

Sphärische Trigonometrie.

Nr. 1. Bei einer geraden, vierseitigen Pyramide mit der rechteckigen Grundfläche $ABCD$ und der Spitze E bilden die Seitenflächen EAB und ECD mit der Grundfläche den Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$, die Seitenflächen EBC und EAD mit der Grundfläche den Winkel $\beta = 30^\circ$. Welches sind die Winkel der gleichschenkligen Seitendreiecke? Welches sind die Winkel zwischen je zwei Seitenflächen?

Nr. 2. Ein Punkt liegt 100° westlich auf dem Parallelkreise der Sternwarte von Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$). Unter der Annahme, dass die Erde eine Kugel ist, deren Radius $r = 859,5$ Meilen, soll der Unterschied berechnet werden zwischen der sphärischen Entfernung der beiden Punkte und der Länge des Bogens des Parallelkreises, der zwischen den beiden Punkten liegt.

Nr. 3. Die kürzeste Entfernung zwischen Berlin ($\varphi_1 = 52^\circ 30' 17''$, $l_1 = 31^\circ 3' 25''$ östlich von Ferro) und Paris ($\varphi_2 = 48^\circ 50' 13''$, $l_2 = 20^\circ$ östlich von Ferro) ist zu bestimmen, wenn ein Grad eines grössten Kreises der Erde $= 111,3$ km ist.

Nr. 3a. Die kürzesten Entfernung zwischen Hamburg-Finschhafen auf Deutsch-Neu-Guinea ist zu bestimmen, wenn ihre geographischen Koordinaten sind: $\varphi_1 = 53^\circ 33' 10''$, $l_1 = 0\ h\ 39\ m\ 54\ s$; $\varphi_2 = -6^\circ 33' 40''$, $l_2 = 9\ h\ 51\ m\ 29\ s$.

Nr. 4. Die Entfernung Wien-Göttingen beträgt 591,03 km. Die geographischen Breiten sind: $\varphi_1 = 48^\circ 12' 35,5''$ und $\varphi_2 = 51^\circ 31' 47,9''$. Welchen Längenunterschied haben sie? Welchen Zeitunterschied?

✓ Nr. 4a. Die Entfernung Hamburg-St. Franzisko ist 8887 km, die geographischen Breiten sind $\varphi_1 = 53^\circ 33' 7''$, $\varphi_2 = 37^\circ 47' 24,1''$. Gesucht den Zeitunterschied.

✓ Nr. 5. Welchen Anfangskurs hat ein Schiff zu nehmen, das auf einem grössten Kreise der Erde von einem Orte unter $\varphi_1 = 40^\circ N$, $l_1 = 20^\circ W$ nach einem Orte unter $\varphi_2 = 50^\circ N$, $l_2 = 50^\circ W$ gelangen will?

Nr. 5a. Dieselbe Aufgabe, wenn Ausgangshafen und Bestimmungsort sind: Cuxhaven ($\varphi_1 = 53^\circ 52' N$, $l_1 = 8^\circ 33' 20'' O$), Edinburg ($\varphi_2 = 55^\circ 57' 20'' N$, $l_2 = 3^\circ 10' 45'' W$). Auch die Entfernung ist in Seemeilen anzugeben.

Nr. 6. Den Tagbogen und die Abendweite eines Sterns für Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7'' N$) zu berechnen, wenn seine nördliche Deklination $\delta = 23^\circ 27' 27,3''$ beträgt.

Nr. 6a. Um wieviel Grad vom Nordpunkt des Hamburger Horizonts ($\varphi = 53^\circ 33'$) entfernt, geht der Mittelpunkt der Sonnenscheibe auf, wenn seine Poldistanz $77^\circ 23'$ beträgt, und welches ist die Tagesdauer?

Nr. 6b. Der Planet Jupiter hat am 18. August 1880 die Deklination $+ 6^\circ 11' 23,6''$ und die Zeit der Kulmination 15 h 38 m 8 s, am 28. August die Deklination $+ 5^\circ 58' 5''$, die Zeit der Kulmination 14 h 57 m 38 s. Wie gross ist am 23. August die Morgenweite dieses Sterns und die Zeit des Auf- und Niederganges in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$)?

Nr. 6γ. Gesucht der Stundenwinkel des Sonnenmittelpunktes für Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) und δ_1 der Sonne $= 7^\circ 15' 28''$. Zu welcher Zeit und in welcher Höhe kulminiert an demselben Tage der Uranus, wenn seine Deklination $\delta_2 = 6^\circ 34' 27''$ und seine Rektaszension $\alpha_2 = 11\text{ h } 6\text{ m } 49\text{ s}$ beträgt, während die Sonnenrektaszension $\alpha_1 = 1\text{ h } 8\text{ m } 17\text{ s}$ ist?

Nr. 6δ. Wenn ein Stern im Azimut $A_0 = 118^\circ 9' 12''$ untergeht, und die geographische Breite des Beobachtungsorts $\varphi = 53^\circ 33' 7''$ ist, welches ist die Deklination des Sterns, und wie gross ist sein Stundenwinkel beim Untergange?

✗ Nr. 6ε. In Wien ($\varphi = 48^\circ 12'$) war die Mittagshöhe der Sonne $h_k = 61^\circ 45'$. Wann ging die Sonne auf in wahrer Zeit, in mittlerer Zeit, wenn die Zeitgleichung $z = - 3\text{ m } 43\text{ s}$ war? Wie lange dauerte der Tag?

Nr. 6ζ. Wie lange blieb in Hamburg ($\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$) der Arkturus am 1. September 1886 über dem Horizont, wenn am 1. Janur 1880 seine Deklination $\delta = + 19^{\circ} 48' 29''$ war, und die jährliche Veränderung der Deklination: $- 18,8''$ beträgt?

Nr. 6η. Unter welcher geographischen Breite liegt der Ort, für den am 25. August die ganze Tageslänge $14\ h\ 32\ m$ beträgt, wenn die Deklination der Sonne $\delta = 11^{\circ} 4'$ ist? Wie weit vom Westpunkt entfernt geht dann die Sonne unter?

Nr. 6θ. Wie gross ist die Deklination der Sonne, wenn die Tagesdauer unter $\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$ $15\ h$ betragen soll? Unter welcher geographischen Breite beträgt die Tagesdauer zu derselben Zeit eine Stunde weniger?

5- Nr. 6ι. Der nördlichste und der südlichste Punkt des Deutschen Reichs liegen unter $\varphi_1 = 55^{\circ} 30'$ und $\varphi_2 = 47^{\circ} 17'$ nördlicher Breite. Wieviel beträgt der Unterschied der grössten Tageslängen an beiden Punkten, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 13''$ beträgt?

No. 6κ. Die grösste Abendweite der Sonne an einem Orte der nördlichen Halbkugel der Erde ist $A_1 = 40^{\circ} 50'$. Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^{\circ} 27'$. Unter welcher Breite liegt der Ort? Welche Richtung hat dort eine Strasse, die um $6\ h$ nachmittags schattenlos ist?

6λ Nr. 7. Am 30. Juli 1878 hatte der Sonnenmittelpunkt die Deklination $\delta = + 18^{\circ} 31'$. Wieviel Stunden nach der Kulmination ging der obere Sonnenrand im Hamburger Horizont ($\varphi = 53^{\circ} 33'$) unter, wenn die Refraktion im Horizont $\varrho = 35'$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 15,75'$ gegeben sind?

- Nr. 7α. Wann geht in Hamburg ($\varphi = 50^{\circ} 33,1'$) der obere Sonnenrand zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums unter, und wie lange dauert dann noch die Dämmerung, bis der Sonnenmittelpunkt $6^{\circ} 23,5'$ unter dem Horizont sich befindet, wenn der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 16'$, 1, die Refraktion im Horizont $\varrho = 34', 9$ gegeben sind?

- Nr. 7β. Am 1. September sei die Deklination der Sonne $\delta = + 8^{\circ} 14' 15''$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 15' 52,9''$, die Horizontalparallaxe* $p = 8,5''$, die Zeitgleichung $z = - 7,2\ s$. Um welche mittlere Zeit geht die Sonne in Hamburg unter, wenn die Horizontalrefraktion $\varrho = 34' 30''$ beträgt?

Nr. 8. Die Sonne steht am längsten Tage im Sechsuhrkreise. Welche Richtung und welche Länge hat der Schatten eines 1,5 m hohen vertikalen Stabes in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$), wenn die Deklination der Sonne $\delta = 23^\circ 27' 5''$ gerechnet wird?

④ Nr. 8a. Welche Richtung hat in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) eine Strasse, die am längsten Tage um 6 h nachmittags schattenlos ist? (Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27' 11''$.)

Nr. 9. Als am 21. Juni die Sonne genau im Westen stand, reichte das Ende des Schattens eines $p = 15$ m hohen Baumes auf horizontalem Felde gerade bis an das Ufer eines Baches. Wie hoch stand die Sonne zu der Zeit, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ ist, und der Ort unter der Breite $\varphi = 51^\circ 30'$ liegt? Wie weit ist das Ufer des Baches vom Baume entfernt in der Schattenrichtung?

Nr. 9a. Um wieviel Uhr MEZ. (mitteleuropäische Zeit) steht die Sonne am Nachmittage des 6. Juli im ersten Vertikal von Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$), und welche Höhe hat sie in diesem Augenblick? $\delta = 22^\circ 38' 22''$, Zeitgleichung $z = + 4^m 32,5^s$; Unterschied gegen den MEZ-Meridian: $20^m 6,2^s$.

Nr. 10. Zu welcher Zeit wird ein Stern, der um 9 h 22 m 15 s kulminiert, und dessen Deklination $\delta = + 16^\circ 13,2'$ ist, nur noch eine Höhe $h = 28^\circ 5', 5$ haben und in welchem Azimut erreicht er diese Höhe? Die geographische Breite des Beobachtungsortes soll daraus entnommen werden, dass der Stern zur Zeit der Kulmination die Höhe $h_k = 52^\circ 40'$ hatte.

Nr. 11. Wie gross ist in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) am 1. September 3 Stunden nach dem wahren Mittage die Höhe und das Azimut des unteren Sonnenrandes, wenn die Deklination der Sonne $\delta = 8^\circ 14' 15''$, ihr scheinbarer Halbmesser $r = 15' 53''$ beträgt?

Nr. 12. Am 21. Juli 1892 wurde um 5 h 19 m 37,2 s mittlerer Greenwicher Zeit in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) die scheinbare Höhe des unteren Sonnenrandes $h = 16^\circ 57' 25''$ beobachtet. Wie lässt sich hieraus die Länge von Hamburg berechnen, wenn die Deklination des Sonnenmittelpunktes zur Zeit der Beobachtung $\delta = 20^\circ 18' 20''$, die Refraktion $\rho = 3' 8''$, der Sonnenhalbmesser $r = 15' 47''$, die Parallaxe $p = 8''$, die Zeitgleichung $z = + 6^m 11,2^s$ war?

Nr. 13. Um die Sternzeit $\mathcal{S} = 5^h 25^m$ ist auf der Hamburger Sternwarte ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) die Höhe eines Sternes

$h = 43^{\circ} 37' 50''$, das westliche Azimut $A = 79^{\circ} 19' 40''$ beobachtet. Die Deklination und die Rektaszension des Sterns sind zu berechnen.

Nr. 13 α . An einem Orte unter der Breite $\varphi = 50^{\circ} 30'$ war die Sonnenhöhe $h = 40^{\circ} 25'$, und die Schatten fielen in die Richtung NO. Welche Deklination hatte damals die Sonne und um wieviel Uhr hatte sie jene Höhe?

Nr. 14. Wenn für den Mittag eines bestimmten Tages die Länge der Sonne $\lambda = 45^{\circ} 14' 25''$ bekannt ist, die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 20''$ beträgt, wie gross ist die Deklination der Sonne, und wie gross ist die Tageslänge für Hamburg ($\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$)?

Nr. 15. Wenn für einen bestimmten Tag die Rektaszension der Sonne $\alpha = 2\ h\ 35\ m\ 21,7\ s$ und die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 28' 28''$ beträgt, wie gross ist die Deklination der Sonne, und welches ist für die geographische Breite $\varphi = 51^{\circ} 28' 38''$ die Tageslänge?

Nr. 16. Welches ist die Deklination der Sonne, wenn für $\varphi = 53^{\circ} 33'$ die Tageslänge $2t_0 = 13\ h\ 40\ m$ beträgt? Welche Länge hat die Sonne an dem Tage, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 28'$ ist? An welchen Kalendertagen findet die angegebene Tageslänge ungefähr statt?

~~17~~ Nr. 17. Am 22. September (Herbstäquinoktium), nachmittags 3 Uhr 20 Minuten wahre Sonnenzeit, ist der Schatten eines $a = 125,47\ m$ hohen Turmes $b = 303,64\ m$ lang. Wie hoch steht die Sonne zu der Zeit? Wie gross ist die Polhöhe des Ortes? In welcher Himmelsrichtung liegt der Schatten?

Nr. 18. In der geographischen Breite $\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$ betrug das Azimut eines Sternes $t = 2\ h$ nach seiner Kulmination $A = 47^{\circ} 6' 10''$. Wie gross ist seine Deklination und welche Höhe hatte er zur Zeit der Beobachtung?

Nr. 19. Jemand beobachtet, dass eine von SO. nach NW. führende Strasse um $1\ h\ 52\ m$ nachmittags mittlere Ortszeit schattenlos ist. Wie gross ist φ , wenn δ der Sonne zur Zeit der Beobachtung $= 20^{\circ} 25'$, die Zeitgleichung $z = -3\ m\ 34\ s$ beträgt?

Nr. 20 (mit ebener Trig.). An den Enden einer $a = 20\ m$ langen, nach dem Fusse einer Flaggenstange gerichteten Standlinie sind die Elevationswinkel der Spitze der Stange $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 30^{\circ}$ gemessen. Als die Sonne im Osten stand, war die Schattenlänge der Stange $s = 30,45\ m$. Die Beobachtung wurde

am 19. Juni gemacht. Wie lang ist die Flaggenstange? Wie hoch stand zur Zeit der Beobachtung die Sonne? Wie gross war ihre Deklination? Welche Polhöhe hat der Beobachtungsort?

Nr. 21. Wie gross ist die geographische Breite des Ortes, über dessen Horizont ein Stern, der die Deklination $\delta = 45^\circ$ besitzt, in $t = 3\ h$ nach dem Meridiandurchgang eine Höhe $h = 30^\circ$ besitzt?

Nr. 22. Um $7\ h\ 20\ m$ nachmittags wahre Sonnenzeit schickt der obere Sonnenrand den letzten Strahl über den Horizont eines Ortes. Die Deklination der Sonne ist zu der Zeit $\delta = 10^\circ\ 30'$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 16'$ und die Refraktion im Horizont $\rho = 34'$. Wie weit ist der Ort vom Aequator entfernt?

Nr. 23. Der äusserste Stern in der Deichsel des grossen Bären hat im Januar 1891 die Rektaszension $\alpha = 13\ h\ 43\ m\ 13\ s$ und die Deklination $\delta = 49^\circ\ 51'\ 30''$. Zur Sternzeit $\vartheta = 15\ h\ 13\ m\ 12\ s$ wird die Höhe desselben zu $h = 66^\circ\ 17'\ 58''$ gemessen. Welches ist die geographische Breite des Beobachtungsortes?

Nr. 24. Wie gross ist die geographische Breite eines Ortes, für den an einem bestimmten Tage um $t = 5\ h$ nachmittags die Sonnenhöhe $h = 11^\circ\ 16'\ 59''$ beträgt? Die Deklination der Sonne ist aus der Angabe zu bestimmen, dass zu der Zeit die Länge der Sonne $\lambda = 7^\circ\ 33'\ 21,3''$ und die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 14''$ ist.

Nr. 25. Ein Stern erreichte zur Zeit $t = 2\ h\ 20\ m\ 4\ s$ nach seiner Kulmination die Höhe $h = 37^\circ\ 32'$ über dem Hamburger Horizont. ($\varphi = 53^\circ\ 33'$.) Welches ist seine Deklination und in welcher Zeit nach seiner Kulmination wird er untergehen?

Nr. 26. Wie gross muss die Deklination der Sonne sein, damit die Tageslänge in Hamburg ($\varphi = 53^\circ\ 33'\ 7''$) mit Berücksichtigung der Refraktion $\rho = 34,8'$ und des scheinbaren Sonnenhalbmessers $r = 15'\ 46''$ $14\ h$ beträgt? Wie gross ist an diesem Tage die Abendweite?

Nr. 27. Ein Stern, dessen Deklination $\delta_1 = 40^\circ$ ist, hat um $t_2 = 10\ h$ abends wahre Sonnenzeit die Höhe $h_1 = 23^\circ\ 46'$. Wieviel Zeit ist seit seiner Kulmination verflossen, wenn die Sonnenrektaszension $\alpha_2 = 6\ h$, die Rektaszension des Sterns

$\alpha_1 = 9^h$ beträgt? Unter welcher nördlichen Breite wurde die Beobachtung gemacht?

Nr. 28. Welches ist die geographische Breite des Ortes, an dem die Dauer des längsten Tages (δ der Sonne $= \varepsilon = 23^\circ 27'$) mit Berücksichtigung der Refraktion $\rho = 35'$ und des scheinbaren Sonnenhalbmessers $r = 16' 18''$ beträgt?

Nr. 29. (Ohne Hülfswinkel. Formel f. 4 aufeinander folg. St.) Um 3^h nachmittags ist am 3. Juli in Hamburg eine Strasse schattenlos. ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$.) Welche Deklination hat die Sonne zu der Zeit, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ beträgt? In welcher Richtung verläuft die Strasse?

Nr. 30. Der Stern β leonis, dessen Deklination $\delta = 15^\circ 8' 12''$ ist, wurde vor und nach seiner Kulmination in derselben Höhe $h = 43^\circ 27'$ beobachtet. Die zweite Beobachtung wurde $2^t = 4^h 28^m 47^s$ später als die erste gemacht. Gesucht wird die geographische Breite des Beobachtungsortes.

Nr. 31. Wie hoch steht die Sonne am längsten Tage ($\delta = 23^\circ 27' 14''$) über dem Hambnrger Horizont ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) in dem Zeitpunkte, wo sie gerade in der Richtung SW. gesehen wird? Welches ist dann die wahre, die mittlere und die mitteleuropäische Zeit, wenn die Zeitgleichung $z = + 1^m 24,6^s$ und die Zeitdifferenz zwischen Hamburg und dem mitteleuropäischen Meridian $20^m 6,2^s$ beträgt?

Nr. 32. $t = 2\frac{1}{2}^h$ nach der Kulmination hat die Sonne in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33'$) die Höhe $h = 43^\circ 27'$. Welche Deklination hat sie? An welchen Tagen kann die Beobachtung stattgefunden haben? Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^\circ 27'$.

Nr. 33. Als die Sonne ihren höchsten Tagesstand erreichte, war ihre Höhe $h_1 = 56^\circ 27'$. 6 Stunden später war die Höhe $h_2 = 15^\circ 58' 7''$. Wie gross sind geographische Breite des Beobachtungsortes und Deklination der Sonne?

Nr. 34. An einem Tage im Anfange des Sommers bildete in Christiania ($\varphi = 59^\circ 55'$) der Schatten des Stabes einer an einer Ostwestvertikalwand angebrachten Sonnenuhr mit der Vertikallinie einen Winkel von 25° . Um wieviel Uhr nachmittags wurde diese Beobachtung gemacht? Die astronomische Uhr zeigte zu der Zeit $\vartheta = 10^h 1^m 10^s$. Wie gross war demnach die Sonnenrektaszension? Wie weit war ferner die Sonne auf der Ekliptik vom Frühlingspunkt entfernt? An

welchem Datum ungefähr fand die Beobachtung statt, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ beträgt?

Nr. 35. Um 6 Uhr abends ist die Höhe des Sonnenmittelpunktes $h = 10^\circ$. Der Tag dauert 16 h. Welchen Abstand hat der auf der nördlichen Halbkugel liegende Beobachtungsort vom Erdäquator? Welchen Abstand vom Himmelsäquator hat der Sonnenmittelpunkt?

No. 36 (mit Differentialrechnung). Welche Deklination haben die Sterne, die in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) 3 Stunden nach ihrer Kulmination relativ die grösste Höhe haben? Wie gross ist diese Höhe?

§ 1. Kubische Gleichungen.

A. Rein kubische Gleichungen.

Nr. 1 (mit Stereometrie). Durch eine Halbkugel vom Radius 1 soll parallel dem Grundkreise ein ebener Schnitt so geführt werden, dass das entstandene Segment nebst dem Zylinder, der zwischen beiden Parallelebenen eingeschrieben ist, zusammen $\frac{7}{8}$ des Halbkugelvolumens ausmachen. In welcher Höhe über dem Grundkreise muss die Schnittebene liegen?

Nr. 2 (m. Ster.). Es soll ein allseitig geschlossener Hohlzylinder aus Aluminium (spez. Gew. $s = 3$) von quadratischem Achsenschnitt und von der Wandungsdicke $d = 1$ cm angefertigt werden. Wie gross muss der Radius des Zylinders sein, damit er im Wasser gerade bis zur Mitte eintaucht?

B. Cardanische Formel.

Nr. 1. $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0.$

Nr. 2. $x^3 + 21x^2 + 162x + 572 = 0.$

Nr. 3. $x^3 + 3x^2 - 4x + 30 = 0.$

Nr. 4. $x^3 - 21x^2 + 151x - 387 = 0.$

Nr. 5. $x^3 - 7,5x^2 + 9x - 67,5 = 0.$

Nr. 6. $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0.$

Nr. 7. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0.$

Nr. 8. $x^3 - 6x^2 - 4x - 21 = 0.$

Nr. 9. $x^3 + 15x^2 + 31x - 255 = 0$.

Nr. 10. $x^3 - 12x^2 + 49x - 78 = 0$.

Nr. 11 (m. Ster.). Ein Kegelstumpf, dessen Höhe gleich dem Unterschied der Radien R und r seiner Grundkreise ist, hat denselben Inhalt wie eine Halbkugel, deren Radius das arithmetische Mittel der beiden Radien R und r ist. Wie gross ist das Verhältnis $R:r$?

Nr. 12 (m. Ster.). Ein Kegelstumpf ist gleich einem Zylinder, dessen Höhe gleich dem Radius der Grundfläche ist. Die Kegelstumpfhöhe ist 3 m, der Radius der einen Grundfläche $\frac{1}{3}$ m, der der zweiten gleich dem des Zylinders. Wie hoch ist der Zylinder?

Nr. 13 (m. Ster.). Auf der kleinen Endfläche eines Kegelstumpfes, dessen Höhe $h = 2$ ist, dessen Endflächen die Radien $R = 6$, $r = 5$ haben, ruht ein Kugelsegment, dessen Grundkreis denselben Radius $r = 5$ hat. Wie gross sind seine Höhe und der Kugelradius, da das Segment denselben Inhalt wie der Kegelstumpf hat?

Nr. 14 (m. Ster.). Eine im Wasser schwimmende Kugel ragt mit einem Segmente $V = 104,72$ cdm heraus, dessen Begrenzungskreis den Radius $r = 4$ dm hat. Wie gross sind die Höhe des herausragenden Segments und der Kugelradius?

Nr. 15 (m. Ster.). Das Volumen eines Kegelstumpfes, von dem der eine Grundflächenradius $r = 3$ cm, die Höhe das arithmetische Mittel beider Grundflächenradien ist, ist $V = 65\frac{1}{3} \pi$ ccm. Wie gross ist der andere Grundflächenradius? Wie gross ist die Höhe? Wie gross sind Mantel und Oberfläche des Stumpfes?

Nr. 16 (m. Ster.). In eine Halbkugel mit Radius $r = 1$ soll ein solcher Zylinder einbeschrieben werden, dass der den Zylinder umgebende ringförmige Teil der Halbkugel denselben Inhalt besitzt wie der auf dem Zylinder liegende Kugelabschnitt. Welches ist die Höhe dieses Zylinders?

Nr. 17 (m. Ster.). Zwei sich von aussen berührende Kugeln, von denen die grössere den Radius $r = 2$ hat, werden gemeinschaftlich vom Mantel eines Kegels berührt. Wie gross ist der Radius der kleineren Kugel, wenn der Teil des Kegelmantels von der Spitze bis zur Berührung mit der kleineren Kugel die Fläche $M = 12 \pi$ qcm hat?

Nr. 18. (Arithmetische Reihe.) Das Produkt der 3 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Differenz 3 ist, ist 13 608. Wie heisst das Anfangsglied?

Nr. 19. (Geometrische Reihe.) Das Anfangsglied einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern ist 2, die Summe 518. Wie heisst der Exponent?

Nr. 20. (Figurierte Zahlen.) 270 Kugeln sollen in einer gleichseitig dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet werden. Wieviel Kugeln müssen in der untersten Schicht in einer Reihe liegen?

Nr. 21. (Gesellschaftsrechnung.) Von 4000 $\mathcal{M}$, die zu verteilen sind, erhält A 1000 $\mathcal{M}$, B 500 $\mathcal{M}$ und einen bestimmten Bruchteil von dem, was A erhalten, C 500 $\mathcal{M}$ und denselben Bruchteil von dem, was B erhalten, D 500 $\mathcal{M}$ und denselben Bruchteil von allem, was C erhalten hat. Wieviel erhält jeder?

Nr. 22. (Kurvenlehre ohne Diff.) In welchem Punkte durchschneidet die Kissoide $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ die im Abstände a zur X Achse gezogene Parallele?

Nr. 23 (mit Diff.). Für welchen Wert von x wird $f(x) = 27x^4 + 90x^2 + 496x + 100$ ein Minimum?

Nr. 24. Ebenso für $f(x) = x^4 + 24x^2 + 252x - 1000$.

Nr. 25 (mit Diff.). Für welchen Wert von x erhält der Quotient $\frac{x^3 - 3x - 52}{x^3 + 6x - 88}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ und wie gross ist ist der Quotient für diesen Wert von x ?

Nr. 26 (mit Diff. und analyt. Geometrie). Wie viele reelle Tangenten gibt es vom Punkte $x_1 = 3, y_1 = 14$ an die Kurve $y^2 = x^3$? Welches sind die Koordinaten ihrer Berührungspunkte?

Nr. 27. Für welchen Wert von x erreicht die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3x + 4$ einen grössten oder kleinsten Wert?

C. Die Diskriminante ist = 0.

Nr. 1 (mit Trigonometrie). Wie gross ist $\sin x$, wenn $\cos(2x) \cdot \sqrt{1 - \cos(2x)} = \frac{2}{9} \sqrt{3}$ ist?

Nr. 2 (m. Diff.). Die Gleichung $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{8} = 0$ ist auf das Vorhandensein zweier gleichen Wurzeln zu

untersuchen, und es ist die etwa vorhandene Doppelwurzel zu berechnen.

Nr. 3 (mit Kurvenlehre). In welchen Punkten wird die Kurve $9(y - \frac{2}{3})^2 - (x - 20)^2 - 25(3y - \frac{44}{3}) = 0$ von den Koordinatenachsen geschnitten oder berührt?

✦ Nr. 4 (m. Ster.). Einem Kegel ist ein anderer so eingeschrieben, dass seine Spitze im Mittelpunkte der Grundfläche des ersten steht. Wie gross ist der Radius des umschriebenen Kegels, wenn der des eingeschriebenen $\varrho = 2$ ist und wenn der umschriebene Kegel $n = 6\frac{3}{4}$ mal so gross wie der eingeschriebene ist?

Nr. 5. (Exponentialgleichung.) $(x \log x) \log x = \frac{x^{12}}{10^{16}}$.

✦ Nr. 6 (m. Ster.). Die Kanten eines regelmässigen Tetraders $SABC$ werden durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten. Durch die Seite $B_1 C_1$ des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ ist eine Ebene parallel der Kante SA gelegt, die die Grundfläche in DE schneidet. Wie gross ist die Seite $B_1 C_1$, wenn das abgeschnittene Prisma $A_1 B_1 C_1 ADE$ $n = \frac{4}{9}$ des Tetraeders beträgt und die Tetraederkante $a = 12$ cm lang ist?

D. Irraduzibeler Fall.

Nr. 1. $x^3 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 30 = 0.$

Nr. 2. $x^3 - 6x^2 - \frac{x}{2} + 3 = 0.$

Nr. 3. $x^3 - 8x^2 + 17x - 4 = 0.$

✦ Nr. 4 (m. Ster.). Wie gross ist die Oberfläche des unbedeckten Segments einer im Quecksilber schwimmenden eisernen Kugel von Radius $r = 10$ cm, wenn die spezifischen Gewichte 13,6 und 7,6 sind?

Nr. 5 (m. Ster.). Durch eine Halbkugel soll eine mit dem Grundkreise parallele Ebene so gelegt werden, dass die abgetrennte Kugelschicht $\frac{1}{3}$ des Halbkugelvolumens enthält. Welches ist die Entfernung dieser Ebene von der des Grundkreises, wenn der Kugelradius $r = 1$ ist?

Nr. 6. In einen geraden Kegel mit $r = 2$ und $h = 3$ ist ein gerader Kreiszylinder einzubeschreiben, dessen Volumen zusammen mit dem des darüber stehenden Kegels die Hälfte des ganzen Kegels ausmacht. Wie gross ist der Zylinderradius?

Nr. 7. Volumen $V = 12 \pi$ cbm und Mantel $M = 15 \pi$ qm eines geraden Kegels sind gegeben. Wie gross sind Grundflächenradius und Höhe desselben?

Nr. 8. In eine Kugel mit Radius r ist ein halb so grosser Zylinder einbeschrieben. Wie hoch ist er?

Nr. 9. In einem geraden Kegel mit $r = 1$, $h = 3$ befindet sich ein anderer gerader Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des ersteren, dessen Grundkreis im Mantel des ersteren liegt. Wie gross ist der Grundflächenradius des inneren Kegels, wenn sein Volumen $\frac{1}{3}$ des Volumens des äusseren Kegels ist?

Nr. 10. In einen geraden Kegelstumpf mit $R = 2$, $r = 1$, $h = 1$, soll ein gerader Zylinder so einbeschrieben werden, dass seine Grundfläche in der grösseren Endfläche, der obere Rand im Mantel des Stumpfes liegt und dass sein Inhalt $\frac{3}{4}$ von dem des Stumpfes beträgt. Wie gross ist der Zylinderradius?

Nr. 11. In eine Halbkugel mit dem Radius $r = 1$ einen geraden Zylinder einzubeschreiben, dessen Volumen $\frac{1}{4}$ des Halbkugelvolumens beträgt. Wie gross sind Radius der Grundfläche und Höhe dieses Zylinders?

Nr. 12. Einem geraden Kegel mit $r = 3$, $h = 6$ soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Volumen $\frac{1}{3}$ des Kegelvolumens ist. Wie gross ist sein Grundflächenradius?

Nr. 13. Um eine Halbkugel mit $r = 1$ ist ein gerader Kegel zu beschreiben, dessen Volumen $n = 3$ mal so gross wie das der Halbkugel ist. Wie gross ist die Höhe des Kegels?

Nr. 14. Wie gross ist die Dicke einer gleichseitigen Bikonvexlinse, wenn ihr Volumen $\frac{5}{16}$ von dem einer Kugel beträgt, deren Halbmesser $r = 2$ den Krümmungsradien der Linse gleich ist?

Nr. 15. In eine Halbkugel mit $r = 1$ soll ein gerader Zylinder einbeschrieben werden, der denselben Inhalt hat wie das über ihm befindliche Kugelsegment. Wie gross ist seine Höhe?

Nr. 16. In eine Kugel mit Radius $r = 6$ ist ein gerader Zylinder eingeschrieben und über jeder Grundfläche ein gerader Kegel, dessen Spitze in der Kugel liegt. Wie gross ist die

Kegelhöhe, wenn Zylinder und beide Kegel zusammen $n = \frac{3}{4}$ der Kugel betragen?

Nr. 17 (m. Ster.). In eine Kugel mit dem Radius $r = 6$ ist ein gerader Kegel einzubeschreiben, sodass die Differenz seines Volumens und des Volumens des Kugelsegments, in dem der Kegel nicht liegt, $\frac{1}{27}$ des Volumens der Vollkugel ist. Welchen Abstand hat der Kugelmittelpunkt von der Kegelgrundfläche?

Nr. 18 (m. Plan.). Wie gross sind Schenkel und Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Umfang $2u = 18$ m, dessen Inhalt $F = 12$ qm ist?

Nr. 19. Das Produkt der Ziffern einer zweiziffrigen Zahl ist um $a = 22$ kleiner als die Zahl selbst. Das Quadrat der Zehnerziffer ist um $b = 18$ grösser als die Einerziffer. Die Zahl ist zu berechnen?

Nr. 20 (m. Trig.). Welche Winkel genügen der Gleichung $\cos(3\varphi) + 3\cos\varphi = 6\cos(2\varphi) + 2$?

Nr. 21 (m. Wahrscheinlichkeitsrech.). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis ein erstes Mal eintritt, dann zweimal nicht eintritt, ist um $\frac{2}{27}$ grösser als die Wahrscheinlichkeit, dass es die beiden ersten Male eintritt, das dritte Mal aber nicht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis einmal eintritt?

Nr. 22 (m. analyt. Geom.). Die Ordinate und der Brennpunktstrahl eines Parabelpunktes bilden mit der Achse ein Dreieck, das $n = \frac{1}{2}$ mal so gross ist wie das Quadrat über dem halben Parameter. Wie gross ist die Ordinate des Parabelpunktes?

Nr. 23 (m. Diff.). Die Funktion $y = x^4 - 26x^2 + 48x + 9$ ist in bezug auf Maxima und Minima zu untersuchen.

Nr. 24 (m. Diff.). Zu welchen Abszissen gehören die Punkte, in denen die Tangenten an die Kurve $y = x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 240x + 1$ der Abszissenachse parallel sind?

No. 25 (m. Diff.). Welches sind die Abszissen der Punkte, in denen die Subtangente der Kurve $y^4 = a(x^3 + a^3)$ die Länge $4a$ hat?

No. 26 (m. Diff.). Die Abszissen der Wendepunkte der Kurve $y = \frac{a^2(a-x)}{x^2 + a^2}$ sind zu bestimmen.

Nr. 27 (m. Diff.). Für welche Abszissen hat die Kurve
 $y = x + \frac{21}{x} - \frac{10}{x^2}$ Maxima und Minima?

Nr. 28 (m. Diff.). Welches sind die Abszissen der Punkte der Kurve $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$, in denen die Ordinate mit dem Krümmungsradius einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente = 3 ist?

Nr. 29. Für welche Abszissen sind die Ordinaten der Kurve
 $y = 1 + x + \frac{12}{x} - \frac{11}{2x^2}$ am grössten oder kleinsten?

Nr. 30 (m. analyt. Geom. und Integralrech.). Ein rechtwinkliges Dreieck liegt mit einer Ecke im Mittelpunkt M einer gleichseitigen Hyperbel mit der Halbachse a . Seine Katheten sind Ordinate und Abszisse eines Hyperbelpunktes. Der durch die Drehung des Dreiecks um die reelle Hauptachse entstehende Kegel soll doppelt so gross sein wie das von seiner Grundfläche begrenzte Segment des entstehenden Rotationshyperboloids. Wie gross ist die Abszisse des Hyperbelpunktes?

Nr. 31 (m. analyt. Geom. und Integralrech.). In der Parabel $y^2 = 2px$ ist die Ordinate zur Abszisse p gezogen. In das durch Drehung des so erhaltenen Segments um die Parabelachse entstehende Rotationsparaboloid soll ein gerader Zylinder mit dem Mantel πp^2 eingezeichnet werden. Wie gross sind die Radien der Grundflächen der beiden möglichen Zylinder? Wie kann man sie geometrisch konstruieren?

Nr. 33 (m. analyt. Geom. und Integralrech.). In das Rotationsellipsoid, das durch Drehung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2$ um die grosse Hauptachse entsteht, den geraden Kegel mit A_2 als Spitze zu legen, sodass das Kegelvolumen $\frac{1}{3}$ so gross wie das Ellipsoidvolumen ist. Welche Höhen haben die zwei möglichen Kegel?

Nr. 33. Die beiden Gleichungen $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ und $6x^3 - x^2 - 7x + 2 = 0$ in bezug auf gemeinsame Wurzeln zu untersuchen.

§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Nr. 1. Ein Kapital von $c = 1000 \text{ M}$ wird auf $2 n = 20$ Jahre auf Zinseszins gelegt. Nach Verlauf von n Jahren wird ein gleiches Kapital von $c \text{ M}$ auf n Jahre zu demselben Zinsfuss auf Zinseszins gegeben. Wenn nun beide Kapitalien am Ende der Zeit auf zusammen $c_1 = 4000 \text{ M}$ angewachsen sind, zu wieviel Prozent waren sie ausgeliehen?

Nr. 2. Jemand stiftet ein Kapital von $a = 100\,000 \text{ M}$, damit aus dem Zinsbetrage nach Ablauf von $n = 15$ Jahren, während welcher Zeit die Zinsen zum Kapital geschlagen werden sollen, jährliche Stipendien bezahlt werden. Nach $n_1 = 3$ Jahren will er noch so viel stiften, als nötig ist, damit gleich grosse Stipendien schon nach weiteren $n_2 = 7$ Jahren, also 5 Jahre früher, wie ursprünglich beabsichtigt worden war, bezahlt werden können. Wieviel muss er nachzahlen? Wieviel hätte er, um seine letzte Absicht zu erreichen, von vornherein stiften müssen? Wieviel betragen die Stipendien? $p = 4\%$.

Nr. 3. Ein Schuldner, der seinem Gläubiger $n = 4$ Jahre hindurch die zu $p = 5\%$ verabredeten Zinsen für ein Darlehn von $k = 1200 \text{ M}$ nicht gezahlt hatte, entrichtete demselben nach dieser Zeit die Hälfte der gesamten Schuld und verpflichtete sich, die andere Hälfte durch $n_1 = 5$ gleich grosse, am Ende jeden Jahres zu zahlende Raten zu tilgen. Wie gross ist die jährliche Abzahlung?

Nr. 4. Jemand verpflichtet sich, eine Schuld von $K = 1200 \text{ M}$ dadurch zu tilgen, dass sofort $k = 200 \text{ M}$ und nach Ablauf einiger Jahre $n = 5$ gleiche, jährliche Raten von $r = 243 \text{ M}$ zurückerstattet werden. Wann beginnt die Ratenzahlung, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden?

Nr. 5. Ein Kapital vergrössert sich durch Zinseszins in $n = 10$ Jahren um $k = 12\,000 \text{ M}$ und wächst in $n_1 = 28$ Jahren auf das $m = 3$ fache seiner anfänglichen Grösse an. Wie gross war es anfangs und zu wieviel Prozent war es ausgeliehen?

Nr. 6. Ein Kaufmann sieht sich genötigt, seinem $k = 150\,000 \text{ M}$ betragenden Vermögen 5 Jahre lang je $a = 15\,000 \text{ M}$ zu entnehmen. Infolge steigenden Verdienstes ist er nach Ablauf der 5 Jahre in der Lage, jährlich wieder $a \text{ M}$ zurückzulegen. Wann wird sein Vermögen wieder $k \text{ M}$ betragen, wenn $p = 3,5\%$ gerechnet werden?

Nr. 7. Wieviel mal muss eine gewisse Summe jährlich pränumerando auf Zinseszins zu $p = 3\%$ angelegt werden, damit der doppelte Betrag ebenso viel mal in jährlichen Raten ausgezahlt werden kann?

Nr. 8. Von dem Ertrage einer milden Stiftung von $c = 300\,000 \text{ M}$, welche zu $p = 3,5\%$ verzinst werden, darf $n = 30$ Jahre hindurch nur eine Summe von $a = 5250 \text{ M}$ jährlich verbraucht werden; der Rest dient zur Vergrößerung des Kapitals. Wie gross ist dasselbe nach dieser Zeit, und wieviel betragen alsdann die für die Stiftungszwecke ganz zur Verfügung stehenden jährlichen Zinsen?

Nr. 9. Ein Wald, dessen Holzbestand zu $a = 500\,000 \text{ cbm}$ taxiert ist, vermehrt sich jährlich um $p = 2\%$. Wenn nun zu Ende jeden Jahres $r = 15\,000 \text{ cbm}$ Holz ausgeschlagen werden, wie gross wird der Holzbestand nach $n = 12$ Jahren sein?

Nr. 10. Eine $n = 10$ Jahre hindurch pränumerando zu gewährende Rente von $r = 2000 \text{ M}$ soll in eine $m = 3$ Jahre später beginnende und vierteljährlich zahlbare verwandelt werden. Wie gross muss jede Teilzahlung sein, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden und die letzte Zahlung an demselben Termin erfolgen soll, der bei der ursprünglichen Vereinbarung der letzte gewesen wäre?

Nr. 11. Jemand zahlt einer Gesellschaft ein Kapital von $a = 20\,000 \text{ M}$ ein, damit er nach $m = 12$ Jahren eine lebenslängliche Jahresrente $r = 3000 \text{ M}$ erhalte. Die erste Rente soll nach $(m + 1)$ Jahren gezahlt werden. Wie lange kann die Gesellschaft diese Rente ohne Schaden bezahlen, wenn $p = 3\%$ gerechnet werden?

Nr. 12. Jemand ist verpflichtet, $n = 10$ Jahren hindurch am Ende jeden Jahres die Summe $r = 600 \text{ M}$ zu zahlen. Wie gross müsste die jährliche Einzahlung sein, wenn die Verpflichtung durch $n_1 = 15$ gleiche jährliche Raten, deren erste nach $n_2 = 3$ Jahren fällig ist, getilgt werden könnte? $p = 4\%$.

Nr. 13. Jemand hat $n = 16$ mal halbjährlich, und zwar zuletzt vor einem halben Jahre, $k = 2000 \text{ M}$ in eine Bank gezahlt, die den Zinseszins $p = 3\frac{1}{2}\%$ aber nur für ganze Jahre und für ein überschüssiges Halbjahr einfache Zinsen berechnet. Wie hoch ist der jetzige Wert der gesamten Einzahlungen?

Nr. 14. Jemand hat eine Fabrik, die ihm einen jährlichen Reingewinn von $a = 20\,000 \text{ M}$ bringt, wovon er jährlich $b = 12\,000 \text{ M}$ verbraucht. Nach $n = 10$ Jahren vergrößert er seinen Betrieb durch einen Bau, der $c = 200\,862 \text{ M}$ kostet, und erhöht dadurch den jährlichen Reingewinn um $m = 60\%$. Nach wieviel Jahren hat er die Kosten des Baues durch seine Überschüsse gedeckt, wenn $p = 4\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 15. Es stiftet jemand eine Summe von $k = 30\,000 \text{ M}$ und bestimmt, dass sie zunächst $n = 20$ Jahre hindurch zu $p = 3\%$ Zinseszins tragend angelegt und dann x Jahre hindurch am Ende jedes Jahres ein die nunmehrigen Zinsen übersteigender Betrag von $r = 3000 \text{ M}$ zu Stiftungszwecken verwendet werde, so lange, bis das Kapital wieder bis zum anfänglichen Betrage von $k \text{ M}$ zusammengeschmolzen ist. Wie lange kann der Betrag r verwendet werden?

Nr. 16. Eine gemeinnützige Gesellschaft zur Erbauung von Arbeiterwohnungen will ehrenhaften Arbeitern neu erbaute Wohnhäuser zum Eigentum unter der Bedingung überlassen, dass für ein Haus $n = 20$ Jahre vierteljährlich postnumerando eine Summe von $x \text{ M}$ bezahlt werde. Diese Zahlungen sollen der Gesellschaft die $c = 8000 \text{ M}$ betragenden Baukosten des Hauses mit $\frac{p}{4} = \frac{3}{4}\%$ vierteljährlich verzinsen und dieselben zugleich tilgen. Wie gross ist x ?

Nr. 17. Eine $n = 30$ Jahre hindurch mit $r = 1200 \text{ M}$ jährlich pränumerando zu zahlende Rente soll in eine $n_1 = 24$ Jahre halbjährlich postnumerando zu zahlende Rente umgewandelt werden. Wieviel beträgt eine der 48 Halbjahresrenten?

Nr. 18. Von einem Kapital von $k = 10\,000 \text{ M}$, das zu $p = 4\%$ auf Zinseszins steht, werden $n = 20$ Jahre lang $a = 500 \text{ M}$ entnommen. Wieviel Jahre lang muss das Kapital nach dieser Zeit auf Zinseszins stehen, damit nunmehr die 500 M ohne Verminderung des Kapitals entnommen werden können?

Nr. 19. Jemand tritt eine Rente, die er nach je 5 Jahren 6 mal postnumerando mit je $r = 5800 \text{ M}$ zu beziehen hat, an eine Gesellschaft ab, die ihm dafür $n = 65$ Jahre hindurch pränumerando eine Jahresrente von $r_1 = 1000 \text{ M}$ zahlt. Wer steht sich besser und um wieviel, wenn $p = 5\%$ gerechnet werden?

Nr. 20. Jemand kann $n = 20$ Jahre hindurch eine pränumerando fällige Rente von $a = 500 \text{ M}$ beziehen. Er lässt sich statt dessen von der Rentenbank sofort $b = 3000 \text{ M}$ auszahlen. Wann kann ihm die Bank nun noch $c = 5176,4 \text{ M}$ als Rest seiner Forderung zahlen, wenn $p = 3\frac{1}{2} \%$ gerechnet werden?

Nr. 21. Jemand übernimmt durch letztwillige Verfügung die Verpflichtung, einem alten Diener, dessen voraussichtliche Lebensdauer noch $n = 10$ Jahre beträgt, für die Dauer seines Lebens vierteljährlich im voraus $a = 200 \text{ M}$ zu zahlen. Er zahlt demselben statt dessen bar $b = 2000 \text{ M}$ und verpflichtet sich 5 unter sich gleich grosse Summen von zwei zu zwei Jahren zu zahlen, die erste nach 2 Jahren. Wieviel beträgt eine solche Summe, wenn ganzjährlich 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 22. Jemand zahlte, als er 35 Jahre alt war, bei einer Rentenbank $a = 20\,000 \text{ M}$ ein, um von seinem 62. Lebensjahre ab, zum ersten Male, wenn er 61 Jahr alt sein würde, $n = 10$ Jahre hindurch eine Jahresrente von $x \text{ M}$ zu beziehen. Wie gross ist x , wenn $p = 3\frac{1}{2} \%$ gerechnet werden?

Nr. 23. Der Ertrag einer Steuer, die vierteljährlich $r = 100\,000 \text{ M}$ beträgt, soll zur Tilgung einer Staatsschuld von $a = 6 \text{ Mill. M}$ benutzt werden. In welcher Zeit ist die Schuld getilgt? Wie gross ist der Restbetrag des letzten Vierteljahres, wenn der jährliche Zinsfuss 4% beträgt?

Nr. 24. Eine Schuld von $k = 10\,000 \text{ M}$ soll durch jährliche Abzahlungen von je $r = 1000 \text{ M}$ getilgt werden, die postnumerando erfolgen. Nach wieviel Jahren wird die Schuld getilgt sein? Mit der letzten Zahlung ist auch der Überschuss zu zahlen. Wieviel beträgt er?

Nr. 25. Ein Vater zahlt bei der Geburt eines Sohnes $a = 1000 \text{ M}$ bei einer Bank ein. An jedem folgenden Geburtstage des Sohnes will der Vater soviel einzahlen, dass der Sohn vom Beginn des 19. Lebensjahres an zum Besuche der Universität 4 Jahre hindurch jährlich $a = 1000 \text{ M}$ und dann 2 Jahre lang $b = 1500 \text{ M}$ zu seinem Unterhalt pränumerando von der Bank ausgezahlt bekommt. Wie gross muss die jährliche Einzahlung sein, wenn die letzte Einzahlung am Schlusse des 17. Lebensjahres des Sohnes erfolgt? $p = 3\frac{1}{2} \%$. Wie gross ist aber die jährliche Einzahlung, wenn auch am 1. Geburtstags des Sohnes ausser den $a = 1000 \text{ M}$ die jährliche Einzahlung erfolgt und bis zum Schlusse des 24. Lebensjahres fortgesetzt wird?

Nr. 26. Jemand, der ein Anrecht auf eine $n = 15$ Jahre laufende Rente von $a = 3000 \text{ M}$ hat, will, da er sich noch arbeitsfähig fühlt, den Beginn des Rentenempfanges so lange hinausschieben, bis er eine halbjährliche Rente von $b = 2000 \text{ M}$ $m = 14$ Jahre hindurch erhalten kann. Wie lange muss er warten, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden?

Nr. 27. Eine Schuld von $k = 100\,000 \text{ M}$ soll dadurch abgetragen werden, dass $n = 17$ Jahre hindurch am Ende jedes ersten Halbjahres $a = 3000 \text{ M}$, am Ende jedes zweiten Halbjahres $b = 5000 \text{ M}$ abgezahlt werden. Wie gross ist der Rest der Schuld nach 17 Jahren, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden?

Nr. 28. Welche Summe muss in eine Rentenbank, die den Zinsfuss $p = 3,5\%$ hat, eingezahlt werden, damit nach Ablauf von $n = 12$ Jahren eine jährliche pränumerierte Rente von $r = 2100 \text{ M}$ $m = 10$ Jahre hindurch gezahlt werden kann?

Nr. 29. Jemand zahlt $n = 40$ Jahre lang jährlich pränumerando $a = 180 \text{ M}$ in eine Witwenkasse und ausserdem $b = 210 \text{ M}$ in eine Lebensversicherungsbank. Nach seinem Tode erhält seine Witwe von der letzteren sofort $20\,000 \text{ M}$; von der Witwenkasse erhält sie noch $n_1 = 10$ Jahre lang postnumerando eine Pension von $c = 2000 \text{ M}$ au-gezahlt. Welche der beiden Versicherungsmethoden war die vorteilhaftere, wenn der Zinsfuss $p = 5\%$ angenommen wird?

Nr. 30. Jemand, dessen wahrscheinliche Lebensdauer noch $n = 24$ Jahre beträgt, kauft sich in eine Lebensversicherungsbank ein, sodass die Bank gegen eine lebenslängliche, pränumerierte Jahresprämie von $x \text{ M}$ seinen Erben bei seinem Tode eine Summe von $a = 20\,000 \text{ M}$ auszuzahlen hat. Wieviel beträgt x , wenn $p = 3\frac{1}{2}\%$ ist? Welchen Verlust erleidet die Bank, wenn der Versicherte schon nach $n_1 = 15$ Jahren stirbt?

Nr. 31. Jemand wünscht, vom Beginn des 25. Lebensjahres an, sich durch halbjährliche Ersparnisse eine Summe zurückzulegen, die am Ende des 50. Lebensjahres auf $10\,000 \text{ M}$ angewachsen ist. Wieviel muss er zu Beginn jedes Halbjahres zurücklegen, wenn sein Geld zu $3\frac{3}{4}\%$ verzinst wird? (Die letzte Einlage erfolgt $\frac{1}{2}$ Jahr vor der Auszahlung.)

Nr. 32. Jemand hat von seinem 17. bis zum 27. Jahre jährlich $a = 1500 \text{ M}$ zu seiner Ausbildung erhalten. Nachdem er von dieser Schuld zu Anfang des 30. Jahres $b = 11\,740 \text{ M}$ hat abtragen können, will er den Rest vom Ende des 33. Jahres bis

zum 43. Jahre durch 20 halbjährliche Zahlungen tilgen. Wieviel hat er am Ende jedes Halbjahres zu zahlen, wenn $p = 5\%$ gerechnet werden?

Nr. 33. Jemand hat ausser einem festen Einkommen von $b = 6700 \text{ M}$ ein Vermögen von $a = 100\,000 \text{ M}$, dessen Zinsen zu $p = 4\%$ er zu seinem Unterhalt nicht gebraucht. Er hat Gelegenheit, die Zinsen, die vierteljährlich bezahlt werden, sogleich wieder zinstragend bei einer Bank anzulegen, die auch $p\%$ rechnet und die Einlagen am Schlusse des Jahres kapitalisiert. Wann werden die vierteljährlichen Zinsen seines um die Bankzinsen vermehrten Vermögens von $a \text{ M}$ dem 4. Teil seines jährlichen Einkommens von $b \text{ M}$ gleich sein?

Nr. 34. Der Zeichnungspreis der deutschen Reichsanleihe von 1893 betrug $\text{M } 86,80$; der Kurs der 1891 aufgelegten war $84,40$. Jemand hat beide Male für $\text{M } 18\,314,80$ Schuldverschreibungen gekauft und die mit 3 vom Hundert des Nennwertes empfangenen Zinsen in jedem Jahre wieder auf Zinsen gelegt. Wann wird der Unterschied der aus beiden Einkäufen sich ergebenden Zinseinnahmen $\text{M } 1982,40$ betragen, wenn 3% Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 35. Jemand wünscht, eine alljährlich in geometrischer Progression mit dem Exponenten $e = 1,1$ steigende Rente $r = 4000 \text{ M}$, welche $n = 20$ mal am Jahresschlusse gezahlt werden soll, zu erwerben. Wie gross ist der zu erlegende Barwert? $p = 4\%$.

Nr. 36. Jemand hat eine in geometrischer Progression mit dem Exponenten $e = 1,5$ steigende Rente zu beziehen. Wieviel kann er sich jetzt mit $p = 3,5\%$ dafür zahlen lassen, wenn nach $m = 5$ Jahren die erste Jahresrente mit $a = 200 \text{ M}$ gezahlt werden soll, und im ganzen $n = 20$ Jahresrenten ausgezahlt werden sollen?

Nr. 37. Jemand zahlt am Anfange eines Jahres $a = 100 \text{ M}$, am Anfange jedes folgenden Jahres $a = 100 \text{ M}$ mehr als im vorhergehenden Jahre, $n = 20$ Jahre lang, also zuletzt am Anfange des n . Jahres $20 a \text{ M}$ bei einer Bank ein. Wieviel hat er im ganzen gezahlt? Welchen Wert haben die Einzahlungen am Ende des 20. Jahres, welchen Barwert, wenn $p = 3,5\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 38. Jemand, der ausser einem festen Einkommen noch eine jährlich um $d = 200 \text{ M}$ wachsende Nebeneinnahme hat,

legt von seinem Einkommen am Ende jedes Jahres $b = 1000 \text{ M}$ zurück und ausserdem vom Ende des 2. Jahres an den gesamten Zuwachs seiner Nebeneinkünfte. Wie gross ist das ersparte Kapital nach $n = 20$ Jahren, wenn $p = 3,5\%$ gerechnet werden?

Analytische Geometrie.

§ 1. Die Gerade.

Nr. 1. In einem rechtwinkligen Systeme sind die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 $x_1 = 5$, $y_1 = 7$; $x_2 = 9$, $y_2 = 11$. Unter welchem Winkel muss ein von P_1 ausgehender Strahl die X -Achse treffen, damit er unter demselben Winkel nach dem Punkte P_2 reflektiert wird?

Nr. 2. Auf den Achsen OX und OY eines rechtwinkligen Koordinatensystemes werden die gegebenen Strecken $OA = a$, $OB = b$ abgetragen, und über ihnen als Grundlinien beliebig viele Paare ähnlicher, gleichschenkliger Dreiecke innerhalb des $\angle XOY$ gezeichnet. Welches ist der Ort für die Mitte der Verbindungslinie der Spitzen entsprechender Dreiecke?

Nr. 3. Es sind ein Punkt O und eine Gerade L gegeben. Um O dreht sich der Strahl OP (P auf L), in P wird auf OP das Lot $PQ = OP$ errichtet. Gesucht wird der Ort für Q .

§ 2. Der Kreis.

Nr. 1. Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Geraden $y = a_1 x + b_1$, $y = a_2 x + b_2$, $y = a_3 x + b_3$. Welches sind die Koordinaten der Pole der Geraden in bezug auf den Kreis? Welche Länge hat die Verbindungslinie der Pole der beiden ersten Geraden? Wie gross ist der Inhalt des aus den 3 Polen gebildeten Dreiecks?

Nr. 2. Welches ist die Gleichung des Kreises, der den gegebenen Kreis $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ in den beiden Schnittpunkten auf der X -Achse rechtwinklig durchschneidet?

+ Nr. 3. Der geometrische Ort für die Spitze A eines Dreiecks ist zu bestimmen, von dem $BC = a$ und $\sin \beta : \sin \gamma = m$ gegeben ist.