

# Fünfter Abschnitt.

## Die Zerlegung in Linearfaktoren und das Additionstheorem.

### 1. Faktorenzerlegung.

Einem rationalen Bruch läßt sich die Form geben:

$$A \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_p)},$$

einer trigonometrischen Funktion:

$$A e^{mx} \frac{\sin(x - a_1) \sin(x - a_2) \dots \sin(x - a_n)}{\sin(x - b_1) \sin(x - b_2) \dots \sin(x - b_p)}.$$

Wir suchen eine entsprechende Zerlegung für elliptische Funktionen, aus der Pole und Nullstellen ebenfalls ersichtlich sind.

Zu dem gewünschten Resultat gelangen wir auf demselben Wege wie bei den rationalen Funktionen, wir wenden die Partialbruchzerlegung auf die Funktion  $\frac{f'(u)}{f(u)}$  an. Dabei haben wir folgendes zu beachten: Hat die elliptische Funktion  $f(u)$  in einem Periodenparallelogramm die  $r$  einfachen Pole  $a_1, a_2, \dots, a_r$  und die  $s$  einfachen Nullstellen  $b_1, b_2, \dots, b_s$ , so ist die logarithmische Derivierte zunächst überall da regulär, wo  $f(u)$  weder Null noch unendlich ist; sie hat dort einen Pol mit dem Residuum  $+1$ , wo  $f(u)$  eine einfache Nullstelle hat; der Pol erhält das Residuum  $-1$  an den Stellen, wo ein Pol von  $f(u)$  liegt (vgl. Abschn. II, Nr. 1). Daher lautet die Partialbruchzerlegung für diesen Fall:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = c + \zeta(u - b_1) + \zeta(u - b_2) + \dots + \zeta(u - b_s) \\ - \zeta(u - a_1) - \zeta(u - a_2) - \dots - \zeta(u - a_r).$$

oder

$$(1) \quad \frac{f'(u)}{f(u)} = c + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - b_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - b_2) + \dots + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - b_s) \\ - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - a_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - a_2) - \dots - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - a_r).$$

Aus dem Satz von der Summe der Residuen gewinnen wir das schon bekannte (Abschn. IV, Nr. 1) Resultat  $s - r = 0$ ; innerhalb des Periodenparallelogramms ist die Zahl der Nullstellen gleich der Zahl der Pole. Wir setzen  $s = r$ , integrieren und gehen von den Logarithmen zu den Numeri:

$$(2) \quad f(u) = a \cdot e^{cu} \frac{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_r)}.$$

Dies ist die gesuchte Formel, da aus ihr ohne weiteres Nullstellen und Pole ersichtlich sind. Treten  $n$ -fache Pole oder Nullstellen auf, so ist der betreffende Linearfaktor  $n$ -mal zu setzen; auch kann man sich von der Voraussetzung frei machen, daß die  $a_\nu$  oder  $b_\nu$  in einem Periodenparallelogramm liegen, da sich jeder Pol durch einen kongruenten ersetzen läßt, wodurch sich nur die Konstanten ändern. Setzen wir ferner den Liouvilleschen Satz<sup>1)</sup> voraus: Innerhalb eines Periodenparallelogramms ist die Summe der Nullstellen kongruent zur Summe der Pole, also:

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_r) - (a_1 + a_2 + \dots + a_r) = 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

so läßt sich (2) noch vereinfachen auf:

$$(3) \quad f(u) = A \frac{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_r)},$$

wobei zu beachten ist, daß  $\sum_{\nu=1}^r a_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^r b_\nu$ .

Die entsprechende Darstellung in der Jacobischen Bezeichnung würde lauten:

$$(4) \quad f(u) = A' \frac{H(u - b_1) H(u - b_2) \dots H(u - b_r)}{H(u - a_1) H(u - a_2) \dots H(u - a_r)},$$

wobei gleichfalls  $\sum_{\nu=1}^r a_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^r b_\nu$ .

Der Satz: eine rationale Funktion ist bis auf eine multiplikative Konstante durch ihre Pole und Nullstellen bestimmt, kann auf elliptische Funktionen ohne weiteres übertragen werden. Der schon benutzte Begriff „Ordnung“ einer elliptischen Funktion kann nun schärfer gefaßt werden. Ordnung einer elliptischen Funktion ist die Zahl der Pole ( $m$ -fache Pole,  $m$ -mal gezählt) oder — was dasselbe — der Nullstellen, die die Funktion im Periodenparallelogramm hat. Da  $f(u)$  und  $f(u) - C$  (wo  $C$  eine Konstante) offenbar dieselben Pole haben, so gilt für elliptische Funktionen der bei rationalen Funktionen für die ganze komplexe Ebene geltende Satz: Die Gleichung  $f(u) = C$  hat bei einer elliptischen Funktion  $r$ -Ordnung innerhalb eines Periodenparallelogramms genau  $r$  Lösungen.

## 2. Anwendungen der Faktorenzersetzung auf $p$ - und $\zeta$ -Funktion.

Wir betrachten die Funktion  $p(u) - p(v)^2$ , wo  $v$ , also auch  $p(v)$  eine Konstante ist.  $p(u)$  hat an der Stelle  $u = 0$  einen Doppelpol,

<sup>1)</sup> Burkhardt, a. a. O., p. 40 f.

<sup>2)</sup> Burkhardt, a. a. O., p. 60 ff.

dementsprechend muß die Funktion im Periodenparallelogramm zwei Nullstellen haben:  $u = +v$  und  $u = -v$ . Daher gilt die Zerlegung:

$$p(u) - p(v) = A \frac{\sigma(u+v) \sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}.$$

Hier sind Pole und Nullstellen unter den unendlich vielen ihnen kongruenten so ausgewählt, daß die Summe der Nullstellen gleich (nicht nur bis auf Perioden) der Summe der Pole ist. Wir erhalten die Größe der Konstanten  $A$ , indem wir beiderseits nach Potenzen von  $u$  entwickeln und die Koeffizienten von  $\frac{1}{u^2}$  vergleichen:  $A = -\frac{1}{\sigma^2(v)}$ , f.

$$p(u) - p(v) = -\frac{\sigma(u+v) \sigma(u-v)}{\sigma^2(u) \sigma^2(v)}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich durch logarithmische Differentiation nach  $u$  bzw.  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{p'(u)}{p(u) - p(v)} &= \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) \\ \frac{-p'(v)}{p(u) - p(v)} &= \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v). \end{aligned}$$

Addieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir das sogenannte Additionstheorem der  $\zeta$ -Funktion:

$$\zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) = \frac{1}{2} \frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}.$$

Das Additionstheorem der  $\zeta$ -Funktion ist noch nicht algebraisch, da zwischen  $p(u)$  und  $\zeta(u)$  keine algebraische Gleichung besteht, dagegen gelangen wir durch nochmalige Differentiation zu einem algebraischen Additionstheorem der  $p$ -Funktion:

$$\begin{aligned} p(u) - p(u+v) &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta u} \left( \frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)} \right) = \frac{1}{2} \frac{p''(u)}{p(u) - p(v)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{[p'(u) - p'(v)] p'(u)}{[p(u) - p(v)]^2}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von  $u$  und  $v$  ergibt sich:

$$p(v) - p(u+v) = -\frac{1}{2} \frac{p''(v)}{p(u) - p(v)} + \frac{1}{2} \frac{[p'(u) - p'(v)] p'(v)}{[p(u) - p(v)]^2}.$$

Addieren wir die beiden Gleichungen und beachten, daß

$$p''(u) - p''(v) = 6[p^2(u) - p^2(v)]$$

aus der Gleichung (S. 46):  $p^2(u) = \frac{1}{6} p''(u) + \frac{g_2}{12}$  folgt, so ist

$$p(u+v) = \frac{1}{4} \frac{(p'(u) - p'(v))^2}{p(u) - p(v)} - p(u) - p(v)$$

die gesuchte in  $u$  und  $v$  symmetrische Form des Additionstheorems der  $p$ -Funktion.

Führen wir schließlich ein drittes Argument  $w$  durch  $u+v+w=0$  ein, so erhalten wir eine übersichtliche Formel in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) \\ 1 & p(v) & p'(v) \\ 1 & p(w) & p'(w) \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Differentiation gelangt man zu einem entsprechenden Additionstheorem für  $p'(u+v)$ ;  $p(u+v)$  und  $p'(u+v)$  sind rational ausdrückbar durch  $p(u)$ ,  $p'(u)$ ,  $p(v)$ ,  $p'(v)$ . Da man nun auch  $p'(u)$  und  $p'(v)$ , bzw.  $p(u)$  und  $p(v)$  eliminieren kann, so läßt sich das Resultat auch so formulieren: Zwischen  $p(u+v)$ ,  $p(u)$  und  $p(v)$  — und ebenso zwischen  $p'(u+v)$ ,  $p'(u)$ ,  $p'(v)$  — besteht für beliebige Werte von  $u$  und  $v$  eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten von  $u$  und  $v$  unabhängig sind. Von Funktionen mit diesen Eigenschaften sagt man, daß sie ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Die Übereinstimmung, den die elliptische  $p$ -Funktion hierdurch mit rationalen und trigonometrischen Funktionen zeigt, werden wir nunmehr für jede elliptische Funktion nachweisen.

### 3. Das Additionstheorem.

Die Partialbruchzerlegung für eine elliptische Funktion lautete [Abschn. IV, Formel (3)]:

$$f(u) = D_0 + \sum \left[ A \zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{2!} p'(u-a) - \dots \dots \dots + (-1)^{(\alpha-2)} \frac{A_{(\alpha-1)}}{(\alpha-1)!} p^{(\alpha-2)}(u-a) \right].$$

Nun wissen wir, daß  $p(u-a)$  eine in  $p(u)$ ,  $p'(u)$  rationale Funktion ist, ebenso ist  $p'(u-a)$  rational in  $p(u)$ ,  $p'(u)$ ,  $p''(u)$ , oder, da  $p''(u) = 6p^2(u) - \frac{g_2}{12}$ , rational in  $p(u)$  und  $p'(u)$ . Durch weitere Differentiation läßt sich zeigen, daß  $p''(u-a)$  und alle höheren Ableitungen rational in  $p(u)$  und  $p'(u)$  sind. Was schließlich den übrigen bleibenden gleichfalls über alle Pole zu erstreckenden Ausdruck:

$$\sum A \zeta(u-a) = A \zeta(u-a) + B \zeta(u-b) + C \zeta(u-c) + \dots + L \zeta(u-l)$$

angeht, so ist er ebenfalls rational in  $p(u)$  und  $p'(u)$ , da nach dem Additionstheorem der  $\zeta$ -Funktion:

$$\zeta(u-a) = \zeta(u) - \zeta(a) + \frac{1}{2} \frac{p'(u) + p'(a)}{p(u) - p(a)},$$

wo  $v$  durch  $-a$  ersetzt, für  $\zeta(u-a)$  die rechte Seite gesetzt werden kann, und dann alle Glieder  $\zeta(u)$  nach dem Residuensatz verschwinden. Daraus folgt: Jede elliptische Funktion mit den beiden Perioden  $2\omega, 2\omega'$  ist eine rationale Funktion von  $p(u)$  und  $p'(u)$ . Da nun aus:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$

folgt, daß man die höheren Potenzen von  $p'(u)$  durch Polynome von  $p(u)$  ausdrücken kann, so läßt sich jede elliptische Funktion als rationale Funktion von  $p(u)$  und  $p'(u)$  in die Form bringen:

$$\frac{P(p) + p' Q(p)}{P_1(p) + p' Q_1(p)}.$$

( $P, Q, P_1, Q_1$  sind ganze Polynome von  $p$ .) Hieraus gewinnt man durch passende Umformung und Substitution:

$$f(u) = R(p) + p' R_1(p).$$

Auf diese Form kann jede elliptische Funktion gebracht werden,  $R$  und  $R_1$  stellen rationale Funktionen dar. Da  $p'(u)$  ungrade ist, so folgt:

$$f(-u) = R(p) - p' R_1(p).$$

Ist nun  $f(u)$  eine grade Funktion, also  $f(-u) = f(u)$ , so ist  $R_1(p) = 0$ , also  $f(u) = R(p)$ ; ist  $f(u)$  eine ungrade Funktion, also  $f(-u) = -f(u)$ , so ist  $R(p) = 0$ , also  $f(u) = p' \cdot R_1(p)$ .

Eine grade elliptische Funktion ist also eine in  $p(u)$  rationale Funktion, eine ungrade elliptische Funktion ist gleich einer mit  $p'(u)$  multiplizierten rationalen Funktion von  $p(u)$ . Hieraus folgt ein für unsere vergleichende Untersuchung interessantes Resultat. Nach den bewiesenen Sätzen müssen sich  $p(2u), p(3u) \dots p(nu)$  rational als Funktion von  $p(u)$  ausdrücken lassen. Entsprechende Formeln aus der Trigonometrie für  $\sin(n\alpha)$  usw., wo  $n$  eine ganze Zahl ist, sind aus den Elementen bekannt. Ferner können wir nunmehr das Analogon zu den S. 29 und S. 35 genannten geometrischen Sätzen aus der Lehre der rationalen und trigonometrischen Funktionen finden: Betrachten wir die Funktionen  $X = f(u)$ ,  $Y = f_1(u)$ , so sind  $X$  und  $Y$  rationale Funktionen von  $p(u)$  und  $p'(u)$ , also:

$$X = R(p, p'), \quad Y = R_1(p, p'),$$

wo

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3.$$

Wir erhalten durch Elimination von  $p(u)$  und  $p'(u)$  eine in  $X$  und  $Y$  algebraische Gleichung:

$$F(X, Y) = 0,$$

die eine Kurve  $C$  definiert.

Die durch die Gleichung  $F(X, Y) = 0$  definierte Kurve  $C$  ist vom 1. Grade. Setzen wir nun  $x = p(u)$ ,  $y = p'(u)$ , so definiert die zwischen  $x$  und  $y$  bestehende Gleichung:

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

eine Kurve  $c$  dritter Ordnung ohne Doppelpunkte.<sup>1)</sup> Die Koordinaten  $X$  und  $Y$  eines Punktes der Kurve  $C$  sind rationale Funktionen der Koordinaten  $x$  und  $y$  eines Punktes von  $c$ .

Geben wir einer elliptischen Funktion die Form:

$$f(u) = R[p(u), p'(u)]$$

und setzen ebenso:  $f(v) = R[p(v), p'(v)]$

und bilden dann  $f(u+v)$  als rationale Funktion von  $p(u+v)$  und  $p'(u+v)$ , drücken wir ferner  $p(u+v)$  und  $p'(u+v)$  nach dem Additionstheorem rational durch  $p(u)$ ,  $p(v)$ ,  $p'(u)$ ,  $p'(v)$  aus, so folgt:

$$f(u+v) = R_1[p(u), p(v), p'(u), p'(v)],$$

und wir erhalten drei Gleichungen, zu denen noch:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3$$

$$p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2p(v) - g_3$$

hinzutreten. Aus den fünf Gleichungen lassen sich  $p(u)$ ,  $p(v)$ ,  $p'(u)$ ,  $p'(v)$  eliminieren; wir erhalten eine algebraische Gleichung zwischen  $f(u+v)$ ,  $f(u)$ ,  $f(v)$  d. h.:

Jede elliptische Funktion hat ein algebraisches Additionstheorem.<sup>2)</sup>

Mit diesem rationale, trigonometrische und elliptische Funktionen umfassenden Satz ist unsere Betrachtung so weit durchgeführt, wie es für unsere Zwecke notwendig erscheint; es verbleibt uns, um zu einem gewissen Abschluß zu gelangen, nur noch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den im einleitenden Kapitel verwandten Funktionen  $\sin am u$ ,  $\cos am u$ ,  $\mathcal{A} am u$  und der  $p$ -Funktion darzulegen.

<sup>1)</sup> Der Verfasser beabsichtigt die Beziehungen zwischen Kurve dritter Ordnung und der  $p$ -Funktion später einmal gesondert zu behandeln, hier müssen diese Andeutungen genügen.

<sup>2)</sup> Auch die Umkehrung ist richtig: Alle Funktionen einer Variablen mit algebraischem Additionstheorem sind algebraische Funktionen von elliptischen Funktionen oder Ausartungen von solchen (Weierstraß).