

Bei beiden Gruppen von Funktionen ist das Element der Partialbruchzerlegung der Differentialquotient des Logarithmus des Linearfaktors:

$$\frac{1}{u-a} = \frac{d \log (u-a)}{du}, \quad \cot (u-a) = \frac{d \log \sin (u-a)}{du}.$$

Dasselbe gilt für elliptische Funktionen; auch hier bilden Faktoren- und Partialbruchzerlegung das Fundament der ganzen Theorie.

Auch die am Schluß von Nr. 3 genannten Sätze lassen sich auf trigonometrische und elliptische Funktionen übertragen; für erstere lauten sie:

Sind $f(u)$ und $f_1(u)$ rationale Funktionen von $\cot u$, so besteht zwischen diesen allgemeinen trigonometrischen Funktionen $x = f(u)$, $y = f_1(u)$ mit derselben Periode π eine algebraische Gleichung:

$$\Phi(x, y) = 0,$$

die eine Unikursalkurve definiert.

Ferner: Eine trigonometrische Funktion besitzt ein algebraisches Additionstheorem; $f(u+v)$ ist eine algebraische Funktion von $f(u)$ und $f(v)$. Für diesen Satz bilden die Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ eine bekannte Bestätigung.

Dritter Abschnitt.

Die elliptischen Funktionen.

1. Einleitende Sätze.¹⁾

Unter einer elliptischen Funktion verstehen wir eine doppeltperiodische Funktion, die im Endlichen bis auf Pole regulär ist. Als doppeltperiodische Funktion genügt sie den Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(u + 2\omega) &= f(u), \\ f(u + 2\omega') &= f(u), \end{aligned}$$

die sich zusammenfassen lassen in:

$$f(u + 2m\omega + 2m'\omega') = f(u),$$

wo m und m' ganze positive oder negative Zahlen einschließlich Null bedeuten. ω und ω' sind zwei unabhängige Perioden, d. h. Perioden, zwischen denen keine lineare homogene Relation besteht. Dann muß

¹⁾ H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, p. 32 ff. Leipzig, 1899.

der Quotient $\frac{\omega'}{\omega}$ imaginär sein,¹⁾ andernfalls reduziert sich die Funktion auf eine einfache periodische Funktion oder eine Konstante. Die reelle Periode sei 2ω , die imaginäre $2\omega'$. Die Derivierte einer elliptischen Funktion ist wieder eine elliptische Funktion. Die beiden Perioden lassen sich geometrisch veranschaulichen. Fixieren wir innerhalb der komplexen Ebene einen Punkt u_0 , so können wir von ihm aus unter einem spitzen Winkel zwei Strecken 2ω , $2\omega'$ gezogen denken. Dann können wir durch Parallele zu u_0 , 2ω , $2\omega'$ einen 4. Eckpunkt $u_0 + 2\omega + 2\omega'$ konstruieren, die vier Punkte bilden die Eckpunkte des fundamentalen „Periodenparallelogramms“. Auf diese Weise fortfahrend kann man jeden Punkt $u_0 + 2m\omega + 2m'\omega'$ konstruieren und die ganze komplexe Ebene mit Parallelogrammen lückenlos überdecken. Die Knotenpunkte dieses Netzes von Periodenparallelogrammen sind die Punkte, die die Größen $2m\omega + 2m'\omega'$ geometrisch darstellen. Zwei Punkte verschiedener Periodenparallelogramme, die zusammenfallen, wenn man die Parallelogramme durch Verschiebung zur Deckung bringt, heißen „äquivalent“ oder „kongruent modulis Perioden“, geschrieben: $u_2 \equiv u_1 \pmod{2\omega, 2\omega'}$. Zur Untersuchung der Funktion $f(u)$ genügt die Betrachtung des fundamentalen Periodenparallelogrammes, da sich in ihm zu jedem Punkt der Ebene ein äquivalenter finden läßt. Dementsprechend verstehen wir unter der Ordnungszahl einer doppelperiodischen Funktion die Anzahl der Pole, die sie im fundamentalen Periodenparallelogramm hat, ein m -facher Pol ist dabei $= m$ einfachen Polen zu rechnen. Offenbar muß jede elliptische Funktion im fundamentalen Periodenparallelogramm mindestens einmal unendlich werden, da sie sich sonst überall regulär verhielte, also eine Konstante wäre. Andererseits muß die Anzahl der Pole im Periodenparallelogramm begrenzt, endlich sein, da sonst im Widerspruch zur Definition an irgend einer Stelle ein wesentlich singulärer Punkt wäre. Nun läßt sich leicht zeigen, daß mindestens zwei einfache Pole bzw. ein zweifacher Pol vorhanden sein muß. Denn bildet man $\int f(u) du$ und integriert um das Periodenparallelogramm a , $a + 2\omega$, $a + 2\omega'$, $a + 2\omega + 2\omega'$ in positivem Sinne herum — wobei der Punkt a so gewählt ist, daß kein Pol auf die Begrenzung fällt —, so zerfällt $\int f(u) du$ in:

$$\int_a^{a+2\omega'} f(u) du + \int_{a+2\omega'}^{a+2\omega+2\omega'} f(u) du + \int_{a+2\omega+2\omega'}^{a+2\omega} f(u) du + \int_{a+2\omega}^a f(u) du.$$

¹⁾ Zum Beweise vgl. L. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen I. Leipzig, 1874. p. 328 f. Für ein eingehenderes Studium der elliptischen Funktionen sei auf dieses treffliche Werk hingewiesen.

Hier ist das erste Integral entgegengesetzt gleich dem dritten, das zweite entgegengesetzt gleich dem vierten f. $\oint f(u) du = 0$. Da nun nach einem Fundamentalsatz der Funktionentheorie das längs einer geschlossenen Kurve genommene Integral einer komplexen Funktion gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen aller im Innern dieser Kurve gelegenen Pole ist, so folgt: Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion in den sämtlichen Polen, die im Innern eines Parallelogrammes mit den Ecken $u_0, u_0 + 2\omega, u_0 + 2\omega', u_0 + 2\omega + 2\omega'$ liegen, ist gleich Null. Dementsprechend kann eine elliptische Funktion im Periodenparallelogramm keinen einfachen Pol haben; es müssen, damit diese Bedingung erfüllt werden kann, mindestens zwei einfache Pole oder ein zweifacher vorhanden sein. Es gibt keine elliptische Funktion erster Ordnung.

Wenden wir den Residuensatz auf die elliptische Funktion $\frac{f'(u)}{f(u)}$ an, deren Residuen gleich der Ordnungszahl (vgl. Abschn. II, Nr. 1) von $f(u)$ sind, so muß für $f(u)$ die Summe der Ordnungszahlen im Periodenparallelogramm gleich Null sein, d. h. jede elliptische Funktion hat im Periodenparallelogramm ebensoviele Nullpunkte wie Pole, oder jede elliptische Funktion n -Ordnung hat im Periodenparallelogramm grade n Nullpunkte. Eine elliptische Funktion n -Ordnung nimmt im Periodenparallelogramm jeden vorgeschriebenen Wert n mal an. Die Sätze von der Summe der Residuen sowie von der Anzahl der Pole und Nullstellen gelten bei rationalen Funktionen für die ganze komplexe Ebene.

Wir könnten uns nun die Aufgabe stellen, auf Grund dieser allgemeinen Sätze eine elliptische Funktion mit vorgeschriebenen Eigenschaften zu konstruieren; da aber der Zweck dieser Abhandlung lediglich die Betonung der engen Beziehungen zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen ist, so wollen wir einen andern Weg einschlagen, der dem bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen angewandten Verfahren entspricht. Hierbei müssen wir die vorstehend genannten Sätze aus der Lehre der elliptischen Funktionen, die für unsere Zwecke ausreichen, als bekannt voraussetzen.

2. Die σ -, ζ - und p -Funktion.

Die sinus-Funktion wurde (1) dargestellt durch das unendliche Produkt:

$$\sin u = u \cdot \prod' \left(1 - \frac{u}{m\pi} \right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

aus dem die Nullstellen ohne weiteres ersichtlich sind. Dementsprechend bilden wir eine wie der sinus im Endlichen überall reguläre Funktion, deren Nullstellen an den Punkten $2m\omega + 2m'\omega'$ liegen sollen. Wir

setzen $2m\omega + 2m'\omega' = w$ und erhalten so als Analogon zum sinus die Weierstraßsche sigma-Funktion:

$$(4) \quad \sigma(u) = u \prod' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}} \right\}.$$

Dieses unendliche Produkt ist über alle Werte $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ und $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ zu erstrecken, außer $m = m' = 0$. Die in der geschweiften Klammer vereinigten Größen dürfen nicht auseinander gerissen werden, zur Konvergenz ist hier ein Exponentialfaktor 2. Grades nötig. Die Nullstellen der σ -Funktion liegen in $u = 0$ und $u = w$; für endliche Werte von u sind keine Pole vorhanden. Die σ -Funktion ist wie der sinus ungerade, d. h.:

$$\sigma(-u) = -\sigma(u),$$

denn da m und m' alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so kann man, ohne den Wert des Produktes zu ändern, in diesem Produkt das Zeichen ändern, man erhält:

$$\sigma(u) = u \cdot \prod' \left(1 + \frac{u}{w} \right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}},$$

ersetzt man u durch $-u$ und vergleicht mit (4), so folgt die Behauptung.

$$\text{Der Formel } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \text{ entspricht } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1.$$

Bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen leiteten wir durch logarithmische Differentiation aus dem sinus die cotangente her; hier gewinnen wir so die dem cot entsprechende Weierstraßsche Zetafunktion:

$$(5) \quad \zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du} = \frac{1}{u} + \sum' \left[\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right].$$

Die ζ -Funktion hat an den Stellen $u = 0$ und $u = 2m\omega + 2m'\omega'$ einfache Pole mit dem Residuum $+1$. Entsprechend hat die Funktion $\zeta(u-a)$, wo a eine Konstante ist, einfache Pole an den Stellen $u = a$ und $u = a + 2m\omega + 2m'\omega'$. Wie cot ist ζ als logarithmische Derivierte einer ungeraden Funktion ungrade.

Schließlich gewinnen wir durch nochmalige Differentiation und Zeichenwechsel die Weierstraßsche p -Funktion:

$$(6) \quad p(u) = -\frac{d\zeta(u)}{du} = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

$p(u)$ entspricht der trigonometrischen Funktion $\frac{1}{\sin^2 u}$. Die p -Funktion ist grade, denn zu jeder Größe w findet sich unter ihnen auch die entgegengesetzte, und die zu zwei entgegengesetzten Werten von w

gehörenden Glieder vertauschen sich einfach, wenn man u durch $-u$ ersetzt. Die p -Funktion hat einen doppelten Pol an den Stellen $u=0$ und den kongruenten Punkten $2m\omega + 2m'\omega'$, entsprechend hat die Funktion $p(u-a)$, wo a eine Konstante, die Punkte a und $a + 2m\omega + 2m'\omega'$ als Doppelpole.

Wir stellen, um den Zusammenhang klar zu zeigen, die einander entsprechenden Formeln nebeneinander:

$$\begin{aligned}\sin u &= u \prod' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}}; & \sigma(u) &= u \prod' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}}. \\ \cot u &= \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right); & \zeta(u) &= \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right). \\ \frac{1}{\sin^2 u} &= \frac{1}{u^2} + \sum' \frac{1}{(u - m\pi)^2}; & p(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum' \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right). \\ \cot u &= \frac{d \log \sin u}{du}; & \zeta(u) &= \frac{d \log \sigma(u)}{du}. \\ \frac{1}{\sin^2 u} &= -\frac{d \cot u}{du} = -\frac{d^2 \log \sin u}{du^2}; & p(u) &= -\frac{d \zeta(u)}{du} = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}.\end{aligned}$$

3. Periodizitätsbetrachtungen.

Von den soeben konstruierten Funktionen ist die p -Funktion doppelperiodisch; sie stellt die einfachste elliptische Funktion dar.

Zum Beweise betrachten wir die Differenz:

$$\begin{aligned}p(u + 2\omega) - p(u) &= \frac{1}{(u + 2\omega)^2} - \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u + 2\omega - w)^2} - \frac{1}{(u - w)^2} \right] \\ &= \sum' \left\{ \frac{1}{[u - 2(m-1)\omega - 2m'\omega']^2} - \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^2} \right\}.\end{aligned}$$

Betrachten wir die letzte über alle Werte von m und m' zu erstreckende Summe, so sehen wir, daß die demselben Wert von m' entsprechenden Terme sich paarweise aufheben, die Summe wird Null und es ist

$$\underline{p(u + 2\omega) = p(u)}.$$

Ebenso ergibt sich die zweite imaginäre Periode:

$$\underline{p(u + 2\omega') = p(u)}.$$

Da nun $p(u) = -\frac{d\zeta(u)}{du}$, so ergibt die Integration:

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta,$$

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'.$$

Ersetzen wir u durch $-\omega$ bzw. $-\omega'$ und beachten, daß die ζ -Funktion ungrade ist, so ergeben sich für die Integrationskonstanten η, η' die Werte:

$$\begin{aligned}\eta &= \zeta(\omega), \\ \eta' &= \zeta(\omega').\end{aligned}$$

Integriert man von neuem und beachtet, daß

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\log \sigma(u + 2\omega) &= \log \sigma(u) + 2\eta u + \log c, \\ \log \sigma(u + 2\omega') &= \log \sigma(u) + 2\eta' u + \log c',\end{aligned}$$

wo $\log c$ und $\log c'$ wieder Integrationskonstante sind.

Die letzten Formeln lassen sich auch schreiben:

$$\begin{aligned}\sigma(u + 2\omega) &= c e^{2\eta u} \sigma(u), \\ \sigma(u + 2\omega') &= c' e^{2\eta' u} \sigma(u).\end{aligned}$$

In der Theorie der elliptischen Funktionen sind neben den hier verwandten Weierstraßschen Bezeichnungen auch die von Jacobi eingeführten Funktionsbenennungen üblich.

Für die ζ -Funktion setzt Jacobi die gleichfalls ungrade Funktion $Z(u) = \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u$; auch sie spielt dieselbe Rolle wie $\frac{1}{u}$ bei den rationalen, $\cot u$ bei den trigonometrischen Funktionen. Der hinzugefügte Ausdruck $\frac{\eta}{\omega} u$ ist so gewählt, daß $Z(u)$ eine reelle Periode hat:

$$Z(u + 2\omega) = Z(u),$$

dagegen:
$$Z(u + 2\omega') = Z(u) - \frac{2}{\omega}(\eta\omega' - \eta'\omega) = Z(u) - \frac{2}{\omega} \delta.$$

Es wird also auf die Symmetrie zugunsten der Periodizität verzichtet. Aus der Entstehung der Funktion ist ersichtlich, daß Z und ζ dieselben polaren Unstetigkeiten und Hauptteile haben, also an den Punkten $u = 0$ und den kongruenten einfache Pole mit den Residuen $+1$.

Ferner ersetzt Jacobi die σ -Funktion, deren logarithmische Derivierte ζ ist, durch die gleichfalls ungrade Funktion $H(u)$, deren logarithmische Derivierte Z ist, also:

$$\frac{H'(u)}{H(u)} = Z(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\eta}{\omega} u.$$

Die Hetafunktion hat dieselben Nullstellen wie die σ -Funktion, sie genügt den Periodizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned}H(u + 2\omega) &= -H(u), \\ H(u + 2\omega') &= -e^{-\frac{2\delta}{\omega}(u + \omega')} H(u).\end{aligned}$$

Wenn auch die betrachteten Funktionen ζ , Z , σ , H keine elliptischen Funktionen sind, so spielen sie doch in der Lehre von den elliptischen Funktionen eine große Rolle. Wir brauchen sie im folgenden, um die beiden für unsere vergleichende Untersuchung wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Funktionen, Partialbruchzerlegung und Zerlegung in Linearfaktoren, wirklich ausführen zu können.

Vorher wollen wir die Degenerationsfälle der p -Funktion betrachten, die uns notwendigerweise auf trigonometrische und rationale Funktionen zurückführen.

4. Degenerationsfälle.

Als Degenerationsfälle der p -Funktion kommen die Fälle in Betracht, in denen die eine oder beide Perioden ∞ wird.

Es sei $\omega' = \infty$.

In der zu betrachtenden Reihe:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

wird w überall da unendlich, wo ω' auftritt, wenn m' von Null verschieden ist. Alle diese Terme werden Null und $p(u)$ reduziert sich auf die Funktion:

$$p(u, \omega' = \infty) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-2m\omega)^2} - \frac{1}{4m^2\omega^2} \right],$$

wo Σ' über alle positiven und negativen ganzzahligen Werte von m außer Null zu erstrecken ist. Nun ist (vgl. S. 13) die Summe der konvergenten Reihe: $\sum' \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{3}$, daraus folgt:

$$p(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{1}{u^2} + \sum' \frac{1}{(u-2m\omega)^2}.$$

Nun fanden wir oben (3):

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum' \frac{1}{(z-m\pi)^2},$$

mithin ist:

$$(7) \quad p(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}.$$

Durch Integration und Zeichenwechsel finden wir:

$$(8) \quad -\int p(u) du = \zeta(u, \omega' = \infty) = \frac{\pi^2}{12\omega^2} u + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega}.$$

Da ζ ungrade ist, fällt die Integrationskonstante weg. Integrieren

wir noch einmal und gehen von den Logarithmen zu den Numeri über, so folgt:

$$\sigma(u, \omega' = \infty) = c e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \cdot \sin \frac{\pi u}{2\omega},$$

wo c eine Integrationskonstante ist.

Da $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$, so ist $c \frac{\pi}{2\omega} = 1$, also:

$$(9) \quad \sigma(u, \omega' = \infty) = \frac{2\omega}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \cdot \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

Die Formeln (7), (8) und (9) zeigen: Die p -, ζ - und σ -Funktionen gehen in trigonometrische Funktionen über, wenn eine Periode ∞ wird.

Lassen wir schließlich auch die andere Periode ∞ werden, so reduziert sich die Reihe für $p(u)$ auf ein Glied:

$$p(u, \omega = \omega' = \infty) = u^2.$$

Hieraus folgt: $\zeta(u, \omega = \omega' = \infty) = \frac{1}{u}$ und $\sigma(u, \omega = \omega' = \infty) = u$.

d. h. wir gelangen zu einfachen rationalen Funktionen.

Damit ist aufs neue der enge Zusammenhang zwischen rationalen, trigonometrischen und elliptischen Funktionen bestätigt.

Vierter Abschnitt.

Die Partialbruchzerlegung und Reihenentwicklung der elliptischen Funktionen.

1. Zerlegung der ζ -Funktion.

Es sei $f(u)$ eine doppeltperiodische Funktion mit den im fundamentalen Periodenparallelogramm gelegenen Polen $a_1, a_2, \dots, a_n$. Zum Punkte a_i gehöre der Hauptteil:

$$g_i(u | a_i) = \frac{c_{-1}^{(i)}}{u - a_i} + \frac{c_{-2}^{(i)}}{(u - a_i)^2} + \dots + \frac{c_{-\mu}^{(i)}}{(u - a_i)^\mu}.$$

Die Funktion $\zeta(u)$ wird im Punkte $u=0$ unendlich wie $\frac{1}{u}$, ihre $(\mu-1)$.

Derivierte wird unendlich wie die Funktion $\frac{(-1)^{\mu-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\mu-1)}{u^\mu}$.

¹⁾ Vgl. Durège-Maurer, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Leipzig, 1906. p. 215 f.