermittelt. Dieselbe Umformung aber verwandelt das Quadrat der Entfernung zweier Punkte, nämlich

$$\begin{aligned} R^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ &= [(x + iy) - (x_1 + iy_1)] \cdot [(x - iy) - (x_1 - iy_1)] \end{aligned}$$

in den Ausdruck

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{c^2} [(\xi + i\eta)^2 - (\xi_1 + i\eta_1)^2] \cdot [(\xi - i\eta)^2 - (\xi_1 - i\eta_1)^2] \\ &= \frac{1}{c^2} [(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2] \cdot [(\xi + \xi_1)^2 + (\eta + \eta_1)^2]. \end{aligned}$$

P^2 stellt sich also als Produkt zweier Faktoren von derselben Form dar, und es ist augenscheinlich, dass man die Entwicklung von $\log R$ sofort angeben können, sobald man eine zweckentsprechende Darstellung der einzelnen Faktoren von P^2 aufzufinden imstande ist. Dies ist aber, wie man aus dem Folgenden erkennen wird, der Fall bei den Pascalschen Schneckenlinien, auf welche man durch die Substitutionen

$$\xi + i\eta = ic \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\omega + i\vartheta)$$

und

$$\xi + i\eta = \frac{i}{\varrho + i\lambda}$$

geführt wird.

Bei der Schnecke erster Art leistet die Entwicklung von $\log R$ in eine trigonometrische Reihe das Erforderliche. Anders ist es bei der Schnecke zweiter Art. Hier finden die Foursierschen Integrale und die Integraleigenschaften der Kreis- und der Hyperbelfunktionen ausgiebige Anwendung. Den Fall der Kardioiden kann man zwar in entsprechender Weise direkt erledigen; ich habe es jedoch vorgezogen, das fertige Resultat durch eine Grenzbetrachtung aus den für die Pascalschen Schnecken geltenden Formeln abzuleiten.

Die gefundenen Resultate, deren Vergleich auch vom funktionstheoretischen Standpunkte aus ein gewisses Interesse bietet, lassen sich schliesslich durch Ausführung der Summationen und Berechnung der Integrale wesentlich vereinfachen. Höhere Transcendente als elliptische Funktionen kommen dabei nicht vor.

¹⁾ A. B. Basset. On the motion of a liquid in and about cylinders whose transverse sections are the inverse of confocal ellipses with respect to their centre. Quarterly Journal of Mathem. Vol. XIX, p. 190.

On the motion of a liquid in and about certain quartic and other cylinders. Quarterly Journ. of Mathem. Vol. XX, p. 234.

²⁾ Richard Thöldte. Über die Verteilung gegebener Massen auf Kreisflächen. Dessau 1889.

³⁾ Wilhelm Walte. Das Problem des stationären Temperaturzustandes für einen Rotationskörper, dessen Meridian eine gewisse Kurve vierter Ordnung ist. Leipzig 1880. — Diese Arbeit ist mir erst vor kurzem bekannt geworden.

Die Pascalsche Schnecke erster Art.

Der Theorie der elektrischen Verteilung im Raume hat Herr C. Neumann¹⁾ bekanntlich eine entsprechende Theorie für ebene Bereiche zur Seite gestellt, indem er die elektrischen Fluida durch zwei andere Stoffe ersetzte, deren Teilchen bei ungleichen Vorzeichen eine Anziehung, bei gleichen Vorzeichen eine Abstossung im geraden Verhältnis ihrer Massen und im umgekehrten Verhältnis der ersten Potenz ihrer Entfernung auf einander ausüben. Teilt man einer leitenden ebenen Fläche, die von einer geschlossenen Kurve begrenzt wird, eine gewisse Menge des angenommenen Fluidums mit, so wird dieses Fluidum nach Eintritt des Gleichgewichts den Rand der Fläche mit einer ausserordentlich dünnen Schicht in der Weise bedecken, dass das logarithmische Potential in allen Punkten der Fläche konstant ist. Die Dichtigkeit der Belegung wird nur so lange von der geometrischen Beschaffenheit der Randkurve allein abhängen, als die leitende Fläche isoliert und jeder Influenz entrückt ist.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Verteilung gegebener Massen auf einem ebenen Leiter zu bestimmen, der die Gestalt einer Pascalschen Schnecke erster Art besitzt. Der Konduktor, welcher von Nichtleitern umgeben ist, sei anfänglich mit einer gewissen Menge des Fluidums geladen und werde der Einwirkung eines äusseren Massenpunktes unterworfen. Es soll die Dichtigkeit der Belegung in einem beliebigen Element des Randes berechnet werden.

1. Einführung der zur Verwendung kommenden Koordinaten.

Bei der Lösung der Aufgabe kommt es vor allen Dingen darauf an, in bequemer und einfacher Weise ausdrücken zu können, dass ein Punkt P der Ebene innerhalb oder ausserhalb der Randkurve unseres Flächenstückes oder auf dem Rande selbst liegt. Zu diesem Zwecke führen wir an Stelle der geradlinigen Koordinaten (x, y) krummlinige Koordinaten (ϑ, ω) ein. Dies geschieht, falls c eine Konstante bezeichnet, durch die Gleichungen²⁾

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= c \frac{\Im \sin^2 \vartheta - \sin^2 \omega}{(\mathfrak{C} \vartheta \vartheta - \cos \omega)^2}, \\ y &= c \frac{2 \Im \sin \vartheta \sin \omega}{(\mathfrak{C} \vartheta \vartheta - \cos \omega)^2}. \end{aligned}$$

Weil dann

$$x^2 + y^2 = c^2 \left(\frac{\mathfrak{C} \vartheta \vartheta + \cos \omega}{\mathfrak{C} \vartheta \vartheta - \cos \omega} \right)^2$$

ist, so ergibt sich, wenn wir die Grösse ω entfernen, die Gleichung

$$(2) \quad (x^2 + y^2 - 2cx \mathfrak{C} \vartheta \vartheta + c^2)^2 = \left(\frac{2c}{\Im \sin^2 \vartheta} \right)^2 (x^2 + y^2).$$

Dieselbe stellt für konstante Werte des Parameters ϑ eine Schar von ineinander geschachtelten Pascalschen Schneckenlinien erster Art (Fig. 1) dar, welche die x -Achse zur Symmetrieachse und zwei Punkte O und O_1 derselben, falls $OO_1 = c$ ist, zu Polen haben. Eine von diesen Kurven begrenzt das in der Aufgabe gegebene Stück der leitenden Ebene. Nimmt der Parameter ϑ von ∞ bis 0 ab, so durchläuft der Punkt C_1 , der innere Scheitel der Kurve, die Strecke O_1O , der äussere Scheitel D_1 dagegen die positive x -Achse vom Punkte O_1 an bis zur Unendlichkeit. Die innerste Kurve entspricht demnach dem Werte $\vartheta = \infty$ und wird durch den

¹⁾ C. Neumann. A. a. O. S. 69 und S. 339.

²⁾ Der kürzeren Schreibweise wegen bedienen wir uns oft der Hyperbelfunktionen. Es ist

$$\mathfrak{C} \vartheta \vartheta = \frac{1}{2} (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) = \cosh \vartheta, \quad \Im \sin \vartheta = \frac{1}{2} (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) = \sinh \vartheta, \quad \mathfrak{C} \vartheta \vartheta = \frac{1}{\mathfrak{C} \vartheta \vartheta} = \frac{1}{\cosh \vartheta}.$$

Pol O_1 selbst dargestellt. Die äusserste Kurve hat den Parameter $\vartheta = 0$; sie stimmt mit der negativen Hälfte der x -Achse überein und verläuft im übrigen ganz im Unendlichen.

Die Elimination von ϑ aus den Gleichungen (1) verschafft uns ferner die Gleichung

$$(3) \quad (x^2 + y^2 + 2cx \operatorname{ctg}^2 \omega + c^2)^2 = \left(\frac{2c}{\sin^2 \omega} \right)^2 \cdot (x^2 + y^2).$$

Sie giebt für konstante Werte des Parameters ω eine Schar von ineinander geschachtelten Pascalschen Schneckenlinien zweiter Art, welche ebenfalls symmetrisch zur x -Achse liegen und dieselben Punkte O und O_1 zu Polen haben. Der Pol O_1 ist allen Kurven gemeinsam, während die Scheitel C_2, O_2, D_2 für die verschiedenen Werte von ω die Punkte der negativen x -Achse ausmachen. Die äusserste Kurve hat den Parameter $\omega = 0$; sie stimmt mit dem von O_1 aus zu rechnenden Teile der positiven x -Achse überein und liegt im übrigen ganz in der Unendlichkeit. Für $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$ wird die Kurve ein Kreis, der O zum Mittelpunkt und $OO_1 = c$ zum Radius hat. Für $\omega = \pm \pi$ endlich fällt sie mit der Strecke OO_1 selbst zusammen.

Da das Vorzeichen des Parameters ω ohne Einfluss auf die Gestalt und Lage der ω -Kurve ist, so treffen wir die Festsetzung, dass einem negativen Werte von ω derjenige Kurvenzweig entsprechen soll, welcher unterhalb der Symmetrieachse liegt. Somit werden alle Punkte einer ϑ -Kurve der Reihe nach erhalten, wenn ω die Werte von $-\pi$ über 0 bis $+\pi$ durchläuft.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P einer ϑ -Kurve oder einer ω -Kurve mit den Polen O und O_1 durch gerade Linien und bezeichnet OP mit r , O_1P mit r_1 , so erhält die geometrische Bedeutung der Parameter ϑ und ω unmittelbar aus den Formeln

$$(2a) \quad \cos \vartheta = \frac{r + c}{r_1},$$

$$(3a) \quad \cos \omega = \frac{r - c}{r_1},$$

die sich in einfacher Weise aus den Gleichungen (2) und (3) ableiten lassen. Auch bedeutet ω den Winkel, den die in O_1 an die einzelnen Zweige der ω -Kurven gelegte Tangente mit der Richtung O_1X bildet, während es für die Grösse ϑ eine so einfache Beziehung nicht zu geben scheint.

Weil nach den Gleichungen (1)

$$(4) \quad x + iy = -c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} (\omega + i\vartheta),$$

$(x + iy)$ also eine Funktion des Arguments $(\omega + i\vartheta)$ allein ist, so erkennen wir, dass die beiden Scharen von Schneckenlinien sich sämtlich unter rechten Winkeln schneiden. Die Lage irgend eines Punktes P der Ebene wird demnach durch die krummlinigen und orthogonalen Koordinaten (ϑ, ω) in völlig eindeutiger Weise bestimmt sein, falls

$$-\infty \geq \vartheta \geq 0, -\pi \leq \omega \leq +\pi$$

ist. Nur der Pol O_1 , für welchen ω einen beliebigen Wert hat, macht hiervon scheinbar eine Ausnahme, denn eben diese Vieldeutigkeit giebt an, auf welcher ω -Kurve man zum Punkte O_1 gelangt. Ebenso deutet das doppelte Vorzeichen bei $\omega = \pm \pi$ und $\omega = \pm 0$ an, welchem Ufer der Symmetrieachse der betreffende Punkt angehört.

Die Differentialgleichung des logarithmischen Potentials

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ändert, wie man weiss, durch Einführung der Koordinaten (ϑ, ω) ihre Gestalt nicht. Eine Lösung der neuen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2} = 0$$

ist das Produkt

$$V = \Theta \cdot \Omega,$$

in welchem zum Beispiel

$$\Theta = k_1 \cos n\vartheta + k_2 \sin n\vartheta, \quad \Omega = k_3 \cos n\omega + k_4 \sin n\omega$$

gesetzt werden darf. Da das allgemeine Integral sich als eine Summe von solchen Produkten $\Theta \cdot \Omega$, also als eine allgemeine trigonometrische Reihe darstellt, so liegt es nahe, auch den Logarithmus der Entfernung zweier Punkte in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln.

Endlich ergeben sich für die Bogenelemente auf einer ϑ - oder ω -Kurve die Formeln

$$(5) \quad \begin{aligned} ds_{\vartheta} &= 2c \sqrt{\frac{\cos \vartheta + \cos \omega}{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}} d\omega, \\ ds_{\omega} &= 2c \sqrt{\frac{\cos \vartheta + \cos \omega}{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}} d\vartheta, \end{aligned}$$

II. Entwicklung des Logarithmus der Entfernung zweier Punkte.

Sind (x, y) und (x_1, y_1) die Cartesischen Koordinaten irgend zweier Punkte P und P_1 , so ist das Quadrat ihrer Entfernung

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Um die neuen Koordinaten (ϑ, ω) an Stelle von (x, y) einzuführen, haben wir den Gleichungen (1) entsprechend

$$x_1 = c \frac{\sin^2 \vartheta_1 - \sin^2 \omega_1}{(\cos \vartheta_1 - \cos \omega_1)^2}, \quad y_1 = c \frac{2 \sin \vartheta_1 \sin \omega_1}{(\cos \vartheta_1 - \cos \omega_1)^2}$$

zu setzen und den gefundenen Ausdruck auf eine einfache Form zu bringen. Diese etwas weitläufige Rechnung lässt sich folgendermassen abkürzen. Nach einer in der Einleitung gemachten Bemerkung ist

$$R^2 = [(x + iy) - (x_1 + iy_1)] \cdot [(x - iy) - (x_1 - iy_1)].$$

Da nun nach (4)

$$x + iy = -c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} (\omega + i\vartheta),$$

mithin

$$x - iy = -c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} (\omega - i\vartheta),$$

$$x_1 + iy_1 = -c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} (\omega_1 + i\vartheta_1),$$

$$x_1 - iy_1 = -c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} (\omega_1 - i\vartheta_1)$$

ist, so folgt mit Anwendung einer goniometrischen Formel in einfachster Weise zunächst

$$(x + iy) - (x_1 + iy_1) = c \frac{\sin \frac{1}{2} (\omega + i\vartheta + \omega_1 + i\vartheta_1) \sin \frac{1}{2} (\omega + i\vartheta - \omega_1 - i\vartheta_1)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\omega + i\vartheta) \sin^2 \frac{1}{2} (\omega_1 + i\vartheta_1)},$$

$$(x - iy) - (x_1 - iy_1) = c \frac{\sin \frac{1}{2} (\omega - i\vartheta + \omega_1 - i\vartheta_1) \sin \frac{1}{2} (\omega - i\vartheta - \omega_1 + i\vartheta_1)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\omega - i\vartheta) \sin^2 \frac{1}{2} (\omega_1 - i\vartheta_1)}.$$

Also erhalten wir

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{4c^2} \frac{(\cos \vartheta - \cos \omega)^2 \cdot (\cos \vartheta_1 - \cos \omega_1)^2}{[\cos (\vartheta_1 + \vartheta) - \cos (\omega_1 + \omega)] \cdot [\cos (\vartheta_1 - \vartheta) - \cos (\omega_1 - \omega)]}.$$

Nun ist

$$\cos \vartheta - \cos \omega = \frac{1}{2} e^{\vartheta} (1 - e^{-\vartheta + i\omega}) (1 - e^{-\vartheta - i\omega}).$$

Mithin gilt für alle positiven Werte von ϑ , weil ω zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, die Formel

$$\log (\mathfrak{E} \vartheta - \cos \omega) = \log \frac{e^{\vartheta}}{2} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{-n\vartheta} \cdot \cos n\omega.$$

Werden auch die übrigen Faktoren von $\frac{1}{R^2}$ in Reihen verwandelt, so ergibt sich die gesuchte Entwicklung

$$(6) \quad T = \log \frac{1}{R} = \log \frac{e^{\vartheta}}{4c} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ 2e^{-n\vartheta} \cos n\omega + 2e^{-n\vartheta_1} \cos n\omega_1 - e^{-n(\vartheta_1 + \vartheta)} \cos n(\omega_1 + \omega) - e^{-n(\vartheta_1 - \vartheta)} \cos n(\omega_1 - \omega) \right\}$$

oder in anderer Anordnung

$$(6a) \quad T = K + \sum_{n=1}^{n=\infty} (G \cdot \cos n\omega + H \cdot \sin n\omega),$$

wo

$$K = \log \frac{e^{\vartheta}}{4c} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{-n\vartheta_1} \cdot \cos n\omega_1,$$

$$G = \frac{2}{n} e^{-n\vartheta_1} \cdot \mathfrak{E} \vartheta \cos n\omega_1 - \frac{2}{n} e^{-n\vartheta},$$

$$H = \frac{2}{n} e^{-n\vartheta_1} \cdot \mathfrak{S} \vartheta \sin n\omega_1.$$

Diese Reihe konvergiert für alle positiven Werte von ϑ und ϑ_1 , für welche $\vartheta_1 > \vartheta$ ist. Wäre $\vartheta_1 < \vartheta$, so wären ϑ und ϑ_1 miteinander zu vertauschen.

III. Bestimmung der Dichtigkeit.

Nunmehr wenden wir uns zur Berechnung der Verteilung des gegebenen Fluidums auf einer Kurve, deren Parameter ϑ sei. Wir teilen dem von der Kurve begrenzten Ebenenstück eine gewisse Menge M des Fluidums mit und lassen auf die leitend gedachte, isolierte Fläche eine Masse M_0 wirken, deren Träger der ausserhalb des Konduktors, aber in der Ebene desselben liegende Punkt P_0 mit den Koordinaten (ϑ_0, ω_0) ist.

Dann wird das Fluidum nach Eintritt des Gleichgewichtes sich so auf dem Rande des Leiters ausgebreitet haben, dass das Gesamtpotential der Belegung und des influenzierenden Massenpunktes auf irgend einen Punkt $P_1 (\vartheta_1, \omega_1)$ im Innern des Konduktors konstant ist. Dies wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$(7) \quad V + V_0 = C \text{ oder } V = V_1, \text{ falls } V_1 = C - V_0 \text{ ist.}$$

Die Potentialfunktion der Belegung hat den Wert

$$V = V_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} = \int D \cdot \log \frac{1}{R_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega}} ds_{\vartheta},$$

wenn D die gesuchte Dichtigkeit und ds_{ϑ} das Bogenelement der Kurve bezeichnet. Da die Integration über den ganzen Rand des Flächenstücks zu erstrecken ist, so geht die Gleichung mit Benutzung des Wertes von ds_{ϑ} aus (5) über in

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} 2cD \sqrt{\frac{\cos \vartheta + \cos \omega}{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}} \cdot T_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} \cdot d\omega.$$

Lassen wir die besonderen Fälle, in denen der Parameter ϑ die Grenzwerte ∞ oder 0 hat, vorläufig noch ausser acht, so ist die Dichtigkeit D offenbar eine überall endliche und stetige Funktion von ϑ und ω . Daher hat auch der Ausdruck

$$2cD \sqrt{\frac{\cos \vartheta + \cos \omega}{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}}$$

für keinen Punkt des Randes, d. h. für keinen Wert von ω , der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, eine Unterbrechung seiner Stetigkeit aufzuweisen. Hiervon könnte nur der Punkt C_1 , der innere Scheitel der Kurve, in welchem $\omega = \pm \pi$, also zweideutig ist, eine Ausnahme machen. Wird auch von diesem Grenzfall zunächst noch abgesehen, so lässt sich der Ausdruck, als Funktion von ω allein betrachtet, in eine nach den Kosinus und Sinus von ω fortschreitende Fouriersche Reihe entwickeln, die in gleichem Grade konvergiert. Wir setzen daher

$$(8) \quad 2cD \sqrt{\frac{\cos \vartheta + \cos \omega}{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}} = A_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} (A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega)$$

und versuchen die Koeffizienten A_0 , A_m , B_m , dieser Entwicklung zu bestimmen. Da T nach (6a) ebenfalls eine trigonometrische Reihe, nämlich

$$T = T_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} = K + \sum_{n=1}^{n=\infty} (G \cos n\omega + H \sin n\omega)$$

ist, so sind beide Reihen zu multiplizieren. Bei der dann folgenden Integration des Produktes sind die Integraleigenschaften der Kreisfunktionen in ausgiebigster Weise zu verwenden. Es ist, wenn alle Summen von 1 bis ∞ genommen werden,

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_0 K d\omega = 2\pi A_0 K,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K \left(\sum_m A_m \cos m\omega \right) d\omega = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} K \left(\sum_m B_m \sin m\omega \right) d\omega,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_0 \left(\sum_n G \cos n\omega \right) d\omega = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} A_0 \left(\sum_n H \sin n\omega \right) d\omega,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_m B_m \sin m\omega \right) \left(\sum_n G \cos n\omega \right) d\omega = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_m A_m \cos m\omega \right) \left(\sum_n H \sin n\omega \right) d\omega,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_m A_m \cos m\omega \right) \left(\sum_n G \cos n\omega \right) d\omega = \pi \sum_n A_n \cdot G,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_m B_m \sin m\omega \right) \left(\sum_n H \sin n\omega \right) d\omega = \pi \sum_n B_n \cdot H.$$

Demnach ergibt sich für die Potentialfunktion der Belegung

$$(9) \quad V = 2\pi A_0 \cdot K + \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot G + \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cdot H.$$

Was den Wert des Koeffizienten A_0 betrifft, so sind wir schon jetzt imstande, denselben zu bestimmen. Dies geschieht durch die oben gemachte Annahme, dass die Gesamtmasse der Belegung M , d. h.

$$\int D \cdot ds_{\mathcal{P}} = M$$

ist, falls abermals über den ganzen Rand des Flächenstücks integriert wird. Führen wir aus (5) und (8) die Werte von $ds_{\mathcal{P}}$ und D in die Gleichung ein, so muss

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ A_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} (A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega) \right\} d\omega$$

oder

$$(9a) \quad M = 2\pi A_0 \text{ sein. Also ist} \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} M.$$

Nunmehr gehen wir an die Berechnung der Differenz $V_1 = C - V_0$. Für V_0 gilt die Formel des logarithmischen Potentials

$$V_0 = M_0 \cdot \log \frac{1}{R_{\mathcal{P}_0 \omega_0}} = M_0 \cdot T_{\mathcal{P}_0 \omega_0}^{\mathcal{P}_1 \omega_1} = M_0 \cdot T_0.$$

Dies giebt, weil P_0 ein äusserer Punkt, also $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_0$ ist, nach Gleichung (6a)

$$(10) \quad V_0 = M_0 \left\{ K_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (G_0 \cdot \cos n\omega_0 + H_0 \cdot \sin n\omega_0) \right\},$$

wo die Koeffizienten K_0 , G_0 , H_0 aus den entsprechenden Werten von K , G , H der Gleichungen (6a) dadurch erhalten werden, dass $\mathcal{P}_0$ an die Stelle von $\mathcal{P}$ tritt.

Der innere Punkt P_1 hat die Koordinaten $(\mathcal{P}_1, \omega_1)$. Fiele derselbe mit dem Pol O_1 zusammen, so wäre $\mathcal{P}_1 = \infty$, also $e^{-\mathcal{P}_1} = 0$. Für diesen besonderen Fall geht mithin die Gleichung $V = V_1$ über in

$$M \cdot \log \frac{e^{\mathcal{P}}}{4c} - 2\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} A_n e^{-n\mathcal{P}} = C - M_0 \left(\log \frac{e^{\mathcal{P}_0}}{4c} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{n} e^{-n\mathcal{P}_0} \cdot \cos n\omega_0 \right).$$

Daher ist

$$(11) \quad C = M \cdot \log \frac{e^{\mathcal{P}}}{4c} - 2\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} A_n e^{-n\mathcal{P}} + M_0 \left(\log \frac{e^{\mathcal{P}_0}}{4c} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{n} e^{-n\mathcal{P}_0} \cdot \cos n\omega_0 \right).$$

Nach diesen Vorbereitungen führen wir die Werte von V aus (9), V_0 aus (10) und C aus (11) in die Gleichung (7)

$$V = C - V_0$$

ein. Dabei kommen alle Glieder, welche von C herrühren, in Fortfall. Bei passender Anordnung finden wir endlich die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\omega_1 + Q_n \sin n\omega_1) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (P'_n \cos n\omega_1 + Q'_n \sin n\omega_1),$$

falls gesetzt wird

$$P_n = (\pi A_n \operatorname{Coj} n\vartheta - M) \frac{e^{-n\vartheta_1}}{n}, \quad Q_n = \pi B_n \operatorname{Sin} n\vartheta \frac{e^{-n\vartheta_1}}{n},$$

$$P'_n = M_0 (1 - \operatorname{Coj} n\vartheta_0 \cos n\omega_0) \frac{e^{-n\vartheta_1}}{n}, \quad Q'_n = -M_0 \operatorname{Sin} n\vartheta_0 \sin n\omega_0 \frac{e^{-n\vartheta_1}}{n}.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung nach $\cos n\omega_1$ und $\sin n\omega_1$ fortschreitende Reihen darstellen, so müssen auch die entsprechenden Koeffizienten gleich sein. Somit ergibt sich

$$(12) \quad A_n = \frac{M + M_0}{\pi \operatorname{Coj} n\vartheta} - \frac{M_0 \operatorname{Coj} n\vartheta_0 \cos n\omega_0}{\pi \operatorname{Coj} n\vartheta},$$

$$B_n = -\frac{M_0 \operatorname{Sin} n\vartheta_0 \sin n\omega_0}{\pi \operatorname{Sin} n\vartheta}.$$

Durch Einsetzen von A_0 , A_n und B_n in die Gleichung (8) erhalten wir schliesslich für die gesuchte Dichtigkeit der Belegung im Punkte $P(\vartheta, \omega)$ des Randes den Wert:

$$(13) \quad D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(\operatorname{Coj} \vartheta - \cos \omega)^2}{\operatorname{Coj} \vartheta + \cos \omega}} \left\{ \frac{1}{2} M + (M + M_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\omega}{\operatorname{Coj} n\vartheta} \right.$$

$$\left. - M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Coj} n\vartheta_0 \cos n\omega_0}{\operatorname{Coj} n\vartheta} \cos n\omega + \frac{\operatorname{Sin} n\vartheta_0 \sin n\omega_0}{\operatorname{Sin} n\vartheta} \sin n\omega \right) \right\}.$$

Diese Formel repräsentiert die Lösung der gestellten Aufgabe.

IV. Summation der Reihen.

Die in der Formel (13) auftretenden Summen

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\omega}{\operatorname{Coj} n\vartheta},$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Coj} n\vartheta_0 \cos n\omega_0}{\operatorname{Coj} n\vartheta} \cos n\omega,$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} n\vartheta_0 \sin n\omega_0}{\operatorname{Sin} n\vartheta} \sin n\omega,$$

lassen sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen berechnen. Wir bringen dabei die Jacobische Schreibweise zur Anwendung, weil diese Form der elliptischen Funktionen sich fast von selbst darbietet. Zur Abkürzung bezeichnen wir $\sin am$ mit sn , $\cos am$ mit cn , $A am$ mit A , $ctg am$ mit ct . Alle elliptischen Funktionen beziehen sich auf den Modul k , der stets reell und kleiner als 1 ist. Der komplementäre Modul ist $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Die vollständigen elliptischen Integrale endlich werden mit K und K' bezeichnet, so dass $4K$ und $2iK'$ die Perioden von $\sin am \pmod k$ sind.

Ersetzen wir $\operatorname{Coj} n\vartheta$ in S_1 durch Exponentialfunktionen, so ist

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\omega}{\frac{1}{2}(e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta})} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^n \cos n\omega}{1 + q^{2n}},$$

falls $q = e^{-\vartheta}$ ist. Daher ergibt sich nach Jacobi (Fundamenta nova, p. 103, No. 25)

$$(14) \quad S_1 = \frac{K}{\pi} \cdot \mathcal{A} \frac{K}{\pi} \omega - \frac{1}{2}.$$

In dieser Gleichung kann K als bekannt¹⁾ angesehen werden.

S_2 lässt sich auf S_1 zurückführen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S} \sin n \vartheta_0 \cos n \omega_0 \cos n \omega \\ &= \frac{1}{2} \cos n i \vartheta_0 [\cos n (\omega + \omega_0) + \cos n (\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{4} [\cos n (\omega + \omega_0 + i \vartheta_0) + \cos n (\omega + \omega_0 - i \vartheta_0) + \cos n (\omega - \omega_0 + i \vartheta_0) + \cos n (\omega - \omega_0 - i \vartheta_0)]. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich mit Benutzung von (14)

$$\begin{aligned} S_2 = \frac{K}{4\pi} \left\{ \mathcal{A} \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0 + i \vartheta_0) + \mathcal{A} \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0 - i \vartheta_0) \right. \\ \left. + \mathcal{A} \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0 + i \vartheta_0) + \mathcal{A} \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0 - i \vartheta_0) \right\} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

oder infolge des Additionstheorems der Funktion $\mathcal{A}$

$$(15) \quad S_2 = \frac{K}{2\pi} \cdot \mathcal{A} \frac{K}{\pi} i \vartheta_0 \left\{ \frac{\mathcal{A} \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0) \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} i \vartheta_0} + \frac{\mathcal{A} \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0) \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} i \vartheta_0} \right\} - \frac{1}{2}.$$

Um die Berechnung von S_3 in ähnlicher Weise bewerkstelligen zu können, müssen wir zunächst den Wert von

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n \omega}{\mathfrak{S} \sin n \vartheta}$$

ermitteln. Ersetzen wir wiederum $\mathfrak{S} \sin n \vartheta$ durch Exponentialfunktionen, so ist

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n \omega}{\frac{1}{2} (e^{\frac{n \vartheta}{2}} - e^{-\frac{n \vartheta}{2}})} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4 q^n \sin n \omega}{1 - q^{2n}},$$

falls abermals $q = e^{-\frac{\vartheta}{2}}$ gesetzt wird. Dies giebt die Zetafunktion Jacobis (Fund. nov. p. 133, No. 1), so dass folgt

$$S = \frac{K}{\pi} \cdot Z \frac{K}{\pi} \omega.$$

Da nun

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S} \sin n \vartheta_0 \sin n \omega_0 \sin n \omega \\ &= \frac{i}{2} \sin n i \vartheta_0 [\cos n (\omega + \omega_0) - \cos n (\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{i}{4} [\sin n (\omega + \omega_0 + i \vartheta_0) - \sin n (\omega + \omega_0 - i \vartheta_0) - \sin n (\omega - \omega_0 + i \vartheta_0) + \sin n (\omega - \omega_0 - i \vartheta_0)] \end{aligned}$$

¹⁾ Da q eine gegebene Grösse hat, so lassen sich die Konstanten der elliptischen Funktionen leicht finden. Es ist

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \pi (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2, \\ k &= \left(\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \right)^2, \\ k &= \sqrt{1 - k'^2}. \end{aligned}$$

K' berechnet man am besten aus der Gleichung $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$, aus welcher, weil $q = e^{-\frac{\vartheta}{2}}$ ist, $\vartheta = \pi \frac{K'}{K}$, d. h. $\frac{K'}{\vartheta} = \frac{K}{\pi}$ folgt.

ist, so ergibt sich

$$S_3 = \frac{iK}{4\pi} \left\{ Z \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0 + i\vartheta_0) - Z \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0 - i\vartheta_0) - Z \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0 + i\vartheta_0) + Z \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0 - i\vartheta_0) \right\}.$$

Wir wenden das Additionstheorem der Zetafunktion, das durch die Gleichung (Fund. nov. p. 152)

$$Z(u+a) - Z(u-a) = 2Z(a) - \frac{2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

ausgesprochen wird, an und erhalten

$$(16) \quad S_3 = L \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} i\vartheta_0 \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0)} - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} i\vartheta_0 \operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0)} \right\},$$

falls gesetzt wird

$$L = -\frac{iKk^2}{2\pi} \operatorname{sn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0 \operatorname{cn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0 \operatorname{dn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0.$$

Durch Addition von (15) und (16) finden wir für $S_2 + S_3$ eine Formel, die bei hinreichender Vereinfachung in folgende ¹⁾ übergeht:

$$(17) \quad S_2 + S_3 = \frac{K}{2\pi} \frac{\operatorname{dn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0}{\operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} i\vartheta_0} \left\{ \frac{1}{\operatorname{dn} \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0) + i \operatorname{cn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0} + \frac{1}{\operatorname{dn} \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0) - i \operatorname{cn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0} \right\} - \frac{1}{2}.$$

Führen wir schliesslich S_1 und $(S_2 + S_3)$ in (13) ein, so nimmt der Ausdruck für die Dichtigkeit der Belegung im Punkte $P(\vartheta, \omega)$ des Randes die Form an:

$$(18) \quad D = \frac{K}{2c\pi^2} \sqrt{\frac{(\operatorname{dn} \vartheta - \cos \omega)^3}{\operatorname{dn} \vartheta + \cos \omega}} \left\{ (M + M_0) \operatorname{dn} \frac{K}{\pi} \omega - \frac{1}{2} M_0 \frac{\operatorname{dn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0}{\operatorname{sn}^2 \frac{K}{\pi} i\vartheta_0} \left[\frac{1}{\operatorname{dn} \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0) + i \operatorname{cn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0} + \frac{1}{\operatorname{dn} \frac{K}{\pi} (\omega - \omega_0) - i \operatorname{cn} \frac{K}{\pi} i\vartheta_0} \right] \right\}.$$

In dieser Formel kann jederzeit $\frac{K}{\pi}$ mit $\frac{K'}{\vartheta}$ vertauscht werden.

V. Besondere Fälle.

a) Wirken keine äusseren Kräfte, so ist $M_0 = 0$ zu setzen. Dann nimmt die Dichtigkeit der Belegung einen einfachen Wert an, nämlich

$$D = \frac{K}{2c\pi^2} \sqrt{\frac{(\operatorname{dn} \vartheta - \cos \omega)^3}{\operatorname{dn} \vartheta + \cos \omega}} \cdot M \cdot \operatorname{dn} \frac{K}{\pi} \omega.$$

Dabei herrscht im Scheitel D_1 , für welchen $\omega = 0$ ist, die Dichtigkeit

$$D = \frac{K}{c\pi^2} \frac{\operatorname{sn}^3 \frac{1}{2} \vartheta}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} \vartheta} \cdot M.$$

¹⁾ An Stelle von (17) lässt sich eine andere Formel und zwar dadurch ableiten, dass man in dem ursprünglichen Ausdrucke für $S_2 + S_3$ das allgemeine Glied der Summe auf den Nenner $\operatorname{sn} 2n\vartheta$ bringt. Dann tritt die Funktion Z allein auf, aber diese Transcendente bezieht sich nicht mehr auf $q = e^{-\vartheta}$, sondern auf $q_1 = e^{-2\vartheta}$. Für die numerische Berechnung von K , k' und k ist dies zwar ein Vorteil, indes wird die weitere Rechnung dadurch erschwert, dass ϑ ausser in K auch in der Klammer des Arguments vorkommt, also z. B. eine Funktion $Z \frac{K}{\pi} (\omega + \omega_0 + i\vartheta + i\vartheta_0)$ erscheint. Übrigens wird S_1 aus $(S_2 + S_3)$ erhalten, indem man zugleich $\vartheta_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$ setzt.

im Scheitel C_1 dagegen, es mag $\omega = +\pi$ oder $\omega = -\pi$ gesetzt werden, die Dichtigkeit

$$D = \frac{k'K}{c\pi^2} \frac{\operatorname{Coj}^3 \frac{1}{2}\vartheta}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\vartheta} \cdot M.$$

Hier zeigt es sich deutlich, dass die aufgestellte Formel auch für den bisher ausgeschlossenen Fall, in welchem der Parameter ω seinen oberen oder unteren Grenzwert erhält, Gültigkeit besitzt. Dies bleibt auch dann noch richtig, wenn M_0 nicht mehr gleich 0 ist.

b) Ist M_0 von 0 verschieden, so ist die Verteilung wesentlich von der Lage des Punktes P_0 (ϑ_0, ω_0), des Trägers der Masse M_0 , abhängig.

Liegt P_0 im Unendlichen, so ist zu gleicher Zeit $\vartheta_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$. Dann wird in (18) der Faktor von $\frac{1}{2}M_0$ zu $2 \cdot \frac{K}{\pi} \omega$, und die neue Formel, die M_0 nicht mehr enthält, stimmt mit der unter (a) gegebenen völlig überein. Ein in der Unendlichkeit liegender Massenpunkt wirkt mithin, wie vorausszusehen war, so, als ob er gar nicht vorhanden wäre.

Rückt der Massenpunkt auf der Symmetrieachse, in deren einzelnen Teilen entweder $\omega_0 = 0$ oder $\omega_0 = \pi$ oder $\vartheta_0 = 0$ ist, an den Leiter heran, so vereinfacht sich auch jetzt die allgemeine Formel bedeutend. Beispielsweise ist die Dichtigkeit, wenn P_0 mit O , wo nicht nur $\omega_0 = \pi$, sondern auch $\vartheta_0 = 0$ ist, zusammenfällt,

$$D = \frac{K}{2c\pi^2} \sqrt{\frac{(\operatorname{Coj} \vartheta - \cos \omega)^3}{\operatorname{Coj} \vartheta + \cos \omega}} \left\{ (M + M_0) \cdot \frac{K}{\pi} \omega - M_0 \frac{k'}{\frac{K}{\pi} \omega} \right\}.$$

Fällt endlich P_0 auf D_1 oder C_1 oder auf irgend einen anderen Punkt des Randes, so ist $\vartheta_0 = \vartheta$. Man thut dann gut, in (18) $\frac{K}{\pi}$ durch $\frac{K'}{\vartheta}$ zu ersetzen, und findet nach einigen Umformungen

$$D = \frac{1}{2c\pi} \frac{K'}{\vartheta} \sqrt{\frac{(\operatorname{Coj} \vartheta - \cos \omega)^3}{\operatorname{Coj} \vartheta + \cos \omega}} \cdot (M + M_0) \cdot \frac{K'}{\vartheta} \omega.$$

Die Wirkung geht mithin so vor sich, als wenn dem Leiter, ohne Einwirkung eines äusseren Massenpunktes, von Anfang an die Menge $(M + M_0)$ mitgeteilt worden wäre.

c) Je grössere Werte der Parameter ϑ annimmt, desto mehr stimmt die Gestalt des Leiters mit einem sehr kleinen Kreise überein, dessen Mittelpunkt der Pol O_1 ist. Es ist natürlich, dass die Dichtigkeit, auch unter Einwirkung eines ausserhalb O_1 liegenden Massenpunktes, der Grenze ∞ zustrebt. In welchem Grade dies geschieht, erkennt man leicht aus der Formel (18), die $\frac{K}{\pi}$ enthält. Denn für $\vartheta = \infty$ ist $q = 0$, also $K' = \infty$, dagegen $\frac{K}{\pi} = \frac{1}{2}$, während der Modul k den Wert 0 hat. Infolgedessen gehen die elliptischen Funktionen in Kreisfunktionen über, und es ist

$$D = \frac{M}{2r\pi}, \quad r = 4c \cdot e^{-\vartheta} \quad \text{für } \vartheta = \infty.$$

Für immer kleiner werdende Werte von ϑ werden die Dimensionen des Leiters immer grösser. Die den Nullpunkt O umschliessende Einbuchtung wird immer spitzer, und die Dichtigkeit erlangt schliesslich für $\vartheta = 0$, weil dann der Leiter mit der negativen Hälfte der x -Achse übereinstimmt, sonst aber unendlich gross ist, den Wert 0. Dies ergibt sich auch aus der Formel (18), die $\frac{K'}{\vartheta}$ enthält, in welcher wegen $\vartheta = 0$ $q = 1$, also $K = \infty$ und $K' = \frac{1}{2}\pi$, mithin $k = 1$ zu setzen ist. In diesem Falle gehen die elliptischen Funktionen in Hyperbelfunktionen über, und es ist, weil $\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{Tg} u$, $\operatorname{cn}(u, 1) = \frac{1}{\operatorname{Coj} u}$,

$$D = 0.$$

Man kann diesem an und für sich selbstverständlichen Ergebnis noch eine neue Seite abgewinnen. Wenn nämlich ausser ϑ auch die Konstante c den Wert 0 erhält, der Pol O_1 also in den Anfangspunkt O fällt, so bleibt die Pascalsche Schnecke von endlichen Dimensionen und geht in eine Kardioiden über. Mit diesem Grenzfalle werden wir uns im dritten Abschnitte weiter beschäftigen.

§ 2.

Die Pascalsche Schnecke zweiter Art.

Wir untersuchen jetzt die Verteilung eines gegebenen Fluidums auf einer leitenden ebenen Fläche, welche von einer Pascalschen Schneckenlinie zweiter Art begrenzt wird. Auch diesem Leiter teilen wir eine gewisse Menge M des Fluidums mit, lassen auf denselben einen äusseren Punkt $P_0 (\vartheta_0, \omega_0)$ mit der Masse M_0 einwirken und bestimmen die Dichtigkeit, welche nach Eintritt des Gleichgewichtes in einem beliebigen Elemente der Randkurve vorhanden ist. Die

I. Einführung der zweckmässigen Koordinaten

ist bereits durch die Formeln (1) erfolgt, während die Kurve selbst (Fig. 1) durch die Gleichung (3) oder (3a) für einen konstanten Wert des Parameters ω dargestellt wird. Auch das Bogenelement finden wir bereits als ds_ω in der Formel (5) vor. Dagegen empfiehlt es sich, die Bereiche der Parameter ω und ϑ in anderer Weise zu begrenzen als bisher. Für ω , das früher zwischen π und $-\pi$ lag, wählen wir als Grenzen die Werte π und 0, was wegen der Form der Gleichungen (3) erlaubt ist. Um dagegen auszudrücken, dass ein Punkt oberhalb oder unterhalb der Symmetrieachse des Flächenstücks liegt, setzen wir fest, dass ϑ in der Halbebene $(x, +y)$ positive, in der Halbebene $(x, -y)$ negative Werte besitze. Daher müssen wir ϑ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen. Die Intervalle der beiden Parameter sind also

$$\pi \geq \omega \geq 0, \quad -\infty \leq \vartheta \leq +\infty.$$

Nunmehr schreiten wir mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sogleich zur

II. Entwicklung des Logarithmus der Entfernung zweier Punkte.

Handelte es sich bei der früheren Aufgabe um die Entwicklung von $T = \log \frac{1}{R}$ in eine nach ω fortschreitende trigonometrische Reihe, so werden wir jetzt versuchen müssen, für denselben Ausdruck eine Darstellung ausfindig zu machen, die für alle Werte von $\vartheta = -\infty$ bis $\vartheta = +\infty$ gültig ist. Zu diesem Zwecke bringen wir T zunächst in die Form

$$(19) \quad T = \log \frac{\cos \vartheta_1 - \cos \omega_1}{2c} = \frac{1}{2} \log \frac{\cos(\vartheta_1 + \vartheta) - \cos(\omega_1 + \omega)}{\cos \vartheta - \cos \omega} - \frac{1}{2} \log \frac{\cos(\vartheta_1 - \vartheta) - \cos(\omega_1 - \omega)}{\cos \vartheta - \cos \omega}.$$

Nun ist nach einer von Cauchy (Cours d'Analyse algèbre. Chap. IX) gegebenen Formel

$$\cos \vartheta - \cos \omega = 2 \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{\left(1\pi - \frac{\omega}{2} \right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^2}{1^2 \pi^2} \cdot \frac{\left(1\pi + \frac{\omega}{2} \right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^2}{1^2 \pi^2} \\ \cdot \frac{\left(2\pi - \frac{\omega}{2} \right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^2}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{\left(2\pi + \frac{\omega}{2} \right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^2}{2^2 \pi^2} \dots$$

Demnach ist

$$\frac{\cos(\vartheta_1 + \vartheta) - \cos(\omega_1 + \omega)}{\cos \vartheta - \cos \omega}$$

$$= \frac{(\omega_1 + \omega)^2 + (\vartheta_1 + \vartheta)^2}{\omega^2 + \vartheta^2} \cdot \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{[2n\pi - (\omega_1 + \omega)]^2 + (\vartheta_1 + \vartheta)^2}{(2n\pi - \omega)^2 + \vartheta^2} \cdot \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{[2n\pi + (\omega_1 + \omega)]^2 + (\vartheta_1 + \vartheta)^2}{(2n\pi + \omega)^2 + \vartheta^2}$$

und infolgedessen

$$\log \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{H}(\vartheta_1 + \vartheta) - \cos(\omega_1 + \omega)}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\vartheta - \cos \omega} = \log \frac{(\omega_1 + \omega)^2 + (\vartheta_1 + \vartheta)^2}{\omega^2 + \vartheta^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log \frac{[2n\pi - (\omega_1 + \omega)]^2 + (\vartheta_1 + \vartheta)^2}{(2n\pi - \omega)^2 + \vartheta^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log \frac{[2n\pi + (\omega_1 + \omega)]^2 + (\vartheta_1 + \vartheta)^2}{(2n\pi + \omega)^2 + \vartheta^2}.$$

Ferner gilt bekanntlich, falls p_1 und p_2 irgend welche positive Grössen bezeichnen, die Formel

$$\begin{aligned} \log \frac{p_1^2 + q_1^2}{p_2^2 + q_2^2} &= \log \frac{p_1 + iq_1}{p_2 + iq_2} + \log \frac{p_1 - iq_1}{p_2 - iq_2} \\ &= \int_0^\infty \left\{ e^{-(p_2 + iq_2)r} - e^{-(p_1 + iq_1)r} \right\} \frac{dr}{r} + \int_0^\infty \left\{ e^{-(p_2 - iq_2)r} - e^{-(p_1 - iq_1)r} \right\} \frac{dr}{r} \\ &= 2 \int_0^\infty \left\{ e^{-rp_2} \cos rq_2 - e^{-rp_1} \cos rq_1 \right\} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Demgemäss wird

$$\begin{aligned} \log \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{H}(\vartheta_1 + \vartheta) - \cos(\omega_1 + \omega)}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\vartheta - \cos \omega} &= 2 \int_0^\infty \left\{ e^{-r\omega} \cos r\vartheta - e^{-r(\omega_1 + \omega)} \cos r(\vartheta_1 + \vartheta) \right\} \frac{dr}{r} \\ &+ 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\infty \left\{ e^{-2n\pi r} (\mathfrak{G}\mathfrak{H} r\omega \cos r\vartheta - \mathfrak{G}\mathfrak{H} r(\omega_1 + \omega) \cos r(\vartheta_1 + \vartheta)) \right\} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Für die Summe der Integrale können wir das Integral der Summe setzen und erhalten, weil

$$2 \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-2n\pi r} = 2 \frac{e^{-2r\pi}}{1 - e^{-2r\pi}} = \frac{e^{-r\pi}}{\sin r\pi},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{H}(\vartheta_1 + \vartheta) - \cos(\omega_1 + \omega)}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\vartheta - \cos \omega} &= \int_0^\infty \left\{ e^{-r\omega} \cos r\vartheta - e^{-r(\omega_1 + \omega)} \cos r(\vartheta_1 + \vartheta) \right\} \frac{dr}{r} \\ &+ \int_0^\infty \frac{e^{-r\pi}}{\sin r\pi} \left\{ \mathfrak{G}\mathfrak{H} r\omega \cos r\vartheta - \mathfrak{G}\mathfrak{H} r(\omega_1 + \omega) \cos r(\vartheta_1 + \vartheta) \right\} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

In derselben Weise verschaffen wir uns eine Integraldarstellung von

$$\frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{H}(\vartheta_1 - \vartheta) - \cos(\omega_1 - \omega)}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\vartheta - \cos \omega},$$

indem wir dabei berücksichtigen, ob $\omega_1 > \omega$ ist. Die gefundenen Werte setzen wir in (19) ein, entwickeln die Hyperbelfunktionen ebenso wie die Kreisfunktionen nach ihren Additionstheoremen und finden, wenn alle zusammengehörigen Glieder zusammengefasst werden, schliesslich als Resultat aller Umformungen

$$(20) \quad T = K + \int_0^\infty \left\{ G \cdot \cos r\vartheta + H \cdot \sin r\vartheta \right\} dr,$$

wo

$$K = \log \frac{\cosh \vartheta_1 - \cos \omega_1}{2c},$$

$$G = \frac{2}{r} \frac{\cosh r(\pi - \omega_1) \cosh r\omega \cos r\vartheta_1 - \cosh r(\pi - \omega)}{\sin r\pi},$$

$$H = \frac{2}{r} \frac{\sin r(\pi - \omega_1) \sin r\omega \sin r\vartheta_1}{\sin r\pi}.$$

Diese Darstellung von T gilt für beliebige Werte von ϑ und ϑ_1 und für alle positiven Werte von ω und ω_1 , wofern $\omega_1 > \omega$ ist. Im entgegengesetzten Falle müssten ω_1 und ω miteinander vertauscht werden.

III. Bestimmung der Dichtigkeit.

Zur Bestimmung der Dichtigkeit in einem beliebigen Elemente der Randkurve gehen wir wieder davon aus, dass das Gesamtpotential der Belegung und des influenzierenden Massenpunktes $P_0 (\vartheta_0, \omega_0)$ auf irgend einen Punkt $P_1 (\vartheta_1, \omega_1)$ im Innern des leitenden Flächenstücks einen konstanten Wert C hat. Es ist demnach abermals zu setzen

$$(21) \quad V + V_0 = C \text{ oder } V = V_1, \text{ falls } V_1 = C - V_0 \text{ ist.}$$

Nach den früheren Entwicklungen ergibt sich für die Potentialfunktion der Belegung der Wert

$$V = V_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} = \int D \cdot \log \frac{1}{R_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega}} ds_{\omega},$$

wenn D die gesuchte Dichtigkeit bezeichnet, und die Integration über die ganze ω -Kurve hinstreckt wird. Daher ist wegen (5)

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} 2c D \sqrt{\frac{\cosh \vartheta + \cos \omega}{(\cosh \vartheta - \cos \omega)^3}} \cdot T_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} \cdot d\vartheta.$$

Für $\omega = \pi$ geht das betrachtete Flächenstück in die Strecke $OO_1 = c$ und für $\omega = 0$ in den Teil O_1X der positiven x -Achse über. Abgesehen von diesen Grenzfällen wird, weil die Fläche allseitig geschlossen ist, die allerdings noch unbekannte Dichtigkeit eine allenthalben stetige und endliche Funktion von ω und ϑ sein. Betrachten wir daher den Ausdruck

$$2c D \sqrt{\frac{\cosh \vartheta + \cos \omega}{(\cosh \vartheta - \cos \omega)^3}},$$

als Funktion von ϑ allein, so kann derselbe in dem Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ durch ein nach den Kosinus und Sinus von ϑ fortschreitendes Fouriersches Integral dargestellt werden. Wir machen den Ansatz

$$(22) \quad 2c D \sqrt{\frac{\cosh \vartheta + \cos \omega}{(\cosh \vartheta - \cos \omega)^3}} = \int_0^{\infty} \{A_r \cdot \cos r\vartheta + B_r \cdot \sin r\vartheta\} dr,$$

indem wir annehmen, dass die Koeffizienten A_r und B_r , deren Werte zu bestimmen sind, kein ϑ enthalten.

Für $T_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} = T$ entnehmen wir den Wert aus Gleichung (20), nämlich

$$T_{\vartheta_1 \omega_1}^{\vartheta \omega} = K + \int_0^{\infty} \{G \cdot \cos r\vartheta + H \cdot \sin r\vartheta\} dr,$$

und integrieren das Produkt beider Ausdrücke nach ϑ von $-\infty$ bis $+\infty$. Hierbei leisten diejenigen Formeln, welche Herr C. Neumann als neue Integraleigenschaften¹⁾ der Kreisfunktionen bezeichnet hat, vortreffliche Dienste. Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K \cdot \left(\int_0^{\infty} A_r \cos r\vartheta \, dr \right) d\vartheta &= \pi A_0 \cdot K, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K \cdot \left(\int_0^{\infty} B_r \sin r\vartheta \, dr \right) d\vartheta &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} A_r \cos r\vartheta \, dr \right) \left(\int_0^{\infty} G \cos r\vartheta \, dr \right) d\vartheta &= \pi \int_0^{\infty} A_r \cdot G \, dr, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} B_r \sin r\vartheta \, dr \right) \left(\int_0^{\infty} G \cos r\vartheta \, dr \right) d\vartheta &= 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} A_r \cos r\vartheta \, dr \right) \left(\int_0^{\infty} H \sin r\vartheta \, dr \right) d\vartheta, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} B_r \sin r\vartheta \, dr \right) \left(\int_0^{\infty} H \sin r\vartheta \, dr \right) d\vartheta &= \pi \int_0^{\infty} B_r \cdot H \, dr. \end{aligned}$$

Also hat die Potentialfunktion der Belegung den Wert

$$(23) \quad V = \pi A_0 \cdot K + \pi \int_0^{\infty} \left\{ A_r \cdot G + B_r \cdot H \right\} dr.$$

Berücksichtigen wir, dass die Gesamtmasse der Belegung M ist, so muss auch

$$\int D \, ds_w = M$$

sein, wenn die Integration über die ganze Randkurve ausgedehnt wird. Mithin hat man

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} (A_r \cos r\vartheta + B_r \sin r\vartheta) \, dr \right\} d\vartheta$$

oder

$$(23a) \quad M = \pi A_0, \text{ also } A_0 = \frac{1}{\pi} M.$$

Weiter wenden wir zur Berechnung der Differenz $V_1 = C - V_0$ die für V_0 geltende Formel des logarithmischen Potentials

$$V_0 = M_0 \cdot \log \frac{1}{R_{\vartheta_0 \varphi_0}} = M_0 \cdot T_{\vartheta_1 \varphi_1}^{\vartheta_0 \varphi_0} = M_0 \cdot T_0$$

¹⁾ C. Neumann. Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen. Leipzig 1881. S. 10 und S. 77.

an und finden nach Gleichung (20), da der Punkt P_0 (ϑ_0 , ω_0) mit der Masse M_0 ausserhalb des Flächenstückes liegt, mithin $\omega_1 > \omega_0$ ist,

$$(24) \quad V_0 = M_0 \left\{ K_0 + \int_0^\infty (G_0 \cdot \cos r\vartheta_0 + H_0 \cdot \sin r\vartheta_0) dr \right\}.$$

In dieser Gleichung bedeuten G_0 und H_0 die Werte von G und H in Gleichung (20), wenn daselbst $\omega = \omega_0$ gesetzt wird. Da die Grösse K von ω unabhängig ist, so ist $K_0 = K$.

Fiele endlich der innere Punkt P_1 mit den Koordinaten (ϑ_1 , ω_1) in die Strecke OO_1 , z. B. in den Anfangspunkt des Koordinatensystems, so wäre $\omega_1 = \pi$. In diesem Falle nimmt die Gleichung $V = V_1$ eine besonders einfache Gestalt an und liefert für C den Wert

$$(25) \quad C = (M + M_0) \log \frac{\cos \vartheta_1 + 1}{2c} + \pi \int_0^\infty (A_r \cdot G_{(\omega_1=\pi)}) dr + M_0 \int_0^\infty (G_{(\omega_1=\pi)} \cdot \cos r\vartheta_0) dr.$$

Setzen wir nun V aus (23), V_0 aus (24) und C aus (25) in die Gleichung (21)

$$V = C - V_0$$

ein, so erhalten wir bei zweckmässiger Anordnung eine neue Gleichung, deren linke Seite die Form

$$(a) \quad \int_0^\infty \{ P_r \cdot \cos r\vartheta_1 + Q_r \cdot \sin r\vartheta_1 \} dr$$

hat, falls gesetzt wird

$$P_r = \frac{2\pi}{r} A_r \frac{\cos r(\pi - \omega_1) - 1}{\sin r\pi} \cos r\omega, \quad Q_r = \frac{2\pi}{r} B_r \frac{\sin r(\pi - \omega_1)}{\sin r\pi} \sin r\omega.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung erscheint zunächst noch das Glied

$$(M + M_0) \log \frac{\cos \vartheta_1 - \cos \pi}{\cos \vartheta_1 - \cos \omega_1},$$

welches aber nach dem Obigen als Integral dargestellt werden kann und in

$$2(M + M_0) \int_0^\infty \frac{\cos r(\pi - \omega_1) - 1}{\sin r\pi} \cos r\vartheta_1 \frac{dr}{r}$$

übergeht. Dadurch gewinnt die rechte Seite die Form

$$(b) \quad \int_0^\infty \{ P'_r \cdot \cos r\vartheta_1 + Q'_r \cdot \sin r\vartheta_1 \} dr,$$

wo

$$P'_r = \frac{2}{r} \frac{\cos r(\pi - \omega_1) - 1}{\sin r\pi} \{ (M + M_0) - M_0 \cos r\omega_0 \cos r\vartheta_0 \},$$

$$Q'_r = -\frac{2}{r} M_0 \frac{\sin r(\pi - \omega_1)}{\sin r\pi} \sin r\omega_0 \sin r\vartheta_0.$$

Wir haben jetzt in (a) und (b) zwei nach den Kosinus und Sinus von ϑ_1 fortschreitende Integraldarstellungen. Sollen dieselben einander gleich sein, so müssen sie auch in ihren Koeffizienten übereinstimmen. Daraus ergibt sich

$$(26) \quad A_r = \frac{M + M_0}{\pi \cos r\omega} - \frac{M_0 \cos r\omega_0 \cos r\vartheta_0}{\pi \cos r\omega},$$

$$B_r = -\frac{M_0 \sin r\omega_0 \sin r\vartheta_0}{\pi \sin r\omega}.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (22) erhalten wir schliesslich als Dichtigkeit der Belegung im Punkte $P(\vartheta, \omega)$ des Randes

$$(27) \quad D = \frac{1}{2c\pi} \sqrt{\frac{(\cos \vartheta - \cos \omega)^2}{\cos \vartheta + \cos \omega}} \left\{ (M + M_0) \int_0^\infty \frac{\cos r\vartheta}{\cos r\omega} dr \right. \\ \left. - M_0 \int_0^\infty \left(\frac{\cos r\omega_0 \cos r\vartheta_0}{\cos r\omega} \cos r\vartheta + \frac{\sin r\omega_0 \sin r\vartheta_0}{\sin r\omega} \sin r\vartheta \right) dr \right\}.$$

Diese Formel repräsentiert die Lösung der gestellten Aufgabe.

IV. Berechnung der Integrale.

Die in der Formel (27) auftretenden Integrale

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\cos r\vartheta}{\cos r\omega} dr, \\ J_2 = \int_0^\infty \frac{\cos r\omega_0 \cos r\vartheta_0}{\cos r\omega} \cos r\vartheta \cdot dr, \\ J_3 = \int_0^\infty \frac{\sin r\omega_0 \sin r\vartheta_0}{\sin r\omega} \sin r\vartheta \cdot dr$$

lassen sich berechnen. Führen wir im Nenner von J_1 Exponentialfunktionen ein, so ist, weil ω eine positive Grösse vorstellt,

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\cos r\vartheta}{\frac{1}{2}(e^{r\omega} + e^{-r\omega})} dr = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-r\omega} \cos r\vartheta}{1 + e^{-2r\omega}} dr \\ = 2 \int_0^\infty e^{-r\omega} \cos r\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nr\omega} \cdot dr = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^\infty e^{-(2n+1)r\omega} \cos r\vartheta \cdot dr \\ = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\omega}{[(2n+1)\omega]^2 + \vartheta^2} = 2 \left\{ \frac{\omega}{\omega^2 + \vartheta^2} - \frac{3\omega}{3^2\omega^2 + \vartheta^2} + \frac{5\omega}{5^2\omega^2 + \vartheta^2} - \dots \right\}.$$

Also wird erhalten

$$(28) \quad J_1 = \frac{\pi}{2\omega \cos i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta}{\omega}}.$$

Da ferner

$$\cos r\omega_0 \cos r\vartheta_0 \cos r\vartheta \\ = \frac{1}{4} [\cos r(\vartheta + \vartheta_0 + i\omega_0) + \cos r(\vartheta + \vartheta_0 - i\omega_0) + \cos r(\vartheta - \vartheta_0 + i\omega_0) + \cos r(\vartheta - \vartheta_0 - i\omega_0)]$$

ist, so lässt sich das Integral J_2 auf vier Integrale von der Form J_1 zurückführen. Es ergibt sich

$$(29) \quad J_2 = \frac{\pi}{8\omega} \left\{ \frac{1}{\cos i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \vartheta_0 + i\omega_0}{\omega}} + \frac{1}{\cos i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \vartheta_0 - i\omega_0}{\omega}} + \frac{1}{\cos i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta - \vartheta_0 + i\omega_0}{\omega}} + \frac{1}{\cos i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta - \vartheta_0 - i\omega_0}{\omega}} \right\}.$$

Endlich ist

$$\begin{aligned} & \sin r\omega_0 \sin r\vartheta_0 \sin r\vartheta \\ &= \frac{i}{4} [\sin r(\vartheta + \vartheta_0 + i\omega_0) - \sin r(\vartheta + \vartheta_0 - i\omega_0) - \sin r(\vartheta - \vartheta_0 + i\omega_0) + \sin r(\vartheta - \vartheta_0 - i\omega_0)]. \end{aligned}$$

Demnach müssen wir, um J_3 berechnen zu können, vorerst den Wert des Integrals

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin r\vartheta}{\sin r\omega} dv$$

ermitteln. In entsprechender Weise wie bei J_1 finden wir

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{\sin r\vartheta}{\frac{1}{2}(e^{r\omega} - e^{-r\omega})} dv = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-r\omega} \sin r\vartheta}{1 - e^{-2r\omega}} dv \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r\omega} \sin r\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nr\omega} dv = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-(2n+1)r\omega} \sin r\vartheta dv \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vartheta}{[(2n+1)\omega]^2 + \vartheta^2} = 2 \left\{ \frac{\vartheta}{\omega^2 + \vartheta^2} + \frac{\vartheta}{3^2\omega^2 + \vartheta^2} + \frac{\vartheta}{5^2\omega^2 + \vartheta^2} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

also

$$J = \frac{\pi}{2i\omega} \operatorname{tg} i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta}{\omega}.$$

Demnach ergibt sich

$$(30) \quad J_3 = \frac{\pi}{8\omega} \left\{ \operatorname{tg} i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \vartheta_0 + i\omega_0}{\omega} - \operatorname{tg} i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \vartheta_0 - i\omega_0}{\omega} - \operatorname{tg} i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta - \vartheta_0 + i\omega_0}{\omega} + \operatorname{tg} i \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta - \vartheta_0 - i\omega_0}{\omega} \right\}.$$

Bei der nun folgenden Addition von J_2 und J_3 vereinigen wir die entsprechenden Glieder mit Anwendung der Formeln

$$\frac{1 \pm \sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\alpha}{2} \right)$$

und erhalten nach einigen weiteren Umformungen

$$(31) \quad J_2 + J_3 = \frac{\pi}{4\omega} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \left\{ \frac{1}{\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \vartheta_0}{\omega} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega}} + \frac{1}{\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\omega} - \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega}} \right\},$$

eine Gleichung, die sich auch ohne Vermittlung von J_1 und J finden lässt.

Setzen wir schliesslich J_1 und $(J_2 + J_3)$ in (27) ein, so nimmt der Ausdruck für die Dichtigkeit der Belegung im Punkte $P(\vartheta, \omega)$ folgende Gestalt an:

$$(32) \quad D = \frac{1}{4c\omega} \sqrt{\frac{(\operatorname{Cof} \vartheta - \cos \omega)^2}{\operatorname{Cof} \vartheta + \cos \omega}} \left\{ \frac{M + M_0}{\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta}{\omega}} - M_0 \frac{\cos \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta}{\omega} \operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta_0}{\omega}}{\left(\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \vartheta_0}{\omega} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left(\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\omega} - \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right\}.$$

V. Besondere Fälle.

a) Für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken, ist $M_0 = 0$ zu setzen. Dann nimmt die Dichtigkeit der Belegung den einfachen Wert an

$$D = \frac{1}{4c\omega} \sqrt{\frac{(\operatorname{Cof} \vartheta - \cos \omega)^2}{\operatorname{Cof} \vartheta + \cos \omega}} \cdot \frac{M}{\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta}{\omega}}.$$

Dabei herrscht im Scheitel D_2 , für welchen $\vartheta = 0$ ist, die Dichtigkeit

$$D = \frac{1}{2 c \omega} \frac{\sin^3 \frac{1}{2} \omega}{\cos \frac{1}{2} \omega} \cdot M.$$

Im Pol O_1 besitzt ϑ den Wert $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem das Kurvenelement auf dem positiven oder negativen Ufer der Symmetrieachse sich befindet, und der Leiter hat eine nach innen oder aussen gekehrte Spitze. Bringen wir D in die Form

$$D = \frac{1}{4 c \omega} \sqrt{\frac{(1 - 2 e^{-\vartheta} \cos \omega + e^{-2 \vartheta})^3}{1 + 2 e^{-\vartheta} \cos \omega + e^{-2 \vartheta}}} \cdot \frac{M}{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} \vartheta}} \cdot e^{\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\vartheta}{\omega}},$$

so erkennen wir, dass D bei ins Unendliche wachsendem ϑ für alle Werte von ω , die grösser als $\frac{\pi}{2}$ sind, der Grenze ∞ zustrebt. In diesem Falle ist die Spitze des Leiters nach aussen gekehrt. Hat dagegen der Leiter in O_1 eine nach innen gerichtete Spitze, was für $\omega < \frac{\pi}{2}$ eintritt, so strebt die Dichtigkeit der Grenze 0 zu. Für $\vartheta = -\infty$ ergeben sich naturgemäss bei passender Umformung dieselben Werte.

Ist endlich $\omega = \frac{\pi}{2}$, so hat der Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Radius c ist. Dann verteilt sich das Fluidum gleichmässig über den Rand und die Dichtigkeit hat den konstanten Wert

$$D = \frac{M}{2 c \pi}.$$

b) Ist M_0 von 0 verschieden, so ist die Verteilung von der Lage des Punktes P_0 (ϑ_0, ω_0), des Trägers der Masse M_0 , abhängig.

Liegt der Massenpunkt im Unendlichen, so ist zu gleicher Zeit $\vartheta_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$ zu setzen. Da dann wieder die Formel unter a) erscheint, so geschieht die Einwirkung des Massenpunktes, wie vorauszusehen war, so, als ob derselbe gar nicht vorhanden wäre.

Rückt der Punkt P_0 von irgend einer Seite her sehr nahe an den Leiter heran, so wird das subtraktive Glied der allgemeinen Formel (32) wegen des Faktors $\cos \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega}$, in welchem ω_0 fast die Grösse von ω erreicht, beinahe 0. Fällt der Massenpunkt in Wirklichkeit auf den Rand des Leiters selbst, so ist

$$D = \frac{1}{4 c \omega} \sqrt{\frac{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}{\cos \vartheta + \cos \omega}} \cdot \frac{M + M_0}{\cos \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta}{\omega}}.$$

Dieser Fall läuft also darauf hinaus, dass dem Leiter vom Anfange an statt der Masse M die Masse $(M + M_0)$ mitgeteilt worden ist.

Auch für eine beliebige Lage des Massenpunktes kann die Dichtigkeit im Scheitel ($\vartheta = 0$) oder im Pol ($\vartheta = \pm \infty$) in entsprechender Weise wie unter a) berechnet werden. Was den Pol betrifft, so lässt sich ohne Mühe nachweisen, dass die Dichtigkeit wiederum der Grenze 0 oder ∞ zustrebt, je nachdem $\omega \leq \frac{\pi}{2}$ ist. Nur wenn $\omega = \frac{\pi}{2}$, der Leiter also kreisförmig ist, hat die Dichtigkeit im Pol O_1 einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert, nämlich

$$D = \frac{1}{2 c \pi} \left\{ M + M_0 (1 - \cos \omega_0 \cdot \cos \vartheta_0) \right\}.$$

Derselbe folgt für $\vartheta = \infty$ aus der Gleichung

$$D = \frac{1}{2c\pi} \left\{ M + M_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0 \operatorname{Cof} \vartheta_0 \cdot \operatorname{Cof}^2 \vartheta}{[\operatorname{Cof}(\vartheta + \vartheta_0) + \sin \omega_0][\operatorname{Cof}(\vartheta - \vartheta_0) - \sin \omega_0]} \right) \right\},$$

welche die Dichtigkeit der Belegung in einem beliebigen Punkte des Kreises angiebt.

c) Bei der Ableitung der allgemeinen Formel waren die Fälle, in denen $\omega = \pi$ oder $\omega = 0$ ist, zwar ausgeschlossen. Die Gleichung (32) giebt aber nichtsdestoweniger auch jetzt noch brauchbare Resultate.

Für $\omega = \pi$ wird der Leiter durch die doppelt durchlaufene Strecke OO_1 dargestellt, und die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten dieser Strecke ist

$$D = \frac{1}{2c\pi} \frac{\operatorname{Cof}^3 \frac{1}{2} \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} \left\{ M + M_0 - M_0 \frac{\cos \frac{1}{2} \omega_0 \operatorname{Cof} \frac{1}{2} \vartheta \operatorname{Cof} \frac{1}{2} \vartheta_0}{[\operatorname{Cof} \frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta_0) + \sin \frac{1}{2} \omega_0][\operatorname{Cof} \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_0) - \sin \frac{1}{2} \omega_0]} \right\}.$$

Daher erlangt die Dichtigkeit in den Endpunkten O und O_1 einen unendlich grossen Wert, während sie für alle übrigen Punkte der Strecke endlich bleibt.

Für $\omega = 0$ dagegen geht der Leiter in den Strahl O_1X über und ist im übrigen von unendlichen Dimensionen. Das Vorhandensein eines Massenpunktes kann also nicht in Betracht kommen. Die Dichtigkeit ist selbstredend

$$D = 0.$$

Sollte ausser ω auch die Konstante c einen verschwindend kleinen Wert haben, so nimmt die Pascalsche Schnecke zweiter Art ebenso wie die Schnecke erster Art die Gestalt einer Kardioiden an, welche von endlichen Dimensionen ist. Auch diesen Grenzfall wollen wir im dritten Abschnitt weiter erörtern.

§ 3.

Die Kardioiden.

Die Aufgabe von der Verteilung gegebener Massen auf einer ebenen, von einer Kardioiden begrenzten Fläche kann bei Anwendung zweckmässiger Koordinaten in ganz derselben Weise durchgeführt werden, wie es bei den beiden Pascalschen Schnecken geschehen ist. Indessen wird die fertige Lösung auch dadurch abgeleitet werden können, dass man in den Schlussformeln der vorhergehenden Abschnitte, d. i. in den Gleichungen (18) und (32), den bereits angedeuteten Übergang zur Grenze vornimmt. In der That ergeben sich in beiden Rechnungen, von denen aber die letztere ihrer Kürze wegen vorzuziehen ist, dieselben Resultate.

1. Einführung der Koordinaten.

Während der Pol O_1 , von welchem aus wir die Fusspunktkurve eines Kreises entwarfen, bisher entweder innerhalb oder ausserhalb der Kreisfläche gelegen war, machen wir jetzt die Annahme, dass er ein Punkt des Kreisumfangs selbst sei. Zu diesem Zwecke lassen wir den Punkt O_1 in den Anfangspunkt O des Koordinatensystems fallen, indem wir der Konstanten c den Wert $c = 0$ beilegen. Nach den Gleichungen (2a) und (3a) werden dann auch die Parameter ϑ und ω verschwindend klein und sind zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene nicht mehr brauchbar. Setzen wir jedoch zunächst

$$\vartheta = 2c_1 \lambda, \quad \omega = 2c_1 \varrho,$$

so geht die Gleichung (4) über in

$$x + iy = -c \cdot \operatorname{ctg}^2 [c_1 (\varrho + i\lambda)] = -c \left\{ \frac{\cos c_1 (\varrho + i\lambda)}{\sin c_1 (\varrho + i\lambda)} \right\}^2.$$

Wir entwickeln die Funktionen $\cos$ und $\sin$ nach Potenzen von c_1 und erhalten, wenn $c_1 = \sqrt{c}$ und nunmehr $c = 0$ gesetzt wird,

$$(33) \quad x + iy = \frac{-1}{(\varrho + i\lambda)^2}.$$

Daraus ergibt sich durch Trennung des Reellen und Imaginären

$$(34) \quad x = \frac{\lambda^2 - \varrho^2}{(\lambda^2 + \varrho^2)^2}, \quad y = \frac{2\lambda\varrho}{(\lambda^2 + \varrho^2)^2},$$

und infolgedessen ist

$$(35) \quad \begin{aligned} \left(x^2 + y^2 - \frac{x}{2\lambda^2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2\lambda^2}\right)^2 \cdot (x^2 + y^2), \\ \left(x^2 + y^2 + \frac{x}{2\varrho^2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2\varrho^2}\right)^2 \cdot (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Für konstante Werte von λ und ϱ stellen diese Gleichungen zwei Systeme von ineinander geschachtelten und orthogonalen Kardioiden (Fig. 2) dar. Alle Kardioiden haben die x -Achse zur Symmetrielinie und den Anfangspunkt der Koordinaten zum gemeinsamen Rückkehrpunkte; im übrigen unterscheiden sie sich nur durch ihre Grösse und Lage. Die geometrische Bedeutung der Parameter λ und ϱ ist augenscheinlich. Denn man erkennt, dass die Entfernung des Rückkehrpunktes jeder Kardioiden von ihrem Scheitel mit dem Durchmesser des die Kurve erzeugenden Kreises übereinstimmt. Es ist also

$$OD_1 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad OD_2 = \frac{1}{\varrho^2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich auch leicht die Grenzen, zwischen denen λ und ϱ liegen müssen, wenn sie zur Bestimmung der Lage eines Punktes P der Ebene dienen sollen. Handelte es sich nur um die Halbebene $(x, +y)$, so wären dieselben ∞ und 0 . Denn für den Anfangspunkt der Koordinaten ist sowohl λ als ϱ gleich ∞ . Für immer kleiner werdende Werte von λ und ϱ entfernen sich die Scheitel der Kurven auf der x -Achse immer mehr vom Punkte O . Für alle Punkte P , die auf der positiven x -Achse oder in der Unendlichkeit liegen, ist $\varrho = 0$; dagegen hat λ den Wert 0 , wenn der Punkt P auf der negativen x -Achse oder in unendlicher Ferne liegt. Um die Lage eines Punktes P in der ganzen Ebene zu bestimmen, kann man entweder λ von ∞ bis 0 und ϱ von $-\infty$ bis $+\infty$ oder λ von $-\infty$ bis $+\infty$ und ϱ von ∞ bis 0 verändern, indem man festsetzt, dass negativen Werten von λ und ϱ die Punkte entsprechen, welche unterhalb der Symmetrieachse der Kurven liegen.

Wir werden nun aus der für die Pascalsche Schnecke erster Art geltenden Formel (18) die Dichtigkeit auf einer λ -Kardioiden und diejenige auf einer ϱ -Kardioiden aus der Formel (32) der Schnecke zweiter Art ableiten. Beide Grenzbetrachtungen müssen, abgesehen davon, dass λ und ϱ ihre Rollen vertauschen, zu denselben Resultaten führen.

II. Die Kardioiden als Grenzfall der Schnecke erster Art.

Zur Berechnung der Dichtigkeit, welche unter Einwirkung eines äusseren Massenpunktes P_0 auf einer Kardioiden mit dem Parameter λ entsteht, haben wir dem Vorhergehenden zufolge in der Gleichung (18)

$$\vartheta = 2\sqrt{c} \cdot \lambda, \quad \omega = 2\sqrt{c} \cdot \varrho, \quad \vartheta_0 = 2\sqrt{c} \cdot \lambda_0, \quad \omega_0 = 2\sqrt{c} \cdot \varrho_0$$

zu setzen und die Grenze von D für verschwindende c aufzusuchen. Es genügen dabei die Werte von λ , ϱ einer- und diejenigen von λ_0 , ϱ_0 andererseits den Bedingungen

$$\infty \geq \lambda \geq 0, \quad -\infty \leq \varrho \leq +\infty.$$

Die in Gleichung (18) vorkommende Quadratwurzel wird daher, wenn $\mathfrak{Cof} \vartheta$ und $\cos \omega$ in Potenzreihen entwickelt werden,

$$\sqrt{\frac{(\mathfrak{Cof} \vartheta - \cos \omega)^3}{\mathfrak{Cof} \vartheta + \cos \omega}} = 2c\sqrt{c} \sqrt{\frac{\left[(\lambda^2 + \varrho^2) + \frac{c}{3}(\lambda^4 - \varrho^4) + \dots\right]^3}{1 + c(\lambda^2 - \varrho^2) + \frac{c^2}{3}(\lambda^4 + \varrho^4) + \dots}}$$

Was die in (18) enthaltenen elliptischen Funktionen betrifft, so nähert sich, wenn ϑ der Grenze 0 zustrebt, die Grösse $q = e^{-\vartheta} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ der Einheit. Weil dann die Werte der ganzen Integrale $K = \infty$ und $K' = \frac{\pi}{2}$ und die der Moduln $k = 1$ und $k' = 0$ sind, so gehen die elliptischen Funktionen in Hyperbelfunktionen über. Daher ist nach den auf Seite 12 angegebenen Formeln zunächst

$$(a) \quad \Delta \frac{K}{\pi} \omega = \Delta K' \frac{\omega}{\vartheta} = \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\varrho}{\lambda}}.$$

Weiter kann der Faktor von $\frac{1}{2} M_0$ in

$$\Delta i K' \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \cdot \frac{\Delta K' \frac{\omega + \omega_0}{\vartheta} + \Delta K' \frac{\omega - \omega_0}{\vartheta}}{\left(\operatorname{sn} i K' \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \cdot \Delta K' \frac{\omega + \omega_0}{\vartheta} + i \operatorname{cn} i K' \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \right) \left(\operatorname{sn} i K' \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \cdot \Delta K' \frac{\omega - \omega_0}{\vartheta} - i \operatorname{cn} i K' \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \right)}$$

umgeformt werden. Er nimmt mithin bei dem Übergang zur Grenze nach einigen Vereinfachungen die Gestalt an

$$(b) \quad \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} \left[\frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\varrho + \varrho_0}{\lambda} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\varrho - \varrho_0}{\lambda} - \sin \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda}} \right].$$

Endlich wird

$$\frac{K}{2c\pi^2} = \frac{K'}{2c\pi\vartheta} = \frac{1}{4\lambda \cdot 2c\sqrt{c}}$$

und daher nach dem Obigen für $c = 0$

$$(c) \quad \frac{K}{2c\pi^2} \sqrt{\frac{(\mathfrak{Cof} \vartheta - \cos \omega)^3}{\mathfrak{Cof} \vartheta + \cos \omega}} = \frac{1}{4\lambda} \sqrt{(\lambda^2 + \varrho^2)^3}.$$

Setzen wir die unter (a), (b) und (c) gefundenen Werte in die Gleichung (18) ein, so finden wir als Dichtigkeit der Belegung im Punkte $P(\lambda, \varrho)$ des Randes einer λ -Kardioide

$$(36) \quad D = \frac{\sqrt{(\lambda^2 + \varrho^2)^3}}{4\lambda} \left\{ \frac{M + M_0}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\varrho}{\lambda}} - \frac{1}{2} M_0 \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} \left[\frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\varrho + \varrho_0}{\lambda} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} \frac{\varrho - \varrho_0}{\lambda} - \sin \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda}} \right] \right\}.$$

III. Die Kardioide als Grenzfall der Schnecke zweiter Art.

Wesentlich einfacher fällt die Berechnung der Dichtigkeit für eine Kardioide mit dem Parameter ϱ aus. Um dieselbe zu bewerkstelligen, haben wir in der für die Pascalsche Schnecke zweiter Art geltenden Formel (32) wiederum

$$\vartheta = 2\sqrt{c} \cdot \lambda, \quad \omega = 2\sqrt{c} \cdot \varrho, \quad \vartheta_0 = 2\sqrt{c} \cdot \lambda_0, \quad \omega_0 = 2\sqrt{c} \cdot \varrho_0$$

zu setzen, indem wir die Grössen λ , ϱ und λ_0 , ϱ_0 den Bedingungen

$$-\infty \leq \lambda \leq +\infty, \quad \infty \geq \varrho \geq 0$$

unterwerfen. Es lässt sich dann zeigen, dass für verschwindend kleine Werte von c

$$\frac{1}{4 c \omega} \sqrt{\frac{(\operatorname{Coj} \vartheta - \cos \omega)^2}{\operatorname{Coj} \vartheta + \cos \omega}} = \frac{1}{4 q} \sqrt{(\lambda^2 + q^2)^3}$$

wird. Im übrigen bleibt die Form des Ausdrucks (32) unverändert, weil es sich immer nur um Quotienten der vier Grössen ϑ , ω , ϑ_0 , ω_0 handelt. Also erhalten wir für die Dichtigkeit der Belegung im Punkte $P(\lambda, q)$ einer Kardioiden mit dem Parameter q die Formel

$$(37) \quad D = \frac{\sqrt{(\lambda^2 + q^2)^3}}{4 q} \left\{ \frac{M + M_0}{\operatorname{Coj} \frac{\pi \lambda}{2 q}} - \frac{1}{2} M_0 \cos \frac{\pi q_0}{2 q} \left[\frac{1}{\operatorname{Coj} \frac{\pi \lambda + \lambda_0}{2 q} + \sin \frac{\pi q_0}{2 q}} + \frac{1}{\operatorname{Coj} \frac{\pi \lambda - \lambda_0}{2 q} - \sin \frac{\pi q_0}{2 q}} \right] \right\}.$$

Diese Formel stimmt, wenn die Buchstaben λ und q miteinander vertauscht werden, völlig mit der unter (36) erhaltenen überein.

IV. Die Dichtigkeit im Rückkehrpunkte der Kardioiden.

Ebenso wie bei den Pascalschen Schnecken wird die Dichtigkeit der Belegung auch bei den beiden Kardioiden in besonderen Fällen einfache Werte annehmen. Da diese Werte nach den früheren Beispielen sich unmittelbar aus den Gleichungen (36) und (37) ergeben, so mögen sie hier übergangen werden. Nur das Verhalten der Dichtigkeit in der Nähe des Poles der Fusspunkturven, d. i. in der Nähe des Rückkehrpunktes der Kardioiden bedarf noch einer kurzen Erläuterung. Es kommt vor allem darauf an, zu untersuchen, wie stark die Dichtigkeit in diesem Punkte zu null konvergiert. Denn die gesuchte Grenze ist offenbar null, wenigstens wenn der Leiter nicht von unendlich kleiner Grösse ist. Dies folgt ohne weiteres aus der Tatsache, dass die Spitze der Kurve stets nach innen gekehrt ist.

Wählen wir eine Kardioiden mit dem Parameter λ und beschränken wir uns auf das positive Ufer der Symmetrieachse, so ist in der Gleichung (36) die Grenze aufzusuchen, der D für $q = +\infty$ zustrebt. Zu diesem Zwecke ziehen wir q^3 vor die Quadratwurzel und ersetzen die Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen. Aus den Nennern der geschweiften Klammer

lässt sich dann der Faktor $\frac{1}{2} e^{\frac{\pi q}{2 \lambda}}$ absondern. Dadurch erhalten wir

$$D = \frac{q^3}{e^{\frac{\pi q}{2 \lambda}}} \cdot F,$$

wo F einen Ausdruck bedeutet, der für $q = +\infty$ und ein endliches λ zu

$$F = \frac{1}{2 \lambda} \left\{ (M + M_0) - M_0 \cos \frac{\pi \lambda_0}{2 \lambda} \cdot \operatorname{Coj} \frac{\pi q_0}{2 \lambda} \right\}$$

wird, also eine endliche Grösse vorstellt. Der wahre Wert des ersten Faktors von D ist sicher null, wenigstens solange λ endlich ist, und so erkennen wir, dass die Dichtigkeit im Rückkehrpunkte wirklich der Grenze $D = 0$ zustrebt. Dies ist natürlich auch auf dem negativen Ufer der Symmetrieachse der Fall.

Je grösser jedoch λ ist, je kleinere Dimensionen also der Leiter hat, desto mehr nähert sich λ dem q , und das Flächenstück unterscheidet sich schliesslich nur sehr wenig von einem unendlich kleinen Kreise. In diesem Falle strebt die Dichtigkeit der Grenze $D = \infty$ zu. Ohne Mühe folgt dies aus der Gleichung (36), wenn man zuerst $\lambda = q$ setzt und darauf q ins Unendliche wachsen lässt. Denn dann ist, wofern $a = 1,129 \cdot r$ und r den Radius des unendlich kleinen Kreises bedeutet,

$$D = \frac{q^2}{\sqrt{2} \operatorname{Coj} \frac{\pi}{2}} = \frac{M}{2 a \pi}.$$



unterwerfen. Es lässt sich dann zeigen, dass für verschwindend kleine Werte von c

$$\frac{1}{\sqrt{(\cos \vartheta - \cos \omega)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 + \varrho^2)^3}}$$

wird. Im übrigen bleiben die Quotienten der vier Belegungen im Punkt

$$(37) \quad D = \frac{V(\lambda^2 + \varrho^2)^3}{4\varrho} \left\{ \frac{M}{\cos \frac{\pi \varrho_0}{2\varrho}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi \lambda - \lambda_0}{2\varrho} - \sin \frac{\pi \varrho_0}{2\varrho}} \right\}$$

Diese Formel mit der unter (36) erhalten

IV. D

Ebenso wie bei den beiden Kardioiden der früheren Beispielen hier übergangen werden kann, d. i. in kurzen Erläuterung. In diesem Punkte zu sehen, wenn der Leiter nicht sache, dass die Spitze

Wählen wir das positive Ufer der Symmetrie für $\varrho = +\infty$ zutreffend. Hyperbelfunktionen

lässt sich dann der

wo F einen Ausdruck

wird, also eine endliche null, wenigstens solche Kehrpunkte wirklich auf der Symmetrie

Je grösser je sich λ dem ϱ , und c unendlich kleinen Kreis folgt dies aus der Gleichung lässt. Denn dann ist,

verändert, weil es sich immer nur um erhalten wir für die Dichtigkeit der Parameter ϱ die Formel

$$\left\{ \frac{1}{\cos \frac{\pi \lambda - \lambda_0}{2\varrho} - \sin \frac{\pi \varrho_0}{2\varrho}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi \varrho_0}{2\varrho}} \right\}$$

mit ϱ miteinander vertauscht werden, völlig

Punkte der Kardioiden.

die Dichtigkeit der Belegung auch bei λ annehmen. Da diese Werte nach den (36) und (37) ergeben, so mögen sie die Dichtigkeit in der Nähe des Poles der Fusses der Kardioiden bedarf noch einer untersuchen, wie stark die Dichtigkeit an der Grenze ist offenbar null, wenigstens Dies folgt ohne weiteres aus der Tatsache ist.

Wir beschränken wir uns auf das (36) die Grenze aufzusuchen, der D vor die Quadratwurzel und ersetzen die Nennern der geschweiften Klammer erhalten wir

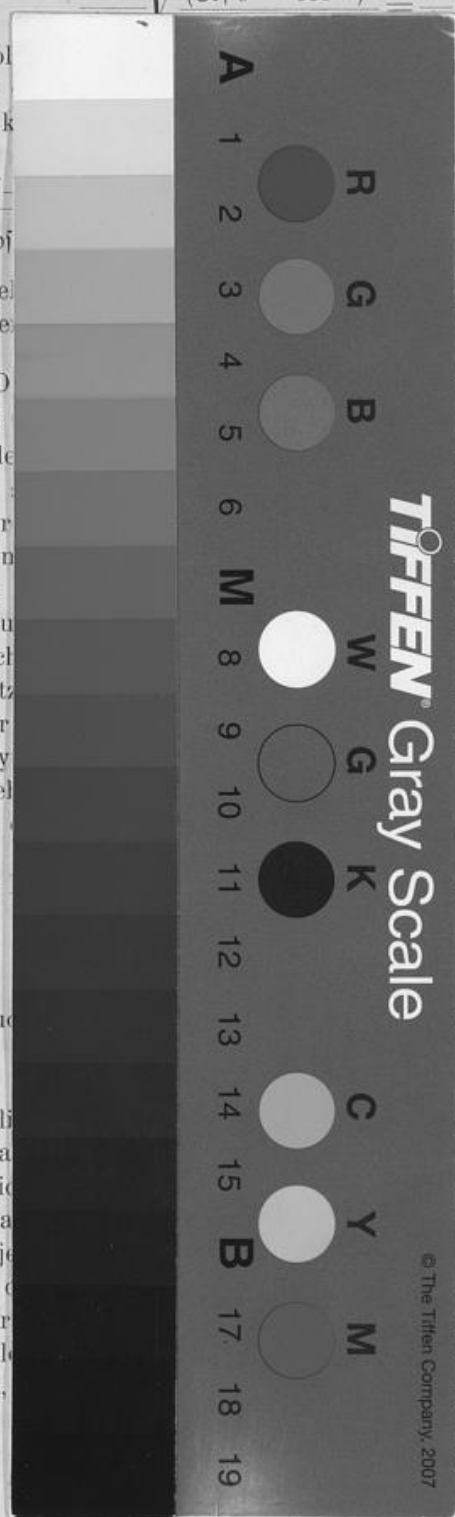
in endliches λ zu

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \cos \frac{\pi \varrho_0}{2\lambda}$$

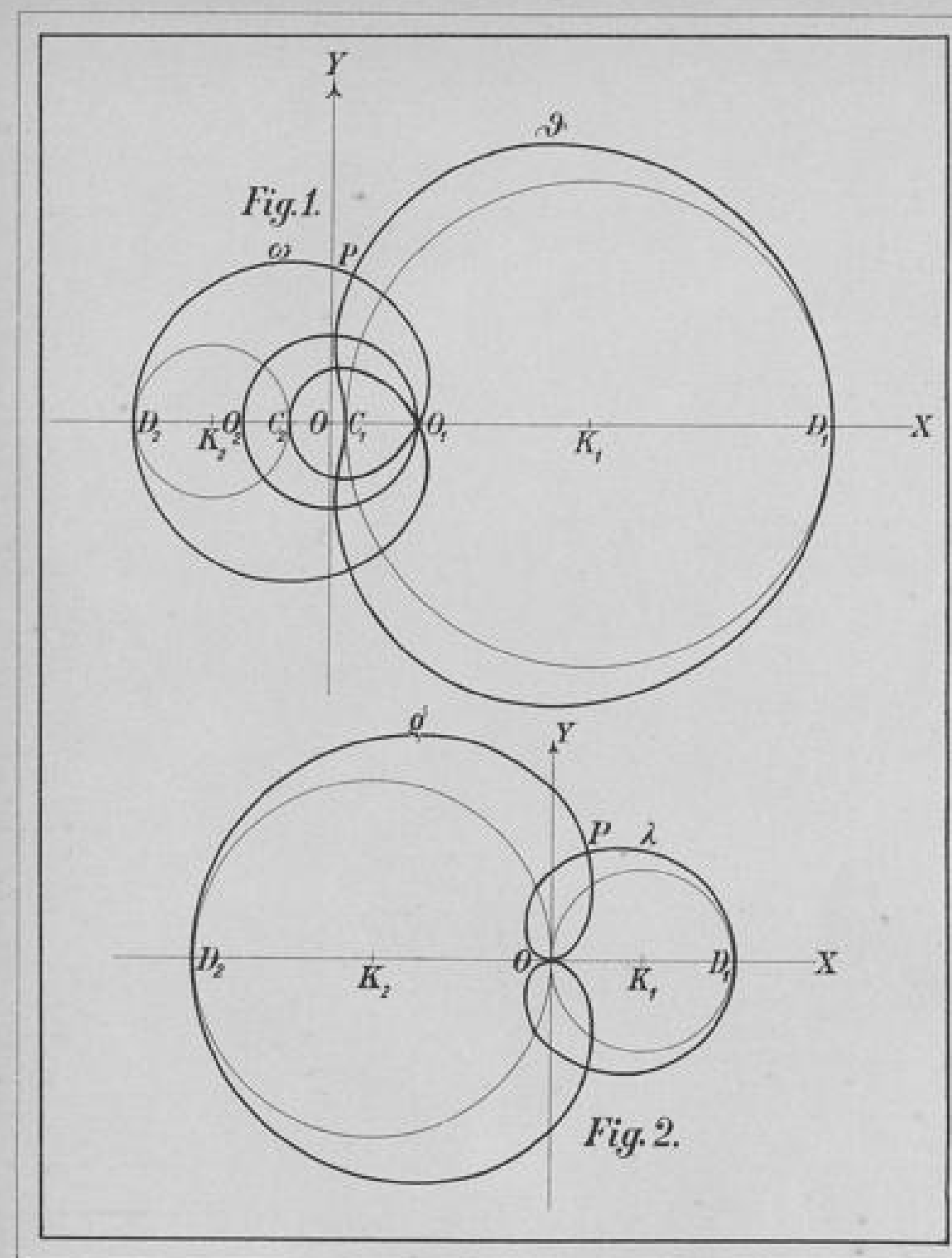
Der erste Faktor von D ist sicher wir, dass die Dichtigkeit im Rück- ist natürlich auch auf dem negativen

also der Leiter hat, desto mehr nähert schliesslich nur sehr wenig von einem Dichtigkeit der Grenze $D = \infty$ zu. Ohne Mühe setzt und darauf ϱ ins Unendliche wachsen als des unendlich kleinen Kreises bedeutet,

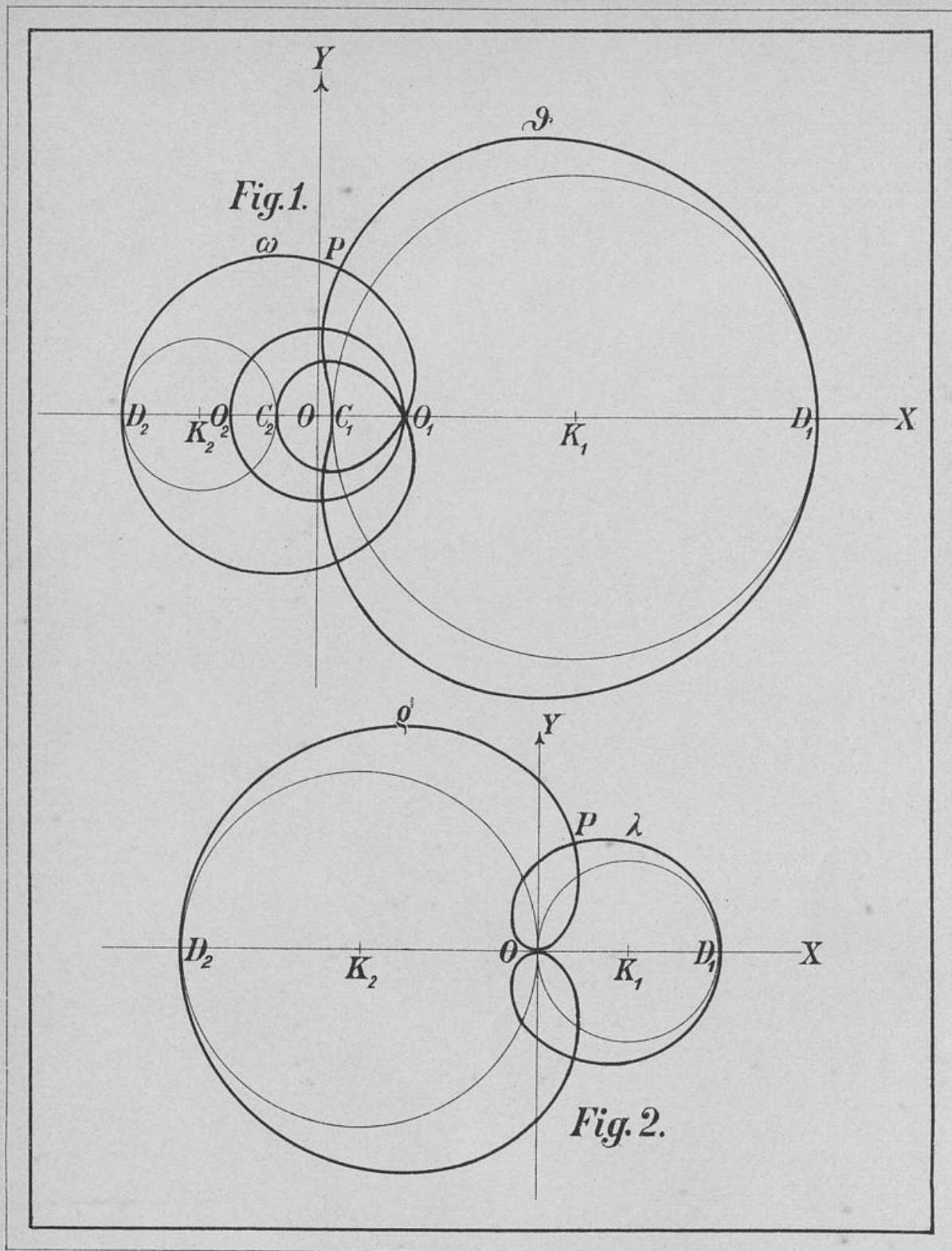
$$\frac{M}{a\pi}$$







Baer, Logarithmisches Potential einer Pascalschen Schnecke.



Baer, Logarithmisches Potential einer Pascalschen Schnecke.

