

Sechster Abschnitt.

Über den Zusammenhang der Funktionen $\sin \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} v$, $\mathcal{A} \operatorname{am} v$ mit der p -Funktion.

Im ersten Abschnitt fanden wir als Wert des Differentialquotienten von $\sin \operatorname{am} v$:

$$\frac{d \sin \operatorname{am} v}{dv} = \cos \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am} v.$$

Erheben wir beiderseits zum Quadrat und führen rechter Hand $\sin \operatorname{am} v$ ein, so folgt:

$$\left(\frac{d \sin \operatorname{am} v}{dv} \right)^2 = 1 - (1 + k^2) \sin^2 \operatorname{am} v + k^2 \sin^4 \operatorname{am} v.^1)$$

Durch die Substitution $\sin^2 \operatorname{am} v = \frac{1}{a+z}$ und die Formeln:

$$\sin^2 \operatorname{am} v + \cos^2 \operatorname{am} v = 1, \quad \mathcal{A}^2 \operatorname{am} v + k^2 \sin^2 \operatorname{am} v = 1$$

ergibt sich:
$$\frac{d \sin^2 \operatorname{am} v}{dv} = - \frac{1}{(a+z)^2} \cdot \frac{dz}{dv},$$

$$\sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am} v = \frac{\sqrt{(z+a)(z+a-1)(z+a-k^2)}}{(a+z)^2},$$

$$\frac{d \sin^2 \operatorname{am} v}{dv} = 2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am} v,$$

$$\left(\frac{dz}{dv} \right)^2 = 4 (z+a)(z+a-1)(z+a-k^2).$$

Die hier eingeführte Funktion z hat die Eigenschaft, daß das Quadrat ihrer Derivierten gleich einem Ausdruck dritten Grades, besitzt also bereits eine gewisse Ähnlichkeit mit der p -Funktion, die der Differentialgleichung genügt:

$$\left(\frac{dp}{du} \right)^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3.$$

Wollen wir die zweite Potenz zum Verschwinden bringen, also den Faktor von $z^2 = 0$ setzen, so müssen wir $a = \frac{1+k^2}{3}$ annehmen.

In diesem Falle ist nach einem bekannten Satz der Algebra die Summe der Wurzeln $= 0$, d. h. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$, wenn $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ die drei Wurzeln sind. Die drei Wurzeln haben in diesem Fall die nur vom Modul k abhängigen Lösungen:

$$\varepsilon_1 = 1 - a = \frac{2-k^2}{3}, \quad \varepsilon_2 = k^2 - a = \frac{2k^2-1}{3}, \quad \varepsilon_3 = -a = -\frac{1+k^2}{3},$$

und es ist
$$\left(\frac{dz}{dv} \right)^2 = 4 (z - \varepsilon_1) (z - \varepsilon_2) (z - \varepsilon_3).$$

¹⁾ Vgl. Halphen, a. a. O., p. 23 ff.

Um zwei Wurzeln beliebig annehmen zu können, setzen wir:
 $\varepsilon_1 = \lambda e_1$, $\varepsilon_2 = \lambda e_2$, $\varepsilon_3 = \lambda e_3$, $z = \lambda y$, $v = \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$. Dann hebt sich die
 neu eingeführte Konstante λ heraus und es ist:

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3).$$

Hier gilt wieder:

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Dann ist y die bekannte Funktion $p(u)^{1)}$ und der gesuchte Zusammenhang zwischen p -Funktion und $\sin$ am u wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(2) \quad y = p(u) = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Hier hängt die p -Funktion außer von dem Argument u von k und λ ab, an Stelle von diesen beiden Konstanten führt man die drei reellen Größen e durch die Formeln ein:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{e_1 - e_3}, \quad k^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Für den komplementären Modul ist schließlich $k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$.

Der Zusammenhang mit den Invarianten g_2 und g_3 der Gleichung:
 $p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3 = 4[p(u) - e_1][p(u) - e_2][p(u) - e_3]$
 wird durch die Gleichungen hergestellt:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3,$$

$$\text{f. } e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = \frac{1}{2} g_2.$$

Die Algebra lehrt, daß bei positiver Diskriminante alle drei Wurzeln reell sind, dann ist also $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$ positiv. Nehmen wir an, daß die drei der Größe nach geordneten Wurzeln $e_1 > e_2 > e_3$ so beschaffen sind, daß $e_1 > 0$, $e_3 < 0$. Dann folgt aus der Gleichung $e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$, daß e_2 und g_3 entgegengesetzte Werte haben. Da ferner:

$$k^2 - k'^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} - \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \frac{3e_2}{e_1 - e_3},$$

¹⁾ Wir begnügen uns damit, dies an einigen Eigenschaften zu verifizieren und verweisen im übrigen auf das erwähnte Lehrbuch von Halphen, in dem die p -Funktion auf diese Weise eingeführt wird.

so stimmen e_2 und $k^2 - k'^2$ im Vorzeichen überein. Da nun $k^2 - k'^2 = 2k^2 - 1$, so ist

$$\begin{aligned} e_2 &\text{ negativ, } g_3 \text{ positiv für } k^2 < \frac{1}{2}, \\ e_2 &\text{ positiv, } g_3 \text{ negativ für } k^2 > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir schließlich in (2) λ durch $\frac{1}{e_1 - e_3}$, so ist

$$p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Da der Nenner zwischen 0 und 1 liegt, liegt $p(u)$ zwischen e_1 und $+\infty$, nimmt also alle Werte zwischen e_1 und ∞ an.

Aus der Definitionsgleichung der p -Funktion:

$$p(u) = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}$$

folgt, da $\sin \operatorname{am} (-u) = -\sin \operatorname{am} u$, daß $p(-u) = p(u)$. Gleichzeitig sehen wir auch, daß $p(u)$ die Periode $2\omega = 2K\sqrt{\lambda}$ hat, also:

$$\omega = K\sqrt{\lambda} = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad p(u \pm 2m\omega) = p(u).$$

Die imaginäre Periode ergibt sich aus den Formeln:

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_1 e_3 = -\frac{1}{4}g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4}g_3,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

durch folgende Betrachtungen:

Ersetzt man g_3 durch $-g_3$, so ändern alle drei Wurzeln e das Zeichen, und wir müssen, wenn wir der Größe nach ordnen wollen, e_1 durch $-e_3$, e_2 durch $-e_2$, e_3 durch $-e_1$ ersetzen. Dadurch vertauschen sich k^2 und k'^2 und wir erkennen, daß die p -Funktion mit den Invarianten g_2 und $-g_3$ durch die Funktion $\sin \operatorname{am} u$ mit dem Modul k' ebenso definiert ist, wie $p(u|g_2, g_3)$ durch $\sin \operatorname{am} (u, k)$. $\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3}$ wird bei der Vertauschung nicht geändert. K' ist das Analogon zu K für den Modul k' , also:

$$\frac{1}{2}\omega' = K'\sqrt{\lambda}.$$

Wie wir aus den Betrachtungen im ersten Abschnitt gesehen haben, werden die elliptischen Funktionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\mathcal{A} \operatorname{am} u$ zu trigonometrischen und Exponentialfunktionen, wenn der Modul k die Extrem-

so stimmen e_2 und e_3 überein, so ist

Ersetzen wir

Da der Neigungswinkel α gegen $+\infty$, nimmt

Aus der Definition

folgt, daß sin α am Maximum gleichzeitig sehen wir

$$\omega =$$

Die imaginäre

$$e_1 e_3$$

durch folgende

Ersetzt man e_1 durch $-e_3$, so vertauschen sich k^2 und k'^2 . Invarianten g_2 und g_3 sind ebenso definiert. Bei der Vertauschung von e_1 und e_3 ändert sich der Modul k' , also:

Wie wir aus der Abbildung werden die elliptischen Funktionen und

Da nun $k^2 = k'^2$

so ist

$p(u)$ zwischen e_1 und e_3 an.

$= p(u)$. Gleichzeitig hat $K\sqrt{\lambda}$, also:

$$= p(u).$$

nehmen:

$$\frac{1}{4} g_3,$$

Die drei Wurzeln e des Polynom ordnen wollen, um $p(u)$ zu erhalten. Dadurch vertauschen sich die p -Funktion mit den e mit dem Modul k'

$\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3}$ wird die Funktion $p(u)$ zu K für den

nicht gesehen haben, daß λ am u zu trigonometrischen Funktionen mit dem Modul k die Extrem-



werte 0 und 1 annimmt. Auch für die p -Funktion haben wir bereits die Degenerationsfälle ($\omega = \infty$, $\omega' = \infty$) betrachtet (S. 41 f.) und sind dabei auf trigonometrische bzw. rationale Funktionen geführt. Abschließend wollen wir nun die obigen Resultate durch eine vergleichende Untersuchung auf Grund der Koinzidenz der Werte von e ergänzen.

k nimmt den Wert 0 oder 1 an, wenn e_2 mit e_3 oder mit e_1 koinzidiert. In diesen Fällen wird die Diskriminante Δ gleich Null.

Dann haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1. \quad e_2 = e_3 = -\frac{1}{2} e_1, \quad g_2 = 3 e_1^2, \quad g_3 = e_1^3, \\ \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 0, \quad \lambda = \frac{2 g_2}{9 g_3} = \frac{2}{3 e_1}, \quad k = 0, \quad \sin \operatorname{am} u = \sin u.$$

$$g_3 > 0, \quad p(u) = -\frac{3 g_3}{2 g_2} + \frac{9 g_3}{2 g_2} \cdot \frac{1}{\sin^2 u \sqrt{\frac{9 g_3}{2 g_2}}}.$$

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 = \lambda = \frac{2 g_2}{9 g_3}.$$

$$2. \quad e_2 = e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \quad g_2 = 3 e_3^2, \quad g_3 = e_3^3, \\ \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 0, \quad \lambda = -\frac{2 g_2}{9 g_3} = -\frac{2}{3 e_3}, \quad k = 1, \quad \sin \operatorname{am} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$g_3 < 0, \quad p(u) = \frac{3 g_3}{g_2} - \frac{9 g_3}{2 g_2} \left(\frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}}\right)^2, \quad v = u \sqrt{-\frac{9 g_3}{2 g_2}}.$$

$$K = \infty, \quad \omega = \infty.$$

Ist schließlich $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, so ist $g_2 = g_3 = 0$, $\omega = \infty$ und

$$\underline{p(u) = \frac{1}{u^2}}.$$