

Realgymnasium des Johanneums zu Hamburg.

Unsere Abiturientenaufgaben aus der Mathematik

zusammengestellt von

Professor Hermann Ahlborn.

Beilage zum Berichte über das 70. Schuljahr.

Hamburg 1904.

Gedruckt bei Max Baumann,
Hamburg, Hohe Bleichen No. 16.

1904. Progr.-Nr. 851.

gha
28 (1904)



851b.



VORWORT.

Mathematische Abiturientenaufgaben sind für die Zwecke des Prima-Unterrichts, so viel ich weiss, zuerst zusammengestellt von Martus im Anfange der 60er Jahre des 19. Jahrhunderts. Die umfangreiche Sammlung, die neuerdings noch sehr wesentlich vermehrt ist, hat bis 1900 10 Auflagen erlebt, ein Zeichen für ihre Brauchbarkeit und weite Verbreitung. In einem besonderen Bande sind die Ergebnisse hinzugefügt, und zwar oft bloss Zahlenresultate, zuweilen auch Hinweise auf die Lösung und naheliegende Bemerkungen zu den Resultaten.

Meinen Fachkollegen an unserer Anstalt und mir schien es erwünscht, die seit 29 Jahren bei uns gegebenen mathematischen Abiturientenaufgaben in ähnlicher Weise als Übungsbuch für den Wiederholungsunterricht für unsere Primaner zusammenzustellen.

Der für eine Programmbeilage sehr beschränkte Raum gestattete nur die Aufgaben aus den wichtigeren Gebieten des Obersekunda- und Prima-Unterrichts aufzunehmen.

Es mussten ausgeschieden werden Aufgaben aus folgenden Gebieten, die zum Teil auch jetzt nicht mehr einen pflichtmässigen Unterrichtsstoff unserer Oberklassen bilden: Algebraische Geometrie, ebene Trigonometrie, Stereometrie, Gleich. 2. Gr. mit mehreren Unbek., reziproke Gleich., diophantische Gleich., Gleich.

höherer Grade, Moivrescher Satz, geometr. Reihen, Kettenbrüche, figurierte Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, binomischer Satz. Auch konnte ich aus demselben Grunde nur die nackten Zahlen-ergebnisse hinzufügen und musste auf Hinweise auf die Lösung oder weitergehende Bemerkungen völlig verzichten.

Da ich es nicht für angebracht hielt, wie es in den „bayrischen Absolutorial-Aufgaben“ von Ducrue geschehen ist, die Aufgaben nach der Zeit zu gruppieren, sondern eine sachliche Anordnung wie Martus — allerdings ohne weitgehende Einteilung in Gruppen — vorgezogen habe, so habe ich nach dem Vorgange von Wallentin in den „Oesterreichischen Abiturientenaufgaben“ am Schlusse eine Zusammenstellung von Aufgabengruppen hinzugefügt, die entweder genau so gestellt sind oder bei denen einzelne, nicht mit aufgenommenen Aufgaben durch andere, gleich schwere ersetzt sind.

H. Ahlborn.

Sphärische Trigonometrie.

Nr. 1. Bei einer geraden, vierseitigen Pyramide mit der rechteckigen Grundfläche $ABCD$ und der Spitze E bilden die Seitenflächen EAB und ECD mit der Grundfläche den Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$, die Seitenflächen EBC und EAD mit der Grundfläche den Winkel $\beta = 30^\circ$. Welches sind die Winkel der gleichschenkligen Seitendreiecke? Welches sind die Winkel zwischen je zwei Seitenflächen?

Nr. 2. Ein Punkt liegt 100° westlich auf dem Parallelkreise der Sternwarte von Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$). Unter der Annahme, dass die Erde eine Kugel ist, deren Radius $r = 859,5$ Meilen, soll der Unterschied berechnet werden zwischen der sphärischen Entfernung der beiden Punkte und der Länge des Bogens des Parallelkreises, der zwischen den beiden Punkten liegt.

Nr. 3. Die kürzeste Entfernung zwischen Berlin ($\varphi_1 = 52^\circ 30' 17''$, $l_1 = 31^\circ 3' 25''$ östlich von Ferro) und Paris ($\varphi_2 = 48^\circ 50' 13''$, $l_2 = 20^\circ$ östlich von Ferro) ist zu bestimmen, wenn ein Grad eines grössten Kreises der Erde $= 111,3$ km ist.

Nr. 3a. Die kürzesten Entfernung zwischen Hamburg-Finschhafen auf Deutsch-Neu-Guinea ist zu bestimmen, wenn ihre geographischen Koordinaten sind: $\varphi_1 = 53^\circ 33' 10''$, $l_1 = 0\ h\ 39\ m\ 54\ s$; $\varphi_2 = -6^\circ 33' 40''$, $l_2 = 9\ h\ 51\ m\ 29\ s$.

Nr. 4. Die Entfernung Wien-Göttingen beträgt 591,03 km. Die geographischen Breiten sind: $\varphi_1 = 48^\circ 12' 35,5''$ und $\varphi_2 = 51^\circ 31' 47,9''$. Welchen Längenunterschied haben sie? Welchen Zeitunterschied?

✓ Nr. 4a. Die Entfernung Hamburg-St. Franzisko ist 8887 km, die geographischen Breiten sind $\varphi_1 = 53^\circ 33' 7''$, $\varphi_2 = 37^\circ 47' 24,1''$. Gesucht den Zeitunterschied.

✓ Nr. 5. Welchen Anfangskurs hat ein Schiff zu nehmen, das auf einem grössten Kreise der Erde von einem Orte unter $\varphi_1 = 40^\circ N$, $l_1 = 20^\circ W$ nach einem Orte unter $\varphi_2 = 50^\circ N$, $l_2 = 50^\circ W$ gelangen will?

Nr. 5a. Dieselbe Aufgabe, wenn Ausgangshafen und Bestimmungsort sind: Cuxhaven ($\varphi_1 = 53^\circ 52' N$, $l_1 = 8^\circ 33' 20'' O$), Edinburg ($\varphi_2 = 55^\circ 57' 20'' N$, $l_2 = 3^\circ 10' 45'' W$). Auch die Entfernung ist in Seemeilen anzugeben.

Nr. 6. Den Tagbogen und die Abendweite eines Sterns für Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7'' N$) zu berechnen, wenn seine nördliche Deklination $\delta = 23^\circ 27' 27,3''$ beträgt.

Nr. 6a. Um wieviel Grad vom Nordpunkt des Hamburger Horizonts ($\varphi = 53^\circ 33'$) entfernt, geht der Mittelpunkt der Sonnenscheibe auf, wenn seine Poldistanz $77^\circ 23'$ beträgt, und welches ist die Tagesdauer?

Nr. 6b. Der Planet Jupiter hat am 18. August 1880 die Deklination $+ 6^\circ 11' 23,6''$ und die Zeit der Kulmination 15 h 38 m 8 s, am 28. August die Deklination $+ 5^\circ 58' 5''$, die Zeit der Kulmination 14 h 57 m 38 s. Wie gross ist am 23. August die Morgenweite dieses Sterns und die Zeit des Auf- und Niederganges in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$)?

Nr. 6c. Gesucht der Stundenwinkel des Sonnenmittelpunktes für Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) und δ_1 der Sonne $= 7^\circ 15' 28''$. Zu welcher Zeit und in welcher Höhe kulminiert an demselben Tage der Uranus, wenn seine Deklination $\delta_2 = 6^\circ 34' 27''$ und seine Rektaszension $\alpha_2 = 11\text{ h } 6\text{ m } 49\text{ s}$ beträgt, während die Sonnenrektaszension $\alpha_1 = 1\text{ h } 8\text{ m } 17\text{ s}$ ist?

Nr. 6d. Wenn ein Stern im Azimut $A_0 = 118^\circ 9' 12''$ untergeht, und die geographische Breite des Beobachtungsorts $\varphi = 53^\circ 33' 7''$ ist, welches ist die Deklination des Sterns, und wie gross ist sein Stundenwinkel beim Untergange?

✗ Nr. 6e. In Wien ($\varphi = 48^\circ 12'$) war die Mittagshöhe der Sonne $h_k = 61^\circ 45'$. Wann ging die Sonne auf in wahrer Zeit, in mittlerer Zeit, wenn die Zeitgleichung $z = - 3\text{ m } 43\text{ s}$ war? Wie lange dauerte der Tag?

Nr. 6ζ. Wie lange blieb in Hamburg ($\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$) der Arkturus am 1. September 1886 über dem Horizont, wenn am 1. Janur 1880 seine Deklination $\delta = + 19^{\circ} 48' 29''$ war, und die jährliche Veränderung der Deklination: $- 18,8''$ beträgt?

Nr. 6η. Unter welcher geographischen Breite liegt der Ort, für den am 25. August die ganze Tageslänge $14\ h\ 32\ m$ beträgt, wenn die Deklination der Sonne $\delta = 11^{\circ} 4'$ ist? Wie weit vom Westpunkt entfernt geht dann die Sonne unter?

Nr. 6θ. Wie gross ist die Deklination der Sonne, wenn die Tagesdauer unter $\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$ $15\ h$ betragen soll? Unter welcher geographischen Breite beträgt die Tagesdauer zu derselben Zeit eine Stunde weniger?

5- Nr. 6ι. Der nördlichste und der südlichste Punkt des Deutschen Reichs liegen unter $\varphi_1 = 55^{\circ} 30'$ und $\varphi_2 = 47^{\circ} 17'$ nördlicher Breite. Wieviel beträgt der Unterschied der grössten Tageslängen an beiden Punkten, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 13''$ beträgt?

No. 6κ. Die grösste Abendweite der Sonne an einem Orte der nördlichen Halbkugel der Erde ist $A_1 = 40^{\circ} 50'$. Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^{\circ} 27'$. Unter welcher Breite liegt der Ort? Welche Richtung hat dort eine Strasse, die um $6\ h$ nachmittags schattenlos ist?

6λ Nr. 7. Am 30. Juli 1878 hatte der Sonnenmittelpunkt die Deklination $\delta = + 18^{\circ} 31'$. Wieviel Stunden nach der Kulmination ging der obere Sonnenrand im Hamburger Horizont ($\varphi = 53^{\circ} 33'$) unter, wenn die Refraktion im Horizont $\varrho = 35'$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 15,75'$ gegeben sind?

- Nr. 7α. Wann geht in Hamburg ($\varphi = 50^{\circ} 33,1'$) der obere Sonnenrand zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums unter, und wie lange dauert dann noch die Dämmerung, bis der Sonnenmittelpunkt $6^{\circ} 23,5'$ unter dem Horizont sich befindet, wenn der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 16'$, 1, die Refraktion im Horizont $\varrho = 34', 9$ gegeben sind?

- Nr. 7β. Am 1. September sei die Deklination der Sonne $\delta = + 8^{\circ} 14' 15''$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 15' 52,9''$, die Horizontalparallaxe* $p = 8,5''$, die Zeitgleichung $z = - 7,2\ s$. Um welche mittlere Zeit geht die Sonne in Hamburg unter, wenn die Horizontalrefraktion $\varrho = 34' 30''$ beträgt?

Nr. 8. Die Sonne steht am längsten Tage im Sechsuhrkreise. Welche Richtung und welche Länge hat der Schatten eines 1,5 m hohen vertikalen Stabes in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$), wenn die Deklination der Sonne $\delta = 23^\circ 27' 5''$ gerechnet wird?

④ Nr. 8a. Welche Richtung hat in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) eine Strasse, die am längsten Tage um 6 h nachmittags schattenlos ist? (Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27' 11''$.)

Nr. 9. Als am 21. Juni die Sonne genau im Westen stand, reichte das Ende des Schattens eines $p = 15$ m hohen Baumes auf horizontalem Felde gerade bis an das Ufer eines Baches. Wie hoch stand die Sonne zu der Zeit, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ ist, und der Ort unter der Breite $\varphi = 51^\circ 30'$ liegt? Wie weit ist das Ufer des Baches vom Baume entfernt in der Schattenrichtung?

Nr. 9a. Um wieviel Uhr MEZ. (mitteleuropäische Zeit) steht die Sonne am Nachmittage des 6. Juli im ersten Vertikal von Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$), und welche Höhe hat sie in diesem Augenblick? $\delta = 22^\circ 38' 22''$, Zeitgleichung $z = +4^m 32,5^s$; Unterschied gegen den MEZ-Meridian: $20^m 6,2^s$.

Nr. 10. Zu welcher Zeit wird ein Stern, der um 9 h 22 m 15 s kulminiert, und dessen Deklination $\delta = +16^\circ 13,2'$ ist, nur noch eine Höhe $h = 28^\circ 5', 5$ haben und in welchem Azimut erreicht er diese Höhe? Die geographische Breite des Beobachtungsortes soll daraus entnommen werden, dass der Stern zur Zeit der Kulmination die Höhe $h_k = 52^\circ 40'$ hatte.

Nr. 11. Wie gross ist in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) am 1. September 3 Stunden nach dem wahren Mittage die Höhe und das Azimut des unteren Sonnenrandes, wenn die Deklination der Sonne $\delta = 8^\circ 14' 15''$, ihr scheinbarer Halbmesser $r = 15' 53''$ beträgt?

Nr. 12. Am 21. Juli 1892 wurde um 5 h 19 m 37,2 s mittlerer Greenwicher Zeit in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) die scheinbare Höhe des unteren Sonnenrandes $h = 16^\circ 57' 25''$ beobachtet. Wie lässt sich hieraus die Länge von Hamburg berechnen, wenn die Deklination des Sonnenmittelpunktes zur Zeit der Beobachtung $\delta = 20^\circ 18' 20''$, die Refraktion $\rho = 3' 8''$, der Sonnenhalbmesser $r = 15' 47''$, die Parallaxe $p = 8''$, die Zeitgleichung $z = +6^m 11,2^s$ war?

Nr. 13. Um die Sternzeit $\mathcal{S} = 5^h 25^m$ ist auf der Hamburger Sternwarte ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) die Höhe eines Sternes

$h = 43^{\circ} 37' 50''$, das westliche Azimut $A = 79^{\circ} 19' 40''$ beobachtet. Die Deklination und die Rektaszension des Sterns sind zu berechnen.

Nr. 13 α . An einem Orte unter der Breite $\varphi = 50^{\circ} 30'$ war die Sonnenhöhe $h = 40^{\circ} 25'$, und die Schatten fielen in die Richtung NO. Welche Deklination hatte damals die Sonne und um wieviel Uhr hatte sie jene Höhe?

Nr. 14. Wenn für den Mittag eines bestimmten Tages die Länge der Sonne $\lambda = 45^{\circ} 14' 25''$ bekannt ist, die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 20''$ beträgt, wie gross ist die Deklination der Sonne, und wie gross ist die Tageslänge für Hamburg ($\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$)?

Nr. 15. Wenn für einen bestimmten Tag die Rektaszension der Sonne $\alpha = 2\ h\ 35\ m\ 21,7\ s$ und die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 28' 28''$ beträgt, wie gross ist die Deklination der Sonne, und welches ist für die geographische Breite $\varphi = 51^{\circ} 28' 38''$ die Tageslänge?

Nr. 16. Welches ist die Deklination der Sonne, wenn für $\varphi = 53^{\circ} 33'$ die Tageslänge $2t_0 = 13\ h\ 40\ m$ beträgt? Welche Länge hat die Sonne an dem Tage, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^{\circ} 28'$ ist? An welchen Kalendertagen findet die angegebene Tageslänge ungefähr statt?

~~17~~ Nr. 17. Am 22. September (Herbstäquinoktium), nachmittags 3 Uhr 20 Minuten wahre Sonnenzeit, ist der Schatten eines $a = 125,47\ m$ hohen Turmes $b = 303,64\ m$ lang. Wie hoch steht die Sonne zu der Zeit? Wie gross ist die Polhöhe des Ortes? In welcher Himmelsrichtung liegt der Schatten?

Nr. 18. In der geographischen Breite $\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$ betrug das Azimut eines Sternes $t = 2\ h$ nach seiner Kulmination $A = 47^{\circ} 6' 10''$. Wie gross ist seine Deklination und welche Höhe hatte er zur Zeit der Beobachtung?

Nr. 19. Jemand beobachtet, dass eine von SO. nach NW. führende Strasse um $1\ h\ 52\ m$ nachmittags mittlere Ortszeit schattenlos ist. Wie gross ist φ , wenn δ der Sonne zur Zeit der Beobachtung $= 20^{\circ} 25'$, die Zeitgleichung $z = -3\ m\ 34\ s$ beträgt?

Nr. 20 (mit ebener Trig.). An den Enden einer $a = 20\ m$ langen, nach dem Fusse einer Flaggenstange gerichteten Standlinie sind die Elevationswinkel der Spitze der Stange $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 30^{\circ}$ gemessen. Als die Sonne im Osten stand, war die Schattenlänge der Stange $s = 30,45\ m$. Die Beobachtung wurde

am 19. Juni gemacht. Wie lang ist die Flaggenstange? Wie hoch stand zur Zeit der Beobachtung die Sonne? Wie gross war ihre Deklination? Welche Polhöhe hat der Beobachtungsort?

Nr. 21. Wie gross ist die geographische Breite des Ortes, über dessen Horizont ein Stern, der die Deklination $\delta = 45^\circ$ besitzt, in $t = 3\ h$ nach dem Meridiandurchgang eine Höhe $h = 30^\circ$ besitzt?

Nr. 22. Um $7\ h\ 20\ m$ nachmittags wahre Sonnenzeit schickt der obere Sonnenrand den letzten Strahl über den Horizont eines Ortes. Die Deklination der Sonne ist zu der Zeit $\delta = 10^\circ\ 30'$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $r = 16'$ und die Refraktion im Horizont $\rho = 34'$. Wie weit ist der Ort vom Aequator entfernt?

Nr. 23. Der äusserste Stern in der Deichsel des grossen Bären hat im Januar 1891 die Rektaszension $\alpha = 13\ h\ 43\ m\ 13\ s$ und die Deklination $\delta = 49^\circ\ 51'\ 30''$. Zur Sternzeit $\vartheta = 15\ h\ 13\ m\ 12\ s$ wird die Höhe desselben zu $h = 66^\circ\ 17'\ 58''$ gemessen. Welches ist die geographische Breite des Beobachtungsortes?

Nr. 24. Wie gross ist die geographische Breite eines Ortes, für den an einem bestimmten Tage um $t = 5\ h$ nachmittags die Sonnenhöhe $h = 11^\circ\ 16'\ 59''$ beträgt? Die Deklination der Sonne ist aus der Angabe zu bestimmen, dass zu der Zeit die Länge der Sonne $\lambda = 7^\circ\ 33'\ 21,3''$ und die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 14''$ ist.

Nr. 25. Ein Stern erreichte zur Zeit $t = 2\ h\ 20\ m\ 4\ s$ nach seiner Kulmination die Höhe $h = 37^\circ\ 32'$ über dem Hamburger Horizont. ($\varphi = 53^\circ\ 33'$.) Welches ist seine Deklination und in welcher Zeit nach seiner Kulmination wird er untergehen?

Nr. 26. Wie gross muss die Deklination der Sonne sein, damit die Tageslänge in Hamburg ($\varphi = 53^\circ\ 33'\ 7''$) mit Berücksichtigung der Refraktion $\rho = 34,8'$ und des scheinbaren Sonnenhalbmessers $r = 15'\ 46''$ $14\ h$ beträgt? Wie gross ist an diesem Tage die Abendweite?

Nr. 27. Ein Stern, dessen Deklination $\delta_1 = 40^\circ$ ist, hat um $t_2 = 10\ h$ abends wahre Sonnenzeit die Höhe $h_1 = 23^\circ\ 46'$. Wieviel Zeit ist seit seiner Kulmination verflossen, wenn die Sonnenrektaszension $\alpha_2 = 6\ h$, die Rektaszension des Sterns

$\alpha_1 = 9\ h$ beträgt? Unter welcher nördlichen Breite wurde die Beobachtung gemacht?

Nr. 28. Welches ist die geographische Breite des Ortes, an dem die Dauer des längsten Tages (δ der Sonne $= \varepsilon = 23^\circ 27'$) mit Berücksichtigung der Refraktion $\rho = 35'$ und des scheinbaren Sonnenhalbmessers $r = 16' 18''$ beträgt?

Nr. 29. (Ohne Hülfswinkel. Formel f. 4 aufeinander folg. St.) Um 3 h nachmittags ist am 3. Juli in Hamburg eine Strasse schattenlos. ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$.) Welche Deklination hat die Sonne zu der Zeit, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ beträgt? In welcher Richtung verläuft die Strasse?

Nr. 30. Der Stern β leonis, dessen Deklination $\delta = 15^\circ 8' 12''$ ist, wurde vor und nach seiner Kulmination in derselben Höhe $h = 43^\circ 27'$ beobachtet. Die zweite Beobachtung wurde 2 t = 4 h 28 m 47 s später als die erste gemacht. Gesucht wird die geographische Breite des Beobachtungsortes.

Nr. 31. Wie hoch steht die Sonne am längsten Tage ($\delta = 23^\circ 27' 14''$) über dem Hambnrger Horizont ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) in dem Zeitpunkte, wo sie gerade in der Richtung SW. gesehen wird? Welches ist dann die wahre, die mittlere und die mitteleuropäische Zeit, wenn die Zeitgleichung $z = + 1\ m\ 24,6\ s$ und die Zeitdifferenz zwischen Hamburg und dem mitteleuropäischen Meridian 20 m 6,2 s beträgt?

Nr. 32. $t = 2\frac{1}{2}\ h$ nach der Kulmination hat die Sonne in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33'$) die Höhe $h = 43^\circ 27'$. Welche Deklination hat sie? An welchen Tagen kann die Beobachtung stattgefunden haben? Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^\circ 27'$.

Nr. 33. Als die Sonne ihren höchsten Tagesstand erreichte, war ihre Höhe $h_1 = 56^\circ 27'$. 6 Stunden später war die Höhe $h_2 = 15^\circ 58' 7''$. Wie gross sind geographische Breite des Beobachtungsortes und Deklination der Sonne?

Nr. 34. An einem Tage im Anfange des Sommers bildete in Christiania ($\varphi = 59^\circ 55'$) der Schatten des Stabes einer an einer Ostwestvertikalwand angebrachten Sonnenuhr mit der Vertikallinie einen Winkel von 25° . Um wieviel Uhr nachmittags wurde diese Beobachtung gemacht? Die astronomische Uhr zeigte zu der Zeit $\vartheta = 10\ h\ 1\ m\ 10\ s$. Wie gross war demnach die Sonnenrektaszension? Wie weit war ferner die Sonne auf der Ekliptik vom Frühlingspunkt entfernt? An

welchem Datum ungefähr fand die Beobachtung statt, wenn die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ beträgt?

Nr. 35. Um 6 Uhr abends ist die Höhe des Sonnenmittelpunktes $h = 10^\circ$. Der Tag dauert 16 h. Welchen Abstand hat der auf der nördlichen Halbkugel liegende Beobachtungsort vom Erdäquator? Welchen Abstand vom Himmelsäquator hat der Sonnenmittelpunkt?

No. 36 (mit Differentialrechnung). Welche Deklination haben die Sterne, die in Hamburg ($\varphi = 53^\circ 33' 7''$) 3 Stunden nach ihrer Kulmination relativ die grösste Höhe haben? Wie gross ist diese Höhe?

§ 1. Kubische Gleichungen.

A. Rein kubische Gleichungen.

Nr. 1 (mit Stereometrie). Durch eine Halbkugel vom Radius 1 soll parallel dem Grundkreise ein ebener Schnitt so geführt werden, dass das entstandene Segment nebst dem Zylinder, der zwischen beiden Parallelebenen eingeschrieben ist, zusammen $\frac{7}{8}$ des Halbkugelvolumens ausmachen. In welcher Höhe über dem Grundkreise muss die Schnittebene liegen?

Nr. 2 (m. Ster.). Es soll ein allseitig geschlossener Hohlzylinder aus Aluminium (spez. Gew. $s = 3$) von quadratischem Achsenschnitt und von der Wandungsdicke $d = 1$ cm angefertigt werden. Wie gross muss der Radius des Zylinders sein, damit er im Wasser gerade bis zur Mitte eintaucht?

B. Cardanische Formel.

Nr. 1. $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0.$

Nr. 2. $x^3 + 21x^2 + 162x + 572 = 0.$

Nr. 3. $x^3 + 3x^2 - 4x + 30 = 0.$

Nr. 4. $x^3 - 21x^2 + 151x - 387 = 0.$

Nr. 5. $x^3 - 7,5x^2 + 9x - 67,5 = 0.$

Nr. 6. $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0.$

Nr. 7. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0.$

Nr. 8. $x^3 - 6x^2 - 4x - 21 = 0.$

Nr. 9. $x^3 + 15x^2 + 31x - 255 = 0$.

Nr. 10. $x^3 - 12x^2 + 49x - 78 = 0$.

Nr. 11 (m. Ster.). Ein Kegelstumpf, dessen Höhe gleich dem Unterschied der Radien R und r seiner Grundkreise ist, hat denselben Inhalt wie eine Halbkugel, deren Radius das arithmetische Mittel der beiden Radien R und r ist. Wie gross ist das Verhältnis $R:r$?

Nr. 12 (m. Ster.). Ein Kegelstumpf ist gleich einem Zylinder, dessen Höhe gleich dem Radius der Grundfläche ist. Die Kegelstumpfhöhe ist 3 m, der Radius der einen Grundfläche $\frac{1}{3}$ m, der der zweiten gleich dem des Zylinders. Wie hoch ist der Zylinder?

Nr. 13 (m. Ster.). Auf der kleinen Endfläche eines Kegelstumpfes, dessen Höhe $h = 2$ ist, dessen Endflächen die Radien $R = 6$, $r = 5$ haben, ruht ein Kugelsegment, dessen Grundkreis denselben Radius $r = 5$ hat. Wie gross sind seine Höhe und der Kugelradius, da das Segment denselben Inhalt wie der Kegelstumpf hat?

Nr. 14 (m. Ster.). Eine im Wasser schwimmende Kugel ragt mit einem Segmente $V = 104,72$ cdm heraus, dessen Begrenzungskreis den Radius $r = 4$ dm hat. Wie gross sind die Höhe des herausragenden Segments und der Kugelradius?

Nr. 15 (m. Ster.). Das Volumen eines Kegelstumpfes, von dem der eine Grundflächenradius $r = 3$ cm, die Höhe das arithmetische Mittel beider Grundflächenradien ist, ist $V = 65\frac{1}{3} \pi$ ccm. Wie gross ist der andere Grundflächenradius? Wie gross ist die Höhe? Wie gross sind Mantel und Oberfläche des Stumpfes?

Nr. 16 (m. Ster.). In eine Halbkugel mit Radius $r = 1$ soll ein solcher Zylinder einbeschrieben werden, dass der den Zylinder umgebende ringförmige Teil der Halbkugel denselben Inhalt besitzt wie der auf dem Zylinder liegende Kugelabschnitt. Welches ist die Höhe dieses Zylinders?

Nr. 17 (m. Ster.). Zwei sich von aussen berührende Kugeln, von denen die grössere den Radius $r = 2$ hat, werden gemeinschaftlich vom Mantel eines Kegels berührt. Wie gross ist der Radius der kleineren Kugel, wenn der Teil des Kegelmantels von der Spitze bis zur Berührung mit der kleineren Kugel die Fläche $M = 12 \pi$ qcm hat?

Nr. 18. (Arithmetische Reihe.) Das Produkt der 3 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Differenz 3 ist, ist 13 608. Wie heisst das Anfangsglied?

Nr. 19. (Geometrische Reihe.) Das Anfangsglied einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern ist 2, die Summe 518. Wie heisst der Exponent?

Nr. 20. (Figurierte Zahlen.) 270 Kugeln sollen in einer gleichseitig dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet werden. Wieviel Kugeln müssen in der untersten Schicht in einer Reihe liegen?

Nr. 21. (Gesellschaftsrechnung.) Von 4000 $\mathcal{M}$, die zu verteilen sind, erhält A 1000 $\mathcal{M}$, B 500 $\mathcal{M}$ und einen bestimmten Bruchteil von dem, was A erhalten, C 500 $\mathcal{M}$ und denselben Bruchteil von dem, was B erhalten, D 500 $\mathcal{M}$ und denselben Bruchteil von allem, was C erhalten hat. Wieviel erhält jeder?

Nr. 22. (Kurvenlehre ohne Diff.) In welchem Punkte durchschneidet die Kissoide $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ die im Abstände a zur X Achse gezogene Parallele?

Nr. 23 (mit Diff.). Für welchen Wert von x wird $f(x) = 27x^4 + 90x^2 + 496x + 100$ ein Minimum?

Nr. 24. Ebenso für $f(x) = x^4 + 24x^2 + 252x - 1000$.

Nr. 25 (mit Diff.). Für welchen Wert von x erhält der Quotient $\frac{x^3 - 3x - 52}{x^3 + 6x - 88}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ und wie gross ist ist der Quotient für diesen Wert von x ?

Nr. 26 (mit Diff. und analyt. Geometrie). Wie viele reelle Tangenten gibt es vom Punkte $x_1 = 3, y_1 = 14$ an die Kurve $y^2 = x^3$? Welches sind die Koordinaten ihrer Berührungspunkte?

Nr. 27. Für welchen Wert von x erreicht die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3x + 4$ einen grössten oder kleinsten Wert?

C. Die Diskriminante ist = 0.

Nr. 1 (mit Trigonometrie). Wie gross ist $\sin x$, wenn $\cos(2x) \cdot \sqrt{1 - \cos(2x)} = \frac{2}{9} \sqrt{3}$ ist?

Nr. 2 (m. Diff.). Die Gleichung $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{8} = 0$ ist auf das Vorhandensein zweier gleichen Wurzeln zu

untersuchen, und es ist die etwa vorhandene Doppelwurzel zu berechnen.

Nr. 3 (mit Kurvenlehre). In welchen Punkten wird die Kurve $9(y - \frac{2}{3})^2 - (x - 20)^2 - 25(3y - \frac{44}{3}) = 0$ von den Koordinatenachsen geschnitten oder berührt?

✦ Nr. 4 (m. Ster.). Einem Kegel ist ein anderer so eingeschrieben, dass seine Spitze im Mittelpunkte der Grundfläche des ersten steht. Wie gross ist der Radius des umschriebenen Kegels, wenn der des eingeschriebenen $\rho = 2$ ist und wenn der umschriebene Kegel $n = 6\frac{3}{4}$ mal so gross wie der eingeschriebene ist?

Nr. 5. (Exponentialgleichung.) $(x^{\log x})^{\log x} = \frac{x^{12}}{10^{16}}$.

✦ Nr. 6 (m. Ster.). Die Kanten eines regelmässigen Tetraders $SABC$ werden durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten. Durch die Seite $B_1 C_1$ des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ ist eine Ebene parallel der Kante SA gelegt, die die Grundfläche in DE schneidet. Wie gross ist die Seite $B_1 C_1$, wenn das abgeschnittene Prisma $A_1 B_1 C_1 ADE$ $n = \frac{4}{9}$ des Tetraeders beträgt und die Tetraederkante $a = 12$ cm lang ist?

D. Irraduzibeler Fall.

Nr. 1. $x^3 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 30 = 0.$

Nr. 2. $x^3 - 6x^2 - \frac{x}{2} + 3 = 0.$

Nr. 3. $x^3 - 8x^2 + 17x - 4 = 0.$

✦ Nr. 4 (m. Ster.). Wie gross ist die Oberfläche des unbedeckten Segments einer im Quecksilber schwimmenden eisernen Kugel von Radius $r = 10$ cm, wenn die spezifischen Gewichte 13,6 und 7,6 sind?

Nr. 5 (m. Ster.). Durch eine Halbkugel soll eine mit dem Grundkreise parallele Ebene so gelegt werden, dass die abgetrennte Kugelschicht $\frac{1}{3}$ des Halbkugelvolumens enthält. Welches ist die Entfernung dieser Ebene von der des Grundkreises, wenn der Kugelradius $r = 1$ ist?

Nr. 6. In einen geraden Kegel mit $r = 2$ und $h = 3$ ist ein gerader Kreiszylinder einzubeschreiben, dessen Volumen zusammen mit dem des darüber stehenden Kegels die Hälfte des ganzen Kegels ausmacht. Wie gross ist der Zylinderradius?

Nr. 7. Volumen $V = 12 \pi$ cbm und Mantel $M = 15 \pi$ qm eines geraden Kegels sind gegeben. Wie gross sind Grundflächenradius und Höhe desselben?

Nr. 8. In eine Kugel mit Radius r ist ein halb so grosser Zylinder einbeschrieben. Wie hoch ist er?

Nr. 9. In einem geraden Kegel mit $r = 1$, $h = 3$ befindet sich ein anderer gerader Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des ersteren, dessen Grundkreis im Mantel des ersteren liegt. Wie gross ist der Grundflächenradius des inneren Kegels, wenn sein Volumen $\frac{1}{8}$ des Volumens des äusseren Kegels ist?

Nr. 10. In einen geraden Kegelstumpf mit $R = 2$, $r = 1$, $h = 1$, soll ein gerader Zylinder so einbeschrieben werden, dass seine Grundfläche in der grösseren Endfläche, der obere Rand im Mantel des Stumpfes liegt und dass sein Inhalt $\frac{3}{4}$ von dem des Stumpfes beträgt. Wie gross ist der Zylinderradius?

Nr. 11. In eine Halbkugel mit dem Radius $r = 1$ einen geraden Zylinder einzubeschreiben, dessen Volumen $\frac{1}{4}$ des Halbkugelvolumens beträgt. Wie gross sind Radius der Grundfläche und Höhe dieses Zylinders?

Nr. 12. Einem geraden Kegel mit $r = 3$, $h = 6$ soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Volumen $\frac{1}{8}$ des Kegelvolumens ist. Wie gross ist sein Grundflächenradius?

Nr. 13. Um eine Halbkugel mit $r = 1$ ist ein gerader Kegel zu beschreiben, dessen Volumen $n = 3$ mal so gross wie das der Halbkugel ist. Wie gross ist die Höhe des Kegels?

Nr. 14. Wie gross ist die Dicke einer gleichseitigen Bikonvexlinse, wenn ihr Volumen $\frac{5}{16}$ von dem einer Kugel beträgt, deren Halbmesser $r = 2$ den Krümmungsradien der Linse gleich ist?

Nr. 15. In eine Halbkugel mit $r = 1$ soll ein gerader Zylinder einbeschrieben werden, der denselben Inhalt hat wie das über ihm befindliche Kugelsegment. Wie gross ist seine Höhe?

Nr. 16. In eine Kugel mit Radius $r = 6$ ist ein gerader Zylinder eingeschrieben und über jeder Grundfläche ein gerader Kegel, dessen Spitze in der Kugel liegt. Wie gross ist die

Kegelhöhe, wenn Zylinder und beide Kegel zusammen $n = \frac{3}{4}$ der Kugel betragen?

Nr. 17 (m. Ster.). In eine Kugel mit dem Radius $r = 6$ ist ein gerader Kegel einzubeschreiben, sodass die Differenz seines Volumens und des Volumens des Kugelsegments, in dem der Kegel nicht liegt, $\frac{1}{27}$ des Volumens der Vollkugel ist. Welchen Abstand hat der Kugelmittelpunkt von der Kegelgrundfläche?

Nr. 18 (m. Plan.). Wie gross sind Schenkel und Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Umfang $2u = 18$ m, dessen Inhalt $F = 12$ qm ist?

Nr. 19. Das Produkt der Ziffern einer zweiziffrigen Zahl ist um $a = 22$ kleiner als die Zahl selbst. Das Quadrat der Zehnerziffer ist um $b = 18$ grösser als die Einerziffer. Die Zahl ist zu berechnen?

Nr. 20 (m. Trig.). Welche Winkel genügen der Gleichung $\cos(3\varphi) + 3\cos\varphi = 6\cos(2\varphi) + 2$?

Nr. 21 (m. Wahrscheinlichkeitsrech.). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis ein erstes Mal eintritt, dann zweimal nicht eintritt, ist um $\frac{2}{27}$ grösser als die Wahrscheinlichkeit, dass es die beiden ersten Male eintritt, das dritte Mal aber nicht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis einmal eintritt?

Nr. 22 (m. analyt. Geom.). Die Ordinate und der Brennpunktstrahl eines Parabelpunktes bilden mit der Achse ein Dreieck, das $n = \frac{1}{2}$ mal so gross ist wie das Quadrat über dem halben Parameter. Wie gross ist die Ordinate des Parabelpunktes?

Nr. 23 (m. Diff.). Die Funktion $y = x^4 - 26x^2 + 48x + 9$ ist in bezug auf Maxima und Minima zu untersuchen.

Nr. 24 (m. Diff.). Zu welchen Abszissen gehören die Punkte, in denen die Tangenten an die Kurve $y = x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 240x + 1$ der Abszissenachse parallel sind?

No. 25 (m. Diff.). Welches sind die Abszissen der Punkte, in denen die Subtangente der Kurve $y^4 = a(x^3 + a^3)$ die Länge $4a$ hat?

No. 26 (m. Diff.). Die Abszissen der Wendepunkte der Kurve $y = \frac{a^2(a-x)}{x^2 + a^2}$ sind zu bestimmen.

Nr. 27 (m. Diff.). Für welche Abszissen hat die Kurve
 $y = x + \frac{21}{x} - \frac{10}{x^2}$ Maxima und Minima?

Nr. 28 (m. Diff.). Welches sind die Abszissen der Punkte der Kurve $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$, in denen die Ordinate mit dem Krümmungsradius einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente = 3 ist?

Nr. 29. Für welche Abszissen sind die Ordinaten der Kurve
 $y = 1 + x + \frac{12}{x} - \frac{11}{2x^2}$ am grössten oder kleinsten?

Nr. 30 (m. analyt. Geom. und Integralrech.). Ein rechtwinkliges Dreieck liegt mit einer Ecke im Mittelpunkt M einer gleichseitigen Hyperbel mit der Halbachse a . Seine Katheten sind Ordinate und Abszisse eines Hyperbelpunktes. Der durch die Drehung des Dreiecks um die reelle Hauptachse entstehende Kegel soll doppelt so gross sein wie das von seiner Grundfläche begrenzte Segment des entstehenden Rotationshyperboloids. Wie gross ist die Abszisse des Hyperbelpunktes?

Nr. 31 (m. analyt. Geom. und Integralrech.). In der Parabel $y^2 = 2px$ ist die Ordinate zur Abszisse p gezogen. In das durch Drehung des so erhaltenen Segments um die Parabelachse entstehende Rotationsparaboloid soll ein gerader Zylinder mit dem Mantel πp^2 eingezeichnet werden. Wie gross sind die Radien der Grundflächen der beiden möglichen Zylinder? Wie kann man sie geometrisch konstruieren?

Nr. 33 (m. analyt. Geom. und Integralrech.). In das Rotationsellipsoid, das durch Drehung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2$ um die grosse Hauptachse entsteht, den geraden Kegel mit A_2 als Spitze zu legen, sodass das Kegelvolumen $\frac{1}{3}$ so gross wie das Ellipsoidvolumen ist. Welche Höhen haben die zwei möglichen Kegel?

Nr. 33. Die beiden Gleichungen $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ und $6x^3 - x^2 - 7x + 2 = 0$ in bezug auf gemeinsame Wurzeln zu untersuchen.

§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Nr. 1. Ein Kapital von $c = 1000 \text{ M}$ wird auf $2 n = 20$ Jahre auf Zinseszins gelegt. Nach Verlauf von n Jahren wird ein gleiches Kapital von $c \text{ M}$ auf n Jahre zu demselben Zinsfuss auf Zinseszins gegeben. Wenn nun beide Kapitalien am Ende der Zeit auf zusammen $c_1 = 4000 \text{ M}$ angewachsen sind, zu wieviel Prozent waren sie ausgeliehen?

Nr. 2. Jemand stiftet ein Kapital von $a = 100\,000 \text{ M}$, damit aus dem Zinsbetrage nach Ablauf von $n = 15$ Jahren, während welcher Zeit die Zinsen zum Kapital geschlagen werden sollen, jährliche Stipendien bezahlt werden. Nach $n_1 = 3$ Jahren will er noch so viel stiften, als nötig ist, damit gleich grosse Stipendien schon nach weiteren $n_2 = 7$ Jahren, also 5 Jahre früher, wie ursprünglich beabsichtigt worden war, bezahlt werden können. Wieviel muss er nachzahlen? Wieviel hätte er, um seine letzte Absicht zu erreichen, von vornherein stiften müssen? Wieviel betragen die Stipendien? $p = 4\%$.

Nr. 3. Ein Schuldner, der seinem Gläubiger $n = 4$ Jahre hindurch die zu $p = 5\%$ verabredeten Zinsen für ein Darlehn von $k = 1200 \text{ M}$ nicht gezahlt hatte, entrichtete demselben nach dieser Zeit die Hälfte der gesamten Schuld und verpflichtete sich, die andere Hälfte durch $n_1 = 5$ gleich grosse, am Ende jeden Jahres zu zahlende Raten zu tilgen. Wie gross ist die jährliche Abzahlung?

Nr. 4. Jemand verpflichtet sich, eine Schuld von $K = 1200 \text{ M}$ dadurch zu tilgen, dass sofort $k = 200 \text{ M}$ und nach Ablauf einiger Jahre $n = 5$ gleiche, jährliche Raten von $r = 243 \text{ M}$ zurückerstattet werden. Wann beginnt die Ratenzahlung, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden?

Nr. 5. Ein Kapital vergrössert sich durch Zinseszins in $n = 10$ Jahren um $k = 12\,000 \text{ M}$ und wächst in $n_1 = 28$ Jahren auf das $m = 3$ fache seiner anfänglichen Grösse an. Wie gross war es anfangs und zu wieviel Prozent war es ausgeliehen?

Nr. 6. Ein Kaufmann sieht sich genötigt, seinem $k = 150\,000 \text{ M}$ betragenden Vermögen 5 Jahre lang je $a = 15\,000 \text{ M}$ zu entnehmen. Infolge steigenden Verdienstes ist er nach Ablauf der 5 Jahre in der Lage, jährlich wieder $a \text{ M}$ zurückzulegen. Wann wird sein Vermögen wieder $k \text{ M}$ betragen, wenn $p = 3,5\%$ gerechnet werden?

Nr. 7. Wieviel mal muss eine gewisse Summe jährlich pränumerando auf Zinseszins zu $p = 3\%$ angelegt werden, damit der doppelte Betrag ebenso viel mal in jährlichen Raten ausgezahlt werden kann?

Nr. 8. Von dem Ertrage einer milden Stiftung von $c = 300\,000 \text{ M}$, welche zu $p = 3,5\%$ verzinst werden, darf $n = 30$ Jahre hindurch nur eine Summe von $a = 5250 \text{ M}$ jährlich verbraucht werden; der Rest dient zur Vergrösserung des Kapitals. Wie gross ist dasselbe nach dieser Zeit, und wieviel betragen alsdann die für die Stiftungszwecke ganz zur Verfügung stehenden jährlichen Zinsen?

Nr. 9. Ein Wald, dessen Holzbestand zu $a = 500\,000 \text{ cbm}$ taxiert ist, vermehrt sich jährlich um $p = 2\%$. Wenn nun zu Ende jeden Jahres $r = 15\,000 \text{ cbm}$ Holz ausgeschlagen werden, wie gross wird der Holzbestand nach $n = 12$ Jahren sein?

Nr. 10. Eine $n = 10$ Jahre hindurch pränumerando zu gewährende Rente von $r = 2000 \text{ M}$ soll in eine $m = 3$ Jahre später beginnende und vierteljährlich zahlbare verwandelt werden. Wie gross muss jede Teilzahlung sein, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden und die letzte Zahlung an demselben Termin erfolgen soll, der bei der ursprünglichen Vereinbarung der letzte gewesen wäre?

Nr. 11. Jemand zahlt einer Gesellschaft ein Kapital von $a = 20\,000 \text{ M}$ ein, damit er nach $m = 12$ Jahren eine lebenslängliche Jahresrente $r = 3000 \text{ M}$ erhalte. Die erste Rente soll nach $(m + 1)$ Jahren gezahlt werden. Wie lange kann die Gesellschaft diese Rente ohne Schaden bezahlen, wenn $p = 3\%$ gerechnet werden?

Nr. 12. Jemand ist verpflichtet, $n = 10$ Jahren hindurch am Ende jeden Jahres die Summe $r = 600 \text{ M}$ zu zahlen. Wie gross müsste die jährliche Einzahlung sein, wenn die Verpflichtung durch $n_1 = 15$ gleiche jährliche Raten, deren erste nach $n_2 = 3$ Jahren fällig ist, getilgt werden könnte? $p = 4\%$.

Nr. 13. Jemand hat $n = 16$ mal halbjährlich, und zwar zuletzt vor einem halben Jahre, $k = 2000 \text{ M}$ in eine Bank gezahlt, die den Zinseszins $p = 3\frac{1}{2}\%$ aber nur für ganze Jahre und für ein überschüssiges Halbjahr einfache Zinsen berechnet. Wie hoch ist der jetzige Wert der gesamten Einzahlungen?

Nr. 14. Jemand hat eine Fabrik, die ihm einen jährlichen Reingewinn von $a = 20\,000 \text{ M}$ bringt, wovon er jährlich $b = 12\,000 \text{ M}$ verbraucht. Nach $n = 10$ Jahren vergrößert er seinen Betrieb durch einen Bau, der $c = 200\,862 \text{ M}$ kostet, und erhöht dadurch den jährlichen Reingewinn um $m = 60\%$. Nach wieviel Jahren hat er die Kosten des Baues durch seine Überschüsse gedeckt, wenn $p = 4\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 15. Es stiftet jemand eine Summe von $k = 30\,000 \text{ M}$ und bestimmt, dass sie zunächst $n = 20$ Jahre hindurch zu $p = 3\%$ Zinseszins tragend angelegt und dann x Jahre hindurch am Ende jedes Jahres ein die nunmehrigen Zinsen übersteigender Betrag von $r = 3000 \text{ M}$ zu Stiftungszwecken verwendet werde, so lange, bis das Kapital wieder bis zum anfänglichen Betrage von $k \text{ M}$ zusammengeschmolzen ist. Wie lange kann der Betrag r verwendet werden?

Nr. 16. Eine gemeinnützige Gesellschaft zur Erbauung von Arbeiterwohnungen will ehrenhaften Arbeitern neu erbaute Wohnhäuser zum Eigentum unter der Bedingung überlassen, dass für ein Haus $n = 20$ Jahre vierteljährlich postnumerando eine Summe von $x \text{ M}$ bezahlt werde. Diese Zahlungen sollen der Gesellschaft die $c = 8000 \text{ M}$ betragenden Baukosten des Hauses mit $\frac{p}{4} = \frac{3}{4}\%$ vierteljährlich verzinsen und dieselben zugleich tilgen. Wie gross ist x ?

Nr. 17. Eine $n = 30$ Jahre hindurch mit $r = 1200 \text{ M}$ jährlich pränumerando zu zahlende Rente soll in eine $n_1 = 24$ Jahre halbjährlich postnumerando zu zahlende Rente umgewandelt werden. Wieviel beträgt eine der 48 Halbjahresrenten?

Nr. 18. Von einem Kapital von $k = 10\,000 \text{ M}$, das zu $p = 4\%$ auf Zinseszins steht, werden $n = 20$ Jahre lang $a = 500 \text{ M}$ entnommen. Wieviel Jahre lang muss das Kapital nach dieser Zeit auf Zinseszins stehen, damit nunmehr die 500 M ohne Verminderung des Kapitals entnommen werden können?

Nr. 19. Jemand tritt eine Rente, die er nach je 5 Jahren 6 mal postnumerando mit je $r = 5800 \text{ M}$ zu beziehen hat, an eine Gesellschaft ab, die ihm dafür $n = 65$ Jahre hindurch pränumerando eine Jahresrente von $r_1 = 1000 \text{ M}$ zahlt. Wer steht sich besser und um wieviel, wenn $p = 5\%$ gerechnet werden?

Nr. 20. Jemand kann $n = 20$ Jahre hindurch eine pränumerando fällige Rente von $a = 500 \text{ M}$ beziehen. Er lässt sich statt dessen von der Rentenbank sofort $b = 3000 \text{ M}$ auszahlen. Wann kann ihm die Bank nun noch $c = 5176,4 \text{ M}$ als Rest seiner Forderung zahlen, wenn $p = 3\frac{1}{2} \%$ gerechnet werden?

Nr. 21. Jemand übernimmt durch letztwillige Verfügung die Verpflichtung, einem alten Diener, dessen voraussichtliche Lebensdauer noch $n = 10$ Jahre beträgt, für die Dauer seines Lebens vierteljährlich im voraus $a = 200 \text{ M}$ zu zahlen. Er zahlt demselben statt dessen bar $b = 2000 \text{ M}$ und verpflichtet sich 5 unter sich gleich grosse Summen von zwei zu zwei Jahren zu zahlen, die erste nach 2 Jahren. Wieviel beträgt eine solche Summe, wenn ganzjährlich 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 22. Jemand zahlte, als er 35 Jahre alt war, bei einer Rentenbank $a = 20\,000 \text{ M}$ ein, um von seinem 62. Lebensjahre ab, zum ersten Male, wenn er 61 Jahr alt sein würde, $n = 10$ Jahre hindurch eine Jahresrente von $x \text{ M}$ zu beziehen. Wie gross ist x , wenn $p = 3\frac{1}{2} \%$ gerechnet werden?

Nr. 23. Der Ertrag einer Steuer, die vierteljährlich $r = 100\,000 \text{ M}$ beträgt, soll zur Tilgung einer Staatsschuld von $a = 6 \text{ Mill. M}$ benutzt werden. In welcher Zeit ist die Schuld getilgt? Wie gross ist der Restbetrag des letzten Vierteljahres, wenn der jährliche Zinsfuss 4% beträgt?

Nr. 24. Eine Schuld von $k = 10\,000 \text{ M}$ soll durch jährliche Abzahlungen von je $r = 1000 \text{ M}$ getilgt werden, die postnumerando erfolgen. Nach wieviel Jahren wird die Schuld getilgt sein? Mit der letzten Zahlung ist auch der Überschuss zu zahlen. Wieviel beträgt er?

Nr. 25. Ein Vater zahlt bei der Geburt eines Sohnes $a = 1000 \text{ M}$ bei einer Bank ein. An jedem folgenden Geburtstage des Sohnes will der Vater soviel einzahlen, dass der Sohn vom Beginn des 19. Lebensjahres an zum Besuche der Universität 4 Jahre hindurch jährlich $a = 1000 \text{ M}$ und dann 2 Jahre lang $b = 1500 \text{ M}$ zu seinem Unterhalt pränumerando von der Bank ausgezahlt bekommt. Wie gross muss die jährliche Einzahlung sein, wenn die letzte Einzahlung am Schlusse des 17. Lebensjahres des Sohnes erfolgt? $p = 3\frac{1}{2} \%$. Wie gross ist aber die jährliche Einzahlung, wenn auch am 1. Geburtstags des Sohnes ausser den $a = 1000 \text{ M}$ die jährliche Einzahlung erfolgt und bis zum Schlusse des 24. Lebensjahres fortgesetzt wird?

Nr. 26. Jemand, der ein Anrecht auf eine $n = 15$ Jahre laufende Rente von $a = 3000 \text{ M}$ hat, will, da er sich noch arbeitsfähig fühlt, den Beginn des Rentenempfanges so lange hinausschieben, bis er eine halbjährliche Rente von $b = 2000 \text{ M}$ $m = 14$ Jahre hindurch erhalten kann. Wie lange muss er warten, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden?

Nr. 27. Eine Schuld von $k = 100\,000 \text{ M}$ soll dadurch abgetragen werden, dass $n = 17$ Jahre hindurch am Ende jedes ersten Halbjahres $a = 3000 \text{ M}$, am Ende jedes zweiten Halbjahres $b = 5000 \text{ M}$ abgezahlt werden. Wie gross ist der Rest der Schuld nach 17 Jahren, wenn $p = 4\%$ gerechnet werden?

Nr. 28. Welche Summe muss in eine Rentenbank, die den Zinsfuss $p = 3,5\%$ hat, eingezahlt werden, damit nach Ablauf von $n = 12$ Jahren eine jährliche pränumerierte Rente von $r = 2100 \text{ M}$ $m = 10$ Jahre hindurch gezahlt werden kann?

Nr. 29. Jemand zahlt $n = 40$ Jahre lang jährlich pränumerando $a = 180 \text{ M}$ in eine Witwenkasse und ausserdem $b = 210 \text{ M}$ in eine Lebensversicherungsbank. Nach seinem Tode erhält seine Witwe von der letzteren sofort $20\,000 \text{ M}$; von der Witwenkasse erhält sie noch $n_1 = 10$ Jahre lang postnumerando eine Pension von $c = 2000 \text{ M}$ au-gezahlt. Welche der beiden Versicherungsmethoden war die vorteilhaftere, wenn der Zinsfuss $p = 5\%$ angenommen wird?

Nr. 30. Jemand, dessen wahrscheinliche Lebensdauer noch $n = 24$ Jahre beträgt, kauft sich in eine Lebensversicherungsbank ein, sodass die Bank gegen eine lebenslängliche, pränumerierte Jahresprämie von $x \text{ M}$ seinen Erben bei seinem Tode eine Summe von $a = 20\,000 \text{ M}$ auszuzahlen hat. Wieviel beträgt x , wenn $p = 3\frac{1}{2}\%$ ist? Welchen Verlust erleidet die Bank, wenn der Versicherte schon nach $n_1 = 15$ Jahren stirbt?

Nr. 31. Jemand wünscht, vom Beginn des 25. Lebensjahres an, sich durch halbjährliche Ersparnisse eine Summe zurückzulegen, die am Ende des 50. Lebensjahres auf $10\,000 \text{ M}$ angewachsen ist. Wieviel muss er zu Beginn jedes Halbjahres zurücklegen, wenn sein Geld zu $3\frac{3}{4}\%$ verzinst wird? (Die letzte Einlage erfolgt $\frac{1}{2}$ Jahr vor der Auszahlung.)

Nr. 32. Jemand hat von seinem 17. bis zum 27. Jahre jährlich $a = 1500 \text{ M}$ zu seiner Ausbildung erhalten. Nachdem er von dieser Schuld zu Anfang des 30. Jahres $b = 11\,740 \text{ M}$ hat abtragen können, will er den Rest vom Ende des 33. Jahres bis

zum 43. Jahre durch 20 halbjährliche Zahlungen tilgen. Wieviel hat er am Ende jedes Halbjahres zu zahlen, wenn $p = 5\%$ gerechnet werden?

Nr. 33. Jemand hat ausser einem festen Einkommen von $b = 6700 \text{ M}$ ein Vermögen von $a = 100\,000 \text{ M}$, dessen Zinsen zu $p = 4\%$ er zu seinem Unterhalt nicht gebraucht. Er hat Gelegenheit, die Zinsen, die vierteljährlich bezahlt werden, sogleich wieder zinstragend bei einer Bank anzulegen, die auch $p\%$ rechnet und die Einlagen am Schlusse des Jahres kapitalisiert. Wann werden die vierteljährlichen Zinsen seines um die Bankzinsen vermehrten Vermögens von $a \text{ M}$ dem 4. Teil seines jährlichen Einkommens von $b \text{ M}$ gleich sein?

Nr. 34. Der Zeichnungspreis der deutschen Reichsanleihe von 1893 betrug $\text{M } 86,80$; der Kurs der 1891 aufgelegten war $84,40$. Jemand hat beide Male für $\text{M } 18\,314,80$ Schuldverschreibungen gekauft und die mit 3 vom Hundert des Nennwertes empfangenen Zinsen in jedem Jahre wieder auf Zinsen gelegt. Wann wird der Unterschied der aus beiden Einkäufen sich ergebenden Zinseinnahmen $\text{M } 1982,40$ betragen, wenn 3% Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 35. Jemand wünscht, eine alljährlich in geometrischer Progression mit dem Exponenten $e = 1,1$ steigende Rente $r = 4000 \text{ M}$, welche $n = 20$ mal am Jahresschlusse gezahlt werden soll, zu erwerben. Wie gross ist der zu erlegende Barwert? $p = 4\%$.

Nr. 36. Jemand hat eine in geometrischer Progression mit dem Exponenten $e = 1,5$ steigende Rente zu beziehen. Wieviel kann er sich jetzt mit $p = 3,5\%$ dafür zahlen lassen, wenn nach $m = 5$ Jahren die erste Jahresrente mit $a = 200 \text{ M}$ gezahlt werden soll, und im ganzen $n = 20$ Jahresrenten ausgezahlt werden sollen?

Nr. 37. Jemand zahlt am Anfange eines Jahres $a = 100 \text{ M}$, am Anfange jedes folgenden Jahres $a = 100 \text{ M}$ mehr als im vorhergehenden Jahre, $n = 20$ Jahre lang, also zuletzt am Anfange des n . Jahres $20 a \text{ M}$ bei einer Bank ein. Wieviel hat er im ganzen gezahlt? Welchen Wert haben die Einzahlungen am Ende des 20. Jahres, welchen Barwert, wenn $p = 3,5\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?

Nr. 38. Jemand, der ausser einem festen Einkommen noch eine jährlich um $d = 200 \text{ M}$ wachsende Nebeneinnahme hat,

legt von seinem Einkommen am Ende jedes Jahres $b = 1000 \text{ M}$ zurück und ausserdem vom Ende des 2. Jahres an den gesamten Zuwachs seiner Nebeneinkünfte. Wie gross ist das ersparte Kapital nach $n = 20$ Jahren, wenn $p = 3,5\%$ gerechnet werden?

Analytische Geometrie.

§ 1. Die Gerade.

Nr. 1. In einem rechtwinkligen Systeme sind die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 $x_1 = 5$, $y_1 = 7$; $x_2 = 9$, $y_2 = 11$. Unter welchem Winkel muss ein von P_1 ausgehender Strahl die X -Achse treffen, damit er unter demselben Winkel nach dem Punkte P_2 reflektiert wird?

Nr. 2. Auf den Achsen OX und OY eines rechtwinkligen Koordinatensystemes werden die gegebenen Strecken $OA = a$, $OB = b$ abgetragen, und über ihnen als Grundlinien beliebig viele Paare ähnlicher, gleichschenkliger Dreiecke innerhalb des $\angle XOY$ gezeichnet. Welches ist der Ort für die Mitte der Verbindungslinie der Spitzen entsprechender Dreiecke?

Nr. 3. Es sind ein Punkt O und eine Gerade L gegeben. Um O dreht sich der Strahl OP (P auf L), in P wird auf OP das Lot $PQ = OP$ errichtet. Gesucht wird der Ort für Q .

§ 2. Der Kreis.

Nr. 1. Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Geraden $y = a_1 x + b_1$, $y = a_2 x + b_2$, $y = a_3 x + b_3$. Welches sind die Koordinaten der Pole der Geraden in bezug auf den Kreis? Welche Länge hat die Verbindungslinie der Pole der beiden ersten Geraden? Wie gross ist der Inhalt des aus den 3 Polen gebildeten Dreiecks?

Nr. 2. Welches ist die Gleichung des Kreises, der den gegebenen Kreis $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ in den beiden Schnittpunkten auf der X -Achse rechtwinklig durchschneidet?

+ Nr. 3. Der geometrische Ort für die Spitze A eines Dreiecks ist zu bestimmen, von dem $BC = a$ und $\sin \beta : \sin \gamma = m$ gegeben ist.

Nr. 4. Gesucht der Ort für die Spitze A eines Dreiecks, von dem $BC = a$ und $AB:CF (\perp AB) = m:n$ gegeben ist.

Nr. 5. Gesucht der Ort für die Spitze A eines Dreiecks, von dem gegeben $BC = a$ und $\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = q$.

Nr. 6. Vom Dreieck ABC ist $BC = a$ und die Seite b n mal so gross wie h_b . Gesucht der Ort für A .

Nr. 7. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC liegt ein Punkt P so, dass sein Abstand von der Grundlinie BC die mittlere Proportionale zwischen seinen Abständen von den Schenkeln ist. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P ?

Nr. 8. Welches ist der Ort für die Spitze A des Dreiecks ABC , wenn $BC = a$ und die Summe der Quadrate der Seitenmittellinien $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = s^2$ ist?

Nr. 9. Welches ist der Ort für die Spitze A des Dreiecks ABC , wenn $BC = a$ ist, und die Seitenmittellinien AM und CN im Verhältnis $m:n = 2:3$ stehen?

+ Nr. 10. Welches ist der Ort des Punktes P , dessen Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ die mittlere Proportionale zwischen dem Radius und der Entfernung des Punktes von der X -Achse ist?

Nr. 11. Welches ist der geometrische Ort für den Schnittpunkt des Radiusvektors eines Punktes der Parabel $y^2 = p^2 x$ mit der Verbindungslinie des Scheitels mit der Mitte der Ordinate jenes Punktes?

Nr. 12. Vom Dreieck ABC ist $BC = a$. Welches ist der Ort für A , wenn $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ dem 8fachen Dreiecksinhalt ist?

§ 3. Die Parabel.

+ Nr. 1. Vom Punkte P , dessen Abszisse 3 ist, und der auf der Parabel $y^2 = 4x$ liegt, ist der Radiusvektor PF und die Tangente PT gezogen. Wie gross ist Dreieck PFT ?

Nr. 2. Eine Tangente einer Parabel $y^2 = 2px$ bildet mit der Achse den Winkel $\alpha = 30^\circ$. Die durch den Berührungspunkt P gehende, zur Parabelachse senkrechte Sehne PR schneidet ein Parabelsegment ab, das gleich einem gleichschenkligen Dreiecke ist mit dem Parameter $2p$ als Grundlinie. Wie gross ist die Höhe dieses Dreiecks?

Nr. 3. Es soll der Flächeninhalt eines Segments der Parabel $y^2 = 4x$ berechnet werden, das von einer Sehne begrenzt wird,

deren einer Endpunkt im Scheitel liegt, der andere so, dass die Abszisse die mittlere Proportionale zwischen der Sehne und der Ordinate ist.

Nr. 4. Durch die Ecken eines gleichschenkligen Trapezes (Antiparallelogramms) soll eine Parabel gelegt werden. Wo liegt ihr Scheitel und wo ihr Brennpunkt, wenn die kleinere Trapezgrundlinie $= 2a$, die grössere gleich $2b$, ihr Abstand $= h$ ist?

(*) Nr. 5. In die Parabel $y^2 = 6x$ ist ein Quadrat so eingeschrieben, dass der eine Endpunkt im Scheitel, die beiden benachbarten in der Parabel liegen. Wie gross ist die Quadratseite? Wie gross ist das Parabelsegment, das die Quadratseite abschneidet? Wie gross ist der Winkel, den der Radiusvektor nach einem der Endpunkte in der Kurve mit der Abszissenachse bildet?

Nr. 6. An eine Parabel $y^2 = 2px$ soll eine Tangente PT und eine Normale PN so gelegt werden, dass das vierfache Quadrat der Ordinate des Berührungspunktes gleich dem Rechteck aus den Längen PT und PV der Tangente und Normale ist. Welches sind Abszisse und Ordinate des Berührungspunktes? Welchen Winkel bildet die Tangente mit der Parabelachse? Wie kann die Tangente konstruiert werden?

Nr. 7. Von einem Punkte der verlängerten Parabelachse an die Parabel $y^2 = 2px$ sind zwei Tangenten zu ziehen, die mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden. Welche Koordinaten haben die Berührungspunkte?

Nr. 8. Zu beweisen: Zieht man in 2 Parabelpunkten P_1 und P_2 , deren Verbindungsline durch den Brennpunkt F geht, die Tangenten und Normalen, die sich in T und N schneiden mögen, so erhält man ein Rechteck TP_1NP_2 , dessen Diagonale TN der Parabelachse parallel ist.

Nr. 9. Ein gleichschenkliges Dreieck OAB mit der Grundlinie $AB = 2a$ und der Höhe $OC = h$ ist gegeben. Durch A und B ist eine Parabel zu legen, deren Achse mit OC zusammenfällt, und zwar soll das von AB begrenzte Parabelsegment doppelt so gross wie Dreieck OAB sein. Welche Entfernung hat der Scheitel S der Parabel vom Punkt O ? Wie gross ist der Parameter der Parabel? Welches ist die Gleichung der Parabel in dem System, für welches OC X -Achse, O Anfangspunkt ist? Welches sind die Gleichungen der Tangenten in A und B , und wie werden die Tangenten gezeichnet?

Nr. 10. Es ist zu zeigen, dass die Mitten der Strecken, die auf einer beweglichen Parabeltangente von zwei festen Tangenten begrenzt werden, in einer Geraden liegen, ferner, dass diese Gerade zusammenfällt mit der Tangente, die der Berührungsehne der beiden festen Tangenten parallel ist.

Nr. 11. Die Gleichung der Parabel zu finden, deren Achse den einen Winkel eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite s halbiert und die ihm anliegenden Seiten in den Endpunkten berührt.

Nr. 12. Vom Brennpunkt der Parabel werden Radienvektoren gezogen und um sich selbst verlängert. Welches ist die Gleichung des Ortes der Endpunktes, wenn die Gleichung der gegebenen Parabel $y^2 = 2px$ ist?

Nr. 13. Wählt man auf den Seiten $AD = b$ und $DC = a$ eines Rechtecks $ABCD$ zwei Punkte E und F so, dass sich verhält $AE:AD = DF:CD$, so ist der geometrische Ort des Schnittpunktes von AF und der durch E zu AB gezogenen Parallelen zu suchen. Ausserdem ist anzugeben, in welchem Punkte die gesuchte Kurve die Seite CD durchschneidet.

Nr. 14. Gesucht der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise, die einen Halbkreis und den ihn begrenzenden Durchmesser berühren.

Nr. 15. Welches ist der Ort für die Spitze A des Dreiecks ABC , von dem $BC = a$ und $AD \perp BC$ die mittlere Proportionale zwischen $AB + AC$ und $AB - AC$ ist?

Nr. 16. Ein rechtwinkliges Dreieck dreht sich um den Scheitel A des rechten Winkels, während der Scheitel C des einen spitzen Winkels auf einer festen Geraden L gleitet, auf der die Hypotenuse senkrecht steht. Welches ist der Ort des Scheitels B des zweiten spitzen Winkels?

Nr. 17. Vom Punkte K der Hypotenuse AC des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist auf die Kathete BC das Lot KM gefällt und der Fusspunkt M mit der gegenüberliegenden Ecke A verbunden. Welches ist der Ort für den Schnittpunkt P von MA und der durch K zu BC gezogenen Parallelen, wenn K sich auf AC bewegt?

Nr. 18. Es ist ein Kreis mit den beiden senkrecht aufeinander stehenden Durchmessern AB und CD gegeben. Vom Punkte Q in der Ebene ist $QO \perp AB$ gezogen, ferner ist Q mit A

verbunden. Gesucht der Ort des Schnittpunktes von QA mit OP_1 , wenn P_1 die Peripherie durchläuft.

Nr. 19. Im Punkte P_1 der Parabel $y^2 = 2px$ ist die Tangente und die Normale gezogen. Durch den Punkt B , in dem die Tangente die Scheiteltangente schneidet, ist der Durchmesser gelegt, der die Normale in M schneidet. Welches ist der Ort für M , wenn P_1 die Parabel durchläuft?

Nr. 20. Welches ist der Ort des Schnittpunktes der Verbindungslinie des Scheitels A einer Ellipse mit dem beliebigen Punkt P der Ellipse und der Verbindungslinie des Mittelpunktes O der Ellipse mit der Mitte M der Ordinate von P ?

Nr. 21. Vom Dreieck ABC liegt $BC = a$. Gesucht der Ort für A , wenn $AM - AD = d$, $BM = MC$, $AD \perp BC$ ist.

Nr. 22. Den Ort der Mitten der Sehnen, die durch den Brennpunkt einer Parabel gehen, zu bestimmen.

§ 4. Die Ellipse.

Nr. 1. In einen Rhombus mit den Diagonalen D und d ist eine Ellipse so eingeschrieben, dass sie die an den Ecken liegenden Hälften der grösseren Diagonale nochmals halbiert. Welches sind die Gleichung der Ellipse, die Koordinaten der Berührungspunkte und die Lage der Brennpunkte?

Nr. 2. In einen Rhombus mit den Diagonalen D und d wird das Quadrat einbeschrieben und die Ellipse, die in den Ecken des Quadrates die Rhombusseiten berührt. Gesucht die Gleichung der Ellipse und die Koordinaten der Berührungspunkte.

Nr. 3. Um ein Rechteck mit den Seiten $2l$ und $2k$ soll eine Ellipse so beschrieben werden, dass die Tangenten in den Rechtecksecken ein Quadrat bilden. Welches ist die Gleichung der Ellipse?

Nr. 4. Es soll die Gleichung derjenigen Ellipse bestimmt werden, die den Inhalt F hat und einem Rechteck mit den Seiten $2k$ und $2l$ so umschrieben ist, dass ihre Achsen den Seiten parallel laufen.

Nr. 5. Es soll die Gleichung der Ellipse bestimmt werden, die einem Kreise vom Radius r inhaltsgleich ist und dem Quadrat mit der Seite s umschrieben ist.

Nr. 6. Einem Rechteck mit den Seiten $2k$ und $2l$ ist eine Ellipse zu umschreiben, deren Brennpunkte in den Mitten der

kürzeren Rechtecksseiten ($2k$) liegen. Welches ist die Gleichung der Ellipse? Welches sind die Gleichungen der Ellipsentangenten in den Ecken des Rechtecks?

Nr. 7. Es ist eine der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ konzentrische Ellipse zu bestimmen, deren beide Halbachsen im Verhältnis $v:1$ kleiner sind als die der gegebenen Ellipse. Es ist sodann das Verhältnis v so zu bestimmen, dass ein der inneren Ellipse umschriebenes Rechteck der äusseren Ellipse eingeschrieben ist. Schliesslich ist das Verhältnis der Flächen beider Ellipsen anzugeben.

Nr. 8. In welchen Punkten der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ sind Tangenten zu ziehen, wenn sie ein umschriebenes Quadrat bilden sollen? Welchen Inhalt hat dieses Quadrat?

Nr. 9. Der durch die Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ gegebenen Ellipse soll ein Rhombus umschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Verbindungslinien der Endpunkte der Achsen sind. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte? Wie gross sind Diagonalen, Seite und Inhalt des Rhombus?

Nr. 10. In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie c und der Höhe h eine Ellipse so zu beschreiben, dass ihre grosse Achse der Grundlinie parallel ist und dass sie die Schenkel in ihren Mitten berührt. Welches ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse?

Nr. 11. Durch den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ soll eine Ellipse gelegt werden, die denselben Mittelpunkt und denselben Inhalt wie der Kreis hat. Der Brennpunktabstand soll gleich der kleinen Achse der Ellipse sein. Welches ist die Gleichung der Ellipse? Welches sind die Koordinaten der vier Durchschnittspunkte?

Nr. 12. Die beiden nicht parallelen Seiten eines in die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ eingeschriebenen, gleichschenkligen Trapezes gehen durch die Brennpunkte der Ellipse und bilden mit der grossen Achse die Winkel φ und $2R - \varphi$. Welchen Inhalt hat das Trapez?

Nr. 13. Im Brennpunkt F der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ wird die zur grossen Achse senkrechte Sehne gezogen, die die Ellipse in P und P_1 schneidet. In P werden Tangente und

Normale gezogen und vom Brennpunkte F_1 auf sie die Lote F_1Q und F_1R . Wie gross ist der Inhalt des Rechtecks F_1QPR ?

Nr. 14. Schneidet die Ellipsentangente in P_1 die in den Endpunkten der grossen Achse A und A_1 gezogenen Scheiteltangenten in C und C_1 , so ist $AC \cdot A_1C_1 =$ dem Quadrat der kleinen Halbachse.

✕ Nr. 15. Die Scheitel A und B der Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 4$ sind verbunden. Der Schnittpunkt C des Lots im Brennpunkt F zur grossen Achse mit AB ist mit A_1 verbunden. In welchem Punkte schneidet A_1C die Ellipse zum zweiten Male?

Nr. 16. Eine Strecke von gegebener Länge bewegt sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels. Welches ist der Ort für einen Punkt P der Strecke?

Nr. 17. Welches ist der Ort für die Mitte der Sehne, die durch den Brennpunkt einer Ellipse geht?

Nr. 18. Zwei Ecken eines Dreiecks sind die Endpunkte der grossen Achse A und A_1 der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Gesucht der Ort für die 3. Ecke, wenn der Höhendurchschnitt auf der Ellipse liegt.

Nr. 19. Eine Gerade schneidet von den Schenkeln OX und OY eines rechten Winkels YOX gleiche Stücke $OA = OB = a$ ab. Welches ist der Ort des Punktes, der von der Geraden und vom Scheitel des rechten Winkels Entfernungen hat, deren Summe der Quadrate gleich a^2 ist?

Nr. 20. Im Rechteck $OABC$ werde auf $AB = a$ der Punkt D so gewählt, dass $AD : DB = 1 : n$, auf $BC = b$ der Punkt E so, dass $BE : EC$ ebenfalls $= 1 : n$ ist. Welches ist der Ort für den Durchschnittspunkt P von OE und CD , wenn man n als veränderlichen Parameter ansieht?

Nr. 21. $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ sind zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse. Welche Kurve beschreibt die Mitte M der Sehne $P_1 Q_1$, wenn sich P_1 auf der Ellipse bewegt?

Nr. 22. Welches ist in Aufgabe 21 der Ort für den Schwerpunkt S des Dreiecks $OP_1 P_2$?

Nr. 23. Dreht sich um die Mitte O der Strecke $AA_1 = 2a$ ein rechter Winkel, dessen Schenkel die in A und A_1 auf AA_1 errichteten Lote in R und R_1 treffen, so schneiden sich AR_1 und $A_1 R$ in den Punkten einer Ellipse.

Nr. 24. An eine Ellipse ist in B die Scheiteltangente gelegt, die die Tangente im veränderlichen Punkte P der Ellipse in Q schneidet. Welches ist der Ort des Durchschnittspunktes der Geraden PB und OQ ?

Nr. 25. Im beweglichen Hyperbelpunkte P_1 ist die Tangente gezogen, die die reelle Achse in T schneidet. Es soll bewiesen werden, dass das in T auf der Achse errichtete Lot die Gerade P_1A_1 in den Punkten einer Ellipse schneidet.

Nr. 26. Vom Scheitel A der grossen Achse einer Ellipse ist auf den Durchmesser und von A_1 auf die Tangente eines beweglichen Ellipsenpunktes P_1 das Lot gefällt. Welches ist der Ort für den Schnittpunkt der Lote?

Nr. 27. (Pol und Polare.) Die Tangente im Scheitel B der kleinen Achse einer Ellipse schneidet die Polare des Brennpunktes F in einem Punkte C , sodass $BF \perp CF$ steht.

Nr. 28. (Gemeinsame Tangenten von Ellipse und Kreis.) Um den Mittelpunkt der Ellipse mit den Halbachsen a und b wird der der Ellipse inhaltsgleiche Kreis beschrieben. Wie gross ist sein Radius? Welches sind die Gleichungen der vier beiden Kurven gemeinsamen Tangenten? Welche Abschnitte bildet die die positiven Achsenrichtungen schneidende Tangente auf den Achsen? Welches sind die Koordinaten der beiden Berührungspunkte dieser Tangente mit Ellipse und Kreis?

§ 5. Die Hyperbel.

Nr. 1. Eine Hyperbel soll die verlängerten Seiten eines gegebenen Rhombus mit den Diagonalen $2D$ und $2d$ berühren. Ihre Brennpunkte sollen auf der verlängerten grösseren Diagonale $2D$ liegen und von den Ecken um die Hälfte der Diagonale entfernt sein. Welches ist die Gleichung der Hyperbel?

Nr. 2. Im Brennpunkte F der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ wird die zur reellen Achse senkrechte Sehne PP_1 errichtet und P mit dem Scheitel A_1 verbunden. In welcher Entfernung trifft die Mittelsenkrechte dieser Sehne die Ordinatenachse?

Nr. 3. Von einem Punkte der Hyperbel $x^2:16 - y^2:9 = 1$, dessen Abszisse $= 12$, sind Geraden nach den Brennpunkten gezogen. Welchen Winkel schliessen diese Geraden ein?

Nr. 4. Zieht man durch einen beliebigen Hyperbelpunkt Parallelen zu den Asymptoten, so ist die Gerade, die die Schnitt-

punkte der Parallelen und der Asymptoten verbindet, der Tangente im gegebenen Punkte parallel.

Nr. 5. Ein Kreis mit dem Radius r und eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbachse $2r$ haben zusammenfallende Mittelpunkte. Welches sind die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten beider Kurven?

Nr. 6. Zwei sich von aussen berührende, gleich grosse Kreise mit dem Radius r drehen sich um ihre Mittelpunkte M_1 und M_2 nach entgegengesetzten Richtungen, der eine mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit wie der andere. Gesucht der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweier Radien, die sich zu irgend einer Zeit im Berührungspunkte treffen.

Nr. 7. Für den beweglichen Punkt P der Parabel $y^2 = 2px$ werden Ordinate PQ und Tangente PT bis zum Durchschnitt mit der Achse gezogen und die Ordinate über P hinaus bis R verlängert, sodass $RQ = PT$ ist. Welches ist der Ort für R ?

Nr. 8. Auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt ein Punkt A im Abstände a , auf der Ordinatenachse ein Punkt B im Abstände b vom Anfangspunkte. Ein Punkt P bewegt sich so, dass die Gerade PA zur Abszissenachse dieselbe Neigung hat wie die Gerade PB zur Ordinatenachse. ($\angle PAX = \angle PBY$). Welches ist der Ort des Punktes P ?

Nr. 9. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, von denen an die Parabel $y^2 = 2px$ Tangenten gezogen werden können, die einen Winkel von $\alpha = 45^\circ$ bilden?

Nr. 10. Die im Punkte P_1 einer Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ gezogene Normale schneidet die beiden Achsen in N und N_1 . Welches ist der Ort für die Mitte M von NN_1 , wenn sich P_1 auf der Hyperbel bewegt?

Nr. 11. In der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ wird der Radiusvektor des laufenden Kurvenpunktes P nach dem Brennpunkt F der positiven X -Achse und die Parallele PQ zur X -Achse bis zum Schnitt mit der Y -Achse gezogen. Welches ist der Ort für den Diagonalschnittpunkt im Viereck $OFPQ$? In welchen Punkten schneiden sich beide Kurven?

Nr. 12. Auf der X -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist ein Punkt P im Abstände $OP = d$ vom Anfangspunkte gegeben. Es soll der Ort eines Punktes Z bestimmt

werden, der sich so bewegt, dass das Quadrat seiner Entfernung vom festen Punkte P noch einmal so gross wie die Differenz seiner Entfernungen von beiden Geraden ist.

Nr. 13. Die Tangente im beweglichen Hyperbelpunkt P_1 trifft die Asymptoten in den Punkten U und U_1 . Welches ist der Ort für den Höhenschnittpunkt des Dreiecks OUU_1 ?

Nr. 14. In der Hyperbel wird die zur reellen Hauptachse senkrechte Sehne P_1P_2 gezogen, P_1 mit dem Scheitel A_2 , P_2 mit A_1 verbunden. Welches ist der Ort für den Schnittpunkt von A_1P_2 und A_2P_1 ?

§ 6. Pol und Polare.

Nr. 1. (Ortsaufgabe.) Welches ist der Ort der Pole der Tangenten der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, wenn man sie als Polaren inbezug auf die Parabel $y^2 = 2bx$ ansieht. — Welches ist aber der Ort der Pole der Tangenten dieser Parabel, wenn man sie als Polaren inbezug auf jene Ellipse ansieht? (Vergl. analyt. Geom. § 2, Nr. 1.)

§ 7. Kurven höherer Ordnung.

Nr. 1. Gesucht der Ort der Spitze C eines Dreiecks ABC , wenn die Seite $AB = 2c$ und das Produkt der anderen Seiten gleich dem Quadrat der halben Seite AB ist. Gesucht die Polargleichung des Ortes. (Vergl. Differentialrechn., Kurvendiskussionen.)

Differentialrechnung.

§ 1. Unbestimmte Formen.

Nr. 1. Bei der Aufsuchung des Wertes von x , für den der Ausdruck $A = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}}$ einen grössten Wert annimmt, stellt es sich heraus, dass A für den Wert von x , der den Zähler des 1. Differentialquotienten verschwinden lässt, unter einer unbestimmten Form auftritt. Welches ist dieses x , und welches ist der zugehörige Wert von A ?

Nr. 2. Der Differentialquotient der Funktion $y = \frac{x^2}{a}$
 $\left(2 \lg \left[\frac{x}{b}\right] - 1\right)$ tritt für $x = 0$ in unbestimmter Form auf.
 Welches ist der allgemeine Ausdruck des Differentialquotienten?
 Welches ist sein besonderer Wert für $x = 0$?

Nr. 3. Der wahre Wert des Ausdrucks $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x^2 + 2x}$ soll für den Fall $x = 0$, in dem er die unbestimmte Form $\infty \cdot \infty$ annimmt, gesucht werden.

Nr. 4. Den Wert des Ausdrucks $\frac{\sqrt[3]{9x^6 - x^2} - 2 \lg(e x)}{x^2 - \lg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$
 für $x = 1$ zu berechnen.

Nr. 5. Der Wert des Ausdrucks $\frac{\sin(3x) + \cos(4x) - \lg(9x)}{\sin(5x) - \cos(4x) - \lg x}$ ist für $x = \frac{\pi}{2}$ zu berechnen.

Nr. 6. Für welchen Wert von x erhält der Quotient $(x^3 - 3x - 52) : (x^3 + 6x - 88)$ die unbestimmte Form $0:0$? Wie gross ist der Quotient für diesen Wert?

Nr. 7. Für welchen Wert von x erhält der Quotient:
 $\frac{\cos(3x) + 3 \cos(2x) + 5 \cos x}{\cos(2x) + 3 \cos x - 1}$ die Form $\frac{0}{0}$ an und wie gross ist er für diesen Wert?

Nr. 8. Welche Lage und Richtung hat die Kurve $y = (e^x - 1) : x$ für $x = 0$, wo die Funktion selbst, wie auch ihr erster Differentialquotient in der unbestimmten Form $0:0$ auftritt?

Nr. 9. Welches ist der Wert von $y = \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}$
 für $x = 0$?

§ 2. Maxima und Minima.

a) Aus der Planimetrie.

Nr. 1. Ein Punkt P hat von den Schenkeln eines rechten Winkels die Abstände a und b . Durch P ist eine Gerade XPY zu legen, sodass 1) der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks, 2) die Kathetensumme ein Minimum wird.

Nr. 1 α . Welche Form hat die Lösung von Nr. 1, wenn der gegebene Winkel $= \alpha$ ist und a und b die Parallelen durch P zu den Schenkeln des Winkels sind?

Nr. 1. In einem Kreise mit Radius r liegt eine Sehne, deren Zentriwinkel 2α ist. Zu welchem Zentriwinkel gehört die Sehne, die mit ihr als zweite Grundlinie das grösste, dem Kreise eingeschriebene Trapez bildet? Wie kann dieses Trapez geometrisch konstruiert werden? Welchen Inhalt hat es für $\alpha = 135^\circ$? Es sind 2 Fälle zu unterscheiden, da beide Sehnen auf derselben Seite vom Kreismittelpunkte liegen können oder auf verschiedenen Seiten.

Nr. 3. Auf dem einen Radius OA des Kreisquadranten BOA ist vom Mittelpunkte O aus die Strecke $OC = a$ abgeschnitten. Welche Abszisse hat der Punkt des Quadranten, von dem die Strecke $OC = a$ unter dem grössten Winkel gesehen wird?

Nr. 4. In einen gegebenen Halbkreis soll über dem begrenzenden Durchmesser dasjenige gleichschenklige Trapez eingeschrieben werden, das den grössten Umfang besitzt. Wie gross sind Seiten, Höhe, Umfang und Inhalt dieses Trapezes?

Nr. 5. In einen viereckigen Turm soll ein Balken von der Länge $XZ = l$ geschafft werden. Wie hoch muss die Tür BY mindestens sein, wenn sie von der gegenüberliegenden Wand AZ die Entfernung $BA = a$ hat und $a < l$ ist?

Nr. 6. Durch die Ecke C des Rechtecks $ABCD$ soll der Strahl gelegt werden, auf dem die Verlängerungen der Seiten $AB = a$, $AD = b$ die kleinste Strecke abschneiden.

Nr. 7. In einen Kreis das grösste, gleichschenklige Dreieck einzuzeichnen.

β) Aus der Stereometrie.

Nr 1. Aus einer geraden Pyramide soll das grösste Prisma, dessen Grundfläche der der Pyramide ähnlich ist, geschnitten werden. Welches ist seine Höhe, wenn die Pyramidenhöhe $= h$ ist?

Nr. 2. Aus einem geraden Kegel mit Radius r , Höhe h soll das grösste regelmässig sechsseitige Prisma ausgeschnitten werden. Wie gross sind Grundkante und Höhe desselben? Wie verhalten sich die Volumina der Körper?

Nr. 3. In eine Kugel mit Radius r soll eine möglichst grosse, gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche gelegt werden.

Wie gross ist 1) die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Pyramidengrundfläche? 2) die Seite der Grundfläche? 3) der Inhalt der Pyramide?

Nr. 4. In eine Kugel mit Radius r soll eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche einbeschrieben werden, deren 1) Seitenflächensumme möglichst gross wird, 2) Oberfläche möglichst gross wird. Wie gross sind die Höhen dieser Pyramiden?

Nr. 5. Wenn zylindrische Münzen vom Volumen J so geprägt werden sollten, dass das Minimum der Abnutzung stattfindet, wie gross müsste ihr Radius sein, und wie müssten sich Durchmesser und Dicke verhalten?

Nr. 6. Es sollen Grundflächenradius und Höhe eines zylindrischen, oben offenen Hohlmasses bestimmt werden, das bei gegebenem Volumen $V = 1 \text{ l}$ die kleinste Oberfläche besitzt, also das Minimum von Material zur Herstellung bedarf.

Nr. 7. Von einem Kegel ist gegeben der Mantel M , und das Volumen soll ein Maximum werden oder das Volumen V ist gegeben, und der Mantel soll ein Minimum werden. Wie gross sind Radius der Grundfläche und Höhe dieser Kegel?

Nr. 8. Radius und Höhe des Kegels zu bestimmen, der bei gegebener Seitenlinie s das grösste Volumen hat.

Nr. 9. Von einem geraden Kegelstumpf ist die Seitenlinie $s = 3$, der Radius der unteren Grundfläche doppelt so gross als der der oberen. Wie gross sind Volumen, Oberfläche und Neigungswinkel der Seitenlinie gegen die Grundfläche des grössten solchen Stumpfes?

Nr. 10. Von einem geraden Kegelstumpf mit kleinster Oberfläche ist die Summe aus Höhe und Seitenlinie $= a$, die Summe der beiden Radien $= b$ gegeben. Wie gross sind Oberfläche und Inhalt dieses Stumpfes?

Nr. 11. Ein eiserner Kegelstumpf vom abs. Gewicht P und spez. Gewicht σ und dem kleineren Radius ρ soll den kleinsten Mantel haben. Wie gross ist der Radius der grösseren Grundfläche zu wählen, wenn ρ so klein, dass man schon die 2. Potenz von ρ vernachlässigen darf?

Nr. 12. Auf der Zentrale $c = 35$ zweier getrennt liegenden Kugeln, deren Radien $R = 9$ und $r = 4$ sind, soll der Punkt gefunden werden, von dem aus die Summe der überblickten Hauben ein Maximum wird.

Nr. 13. In einen geraden Kegel mit Grundflächenradius r , Höhe h soll ein Zylinder einbeschrieben werden, 1) dessen Volumen, 2) dessen Mantel möglichst gross wird.

Nr. 14. Einem geraden Zylinder ist ein gerader Kegel von gleicher Grundfläche aufgesetzt. Die Gesamthöhe des Körpers ist $= a$. Der Radius der Grundfläche ist die mittlere Proportionale zwischen der Höhe des Zylinders und der Höhe des Kegels. Wie gross ist das Volumen des grössten derartigen Körpers?

Nr. 15. Auf der Achse eines geraden Zylinders mit r und h einen Punkt zu bestimmen, der als Spitze zweier geraden Kegel benutzt, deren Grundflächen die Zylindergrundflächen sind, zwei solche Kegel liefert, deren Mäntelsumme ein Minimum ist. Wie gross sind die Höhen beider Kegel? Welches ist der Wert des Minimums?

Nr. 16. Ein Körper besteht aus einem geraden Zylinder und aufgesetztem, gleichseitigen Kegel mit gleicher Grundfläche. Die Mantelfläche von Zylinder und Kegel ist gleich der Oberfläche einer Kugel mit Radius R . Wie gross ist der gemeinsame Radius, wenn das Gesamtvolumen möglichst gross ist?

Nr. 17. In eine Kugel mit Radius r den Zylinder einzuschreiben, dessen Mantel ein Maximum ist. Gesucht: Radius der Grundfläche, Höhe und Mantel dieses Zylinders.

Nr. 18. In eine Kugel mit Radius r den geraden Kegel zu beschreiben, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt und dessen Volumen ein Maximum ist. Gesucht Radius der Grundfläche, Höhe und Volumen dieses Kegels.

Nr. 19. Um eine Kugel mit Radius r den geraden Kegel mit kleinster Oberfläche zu beschreiben. Gesucht Radius der Grundfläche, Höhe, Oberfläche, Volumen, Verhältnis der Oberflächen und Verhältnis der Inhalte beider Körper.

Nr. 20. Wie verhält sich das Volumen des grössten, aus einer Kugel vom Radius r ausgeschnittenen Kegels zu dem des kleinsten, der Kugel umschriebenen Kegels?

Nr. 21. In eine Halbkugel vom Radius r soll der grösste Zylinder einbeschrieben werden. Wie gross sind Höhe, Radius der Grundfläche und Volumen dieses Zylinders?

Nr. 22. Auf dem Grundkreise einer Halbkugel vom Radius r soll ein gerader Kegelstumpf, dessen oberer Grundkreis in der

Kugelfläche liegt, einbeschrieben werden, dessen Mantel möglichst gross ist.

Nr. 23. Wie gross ist der Radius der Kugel, aus den man ein Segment vom Volumen πm^3 ausschneiden kann, dessen Gesamtoberfläche ein Minimum ist? Wie hoch ist das Segment?

Nr. 24. Ein Kugelsegment hat die konstante Haube K . Wie gross ist der Kugelradius, wenn das Segment möglichst gross werden soll? In welchem Verhältnis stehen Segmenthöhe und Kugelradius?

Nr. 25. In einen geraden Kegel mit Radius r und Höhe h soll eine Kugelkalotte einbeschrieben werden, die den Kegelmantel berührt, und deren Rand auf der Kegelgrundfläche liegt. Wie gross muss der Kugelradius der Kalotte gewählt werden, damit ihre Fläche möglichst gross werde?

Nr. 26. In eine Halbkugel mit Radius r werde ein gerader Zylinder so einbeschrieben, dass die eine Grundfläche in der Halbkugelgrundfläche liegt, der zweite Grundkreis in der Halbkugeloberfläche. Auf der zweiten Grundfläche werde ein gerader Kegel errichtet, dessen Spitze in der Halbkugelfläche liegt. Wie gross sind die Höhen beider Körper, wenn das Gesamtvolumen den grössten Wert haben soll?

Nr. 27. Einer Halbkugel soll ein gerader Zylinder einbeschrieben werden, dessen Inhalt den des über dem Zylinder einbeschriebenen geraden Kegels am meisten übertrifft. Wie gross ist die Zylinderhöhe? Wie gross ist der Inhaltsunterschied?

Nr. 28. Wie verhält sich das Volumen einer Kugel zum Volumen des grössten Kegels und des grössten Zylinders, die aus ihr geschnitten werden können?

Nr. 29. Ein gleichseitiger Kegel mit der Höhe h soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in einen Kegel und einen Kegelstumpf zerlegt werden; in den Kegel soll die Kugel einbeschrieben werden, in den Kegelstumpf ein Zylinder, dessen eine Grundfläche mit der kleinen Grundfläche des Stumpfes zusammenfällt. In welchem Abstände von der Kegelspitze muss die zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, damit die Summe aus dem Volumen der Kugel und dem des Zylinders ein Maximum wird?

γ) Aus der analytischen Geometrie.

Nr. 1. Auf der Achse der Parabel $y^2 = 2px$ liegt der Punkt P , dessen positive Abszisse $= a$ ist. In welchem Punkte

zwischen P und dem Scheitel der Parabel muss eine senkrechte Sehne errichtet werden, damit das über ihr als Grundlinie errichtete Dreieck mit P als Spitze möglichst gross werde?

Nr. 2. In einer Parabel ist eine zur Achse senkrechte Sehne $= 2y_1$ gegeben. Es soll eine dem Scheitel näher gelegene parallele Sehne bestimmt werden, die mit der ersten zusammen als Grundlinie das grösste Trapez bestimmen.

Nr. 3. Über der Grundlinie $AB = 2a$ ist ein Parabelbogen mit der grössten Höhe h durch die Gleichung $y = h - \frac{h x^2}{a^2}$ gegeben. Es soll diesem Parabelbogen das grösste, auf der Grundlinie stehende, gleichschenklige Trapez einbeschrieben werden.

Nr. 4. Welches ist die kleinste von allen Sehnen, die durch den Brennpunkt eine Parabel gehen?

Nr. 5. Auf der durch die Gleichung $y^2 = 2px$ gegebenen Parabel liegt der feste Punkt B mit der Ordinate $BA = b$. Auf dem Parabelbogen OB soll ein Punkt P so bestimmt werden, dass das Viereck $OPBA$ einen möglichst grossen Inhalt hat. Welches ist die Ordinate dieses Punktes? Wie gross ist der Inhalt des Vierecks?

Nr. 6. Um die Brennpunkte der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ sind Kreise mit den Radien r_1 und r_2 beschrieben, die ganz innerhalb der Ellipse liegen. Auf der Ellipse ist ein Punkt P so zu bestimmen, dass die Summe der von ihm an beide Kreise gelegten Tangenten ein Maximum werde.

Nr. 7. Über der grossen Achse der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ soll das grösste, gleichschenklige Trapez der Ellipse einbeschrieben werden. Welche Höhe und welchen Inhalt hat dieses Trapez?

Nr. 8. In einer Ellipse soll 1) das Rechteck mit grösstem Inhalt, 2) das Rechteck mit grösstem Umfang einbeschrieben werden.

Nr. 9. In die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ soll das Rechteck einbeschrieben werden, das durch Drehung um 1) die grosse Achse, 2) die kleine Achse einen Zylinder von möglichst grossen Inhalt entstehen lässt.

Nr. 10. In einer Ellipse die Sehne MN parallel der kleinen Achse so zu ziehen, dass im Dreieck OMN die Summe aus Grundlinie MN und Höhe ein Maximum wird.

Nr. 11. Man soll in der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ eine Sehne MN parallel der grossen Achse so ziehen, dass das Dreieck OMN möglichst gross wird.

Nr. 12. Auf der Ellipse einen Punkt P zu finden, dessen Verbindungssehn mit A und B mit den Halbachsen OA und OB das grösste Viereck bilden.

Nr. 13. Um eine Ellipse das kleinste Dreieck zu zeichnen, dessen Grundlinie durch den Scheitel auf der negativen, kleinen Achse geht. Die Koordinaten der Berührungspunkte der Schenkel und der kleinste Dreieckinhalt sind zu bestimmen.

Nr. 14. Welches ist das kleinste von allen Dreiecken, die von 2 konjugierten Brennstrahlen einer Ellipse und der zugeordneten Richtlinie begrenzt werden?

Nr. 15. Welche Koordinaten haben die Endpunkte der konjugierten Durchmesser, die im 1. und 2. Quadranten liegen, deren Ordinatensumme ein Maximum ist?

Nr. 16. (Mit Integralrechnung). Über der grossen Achse einer Ellipse ist ein Rechteck in die Ellipse einzuzeichnen, das durch Drehung um diese Achse 1) einen Zylinder mit grösstem Volumen, 2) einen Zylinder mit grösstem Mantel liefert. In welchem Verhältnis steht das Volumen des 1. Körpers zu dem des entstehenden Rotationsellipsoids? In welchem Verhältnis steht der grösste Mantel zur Ellipsenfläche?

δ) Aus der Kurvenlehre.

Nr. 1. Die durch die Gleichung $y = x^5 - \frac{15}{2} x^4 - 45 x^3$ dargestellte Kurve ist inbezug auf Maxima, Minima und Wendepunkte zu untersuchen.

Nr. 2. Eine Kurve 3. Grades ist durch die Gleichung $y = \frac{x^3}{3} - 4 x^2 + 7 x$ gegeben. Für welchen Abszissen besitzt sie Maximum, Minimum Wendepunkt? Welches sind die Werte des Maximums, Minimums? Welchen Winkel bildet die Wendetangente mit der Abszissenachse?

Nr. 3. Welches sind die Krümmungsradien der Ellipse an den Scheiteln? Wie wird gezeigt, dass an diesen Punkten die Krümmung am grössten und am kleinsten ist?

ε) Implizite Funktion.

Nr. 1. Von der durch die Gleichung $u^3 - 3au + x^3 = 0$ gegebenen Funktion u soll der Differentialquotient gebildet und die Bedingung für einen Maximalwert von u gefunden werden. Wie gross sind x und u für diesen Fall?

ζ) Zwei unabhängig Veränderliche.

Nr. 1. In einen gegebenen, geraden Kegel mit Radius r , Höhe h sollen zwei Zylinder so einbeschrieben werden, dass der eine auf der Grundfläche steht, sein oberer Rand im Mantel des Kegels liegt, der zweite auf dem ersten steht und mit dem oberen Rande ebenfalls bis zum Kegelmantel reicht. Wie gross sind Radien und Höhen der Zylinder zu wählen, damit die Summe ihrer Volumina möglichst gross ist?

Nr. 2. Im welchem Falle wird die allgemeine Funktion 2. Grades von zwei unabhängig Veränderlichen $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ möglichst gross oder klein werden?

η) Aus der Physik.

Nr. 1. Zwei Punkte P und P_1 mit den süd magnetischen Mengen m und m_1 haben den Abstand c . In welchem Punkte der Verbindungslinie PP_1 hat die Summe der Potentiale ihren kleinsten Wert?

Nr. 2. An der Spitze A des gleichschenkligen Dreiecks mit der festen Grundlinie $AC = 2a$ befindet sich die nord magnetische Menge μ und in jedem Endpunkte der Grundlinie die nord magnetische Menge m . Welche Höhe muss das Dreieck haben, damit die Resultante aus beiden Kräften, mit denen μ von den beiden Mengen m abgestossen wird, ihren grössten Wert erreicht?

Vergleiche: Sphärische Trigonometrie, Nr. 36, kubische Gleichungen, B, Nr. 23, 24, 27, D, Nr. 23.

§ 3. Maclaurins Satz zur Reihenentwicklung.

Nr. 1. Die transzendente Gleichung $\cos x = 10x$ soll in der Weise annähernd gelöst werden, dass $\cos x$ nach dem Maclaurinschen Satze in eine Reihe entwickelt wird und die den 2. Grad übersteigenden Potenzen vernachlässigt werden.

Nr. 2. Nach dem Maclaurinischen Satze soll der Ausdruck $\sqrt[3]{1+x}$ in eine Reihe entwickelt werden, ohne davon Gebrauch zu machen, dass $\sqrt[3]{1+x} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{1+x}$ ist.

Nr. 3. Die Funktion $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ soll erstens nach dem Maclaurinschen Satze, zweitens nach trigonometrischer Auflösung mit Benutzung der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ in eine nach Potenzen von x fortschreitenden Reihe entwickelt werden.

Nr. 4. Die Funktion $y = f(x) = 1 : \sqrt{1-x}$ soll in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickelt werden.

Nr. 5. Die Funktion $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ soll in eine unendliche Reihe entwickelt werden, und zwar einmal mit Benutzung der Formel für $\cos(2x)$ und der $\cos$ -Reihe, sodann ohne Benutzung derselben.

Nr. 6. Die Funktion $f(x) = l \cos x$ soll nach dem Maclaurinschen Satze in eine unendliche Reihe entwickelt werden. Die Entwicklung ist nur bis zum 4. Differentialquotienten von $f(x)$ auszudehnen, da x eine kleine Grösse sein soll.

Nr. 7. Wie bestimmt man die natürlichen Logarithmen positiver, negativer und komplexer Zahlen?

§ 4. Implizite Funktionen.

Nr. 1. Von der durch die Gleichung: $e^x = \sqrt[y]{x}$ implizite gegebenen Funktion y soll der Differentialquotient gebildet und für den Wert $x = e$ berechnet werden, um den Winkel zu finden, den die Tangente in diesem Punkte mit der X -Achse bildet.

Nr. 2. Durch implizite Differentiation der Gleichung: $e^y - e^x + xy = 0$ soll der Winkel bestimmt werden, den die Tangente der durch diese Gleichung dargestellten Kurve im Punkt, dessen $x = 0$ ist, mit der X -Achse bildet.

Nr. 3. An die Kurve $y^3 - \frac{3}{2}xy\sqrt[3]{x} + x^3 = 0$ ist in den Punkten, deren Abszisse $= \sqrt[3]{2}$ ist, die Tangente gezogen. Es sind die Winkel zu berechnen, die die Tangenten mit der Abszissenachsen bilden.

Nr. 4. Durch implizite Differentiation der Gleichung: $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = r\sqrt{r}$ soll $\frac{dy}{dx}$ gebildet und die Richtung der Tangente

zur X -Achse an der durch die Gleichung dargestellten Kurve für $x = y$ gesucht werden.

Vergl. Differentialrechn. § 2 ϵ , Nr. 1.

§ 5. Der Krümmungshalbmesser.

Nr. 1. An welcher Stelle der Parabel $y^2 = 2x$ ist der Krümmungshalbmesser $= 3$?

Nr. 2. An welcher Stelle der Parabel $y^2 = 2px$ ist der Krümmungshalbmesser $n = 4$ mal so gross wie der Parameter $2p$? Welchen Winkel bildet die in diesem Punkte konstruierte Parabeltangente mit der Abszissenachse?

Vergl. Differentialrechn. § 2 δ , Nr. 3.

§ 6. Einhüllende Kurven.

Nr. 1. Eine Gerade bewegt sich so, dass sie mit den Schenkeln eines gegebenen rechten Winkels ein Dreieck vom unveränderlichen Inhalt f begrenzt. Welches ist die Gleichung der einhüllenden Kurve? Die Gleichung ist noch für das rechtwinklige Koordinatensystem zu transformieren, dessen Abszissenachse den gegebenen rechten Winkel halbiert.

Nr. 2. Eine Gerade schneidet auf den Schenkeln eines rechten Winkels zwei Strecken ab, deren eine die mittlere Proportionale zwischen der andern und einer gegebenen Strecke a ist. Welches ist die einhüllende Kurve?

Nr. 3. Um einen Punkt P der Achse einer gegebenen Parabel $y^2 = 2px$ wird mit der ihm zugehörigen Parabelordinate ein Kreis geschlagen. Welches ist die einhüllende Kurve dieses Kreises, wenn P sich längs der Achse bewegt?

Nr. 4. Durch die Schenkel eines rechten Winkels wird die eine von zwei parallelen Geraden s und s_1 in D , die andere in D_1 geschnitten. Welche Kurve umhüllt die Verbindungslinie DD_1 , wenn sich der rechte Winkel um seinen festen Scheitel F dreht?

Nr. 5. Um jeden Punkt einer Parabel wird mit dem Abstand von der Scheiteltangente als Radius der Kreis beschrieben. Welches ist die einhüllende Kurve?

§ 7. Kurvendiskussionen.

Nr. 1. Die Gleichung der Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ist zu diskutieren, namentlich auf die vorhandenen Maxima, Minima und Wendepunkte zu untersuchen. Ausserdem sind die

Flächenstücke zu berechnen, die von der Kurve und der Abszissenachse vollständig begrenzt werden.

Nr. 2. Die Kurve $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 10$ soll inbezug auf die Art ihres Steigens und Fallens, auf Maximum, Minimum, Wendepunkt und die Krümmungsradien an diesen Stellen untersucht werden.

Nr. 3. Wie gross sind Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Kurve $y^3 = 4x$ für $x = \frac{1}{4}$? Welchen Winkel macht die Tangente mit der Abszissenachse?

Nr. 4. Für die Kurve $y = \frac{4b}{a}x\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ sind die Durchschnittspunkte mit den Achsen, ihr Steigen und Fallen zu untersuchen; auch ist das Maximum der Ordinate und der Krümmungsradius dieser Stelle der Kurve zu ermitteln.

Nr. 5. In der Funktion $y = ax^3 + bx^2 + 1$ sind die Konstanten a und b so zu bestimmen, dass die durch die Gleichung dargestellte Kurve an der Stelle $x = 0$ den Krümmungsradius $\rho = 1$, an der Stelle $x = -1$ einen Wendepunkt hat. Ausserdem ist auch das Maximum und das Minimum zu ermitteln.

Nr. 6. Eine Kurve ist gegeben durch die Gleichung:
 $y = l(x^2 - 2x + 4)^6 - 8\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}}$ Es ist die Abszisse des Punktes zu bestimmen, in dem die Tangente der Abszissenachse parallel ist, ferner der Punkte, in denen die Tangente Winkel von 45° und 135° mit der Abszissenachse bildet.

Nr. 7. Eine Kurve 3. Ordnung ist durch die Gleichung $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x$ gegeben. Für welche Abszissen besitzt die Kurve ein Maximum, ein Minimum und einen Wendepunkt? Welches sind die Werte des Maximums und des Minimums? Welchen Winkel bildet die Wendetangente mit der Abszissenachse?

Nr. 8. Mit Benutzung der ersten beiden Differentialquotienten soll der Verlauf der Kurve $y = \frac{x^3}{6a^2}$ untersucht werden. Ferner ist zu bestimmen, an welchem Punkte der Kurve die Tangente mit der Abszissenachse einen Winkel von 45° bildet, und welches der Krümmungsradius an dieser Stelle ist.

Nr. 9. Die Kurve $y^3 = 3x^2$ inbezug auf Steigen und Fallen und besondere Punkte zu untersuchen. Auch ist die Gleichung der Tangente in dem Punkte, dessen Abszisse und Ordinate gleich sind, zu bestimmen; schliesslich der Krümmungsradius in diesem Punkte.

Nr. 10. Der Verlauf der Kurve $y = x\sqrt{1-x^2}$ ist zu bestimmen.

Nr. 11. Bei welcher Kurve ist die Subnamade gleich der 3. Proportionale zu einer positiven, konstanten Länge a und der Abszisse? Die Gestalt der erhaltenen Kurve ist für den Wert 0 der Integrationskonstanten zu bestimmen. Auch sind die Gleichungen der Tangente und Normale in dem Punkte des 1. Quadranten, für den $x = \frac{2}{3}a$ ist, zu bilden.

Nr. 12. Auf jeder Ordinate PQ des im 1. Quadranten liegenden Zweigs der Kurve $y = \frac{x^3}{p^2}$ wird von P aus in der Richtung der negativen X -Achse die Strecke $PR =$ der Abszisse OQ abgeschnitten. Wie heisst die Ortsgleichung für R ? Welches Gestalt hat die Kurve?

Nr. 13. Die Koeffizienten der Kurvgleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sind so zu bestimmen, dass die Kurve an der Stelle $x = 0$ durch die Abszissenachse unter einem Winkel von 45° hindurchgeht, bei $x = -1$ ein Maximum oder Minimum hat und bei $x = +1$ einen Krümmungswechsel.

Nr. 14. Der Lauf der Kurve $y = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^2}{x}$ mit Hilfe des 1. und 2. Differentialquotienten zu zeichnen.

Nr. 15. In einem Rechteck mit der unveränderlichen Seite $AB = a$ ist die Diagonale AC gezogen, und auf sie von der Ecke D das Lot DP gefällt. Welches ist die Gleichung des Orts für P , wenn die Rechtecksseite CD sich parallel AB verschiebt? Welches ist die Gleichung der Tangente in dem Punkte P , den man erhält, wenn das Rechteck $ABCD$ zum Quadrat wird?

Nr. 16. Den Verlauf der Kurve $y^4 = a(x^3 + a^3)$ zu beschreiben.

Nr. 17. Gestalt und Lage der durch die Gleichung $y = \frac{x(x^2 - p^2)}{p^2}$ dargestellten Kurve sind zu bestimmen. Auch ist anzugeben, unter welchen Winkeln die Kurve die X -Achse durchschneidet, und es sind die Flächenstücke zwischen Kurve

und X -Achse zu berechnen. Schliesslich sind für die Punkte mit kleinster und mit grösster Ordinate die Krümmungsradien zu berechnen und die Krümmungsmittelpunkte zu konstruieren.

Nr. 18. Für die Kurve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ soll die Gleichung der Tangente aufgestellt und bewiesen werden, dass die von den Koordinatenachsen begrenzte Strecke der Tangente die konstante Länge a hat.

Nr. 19. Der Lauf der Kurve $y = \frac{x^3}{a^2 - x^2}$ mit Hilfe des

1. und des 2. Differentialquotienten zu beschreiben.

Nr. 20. Die Kurve $y = \frac{x}{1 + x^2}$ zu diskutieren.

Nr. 21. An die Parabel $y^2 = 2px$ ist im veränderlichen Punkte P die Tangente PT gelegt. Welches ist der Ort für den Höhendurchschnitt des Dreiecks FPT ? In welchen Quadranten liegt die erhaltene Kurve? Wie liegt sie zu den Achsen? Welches sind die Abszissen der Punkte, deren Ordinaten Maxima oder Minima sind?

Nr. 22. Die Kurve $y = \sqrt[4]{a^2(a^2 - x^2)}$ zu diskutieren.

Nr. 23. Die Kurve $y = \frac{a^3 - x^3}{x^2}$ zu diskutieren.

Nr. 24. Die Kurve $y = (a^3 + x^3):x^2$ zu diskutieren.

Integralrechnung.

Nr. 1. (mit Kurvendiskussion). Für welche Kurve ist die Subnormale gleich der dritten Proportionale zur Ordinate und Abszisse? Die Integrationskonstante ist $= \frac{a^3}{3}$ zu nehmen.

Nr. 2. Die Kurve $y = x - x \sqrt{\frac{x}{a}}$ schneidet die X -Achse in O und dem Punkt A , dessen Abszisse a ist. Wie gross ist das Flächenstück zwischen der Kurve und der Abszissenachse? Wie gross ist der Rotationskörper, der durch Drehung dieser Fläche um die X -Achse entsteht?

Geometrie der Lage.

§ 1. Konstruktionsaufgaben.

Nr. 1. Durch die Ecken eines Vierecks $ABCD$ eine Hyperbel zu legen, deren eine Asymptote der Geraden EF parallel ist, die die Mitten E und F zweier Gegenseiten AB und DC halbiert.

Nr. 2. Durch die Ecken eines Trapezes SS_1AB eine Kurve 2. Ordnung zu legen, die die Diagonale AS in S senkrecht schneidet.

Nr. 3. Auf der Seite BC des Dreiecks ABC liegen die Punkte D und D_1 , auf AC die Punkte E und E_1 , auf AB der Punkt F . Man soll für die Kurve 2. Ordnung, die durch die 5 Punkte $D D_1 E E_1 F$ bestimmt ist, die Polare der Ecke C und die Pole der Seiten CA und CB konstruieren. Die Kurve selbst soll nicht gezeichnet werden.

Nr. 4. Eine Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen, von der zwei parallele Tangenten mit ihren Berührungspunkten und noch ein dritter Kurvenpunkt gegeben sind. Auch die Tangente im 3. Punkt wird gewünscht.

Nr. 5. Von einer Kurve 2. Ordnung ist ein Dreieck SAB gegeben, dessen Seite AB durch den Mittelpunkt der Kurve geht, und der Tangente in S parallel ist. Die Kurve soll gezeichnet werden.

Nr. 6. Von einer Parabel ist ein Punkt S , seine Tangente σ und sein Durchmesser SO_∞ gegeben, ausserdem eine beliebige, zweite Tangente σ_1 . Man soll den Berührungspunkt dieser 2. Tangente und mit seiner Hülfe weitere Kurvenpunkte zeichnen.

Nr. 7. Einem Dreieck ABT eine Parabel zu umschreiben, für die die Höhe von A ein Durchmesser ist.

Nr. 8. Durch die Ecke A und die Mitten M_2 und M_3 der Seiten AC und AB des Dreiecks ABC eine Kurve 2. Ordnung zu legen, für die der Schwerpunkt des Dreiecks der Pol der Seite BC ist.

Nr. 9. Die Seiten TP und TQ des Dreiecks TPQ sind Tangenten einer Hyperbel, von der PQ eine Asymptote ist. Verlängert man PT über T um $\frac{1}{3} PT$ bis A , so ist A ein Punkt der 2. Asymptote. Die Hyperbel soll konstruiert werden.

§ 2. Zu beweisende Sätze.

Nr. 1. Die Kurven 2. Ordnung, die die Grenzradien MD und ME eines Kreissektors DME in zwei gleich weit vom Mittelpunkt M entfernten Punkten S und S_1 berührt und durch den den Halbierungspunkt A des Bogens DE geht, berührt den Kreisbogen in diesem Halbierungspunkte.

Nr. 2. Im Anschluss an die Zeichnung eines Kegelschnittes aus 5 Punkten mit Hülfe des Pascalschen Satzes ist der Nachweis zu führen, dass die Kegelschnitte das Erzeugnis projektiver Strahlbüschel sind.

Nr. 3. In Nr. 8, § 1, Geometrie der Lage, ist der 2. Endpunkt A_1 des von A ausgehenden Durchmessers zu zeichnen und zu beweisen, dass $AA_1 = \frac{1}{3}$ der von A ausgehenden Mittellinie des Dreiecks ABC ist.

§ 3. Ortsaufgaben.

Nr. 1. Dreht sich um die Mitte O der Strecke $AA_1 = 2a$ ein rechter Winkel, dessen Schenkel die in A und A_1 auf AA_1 errichteten Lote in R und R_1 treffen, so ist der Ort des Schnittpunktes der Verbindungslinie AR_1 und A_1R zu bestimmen.

Nr. 2. Durch die Schenkel eines rechten Winkels wird die eine von 2 parallelen Geraden s und s_1 in D , die anderen im Punkte D_1 geschnitten. Welche Kurven berühren die Verbindungslinien DD_1 , wenn sich der rechte Winkel um seinen Scheitel F dreht? Auch ist eine Konstr. für die Punkte der Kurve anzugeben.

Nr. 3. Es seien A_1 und B_1 die Scheitel auf den positiven Halbachsen einer Ellipse, P der laufende Punkt. Welches ist der Ort des Höhendurchschnittes des Dreiecks A_1B_1P ?

Nr. 4. In der Peripherie des einen von zwei sich schneidenden Kreisen ist ein beliebiger fester Punkt S und in der des anderen ein beliebiger fester Punkt S_1 gegeben. Seien ferner A und A_1 zwei bewegliche Peripheriepunkte, die mit dem Schnittpunkte B der beiden Kreise in einer Geraden liegen, so ist der Ort für den Schnittpunkt der Strahlen $S(A)$ und $S_1(A_1)$ zu bestimmen. Es ist zu zeigen, dass der zweite Schnittpunkt T der beiden Kreise ein Punkt des Ortes ist. Schliesslich soll die Ortskurve aus SS_1T und den beiden Tangenten in S und S_1 gezeichnet werden.

Nr. 5. Die Tangente in dem beweglichen Hyperbelpunkte P_1 trifft die Asymptoten in den Punkten U und U_1 . Welches ist der Ort für den Höhenschnittpunkt des Dreiecks OUU_1 ?

Nr. 6. Von zwei beliebigen Kräften $AB = r$ und $A_1 B_1 = r_1$, die in einer Ebene liegen, ist jede in zwei Komponenten pq und $p_1 q_1$ zerlegt. Die Komponenten $AD = q$ und $A_1 D_1 = q_1$ haben die Richtung der Verbindungslinie der Angriffspunkte A und A_1 und gleiche Grösse, aber entgegengesetzten Sinn. Wenn nun D und folglich auch D_1 die Gerade $A A_1$ durchlaufen, welches ist 1) der Ort des Schnittpunkts P der Richtungen der Komponenten $AC = p$ und $A_1 C_1 = p_1$, 2) der Ort des Schnittpunkts P_1 der Strahlen $B(D)$ und $B_1(D_1)$? Es soll ferner gezeigt werden, dass der 2. Ort durch die Mitte und den uneigentlichen Punkt von $A A_1$ geht.

Resultate.

Sphärische Trigonometrie.

Nr. 1. Die Winkel sind $63^\circ 26' 6''$, $39^\circ 13' 53''$; $127^\circ 45' 41''$.

Nr. 2. $\frac{2 \pi r \cdot 35^\circ 51' 28''}{360}$, $\frac{2 \pi r \cos \varphi \cdot 100}{360}$; Unterschied: 353,3 Meilen.

Nr. 3. $7^\circ 54' = 879,27$ km.

Nr. 3a. 13 576 km.

Nr. 4. $5^\circ 18' 37''$; $6^\circ 28' = 25 \text{ m } 52 \text{ s.}$

Nr. 4a. $79^\circ 50' 50''$; $132^\circ 24' 30'' = 8 \text{ h } 49 \text{ m } 38 \text{ s.}$

Nr. 5. Entfernung = $23^\circ 14' 36''$; Kurs: N. $54^\circ 31' 40''$ W.

Nr. 5a. Entfernung = $7^\circ 2' 30'' = 422,5$ Seemeilen, Kurs: N. $68^\circ 14' 36''$ W.

Or. 6. $2 t_0 = 251^\circ 57' 54,6''$, Abendweite: $42^\circ 4' 14''$ N.
(7stellig).

Nr. 6 α . Um $68^\circ 25' 45''$, $2 t_0 = 14 h 21 m 8 s$.

Nr. 6 β . $\delta = 6^\circ 4' 44,3''$; Kulminationszeit = $15 h 17 m 53 s$; $t_0 = 12 h \pm 5 h 26 m 50,3 s$; $A_0 = 180^\circ \pm 79^\circ 43' 56''$; Morgenweite: $10^\circ 16' 4''$ N; Aufgangszeit: $8 h 44 m 43,3 s$; Untergangszeit: $21 h 51 m 2,7 s$.

Nr. 6 γ . t_0 der Sonne = $6 h 39 m 43,1 s$; h_k des Uranus: $43^\circ 1' 20''$, Kulminationszeit: $9 h 58 m 32 s$.

Nr. 6 δ . $\delta = 16^\circ 16' 43''$, $t_0 = 113^\circ 17' 24''$.

Nr. 6 ϵ . $\delta = h_k + q - 90^\circ$; $4 h 24 m 11,5 s$ w. Z., $4 h 20 m 28,5 s$ m. Z., $15 h 11 m 37 s$.

Nr. 6 ζ . $\delta = 19^\circ 48' 29'' - 6\frac{2}{3} (-18,8'')$, $15 h 53 m 1,2 s$.

Nr. 6 η . $t_0 = 7 h 16 m$; $q = 59^\circ 0' 15''$; $21^\circ 53' 4''$ N.

Nr. 6 θ . $\delta = 15^\circ 46' 56''$, $q_1 = 42^\circ 28' 53''$.

Nr. 6 ι . $\delta = \epsilon$; $1 h 28 m 55,9 s$

Nr. 6 κ . $q = 52^\circ 30' 39''$; O $14^\circ 47' 19''$ N.

Nr. 7 α . $h = -(q + r)$; $t_0 = 7 h 54 m 39 s$.

Nr. 7 β . $t_0 = 6 h 5 m 43,4 s$; $t_1 = 6 h 43 m 11,9 s$; $37 m 28,5 s$.

Nr. 7 β . $h = -(r + q - p)$; $6 h 51 m 2,3 s$ w. Z., $6 h 50 m 55,1 s$ m. Z.

Nr. 8. $h = 18^\circ 40' 14''$; $4,439 m$; S $75^\circ 33'$ O.

Nr. 8 α . $A = 104^\circ 27' 9''$; W $14^\circ 27' 9''$ N.

Nr. 9. $h = 30^\circ 33' 39''$; $25,4 m$.

Nr. 9 α . $4 h 48 m 14 s$ w. Z. = $4 h 52 m 46,5 s$ m. Z.
= $5 h 12 m 52,7 s$ MEZ; $h = 28^\circ 35' 23''$.

Nr. 10. $4 h 17 m 43,4 s + 9 h 22 m 15 s$; $A = 79^\circ 3' 34''$.

Nr. 11. $h_u = 31^\circ 48' 31''$; $A = 55^\circ 40' 40''$.

Nr. 12. $h_m = r - q + r + p$; $t = 5 h 53 m 23,4 s$;
 $39 m 57,4 s = 9^\circ 59' 21''$ (Ungenau).

Nr. 13. $\delta = 28^\circ 23' 13''$; $t = 3 h 35 m 47,5 s$; $\alpha = 1 h 49 m 12,5 s$.

Nr. 13 α . $\delta = 9^\circ 4' 54''$; $t = 2 h 12 m 1 s$.

Nr. 14. $\delta = 16^\circ 25' 11''$; $15 h 8 m 7,8 s$.

Nr. 15. $\alpha = 28^\circ 50' 25,5''$; $\delta = 15^\circ 14' 14''$, $2 t_0 = 14 h 40 m 4,4 s$.

Nr. 16. $\delta = 9^{\circ} 4' 59''$; $\lambda_{1,2} = 23^{\circ} 21' 28''$ und $180^{\circ} - 23^{\circ}$
14. April, 29. August (Mittelberechnung).

Nr. 17. $\delta = 0$, $t = 50^{\circ}$; $h = 22^{\circ} 27' 5''$; $\varphi = 53^{\circ} 32' 57''$; $A = 55^{\circ} 59'$, Schattenlage: O $34^{\circ} 1' N$.

Nr. 18. $\delta = 21^{\circ} 20' 3''$, $h = 50^{\circ} 31' 19''$.

Nr. 19. $\varphi = 53^{\circ} 33' 12''$.

Nr. 20. Stangenlänge = 17,32 m, $h = 29^{\circ} 37' 54''$; $A = -90^{\circ}$, $\lambda = 88^{\circ}$; $\delta = 23^{\circ} 26' 6''$; $\varphi = 53^{\circ} 33' 7''$.

Nr. 21. Nur $\varphi = 0^{\circ}$.

Nr. 22. $h = -50'$; $\varphi = 59^{\circ} 22' 3''$.

Nr. 23. $t = 22^{\circ} 29' 15''$; $\varphi = 32^{\circ} 54' 16''$ (oder $71^{\circ} 12' 40''$).

Nr. 24. $\delta = 3^{\circ} 0' 1,5''$; $\varphi = 53^{\circ} 33' 10''$ (oder $-30^{\circ} 39' 22''$).

Nr. 25. $t = 35^{\circ} 1'$; $\delta = 9^{\circ} 13' 21''$; $t_0 = 6 h 50 m 47,7 s$.

Nr. 26. $h = -(r + \varrho)$; $\delta = 9^{\circ} 47' 34''$; Abendweite: $15^{\circ} 27' 3'' N$.

Nr. 27. t_1 des Sterns = 7 h; $\varphi = 53^{\circ} 57' 1''$.

Nr. 28. $\varphi = 57^{\circ} 21' 24''$.

Nr. 29. $\lambda = 102^{\circ}$; $\delta = 22^{\circ} 54' 28''$; $A = 65^{\circ} 48' 14''$,
N. $24^{\circ} 11' 46'' O$.

Nr. 30. Zeit der zweiten Beobachtung $t = 2 h 14 m 23,5 s$;
 $\varphi = 53^{\circ} 33' 11''$ (oder $-17^{\circ} 34' 9''$).

Nr. 31. $h = 53^{\circ} 35' 24''$; 1 h 48 m 54,4 s w. Z., 1 h 50 m 19 s m. Z., 2 h 10 m 25,2 s MEZ.

Nr. 32. $\delta = 17^{\circ} 9' 43''$; $\lambda_{1,2} = 47^{\circ} 51' 27''$ und $180^{\circ} - \lambda_1$. Datum: 9. Mai, 4. August.

Nr. 33. $\varphi = 53^{\circ} 32' 58''$; $\delta = 19^{\circ} 59' 58''$.

Nr. 34. $t = 2 h 51 m 43,5 s$; $\alpha = 9 - t$; $\lambda = 106^{\circ} 10''$. 8. Juli.

Nr. 35. $\varphi_{1,2} = \pm 69^{\circ} 18' 8,5''$; $\delta_{1,2} = \pm 10^{\circ} 41' 51,5''$.

Nr. 36. $\delta = 62^{\circ} 25' 28''$; $h = 65^{\circ} 9' 40''$.

Arithmetik und Algebra.

§ 1. Kubische Gleichungen.

A. Rein kubische Gleichungen.

Nr. 1. Der gesamte Abstand ist $= \frac{1}{2}$.

Nr. 2. 15,957 cm ist der innere Radius.

B. Cardanische Formel.

Nr. 1. $4; 1 \pm i$. Nr. 2. $-11; -5 \pm 3i\sqrt{3}$. Nr. 3. $-5; 1 \pm i\sqrt{5}$. Nr. 4. $9; 6 \pm i\sqrt{7}$. Nr. 5. $7,5; \pm 3i$.
 Nr. 6. $5; 2 \pm 3i$. Nr. 7. $2; \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{11}$. Nr. 8. $7; -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{11}$. Nr. 9. $3; -9 \pm 2i$. Nr. 10. $6; 3 \pm 2i$.
 Nr. 11. $R:r = 1,9506$. Nr. 12. $1,3171$ m. Nr. 13. Höhe $= 4$, Radius $= 5\frac{1}{8}$. Nr. 14. $3,3694$ dm; $4,059$ dm. Nr. 15. $r = 5; h = 4; M = 112,4; O = 219,21$. Nr. 16. $0,59608$.
 Nr. 17. $1,4305$. Nr. 18. $21; -15 \pm i\sqrt{423}$. Nr. 19. $6; -\frac{7}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{123}$. Nr. 20. 10 . Nr. 21. $\frac{1}{2}; 1000$ $\mathcal{M}$. Nr. 22. $0,68237$ a. Nr. 23. $-\frac{4}{3}$ (Min.); $\frac{2}{3} \pm i\sqrt{3}$. Nr. 24. -3 (Min.); $\frac{1}{2}(3 \pm 5i\sqrt{3})$. Nr. 25. $4; \frac{5}{8}$. Nr. 26. $x_1 = 16, y_1 = -64$. Nr. 27. 1 (Min.)

C. Diskriminante $= 0$.

Nr. 1. $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}$. Nr. 2. $x_{1,2} = \frac{1}{2}; (x_3 = \frac{5}{2})$. Nr. 3. $y_1 = 4; y_{2,3} = -1$ (Berührung). $x_{1,2} = 37,079; 0,921$. Nr. 4. $x_1 = 3; (x_{2,3} = -6)$. Nr. 5. $0,0001; 100; 100$. Nr. 6. $x_{1,2} = 8; (x_3 = -4)$.

D. Irreduzibeler Fall.

Nr. 1. $3; 4; -2\frac{1}{2}$. Nr. 2. $\pm 0,7071; 6$. Nr. 3. $3,7321; 4; 0,2679$. Nr. 4. Höhe $= 1,0786$ r, Haube $= 578,95$. Nr. 5. $0,22608$. Nr. 6. 1 . Nr. 7. Radien: $3; 2,8836$; Höhen: $4; 4,3294$. Nr. 8. $0,78986$ r; $1,4845$ r. Nr. 9. $0,44909; 0,84402$. Nr. 10. $1; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Nr. 11. Höhen: $0,17173; 0,903$; Radien: $0,98516; 0,42964$. Nr. 12. $0,6527; 2,8794$. Nr. 13. $1,1074; 5,823$.

Nr. 14. $2; 11,7082$, unbr., da > 8 . Nr. 15. $0,36603$ r.

Nr. 16. $9,1962, > 6$, also Lösung unmöglich.

Nr. 17. $2,0001; 5,7613$. Nr. 18. Grundlinien: $3,3723; 8$; Schenkel: $7,3139; 5$. Nr. 19. 57 .

Nr. 20. $\cos \varphi = 0,6527; (2,8794); -0,5321; \pm 49^\circ 15' 17'' + 2n\pi; 180^\circ \pm 57^\circ 51' 9'' + 2n\pi$.

- Nr. 21. $\frac{1}{3}$; 0,10462. Nr. 22. Ordinate = 1,1372 p .
 Nr. 23. $x_1 = 1$; $y_1 = 32$, Maximum; $x_2 = 3$, $x_3 = 4$;
 $y_2 = 0$, Minimum; $y_3 = -343$ Minimum. Nr. 24. 4, 5, — 3.
 Nr. 25. 2,8794 a ; 0,65271 a ; — 0,53209 a .
 Nr. 26. 0,26794 a ; 3,732 a ; — a . Nr. 27. $x_1 = 1$, $y_1 = 12$,
 Maximum; $x_2 = 4$, $y_2 = 8\frac{5}{8}$, Minimum; $x_3 = -5$, $y_3 = -9\frac{3}{8}$,
 Maximum. Nr. 28. 0,6527; 2,8794; — 0,5321.
 Nr. 29. 1; — 3,8541 zum Maximum, 2,8541 zum Minimum.
 Nr. 30. 1,5616 a ; (a ; — 2,5616 a). Nr. 31. p ; 0,61802 p .
 Nr. 32. 1,7091; 5,5639.

§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung.

- Nr. 1. 4,5576 $\%$. Nr. 2. Nachzuzahlende Summe: 24367 $\mathcal{M}$.
 Er hätte stiften müssen: 121665 $\mathcal{M}$. Stipendien: 7203,75 $\mathcal{M}$.
 Nr. 3. 168,45 $\mathcal{M}$. Nr. 4. 3,0811 Jahre. Nr. 5. 4 $\%$; 24976 $\mathcal{M}$.
 Nr. 6. 7,7537 Jahre.
 Nr. 7. 23,45 Jahre. Nr. 8. 571 010 $\mathcal{M}$; 19 986 $\mathcal{M}$. Nr. 9.
 432 940 cbm. Nr. 10. 853,22 $\mathcal{M}$. Nr. 11. 11,356 Jahre. Nr. 12.
 473,31 $\mathcal{M}$. Nr. 13. 37 156 $\mathcal{M}$. Nr. 14. 6 Jahre. Nr. 15. 14,439
 Jahre. Nr. 16. 133,35. Nr. 17. 700,62 $\mathcal{M}$. Nr. 18. 8,9504
 Jahre. Nr. 19. 16 135 $\mathcal{M}$; 16 141,02 $\mathcal{M}$; die Gesellschaft hat
 6,02 $\mathcal{M}$ Schaden. Nr. 20. 5 Jahre. Nr. 21. 1168,32 $\mathcal{M}$. Nr. 22.
 5683,30 $\mathcal{M}$. Nr. 23. 91,188 Vierteljahre; Rest nach 91 Viertel-
 jahren: 18 500 $\mathcal{M}$. Nr. 24. 13,025 Jahre; Rest nach 13 Jahren:
 24 $\mathcal{M}$. Nr. 25. 192,09 $\mathcal{M}$; 142,78 $\mathcal{M}$. Nr. 26. 6,2146 Jahre.
 Nr. 27. 3790 $\mathcal{M}$ (7stellig). Nr. 28. 11 962 $\mathcal{M}$. Nr. 29. Witwen-
 kasse: 22 827 $\mathcal{M}$; 15 443,60 $\mathcal{M}$; Schaden: 32,4 $\%$. Lebensver-
 sicherung: 26 932 $\mathcal{M}$; Schaden etwa 25 $\%$. Nr. 30. 10524,40 $\mathcal{M}$.
 Verlust der Gesellschaft: 9475,90 $\mathcal{M}$. Nr. 31. 113,69 $\mathcal{M}$. Nr. 32.
 936,62 $\mathcal{M}$. Nr. 33. 13 Jahre. Nr. 34. Rund 10 Jahre. Nr. 35.
 138 020 $\mathcal{M}$. Nr. 36. 626 000 $\mathcal{M}$. Nr. 37. 13 772,50 $\mathcal{M}$. Nr. 38.
 80 866 $\mathcal{M}$.

Analytische Geometrie.

- § 1. Nr. 1. $\lg \alpha = 4,5$; $\alpha = 77^\circ 28' 16''$. Nr. 2. Gerade
 mit den Achsenabschnitten: $(a^2 - b^2) : 4a$; $(a^2 - b^2) : 4b$.
 Nr. 3. $OX \parallel L : y - x = 2a$.

§ 2. Nr. 1. Pole : $-\frac{a_{1,2,3} r^2}{b_{1,2,3}}; + \frac{r^2}{b_{1,2,3}}$. Verbindungsstr.
 $\frac{r^2}{b_1 b_2} \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2}$. Dreiecksinhalt = $\frac{r^4}{b_1 b_2 b_3}$
 $[a_1 (b_3 - b_2) + a_2 (b_1 - b_3) + a_3 (b_2 - b_1)]$.

Nr. 2. $[x - (r^2 - a^2) : a]^2 + y^2 = r^2 (r^2 - a^2) : a^2$.

Nr. 3. $BC : X$ -Achse, $B : \text{Anfangspunkt } [x + a : (m^2 - 1)]^2 + y^2 = a^2 m^2 : (m^2 - 1)^2$.

Nr. 4. Ebenso. $x^2 + (y - am : 2n)^2 = (am : 2n)^2$.

Nr. 5. Ebenso. $[x - a(q + 1) : 2]^2 + y^2 = [a \sqrt{q^2 - 1} : 2]^2$.

Nr. 6. Ebenso. $(x - a)^2 + (y - an : 2)^2 = (an : 2)^2$.

Nr. 7. Ebenso. $(x - a : 2)^2 + (y + a \cot \beta : 2)^2 = (a : 2 \sin \beta)^2$.

Nr. 8. Ebenso. $(x - a : 2)^2 + y^2 = 2 s^2 - \frac{9}{4} a^2$.

Nr. 9. $(x - 5a : 16)^2 + y^2 = (3a : 4)^2$.

Nr. 10. $x^2 + (y - r : 2)^2 = (r \sqrt{5} : 2)^2$.

Nr. 11. $(x - p : 2)^2 + y^2 = (p : 2)^2$.

§ 3. Nr. 1. $\frac{y}{2} (x + \frac{p}{2}) = 4 \sqrt{3}$. Nr. 2. Segment = $2 p^2 \sqrt{3}$, Höhe des Dreiecks = $2 p \sqrt{3}$. Nr. 3. Koordinaten des 2. Endpunktes: $2(1 + \sqrt{5}), 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})$. Segment = $\frac{2}{3} \sqrt{2}$. $(1 + \sqrt{5})^{\frac{3}{2}}$. Nr. 4. Scheitelabstand der kl. Grundl. $z = a^2 h : (b^2 - a^2)$; Parameter = $(b^2 - a^2) : h$. Parabelgleich.: $y^2 = 2 p (x + z)$. Nr. 5. Quadratseite: $2 p \sqrt{2}$; Segment: $2 p^2 : 3 \cdot \tan \alpha = 4 : 3$. Nr. 6. $x_{1,2} = \frac{p}{2} (7 \pm 4 \sqrt{3})$; $y_{1,2,3,4} = \pm p \sqrt{7 \pm 4 \sqrt{3}}$; $\alpha_1 = \pm 15^\circ$ $\alpha_2 = \pm 75^\circ$. Nr. 7. $x_{1,2} = 3 p : 2$; $y_{1,2} = \pm p \sqrt{3}$. Nr. 8. $y_1 y_2 = -p^2$ oder $\frac{p}{y_1} \cdot \frac{p}{y_2} = -1$ liefert den Beweis für das Rechteck. Für T und M ist $y = (y_1 + y_2) : 2$, also $TM \parallel OX$.

Nr. 9. $SO = h : 2$; $2 p = 2 a^2 : 3 h$; Parabelgleichung: $y^2 = 2 p (x + h : 2)$; Gleichungen der Tangenten in A, B : $\pm y : \frac{2}{3} a - x : 2 h = 1$. Nr. 10. —

Nr. 11. Scheitel: Anfangspunkt, Halbierungslinie: OX , $y^2 = (s \sqrt{3} : 3) (x - s \sqrt{3} : 4)$. Nr. 12. $y^2 = 4 p (x + p : 2)$. Nr. 13. $AB : X$ -Achse, $AD : Y$ -Achse, $y^2 = b^2 x : a$. Nr. 14. Mittelp.: O , Durchmesser : OX . $x^2 = -2 r (y - r : 2)$. Nr. 15. $B : O$,

$BC : X\text{-Achse}, y^2 = 2a(x - a : 2)$. Nr. 16. $L : X\text{-Achse}, AO \perp L : Y\text{-Achse}, OA = a; x^2 = ay$. Nr. 17. $BC : X\text{-Achse}; BA : Y\text{-Achse}. (y - c)^2 = c^2 x : a$. Nr. 18. $OA : X\text{-Achse}, OC : Y\text{-Achse}. y^2 = -2r(x - r : 2)$. Nr. 19. $y^2 = (p : 2)(x - \frac{p}{2})$. Nr. 20. $y^2 = (-b^2 : a)(x - a)$.

§ 4. Nr. 1. Achsen: Diagonalen, Halbachsen: $D : 4; (d : 4) \sqrt{3}$. Koordinaten der Berührungspunkte: $+ D : 8, \pm 3d : 8; e = (\sqrt{D^2 - 3d^2}) : 4$. Nr. 2. Ebenso. Koordinaten der Berührungsp.: $\pm Dd : 2(D + d); (a) = \frac{D}{3} \sqrt{d : (D + d)}, (b) = \frac{d}{2} \sqrt{D : (D + d)}$. Nr. 3. Halbachsen: $\sqrt{l(k + l)}, \sqrt{k(k + l)}$. Nr. 4. $(a^2) = (F^2 + FW) : 2\pi^2 l^2, (b^2) = (F^2 - FW) : 2\pi^2 k^2, W = \sqrt{F^2 - 4\pi^2 k^2 l^2}$. Nr. 5. (a) und $(b^2) = (r^2 : s^2)(2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - s^4})$. Nr. 6. $(a^2) = (2l^2 + k \pm k\sqrt{k^2 + 4l^2}) : 2; (b^2) = (k^2 \pm k\sqrt{k^2 + 4l^2}) : 2$; Gleich. der 4 Tangenten; $\pm (xl : a^2) \pm (yk : b^2) = 1$. Nr. 7. $a' = av = k; b' = bv = l; v = \sqrt{2} : 2$; Flächenverhältnis: $2 : 1$. Nr. 8. $x = \pm a^2 : \sqrt{a^2 + b^2}; y = \pm b^2 : \sqrt{a^2 + b^2}$. Inhalt: $2(a^2 + b^2)$. Nr. 9. $\pm (a : 2) \sqrt{2}; \pm (b : 2) : \sqrt{2}$; Diagonalen: $2a \sqrt{2}; 2b \sqrt{2}$. Inhalt: $4ab$.

Nr. 10. Mittelpunktsleichung: $x^2 : \frac{c^2}{12} + y^2 : \frac{h^2}{9} = 1$.

Nr. 11. $x^2 + 2y^2 = r^2 \sqrt{2}. \pm r \sqrt{\sqrt{2} - 1}; \pm r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Nr. 12. $J = 4a^3 b^2 e \sin^3 \varphi : (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2$.

Nr. 13. $(e : a)(a^2 + e^2)$. Nr. 14. y für C und $C_1 : b^2(a \mp x_1) : ay_1$; Produkt: b^2 . Nr. 15. x und y des 2. Schnittpunktes: $2a^2 e : (a^2 + e^2), b^3 : (a^2 + b^2)$. Nr. 16. Achsen; Schenkel des R, a und b Streckenabschnitt, a an $Y\text{-Achse}$. Ort: $x^2 : a^2 + y^2 : b^2 = 1$. Nr. 17. $(x - e : 2)^2 : (e : 2)^2 + y^2 : (be : 2a)^2 = 1$. Nr. 18. $(x^2 : a^2) + [y^2 : (a^2 : b)] = 1$. Nr. 19. $x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2 - \frac{2}{3}ax - \frac{2}{3}ay - \frac{a^2}{3} = 0$. Koord. transform $< \alpha = 45^\circ. (x' - a\sqrt{2} : 4)^2 : (a\sqrt{6} : 4)^2 + y'^2 : (a\sqrt{3} : 2)^2 = 1$. Nr. 20. $OA : X\text{-Achse}, OC : Y\text{-Achse}. x^2 : (b : 2)^2 + [y - (a : 2)]^2 : \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1$. Nr. 21. $x^2 : (a\sqrt{2} : 2)^2 + y^2 : (b\sqrt{2} : 2)^2 = 1$. Nr. 22. Ellipse mit den Halbachs. $: a\sqrt{2} : 3, b\sqrt{2} : 3$.

Nr. 23. $x^2 : a^2 + y^2 : (a : 2)^2 = 1$. Nr. 24. $x^2 : (a : 2)^2 + y - b : 2)^2 : (b : 2)^2 = 1$. Nr. 25. $(x^2 : a^2) + (y^2 : b^2) = 1$.
Nr. 26. $(x^2 : a^2) + [y^2 : (a^2 : b)^2] = 1$. Nr. 27. Brennpunkts-
polare: $x = a^2 : e$; Koordinaten von C : $a^2 : e, b$; Richtungs-
konst. von BF, CF : $-\frac{b}{e}, +\frac{e}{b}$. Nr. 28. r des Kreises: $\sqrt{ab}$.

Gleich. der 4 Tangenten: $y = \pm x \sqrt{b : a} \pm \sqrt{b(a+b)}$,
Koord. der Berührungsp. mit Ell.: $\sqrt{a^3 : (a+b)}, \sqrt{b^3 : (a+b)}$,
mit Kreis: $\sqrt{ab^2 : (a+b)}, \sqrt{a^2b : (a+b)}$.

§ 5. Nr. 1. $(a^2) = D^2 (4 D^2 + d^2)$; $(b^2) = 3 D^2 d^2 (D^2 + d^2)$.
Nr. 2. Der Punkt hat $y = e^2 : 2a$. Nr. 3. $y = 6 \sqrt{5}; e = 5$,
 $tg \varphi = 2 e y_1 : (x_1^2 - e^2 + y_1^2) = 60 \sqrt{2} : 191$. Nr. 4.
Koord. der Schnittp. : $(a : 2b) (y_1 + bx_1 : a), (y_1 + bx_1 : a) : 2$
und $(a : 2b) : (bx_1 : a - y_1), - (bx_1 : a - y_1) : 2$; Richtungs-
konstante ihrer Verbindungsli.: $b^2 x_1 : a^2 y_1$. Nr. 5. $y = Mx$
 $+ n, M = \pm \sqrt{15} : 3; n = \pm 2r \sqrt{6} : 3$. Nr. 6. Berührungspunkt: 0, Zentrale: x Achse. $(x + r : 3)^2 : (2r : 3)^2 - y^2 : (2r \sqrt{3} : 3)^2 = 1$. Nr. 7. $(x + p : 4)^2 : (p : 4)^2 - y^2 : (p : 2)^2 = 1$.
Nr. 8. Ist $a > b$, so ist der Ort: $(x - a : 2)^2 - (y - b : 2)^2 = 1 = (a^2 - b^2) : 4$. Nr. 9. $(x + 3p : 2)^2 - y^2 = (p \sqrt{2})^2$. (Für $\alpha = 45^\circ, 135^\circ$). Nr. 10. $x^2 : (e^2 : 2a)^2 - y^2 : (e^2 - 2b)^2 = 1$. Nr. 11. $(x + a \sqrt{2})^2 : (2a^2 - y^2 : (a \sqrt{2})^2 = 1$;
 $2a \sqrt{2}$ und $\pm a \sqrt{7}$. Nr. 12. Für $y^2 - x^2$ ist $x^2 : (d \sqrt{6} : 3)^2 - (x - d : 3)^2 : (d \sqrt{2} : 3)^2 = 1$. Für $x^2 - y^2$ ist: $(x - d)^2 : (d \sqrt{2})^2 + y^2 : (d \sqrt{2} : 3)^2 = 1$. Nr. 13. $x^2 : (e^2 : a)^2 - y^2 : (e^2 : b)^2 = 1$.

§ 6. Nr. 1. $x^2 - y^2 = a^2; y^2 = -2b^3 x : a^2$.

§ 7. Nr. 1. $(x + y^2)^2 - 2c^2 (x^2 - y^2) = 0$. Polargleich.:
 $\varrho = c \sqrt{2 \cos(2\alpha)}$. Lemniskate.

Differentialrechnung.

§ 1. Nr. 1. $x = a; A = \sqrt{6} : 4$. Nr. 2. 0. Nr. 3.
1 : 2. Nr. 4. $14 : 3 (4 - \pi)$. Nr. 5. $-2 : 9$. Nr. 6. x
 $= 4; 5 : 6$. Nr. 7. $x = 60^\circ; 11 : 5$. Nr. 8. $y = 1, y' = \frac{1}{2};$
 $y'' = \infty$.

§ 2. α) Nr 1. 1. Teil. Abschn. der Ger. auf den Schenkeln $2a$, $2b$, Dreiecksinhalt $2ab$. 2. Teil. $a + \sqrt{ab}$, $b + \sqrt{ab}$; Kathetensumme: $a + b + 2\sqrt{ab}$. Nr. 1α . 1. Teil. $2a$, $2b$; $2ab \sin \alpha$. 2. Teil wie Nr. 1, 2. Teil. Nr. 2. Die Hälfte des zur gesuchten Sehne gehörigen Zentriwinkels ist $\frac{\alpha}{3}$ oder $\frac{2R - \alpha}{3}$ (mit Hülfe der gleichs. Hyperbel zu konstr.), der Trapezinhalt im 1. Fall: $r^2 \sqrt{2} : 2$ für $2\alpha = 135^\circ$. Nr. 3. $x = a$. Nr. 4. Halbe, kleinere Grundlinie $= r$, Trapezhöhe $= r\sqrt{3} : 2$, nicht parallele Seiten $= r$, Umfang $= 5r$. Nr. 5. Die Türhöhe wird: $(\sqrt[3]{l^2} - \sqrt[3]{a^2})^{\frac{3}{2}}$. Nr. 6. $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$ (mit Hülfe zweier Parabeln oder einer Parabel und einer Hyperbel zu konstruieren). Nr. 7. Grundlinie: $r\sqrt{3}$, Höhe: $\frac{3}{2}r$. Dr. gleichs. J. $= \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

β) Nr. 1. Prismenhöhe: $\frac{h}{3}$, Volumenverhältn.: $9 : 4$. Nr. 2. Grundkante: $2r : 3$; Höhe: $h : 3$; Volumenverh.: $2\sqrt{3} : 3\pi$. Nr. 3. Abstand: $r : 3$; Seite der Grundfl.: $4r : 3$, Vol.: $64r^3 : 81$. Nr. 4. 1. Teil. Pyrhöhe: $r : \sqrt{2}$. 2. Teil. Pyrhöhe (aus kubischer Gleichung.): $1,2622r$; $1,654r$; ($-1,9162r$). Nr. 5. Radius $\sqrt[3]{J : \pi}$; Durchmesser = Dicke. Nr. 6. Radius = Höhe $= \sqrt[3]{1 : \pi} = 0,68279 \text{ dm}$. Nr. 7. 1. Teil. $r = \sqrt[4]{M^2 : 3\pi^2}$ $h = \sqrt[4]{4M^2 : 3\pi^2}$. 2. Teil. $r = \sqrt[6]{9V^2 : 2\pi^2}$; $h = \sqrt[6]{6V : \pi}$. Nr. 8. $r = s\sqrt{6} : 3$, $h = s\sqrt{3} : 3$. Nr. 9. Radien: $2s\sqrt{6} : 3$, $s\sqrt{6} : 3$; Höhe: $s\sqrt{3} : 3$; $V = 14\pi\sqrt{3}$; $O = 3\pi(10 + 3\sqrt{6})$; $\cos \alpha = \sqrt{6} : 3$, $\alpha = 35^\circ 15' 52''$. Nr. 10. Beide Radien $= b : 2$; Seitenlinie = Höhe $= a : 2$. Nr. 11. $r = \sqrt[6]{9P^2 : 2\pi\sigma^2}$. Nr. 12. $cr\sqrt{r} : (r\sqrt{r} + R\sqrt{R}) = 9\frac{1}{2}$. Nr. 13. 1. Teil. Rad. $= 2r : 3$; Höhe $= h : 3$; Vol. $= 4\pi r^2 h : 27$. 2. Teil. Rad. $= r : 2$; Höhe $= h : 2$; Mantel $= \pi h r : 2$.

Nr. 14. Höhe $= a(1 + \sqrt{7}) : 6$, Vol. $= \pi a^3(10 + 7\sqrt{7}) : 162$. Nr. 15. Beide Höhen $= h : 2$; Mäntelsumme $= 2\pi r\sqrt{h^2 + (r : 2)^2}$. Nr. 16. $r\sqrt{6(3 + \sqrt{3})} : 6$; Vol. $=$

$\pi r^3 \sqrt{6(3 + \sqrt{3})} : 9$. Nr. 17. Rad. $= r \sqrt{2} : 2$; Höhe $= r \sqrt{2}$; Mantel $= 2 \pi r^2$.

Nr. 18. Rad. $= r \sqrt{6} : 3$; Höhe $= r \sqrt{3} : 3$; Vol. $= 2 \pi r^3 \sqrt{3} : 27$. Nr. 19. Rad. $= r \sqrt{1 + \sqrt{2}}$; Höhe $= r(2 + \sqrt{2})$; $O = \pi r^2(3 + 2\sqrt{2})$; $V = \pi r^3(4 + 3\sqrt{2}) : 3$. Nr. 20. Eingeschn. Kgl. Rad. $= 2 r \sqrt{2} : 3$; Höhe $= 4 r : 3$; Vol. $V_1 = 32 \pi r^3 : 81$. Umschr. Kgl. Rad. $= r \sqrt{2}$; Höhe $= 4 r$; Vol. $V_2 = 8 \pi r^3 : 3$. $V_1 : V_2 = 4 : 27$. Nr. 21. Rad. $= 2 r \sqrt{3} : 3$; Höhe $= r \sqrt{3} : 3$; Vol. $= 8 \pi r^3 \sqrt{3} : 27$. Nr. 22. Rad. $= r : 3$; Höhe $= 2 r \sqrt{2} : 3$; Seitenlinie $= 2 r \sqrt{3} : 3$; Mantel $= 8 \pi r^2 \sqrt{3} : 9$. Nr. 23. Vollkugel mit Rad. $= m \sqrt[3]{6} : 2$. Nr. 24. Halbkugel mit Rad. $= \sqrt{K} : 2 \pi$. Nr. 25. Kugelrad. $= \frac{r(s + r)}{2h}$, wenn $s = \sqrt{h^2 + r^2}$. Nr. 26. Zylhöhe. $= r(-1 + \sqrt{13}) : 6$; Kegelhöhe $= r(7 - \sqrt{13}) : 6$; Gesamtvol. $= \pi r^3(1 + \sqrt{13}) : 162$. Nr. 27. Zylhöhe. $= 2 r : 3$; Rad. $= r \sqrt{5} : 3$; Inhaltsunterschied $= 25 \pi r^3 : 81$. Nr. 28. Grösster Kegel: Rad. $= 2 r \sqrt{2} : 3$; Höhe $= 4 r : 3$; $V_1 = 32 r^3 \pi : 81$. Gröst. Zyl. Rad. $= r \sqrt{6} : 3$; Höhe $= 2 r \sqrt{3} : 3$; $V_2 = 4 r^3 \pi \sqrt{3} : 9$. Ist V_3 das Kugelvolumen, so ist $V_1 : V_3 = 8 : 27$; $V_2 : V_3 = 1 : \sqrt{3}$. Nr. 29. Ges. Abstand $= 18 h : 23$.

γ . Nr. 1. Abszisse $= a : 3$; Dreieckinhalt $= 2 a \sqrt{6ap} : 9$. Nr. 2. Länge der 2. Sehne: $2 y_1 : 3$; Abstand vom Scheitel $y_1^2 : 18 p$; Trapezinhalt: $16 y_1^3 : 27 p$. Nr. 3. $AB : X$ -Achse, Mittellot $OS : Y$ -Achse; $S : o, h$; DC Paralleelsehne; $C : x, y$; $x = a : 3$, $y = 8 h : 9$; Fläche $= 32 ah : 27$. Nr. 4. Sehne $2 p$, senkrecht zur Achse. Nr. 5. Ordinate $b : 2$; Abszisse: $a : 4$; Inhalt: $5 ab : 8$. Nr. 6. Ist $r_1 > r_2$, so sind die Radvekt. d. P.: $2 a r_1 : (r_1 - r)$, $2 a r_1 : (r_1 + r)$; Abszisse: $a^2(r_1 + r_2) : e(r_1 - r_2)$. Nr. 7. Kl. Grdl.: a ; Höhe: $b \sqrt{3} : 2$; Fläche: $3 ab \sqrt{3} : 4$. Nr. 8. Eckenkoord.: $\pm a \sqrt{2} : 2$ und $\pm b \sqrt{2} : 2$; Inhalt: $2 ab$. Nr. 8₂. Eckenkoord.: $\pm a^2 : \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\pm b^2 : \sqrt{a^2 + b^2}$; Umfang: $4 \sqrt{a^2 + b^2}$. Nr. 9₁. $r = b \sqrt{6} : 3$; $h = 2 a \sqrt{3} : 3$; $V = 4 \pi ab^2 \sqrt{3} : 9$. Nr. 9₂.

$r = a \sqrt{6} : 3$; $h = 2 b \sqrt{3} : 3$; $V = 4 \pi a^2 b \sqrt{3} : 9$.
 Nr. 10. Koord. von M und N : $\pm a^2 : \sqrt{a^2 + 4 b^2}$, $\pm 2 b^2 : \sqrt{a^2 + 4 b^2}$. Nr. 11. Koord. von M und N : $\pm a \sqrt{2} : 2$, $b \sqrt{2} : 2$, Inhalt: $ab : 2$. Nr. 12. P (im 1. Quadr.): $a \sqrt{2}$, $b \sqrt{2}$; Inhalt: $ab \sqrt{2} : 2$.

Nr. 13. Koord. d. ges. P.: $\pm a \sqrt{3} : 2$; $b : 2$; Fläche: $3 ba \sqrt{3}$. Nr. 14. Dreieckshöhe: $b^2 : e$; Richtungskont. d. Brennstrahlen: A , — $b^2 : a^2 A$, wenn $A = + b : a$; Fläche = $b^5 : ae^2$. Nr. 15. $\pm a \sqrt{2} : 2$; $b \sqrt{2} : 2$. Nr. 16₁. Koord. der Ecken: $\pm a \sqrt{3} : 3$, $\pm b \sqrt{6} : 3$, Zylvol.: $V_1 = 4 \pi ab^2 \sqrt{3} : 9$, V_2 des Ellipsoids = $4 \pi ab^2 : 3$; $V_1 : V_2 = 1 : \sqrt{3}$. Nr. 16₂. Koord. der Ecken: $\pm a \sqrt{2} : 2$, $\pm b \sqrt{2} : 2$; Zylindermantel: $2 \pi ab$.

δ) Nr. 1. $x_1 = 9$, $y_1 = \text{Max.}$, $x_2 = -3$, $y_2 = \text{Min.}$. Wendepunkte haben die Abszisse: 0 , $3 (3 \pm \sqrt{33}) : 4$. Nr. 2. $x_1 = 7$, $y_1 = -32\frac{2}{3} \text{ Min.}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3\frac{1}{3} \text{ Max.}$ $x_3 = 4$, $y_3 = -14\frac{2}{3}$ ist Wendep. A der Wendetgt.: — 9 . Nr. 3. $q = -(a^4 - e^2 x^2)^{\frac{2}{3}} : a^4 b$. $q = \text{Max.} = a^2 : b$ für $x = 0$, $y = + b$; $q = \text{Min.} = b^2 : a$ für $x = + a$, $y = 0$.

ε) Nr. 1. $x = a \sqrt[3]{2}$, $u = a \sqrt[3]{4} \text{ Max.}$

ζ) Nr. 1. $x = o$, $x_1 = o$, $y = h$, $y_1 = o$, Min.; $x = 18 r : 23$, $x_1 = 12 r : 23$, $y = 5 h : 23$, $y_1 = 6 h : 23$, Max. Nr. 2. $x = (2 cd - be) : (b^2 - 4 ac)$, $y = (2 ae - bd) : (b^2 - 4 ac)$. Max., wenn $a < o$, Min., wenn $a > o$ und $4 ac - b^2 > o$ ist.

η) Nr. 1. $x = c \sqrt{m} : (\sqrt{m} + \sqrt{m_1})$. Nr. 2. $a \sqrt{2} : 2$.

§ 3. Nr. 1. $x_1 = 0,0995057 = 5^\circ 42' 4''$, $x_2 = -20,0995057 = -(71^\circ 37' 5'' + 8 \pi)$. Nr. 2. $l \sqrt{1+x} = \frac{1}{2} (x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots)$. Nr. 3. $\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)$. Nr. 4. $1 : \sqrt{1-x} = 1 + \frac{x}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots$ Nr. 5. $y = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots$

— . . . Nr. 6. $l \cos x = - \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^4}{4!} - \dots$ Nr. 7.

$l(a + bi) = \frac{1}{2} l(a^2 + b^2) + i [\arctg(b : a) + 2k\pi].$

§ 4. Nr. 1. $x = e, y = \frac{1}{e}$ Max. Nr. 2. 45° . Nr. 3. $x =$

$\sqrt[3]{2}, y_1 = -2, y_{2,3} = +1, < \alpha_1 = 180^\circ - 46^\circ 37' 18'', <$

$\alpha_2 = 90^\circ. x = \sqrt[3]{2}, y_{2,3} = +1$ Rückkehrp. 1. Art. Nr. 4.

$x = y = \frac{r}{2} \sqrt[3]{2}, \alpha = 135^\circ.$

§ 5. Nr. 1. $x = (\sqrt[3]{9} - 1)^2, y = \sqrt[3]{2} (\sqrt[3]{9} - 1).$

Nr. 2. $x = \frac{3}{2} p, y = \pm p \sqrt[3]{3}, \alpha = \pm 30^\circ.$

§ 6. Nr. 1. $xy = \frac{f}{2}$ oder durch Transformation $x'^2 - y'^2$

$= f$. Nr. 2. $y^2 = -4ax$. Nr. 3. $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2}\right)$

Nr. 4. $x^2 : a^2 - y^2 : c(c + 2a) = 1.$

§ 7. Nr. 1 bis 23. Die Resultate lassen sich nicht auf engem Raum zusammenbringen.

Man hat zu bestimmen, ob die Kurve zu einer oder zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch liegt; in welchen Quadranten sie liegt; welche Scheitelpunkte sie mit den Achsen hat; welche Max. und Min. der Ordinaten vorkommen; welche Wendepunkte; Richtungskonstanten der Tangenten in den Achsenschnittpunkten und den Wendepunkten; Asymptoten; Vorzeichen des 1. Diffqu. innerhalb der durch Max., Min. und Asymptoten bestimmten Grenzen; Vorzeichen des 2. Diffqu. innerhalb der durch Wendepunkte und Asymptoten bestimmten Grenzen; Krümmungsradien in den Max. und Min.; Eigenschaften von Subnorm. und Subtang., Flächenstücke zwischen Kurve und x -Achse u. a.

Integralrechnung

Nr. 1. $y^3 = x^3 + a^3$. Wendepunkte: $x = 0, y = a$ ($y'' = 0, y' = 0$), $x = -a, y = 0$ ($y'' = \infty, y' = \infty$). Nr. 2. $a^2 : 10; \pi a^3 : 84$. Geometrie der Lage. Die Lösungen lassen sich nicht in knapper Form zusammenstellen.

Zusammenstellung von Aufgabengruppen.

Es bedeutet: I = Sphärische Trigonometrie; II = Kubische Gleichungen;
 III = Rentenrechnung; IV = Analytische Geometrie; V = Differentialrechnung;
 VI = Geometrie der Lage.

	I	II	III	IV	V	VI
1	Nr. 7 α	D, Nr. 6	—	§ 3, Nr. 1	§ 7, Nr. 1	—
2	Nr. 33	D, Nr. 28	—	§ 4, Nr. 1	§ 2 β , Nr. 7	—
3	Nr. 6	B, Nr. 23	—	§ 3, Nr. 4	§ 2 β , Nr. 3	—
4	Nr. 6 α	B, Nr. 1	—	§ 4, Nr. 2	§ 1, Nr. 1	—
5	Nr. 7	—	Nr. 10	§ 4, Nr. 4	§ 7, Nr. 2	—
6	Nr. 10	A, Nr. 1	—	§ 4, Nr. 5	§ 2 β , Nr. 17	—
7	Nr. 7 β	B, Nr. 11	—	§ 4, Nr. 6	§ 2 β , Nr. 28	—
8	Nr. 6 β	B, Nr. 12	—	§ 1, Nr. 2	§ 4, Nr. 2	—
9	Nr. 8	—	Nr. 1	§ 3, Nr. 2	§ 2 δ , Nr. 1	—
10	Nr. 8 α	—	Nr. 12	§ 4, Nr. 11	§ 1, Nr. 2	—
11	Nr. 6 ε	—	Nr. 13	§ 3, Nr. 13	§ 5, Nr. 1	—
12	Nr. 6 ι	D, Nr. 19	—	§ 4, Nr. 12	§ 2 γ , Nr. 5	—
13	Nr. 6 γ	B, Nr. 13	—	§ 2, Nr. 1	§ 2 γ , Nr. 7	—
14	Nr. 2	—	Nr. 14	§ 2, Nr. 11	§ 2 β , Nr. 18	—
15	Nr. 6 η	A, Nr. 1	—	§ 4, Nr. 7	§ 7, Nr. 4	—
16	Nr. 13	—	Nr. 8	§ 3, Nr. 3	§ 2 β , Nr. 22	—
17	Nr. 21	—	Nr. 3	§ 3, Nr. 4	§ 2 β , Nr. 8	—
18	Nr. 2	B, Nr. 24	—	§ 2, Nr. 3	§ 2 β , Nr. 2	—
19	Nr. 6 δ	D, Nr. 6	—	§ 4, Nr. 8	§ 2 γ , Nr. 8	—
20	Nr. 6 ζ	B, Nr. 10	(Nr. 18)	§ 3, Nr. 5	§ 2 β , Nr. 10	—
21	Nr. 13 α	A, Nr. 2	—	§ 4, Nr. 13	§ 7, Nr. 5	—
22	Nr. 18	D, Nr. 29	Nr. 20	§ 4, Nr. 12	—	—
23	Nr. 6 ϑ	C, Nr. 4	—	§ 4, Nr. 6	§ 2 β , Nr. 24	—
24	Nr. 4 α	C, Nr. 3	—	§ 5, Nr. 2	§ 2 β , Nr. 23	—
25	Nr. 5	D, Nr. 10	—	§ 2, Nr. 6	§ 2 γ , Nr. 9	—
26	Nr. 11	B, Nr. 17	—	§ 2, Nr. 5	§ 7, Nr. 6	—
27	Nr. 15	—	Nr. 4	§ 3, Nr. 7	§ 7, Nr. 7	—
28	Nr. 36	B, Nr. 25	Nr. 21	§ 5, Nr. 3	—	—
29	Nr. 23	B, Nr. 15	—	§ 3, Nr. 15	§ 7, Nr. 8	—
30	—	D, Nr. 20	Nr. 22	§ 5, Nr. 7	§ 2 β , Nr. 9	—

31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55

	I	II	III	IV	V	VI
31	Nr. 7 β	—	Nr. 24	§ 5, Nr. 8	§ 2 α , Nr. 3	—
32	Nr. 13 α	D, Nr. 8	—	§ 4, Nr. 19	§ 2 β , Nr. 26	—
33	Nr. 1	—	Nr. 5	§ 4, Nr. 11	§ 2 β , Nr. 20	—
34	Nr. 33	D, Nr. 24	—	§ 4, Nr. 25	§ 2 β , Nr. 19	—
35	Nr. 18	D, Nr. 7	—	§ 1, Nr. 3	§ 2 γ , Nr. 11	—
36	Nr. 34	D, Nr. 13	—	§ 5, Nr. 9	§ 7, Nr. 11	—
37	Nr. 25	D, Nr. 5	—	§ 4, Nr. 9	§ 2 γ , Nr. 1	—
38	Nr. 20	D, Nr. 30	—	§ 3, Nr. 9	§ 2 γ , Nr. 16	—
39	Nr. 5 α	^a D, Nr. 15	—	§ 4, Nr. 3	§ 2 γ , Nr. 13	—
40	Nr. 27	D, Nr. 31	—	§ 4, Nr. 28	§ 2 β , Nr. 15	—
41	Nr. 28	—	Nr. 28	§ 2, Nr. 9	§ 7, Nr. 13	—
42	—	—	Nr. 33	§ 4, Nr. 21	§ 2 β , Nr. 26	§ 1, Nr. 1
43	—	C, Nr. 1	—	§ 5, Nr. 10	§ 7, Nr. 14	§ 1, Nr. 2
44	Nr. 8 α	D, Nr. 25	—	§ 5, Nr. 11	—	§ 1, Nr. 4
45	Nr. 30	—	Nr. 7	§ 2, Nr. 10	§ 2 α , Nr. 4	—
46	Nr. 6 α	D, Nr. 32	—	§ 4, Nr. 22	§ 7, Nr. 17	—
47	—	D, Nr. 26	—	§ 4, Nr. 23	§ 2 α , Nr. 5	§ 1, Nr. 5
48	—	B, Nr. 22	—	§ 4, Nr. 27	§ 2 α , Nr. 6	§ 3, Nr. 2
49	Nr. 31	D, Nr. 27	—	§ 5, Nr. 12	§ 2 γ , Nr. 6	—
50	—	D, Nr. 28	—	§ 4, Nr. 23	§ 2 γ , Nr. 14	§ 1, Nr. 6
51	—	D, Nr. 22	—	§ 4, Nr. 25	§ 2 η , Nr. 1	§ 1, Nr. 8
52	—	D, Nr. 17	—	§ 6, Nr. 1	§ 2 γ , Nr. 15	§ 1, Nr. 9
53	Nr. 32	D, Nr. 29	—	§ 2, Nr. 11	§ 2 β , Nr. 27	—
54	—	D, Nr. 14	—	§ 4, Nr. 26	§ 7, Nr. 23	§ 3, Nr. 4
55	Nr. 29	D, Nr. 18	—	§ 3, Nr. 21	§ 3, Nr. 5	—



	I	II	III
31	Nr. 7 β	—	Nr. 24
32	Nr. 13 α	D, Nr. 8	—
33	Nr. 1	—	Nr. 5
34	Nr. 33	D, Nr. 24	—
35	Nr. 18	D, Nr. 7	—
36	Nr. 34	D, Nr. 13	—
37	Nr. 25	D, Nr. 5	—
38	Nr. 20	D, Nr. 30	—
39	Nr. 5 α	^a D, Nr. 15	—
40	Nr. 27	D, Nr. 31	—
41	Nr. 28	—	Nr. 28
42	—	—	Nr. 33
43	—	C, Nr. 1	—
44	Nr. 8 α	D, Nr. 25	—
45	Nr. 30	—	Nr. 7
46	Nr. 6 α	D, Nr. 32	—
47	—	D, Nr. 26	—
48	—	B, Nr. 22	—
49	Nr. 31	D, Nr. 27	—
50	—	D, Nr. 28	—
51	—	D, Nr. 22	—
52	—	D, Nr. 17	—
53	Nr. 32	D, Nr. 29	—
54	—	D, Nr. 14	—
55	Nr. 29	D, Nr. 18	—



