

wir noch einmal und gehen von den Logarithmen zu den Numeri über, so folgt:

$$\sigma(u, \omega' = \infty) = c e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \cdot \sin \frac{\pi u}{2\omega},$$

wo c eine Integrationskonstante ist.

Da $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$, so ist $c \frac{\pi}{2\omega} = 1$, also:

$$(9) \quad \sigma(u, \omega' = \infty) = \frac{2\omega}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \cdot \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

Die Formeln (7), (8) und (9) zeigen: Die p -, ζ - und σ -Funktionen gehen in trigonometrische Funktionen über, wenn eine Periode ∞ wird.

Lassen wir schließlich auch die andere Periode ∞ werden, so reduziert sich die Reihe für $p(u)$ auf ein Glied:

$$p(u, \omega = \omega' = \infty) = u^2.$$

Hieraus folgt: $\zeta(u, \omega = \omega' = \infty) = \frac{1}{u}$ und $\sigma(u, \omega = \omega' = \infty) = u$.

d. h. wir gelangen zu einfachen rationalen Funktionen.

Damit ist aufs neue der enge Zusammenhang zwischen rationalen, trigonometrischen und elliptischen Funktionen bestätigt.

Vierter Abschnitt.

Die Partialbruchzerlegung und Reihenentwicklung der elliptischen Funktionen.

1. Zerlegung der ζ -Funktion.

Es sei $f(u)$ eine doppeltperiodische Funktion mit den im fundamentalen Periodenparallelogramm gelegenen Polen $a_1, a_2, \dots, a_n$. Zum Punkte a_i gehöre der Hauptteil:

$$g_i(u | a_i) = \frac{c_{-1}^{(i)}}{u - a_i} + \frac{c_{-2}^{(i)}}{(u - a_i)^2} + \dots + \frac{c_{-\mu}^{(i)}}{(u - a_i)^\mu}.$$

Die Funktion $\zeta(u)$ wird im Punkte $u=0$ unendlich wie $\frac{1}{u}$, ihre $(\mu-1)$.

Derivierte wird unendlich wie die Funktion $\frac{(-1)^{\mu-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\mu-1)}{u^\mu}$.

¹⁾ Vgl. Durège-Maurer, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Leipzig, 1906. p. 215 f.

Daher wird die Funktion:

$$\begin{aligned} \Phi_i(u) = & c_{-1}^{(i)} \zeta(u - a_i) - c_{-2}^{(i)} \zeta'(u - a_i) + \frac{c_{-3}^{(i)}}{1 \cdot 2} \zeta''(u - a_i) + \dots \\ & \dots + \frac{(-1)^{\mu-1} c_{-\mu}^{(i)}}{(\mu-1)!} \zeta^{(\mu-1)}(u - a_i) \end{aligned}$$

im Punkte a_i in derselben Weise unstetig wie die Funktion $f(u)$; die Differenz $f(u) - \Phi_i(u)$ bleibt im Punkte a_i stetig.

Wir bilden nun die Funktion:

$$F(u) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(u)$$

und beweisen, daß die Funktion die Perioden 2ω , $2\omega'$ besitzt.

Da $\zeta'(u) = -p(u)$ ist, so müssen offenbar alle Derivierten von ζ diese Perioden haben, mithin ist

$$\Phi_i(u + 2\omega) - \Phi_i(u) = c_{-1}^{(i)} [\zeta(u - a_i + 2\omega) - \zeta(u - a_i)] = c_{-1}^{(i)} 2\eta_1,$$

folglich:
$$F(u + 2\omega) - F(u) = 2\eta_1 \sum_{i=1}^n c_{-1}^{(i)}.$$

Nun ist die rechts stehende Summe die Summe der Residuen für die dem Periodenparallelogramm angehörenden Pole, also = 0. Daher ist

$$F(u + 2\omega) = F(u).$$

Ebenso läßt sich zeigen: $F(u + 2\omega') = F(u)$.

Die Funktion $f(u) - F(u)$ ist also doppelperiodisch; da sie nun im Periodenparallelogramm sich überall regulär verhält, so muß sie gleich einer Konstanten sein, d. h. jede elliptische Funktion läßt sich in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(u) = & \text{Konst} + \sum_{i=1}^n \left[c_{-1}^{(i)} \zeta(u - a_i) + c_{-2}^{(i)} \zeta'(u - a_i) + \frac{c_{-3}^{(i)}}{2!} \zeta''(u - a_i) + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{\mu-1} \frac{c_{-\mu}^{(i)}}{(\mu-1)!} \zeta^{(\mu-1)}(u - a_i) \right]. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Jacobische Terminologie, so lautet der allgemeine Ausdruck für eine elliptische Funktion ganz entsprechend:

$$\begin{aligned} (2) \quad f(u) = & C_0 + \sum \left[AZ(u - a) - A_1 Z'(u - a) + \frac{A_2}{2!} Z''(u - a) + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} Z^{(\alpha-1)}(u - a) \right], \end{aligned}$$

wo die Summe wie bei (1) über alle im Innern eines Periodenparallelogramms gelegene Pole zu erstrecken ist und die Summe der Residuen gleich Null ist.

Die Analogie mit rationalen und trigonometrischen Funktionen kommt in dieser Partialbruchzerlegung klar zum Ausdruck. So wie jede rationale Funktion sich als Summe von Ausdrücken von der Form:

$$\frac{1}{u-a}, \frac{1}{(u-a)^2}, \dots, \frac{1}{(u-a)^\alpha},$$

zerlegen läßt, wie eine trigonometrische Funktion in eine Summe von cotangenten zerlegt wird, so läßt sich jede elliptische Funktion als Summe von Ausdrücken von der Form:

$$Z(u-a), Z'(u-a), \dots, Z^{(\alpha-1)}(u-a),$$

darstellen. Umgekehrt ist jede Funktion von der Form (1) oder (2) eine elliptische Funktion, wenn die Summe der Residuen gleich Null ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß wir für die höheren Derivierten auch die p -Funktion mit ihren Ableitungen einführen können. Dann erhalten wir als dritte Art der Partialbruchzerlegung:

$$(3) \quad f(u) = D_0 + \sum \left[A\zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{2!} p'(u-a) - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{(\alpha-2)} \frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} p^{(\alpha-2)}(u-a) \right].$$

Aus den vorstehenden Formeln (1), (2) und (3) sehen wir, daß man zur Zerlegung einer elliptischen Funktion in Partialbrüche die Pole kennen muß. Kennt man diese, so sind die zugehörigen Hauptteile zu bestimmen, was sich im allgemeinen mit der Taylorschen Reihenentwicklung ausführen läßt. Ist z. B. $u=a$ ein Pol von der Ordnung α , also das Produkt:

$$\psi(u) = (u-a)^\alpha f(u)$$

regulär und für $u=a$ von 0 verschieden, so lautet die zu $u=a$ gehörige Reihenentwicklung:

$$\psi(u) = A_{\alpha-1} + A_{\alpha-2}(u-a) + A_{\alpha-3}(u-a)^2 + \dots \\ \dots + A(u-a)^{\alpha-1} + (u-a)^\alpha g(u),$$

wo $g(u)$ eine in $u-a$ ganze Reihe ist.

Setzen wir diese Entwicklung $= (u-a)^\alpha f(u)$, so ergibt die Division durch $(u-a)^\alpha$ die Reihe:

$$f(u) = \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-2}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A}{u-a} + g(u),$$

aus der der gesuchte Hauptteil ersichtlich ist. Diese Rechnung ist für jeden Pol durchzuführen, jeder Pol kann durch einen homologen ersetzt

werden. Die Schwierigkeit liegt offenbar in der Auffindung der Pole, entsprechend liegen die Verhältnisse bei der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen, wo die Wurzeln der Nenner gefunden werden müssen.

2. Partialbruchzerlegung der p -Funktion.

Wir wollen nunmehr die Zerlegung an einer einfachen elliptischen Funktion durchführen. Nun gibt es, wie bereits gezeigt, wegen des Residuensatzes keine doppeltperiodische Funktion, die nur in einem Punkte des Periodenparallelogramms unstetig wird; daher muß eine doppeltperiodische Funktion von möglichst einfacher Ordnung entweder in zwei Punkten des Periodenparallelogramms ∞^1 oder an einem ∞^2 werden. Von diesen beiden ist die letztere die einfachere, da ihre Derivierte ∞^3 wird, während bei der ersten Funktion die Derivierte von der vierten Ordnung wird, da jeder der beiden Pole ∞^2 ergibt. Eine solche möglichst einfache elliptische Funktion ist nun die p -Funktion, ihre beiden Pole fallen in $u = 0$ zusammen. Das zu $u = 0$ gehörende Funktionenelement ist

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{u-w^2} - \frac{1}{w^2} \right] = \frac{1}{u^2} + G(u).$$

Da $G(u)$ eine grade Funktion, die für $u = 0$ regulär ist, so muß $G(u)$ nach graden, positiven Potenzen fortschreiten; entwickeln wir $G(u)$ für $u = 0$ in eine Potenzreihe (vgl. Abschn. II 4), so ergibt sich:

$$G(u) = \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \dots$$

Wir haben sofort die beiden Weierstraßschen Invarianten g_2, g_3 eingeführt, ihre Werte ergeben sich, wenn man in

$$G(u) = \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

jeden Term nach steigenden Potenzen von u entwickelt:

$$\frac{1}{(u-w)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \frac{5u^4}{w^6} + \dots,$$

$$\text{nämlich:} \quad \frac{g_2}{20} = 3 \sum' \frac{1}{w^4}, \quad \frac{g_3}{28} = 5 \sum' \frac{1}{w^6}.$$

In der Nähe von $u = 0$ lautet die Reihenentwicklung:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \dots,$$

$$\text{folglich ist} \quad p^2(u) = \frac{1}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{g_3}{14} u^2 + \dots$$

Die Funktion $p^2(u)$ hat in dem den Punkt $u=0$ umgebenden Periodenparallelogramm nur den Pol vierfacher Ordnung $u=0$ mit dem Hauptteil $\frac{1}{u^4}$; in der Partialbruchzerlegung (3) ist also nur ein Pol $u=0$ von der Ordnung $\alpha=4$ anzunehmen, es ist $A=A_1=A_2=0$, $A_3=1$. Folglich lautet in diesem Falle Formel (3) einfach:

$$p^2(u) = C + \frac{p''(u)}{6}.$$

Nachträglich läßt sich diese Formel leicht verifizieren, denn aus:

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \dots$$

$$p''(u) = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{3g_3}{7}u^2 + \dots$$

folgt, daß die Differenz $p^2(u) - \frac{1}{6}p''(u)$ in $u=0$ regulär, also eine Konstante ist. Wie immer, bestimmen wir auch hier die Konstante durch Annahme eines Spezialwertes, wir setzen in den Reihen $u=0$ und finden aus $p^2(u) - \frac{1}{6}p''(u)$ den Wert $C = \frac{g_2}{12}$, also:

$$(4) \quad p^2(u) = \frac{1}{6}p''(u) + \frac{g_2}{12}.$$

Wir multiplizieren mit $p'(u)$ und integrieren nach u :

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) + C.$$

Ersetzen wir wieder $p(u)$ und $p'(u)$ durch die zugehörigen Reihen, so verschwinden die Glieder mit $\frac{1}{u}$, $u=0$ ergibt $C = -g_3$. So erhalten wir:

$$(5) \quad p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3,$$

also eine algebraische Gleichung zwischen einer elliptischen Funktion und ihrer Derivierten.

Mit dieser Formel sind wir an der Stelle angelangt, wo der im I. Abschnitt bereits dargelegte Zusammenhang mit den elliptischen Integralen ersichtlich wird. Hatten wir dort direkt die elliptischen Funktionen als Umkehrungen der elliptischen Integrale definiert, so werden wir hier bei unserem synthetischen Gang umgekehrt von den Funktionen auf die Integrale geführt, denn setzen wir $z=p(u)$, so ist

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2z - g_3; \quad \frac{du}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}.$$

Wie die Ableitung von $\arcsin z$ ist auch die Ableitung von u in z algebraisch. Für $u = 0$ ist $z = \infty$, folglich ist

$$u = \pm \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

Mit dieser Formel können wir u als Funktion von z berechnen. Rechter Hand steht ein auf die Weierstraßsche Normalform reduziertes elliptisches Integral; als Umkehrung dieses Integrales ergibt sich die p -Funktion:

$$z = p(u).$$

3. Reihenentwicklung der p -, ζ - und σ -Funktion.

In der Reihenentwicklung:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \dots$$

sind die beiden ersten Koeffizienten $c_2 = \frac{g_2}{2^2 \cdot 5}$, $c_3 = \frac{g_3}{2^2 \cdot 7}$, für die weiteren Koeffizienten lautet die Rekursionsformel¹⁾:

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum_{\nu} c_\nu c_{\lambda-\nu} \quad (\nu = 2, 3, \dots, \lambda-2),$$

aus der sich ergibt:

$$c_4 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}, \quad c_5 = \frac{3g_2 \cdot g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \text{ usw.}$$

Da $\zeta(u) = -\int p(u) du$, so folgt:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{3} c_2 u^3 - \frac{1}{5} c_3 u^5 + \dots$$

Da ζ eine ungerade Funktion, so fällt die Integrationskonstante weg.

Aus $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u)$ folgt durch Integration und Übergang zu den Numeri:

$$\sigma(u) = u \cdot e^{-\frac{c_2 u^4}{12} - \frac{c_3 u^6}{30} + \dots} = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots$$

In allen diesen Reihenentwicklungen sind die höheren Koeffizienten ganze Polynome von g_2 und g_3 . Am bequemsten für die Rechnung ist die wie die sinus-Reihe für die ganze komplexe Ebene konvergierende σ -Reihe, aus ihr lassen sich die höheren Ableitungen und damit auch:

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \text{ und } p(u) = -\zeta'(u) = \frac{\sigma'^2(u) - \sigma(u) \sigma''(u)}{\sigma^2(u)}$$

gut berechnen.

¹⁾ Vgl. H. A. Schwarz, Formen und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Berlin, 1893.

Hat man also in einer Pendelaufgabe die Höhe als Funktion der Zeit zu berechnen, so ist das auftretende elliptische Integral zunächst in die Weierstraßsche Form zu transformieren, dann sind hieraus g_2 und g_3 zu entnehmen und für den gegebenen Wert von u aus obigen Reihen $\sigma(u)$ und die Ableitungen, hieraus $\zeta(u)$ und schließlich $p(u)$ zu berechnen. Dabei können die Konstanten g_2 und g_3 beliebige Werte haben. Da man aus den Größen g_2 und g_3 die Perioden 2ω , $2\omega'$ berechnen kann, so pflegt man auch zu schreiben:

$$\sigma(u) = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(u; g_2, g_3)$$

$$p(u) = p(u \mid \omega, \omega') = p(u; g_2, g_3).$$

Im Degenerationsfall, wenn eine der Perioden z. B. $\omega' = \infty$ wird, ist

$$g_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sum' \frac{1}{2^4 m^4 \omega^4}, \quad g_3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sum' \frac{1}{2^6 m^6 \omega^6},$$

und da nun (vgl. Abschn. II, Nr. 4):

$$\sum' \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{3^2 \cdot 5}, \quad \sum' \frac{1}{m^6} = \frac{2\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7},$$

so ergibt sich: $g_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^2}{2\omega^2} \right)^2$, $g_3 = \frac{1}{3^3} \left(\frac{\pi^2}{2\omega^2} \right)^3$, also $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$.

In diesem Falle hat $4z^3 - g_2 z - g_3$ eine doppelte Wurzel, der Ausdruck:

$$\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

führt auf cyclometrische Funktionen und wir gelangen wieder zu denselben Resultaten, wie in Abschnitt III, Nr. 4. Sind schließlich beide Perioden ∞ , so wird $g_2 = g_3 = 0$ und das Integral wird einfach:

$$u = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3}}, \quad \text{also } z = \frac{1}{u^2}.$$