

Erster Abschnitt.

Zur Einführung.

1. Beispiele für elliptische Integrale.

Die Lemniskate hat die Eigenschaft, daß die Entfernungen jedes Kurvenpunktes von zwei festen Punkten, deren Abstand $2a$ ist, das konstante Produkt a^2 beträgt; ihre Gleichung in den Polarkoordinaten ϱ, ψ hat die Form

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\psi.$$

Die Differentiation ergibt

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\psi} = -2a^2 \sin 2\psi,$$

$$\varrho^4 + \varrho^2 \frac{d\varrho^2}{d\psi^2} = 4a^4.$$

Nun ist das Bogendifferential $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2$, also

$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2} = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 \frac{\varrho^2 d\varrho^2}{4a^4 - \varrho^4}} = 2a^2 \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{4a^4 - \varrho^4}},$$

$$ds = 2a^2 \frac{d\varrho}{\varrho \frac{d\varrho}{d\psi}} = \frac{a \sqrt{2} \cdot d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}}.$$

Durch die Substitution $\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi$, $\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}$ wird

$$ds = a \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Wählen wir die Strecke a zur Längeneinheit, so liefert die Integration für die Länge des bei $\psi=0$ beginnenden Lemniskatenbogens den Wert:

$$(1) \quad s = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Die Differentialgleichung für die Bewegung des mathematischen Pendels, d. h. eines unter der Einwirkung der Schwere stehenden materiellen Punktes, der gezwungen ist, sich auf einem Kreise zu bewegen, lautet:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \psi.$$

Hier bedeutet l die Pendellänge, ψ die Abweichung des Pendels von der Vertikalen zur Zeit t , g die Gravitationskonstante.

Nach Multiplikation mit $2 \frac{d\psi}{dt}$ ergibt die Integration:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \psi + C.$$

Für $\frac{d\psi}{dt} = 0$ erhält ψ einen Grenzwert α , dann ist die Integrationskonstante:

$$C = -\frac{2g}{l} \cos \alpha,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \psi - \cos \alpha),$$

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}},$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}$ geht durch die Substitution

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \varphi$$

in die Form $\sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \varphi$ über, so ergibt sich

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2} d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi}}.$$

Aus der Integration folgt dann:

$$(2) \quad t = C \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \text{ wo } k = \sin \frac{1}{2} \alpha < 1.$$

In den beiden vorstehenden Beispielen werden wir auf das Integral $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ geführt; wir stellen es an die Spitze unserer Untersuchungen und geben ihm die Form

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi},$$

indem wir für den Nenner das Legendresche Symbol $\mathcal{A}\varphi$ einführen. Da die Rektifikation der Ellipse auf ein ähnliches Integral führt, so bezeichnete

Legendre dasselbe als elliptische Funktion; heute nennen wir solche Integrale elliptische Integrale. Der Name elliptisch ist beibehalten, er ist rein konventioneller Art; die „Ellipse“ ist weder geometrisch noch analytisch für „elliptische“ Funktionen und Integrale charakteristisch.

2. Definition der elliptischen Integrale.

Das vorstehende Integral kann ersetzt werden durch die sogenannte Normalform des elliptischen Integrals 1. Gattung:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

mit dem es durch die Substitution

$$x = \sin \varphi$$

verbunden ist.

Jacobi und Abel, die beiden genialen Schöpfer der Theorie der elliptischen Funktionen, nehmen dies Integral zum Ausgangspunkt. Die analytisch ausschlaggebende Eigenschaft dieses Integrals besteht darin, daß der Wurzelradikand vom 4. Grade ist. Es zeigte sich nämlich bald nach Entdeckung der Integralrechnung, daß die von allen Seiten bearbeitete Aufgabe, vorgegebene Integrale auszuwerten, d. h. auf bekannte Funktionen zurückzuführen, zwar für rationale algebraische Ausdrücke gelang, und daß man auch irrationale Quadratwurzeln aus Ausdrücken 1. und 2. Grades durch Integration auf algebraische, cyclometrische und logarithmische Funktionen zurückführen konnte, daß aber die angewandten Methoden versagten, wenn die Größen unter dem Wurzelzeichen den 2. Grad überstiegen. Man wurde also auf neue Funktionen geführt.

Elliptische Integrale sind die Integrale solcher algebraischer irrationaler Funktionen, die eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck 3. oder 4. Grades enthalten. Da der erste Fall ein Spezialfall des zweiten ist, so lautet die allgemeinste Form eines elliptischen Integrals:

$$\int f(x, \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}) dx,$$

wo f eine algebraische, rationale Funktion ist.

Legendre zeigte, daß man jedes elliptische Integral auf eine oder mehrere von drei bestimmten einfachen Formen reduzieren kann, von denen wir das Integral der ersten Gattung bereits kennen:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Man nennt k den Modul, φ die Amplitude des elliptischen Integrals u und setzt $u = F(\varphi, k)$. Wir betrachten zunächst die Degene-

rationsfälle, in denen der Modul k , der stets, wie Legendre bewies, ein echter Bruch ist, die Grenzwerte 0 und 1 annimmt:

$$k = 0. \quad u_0 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$k = 1. \quad u_1 = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Die vorstehenden Spezialwerte geben uns einen Fingerzeig für den analytischen Charakter der elliptischen Integrale, diese müssen Verallgemeinerungen der cyklometrischen und logarithmischen Funktionen sein. Nun wissen wir aber, daß in der gesamten Analysis die Umkehrungen dieser Funktionen, die trigonometrischen und Exponentialfunktionen, bei weitem wichtiger sind; daher werden auch die Umkehrungen der elliptischen Integrale, die trigonometrische und Exponentialfunktionen als Spezialfälle umfassen, unser Interesse in erster Linie in Anspruch nehmen.

Auch die Physik führt zu dieser Art der Fragestellung. Bei unserer eingangs behandelten Pendelaufgabe erhielten wir schließlich, wie bei allen derartigen Aufgaben aus der Mechanik, für die Zeit ein Integral, das die Ortskoordinaten des sich bewegenden Punktes enthält, während uns doch in praktischen Fällen die Ortskoordinaten als Funktion der Zeit weit mehr interessieren.

Die Umkehrungen elliptischer Integrale heißen elliptische Funktionen; zwischen elliptischen Funktionen und elliptischen Integralen muß ein ähnlicher Zusammenhang bestehen wie zwischen trigonometrischen bzw. Exponentialfunktionen einerseits und cyklometrischen bzw. logarithmischen Funktionen andererseits. Wir wollen dies im folgenden näher ausführen; dabei müssen wir gemäß dem Titel dieser Abhandlung stets den Zusammenhang zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen im Auge behalten und aus den Analogieen in das Wesen der letzteren einzudringen suchen.

3. Definition der elliptischen Funktionen.¹⁾

Logarithmen und cyklometrische Funktionen sind Integrale algebraischer Funktionen, z. B.:

$$u_1 = \int_0^x \frac{dx}{x} = \log x, \quad u_2 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Betrachten wir die obere Grenze als variabel und die untere so gewählt, daß die Integrationskonstante gleich Null ist, so sind vorstehende

¹⁾ Vgl. H. Durège: Theorie der elliptischen Funktionen. 4. Aufl. Leipzig, 1887, p. 3 ff.

Integrale und damit auch die durch sie dargestellten Funktionen Funktionen ihrer oberen Grenze. Betrachten wir umgekehrt die obere Grenze als Funktion des Integrals, so werden wir auf Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen geführt:

$$u_1 = \log x, \text{ folglich } x = e^{u_1}$$

und ebenso: $u_2 = \arcsin x$, folglich $x = \sin u_2$,

also muß die obere Grenze, als Funktion des Integrals betrachtet, eine trigonometrische oder Exponentialfunktion sein.

Wenden wir nach Abel dieselbe Betrachtung auf das elliptische Integral

$$u = \int_0^q \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, k)$$

an, so haben wir die Amplitude φ als Funktion von u anzusehen, wir schreiben daher die neue Funktion $\varphi = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am} u$. Gehen wir nun auf das Integral zurück

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

bei dem man immer bewirken kann, daß die obere Grenze des Integrals die Werte -1 und $+1$ nicht überschreitet (Legendre), so kann man, wie wir schon sahen, die Variable x einem Sinus gleichsetzen:

$$x = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u.$$

x ist eine elliptische Funktion, elliptische Funktionen sind trigonometrische Funktionen von Amplitude u , u ist das Argument. Offenbar kann man noch andere elliptische Funktionen einführen; wir betrachten im folgenden $x = \sin \operatorname{am} u$, $x = \cos \operatorname{am} u$ und eine neue dem Cosinus verwandte Funktion $x = \Delta \operatorname{am} u$ (sprich: delta amplitude u), wo $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, so daß wir folgende drei elliptischen Stammfunktionen haben:

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u \\ (3) \quad \sqrt{1 - x^2} &= \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u \\ \sqrt{1 - k^2 x^2} &= \Delta \varphi = \Delta \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

Neben dem Modul k führen wir den mit ihm durch die Gleichung $k^2 + k'^2 = 1$ verbundenen „komplementären“ Modul k' ein. Dann erhalten wir sofort die der trigonometrischen Gleichung: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ entsprechenden Beziehungen:

$$\Delta^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad \Delta^2 \varphi - k^2 \cos^2 \varphi = k'^2.$$

Für $\varphi = 0$ werden $\cos \varphi$ und $\Delta \varphi = 1$, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\cos \varphi = 0$, $\Delta \varphi = k'$. Ferner lassen sich sofort folgende Beziehungen finden: $\operatorname{am} 0 = 0$, $\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzen wir nach Jacobi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = K, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} = K'.$$

Diese nur vom Modul k (k') abhängige Größe K (K'), deren Größe sich für jeden Wert von k (k') berechnen läßt, nennen wir nach Durège das vollständige elliptische Integral; es ist nach der Definition:

$$\text{am}(K, k) = \text{am}(K', k') = \frac{\pi}{2}.$$

Der Übergang zu den elliptischen Funktionen liefert die Formeln:
 $\sin \text{am } 0 = 0, \quad \sin \text{am}(-u) = -\sin \text{am } u, \quad \sin \text{am } K = \sin \text{am } K' = 1,$
 $\cos \text{am } 0 = 1, \quad \cos \text{am}(-u) = \cos \text{am } u, \quad \cos \text{am } K = \cos \text{am } K' = 0,$
 $\mathcal{A} \text{am } 0 = 1, \quad \mathcal{A} \text{am}(-u) = -\mathcal{A} \text{am } u, \quad \mathcal{A} \text{am } K = k', \quad \mathcal{A} \text{am } K' = k.$

$$\text{Aus } u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi} \text{ f. } \frac{d\varphi}{du} = \mathcal{A}\varphi; \quad \frac{d \text{am } u}{du} = \mathcal{A} \text{am } u$$

und den bekannten Differentiationsgesetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \text{am } u}{du} &= \cos \text{am } u \mathcal{A} \text{am } u \\ (4) \quad \frac{d \cos \text{am } u}{du} &= -\sin \text{am } u \mathcal{A} \text{am } u \\ \frac{d \mathcal{A} \text{am } u}{du} &= -k^2 \sin \text{am } u \cos \text{am } u, \end{aligned}$$

d. h. die Differentialquotienten elliptischer Funktionen sind wieder elliptische Funktionen.

4. Degenerationsfälle.

Da die elliptischen Integrale für $k = 1$ und $k = 0$ in Logarithmen und cyclometrischen Funktionen übergehen, so müssen auch die elliptischen Funktionen für diese Spezialwerte des Moduls in trigonometrische und Exponentialfunktionen ausarten:

$$\begin{aligned} k = 0. \quad & \sin \text{am}(u, 0) = \sin u \\ & u = \int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi; \quad \varphi = \text{am}(u, 0) = u; \text{ f. } \cos \text{am}(u, 0) = \cos u \\ & \mathcal{A} \text{am}(u, 0) = 1. \\ k = 1. \quad & u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Die Integration geschieht mit Hilfe der Formel:

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \log \frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x} + C.$$

$u = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$. Die Integrationskonstante ist 0, da die untere Grenze und $\log 1 = 0$ sind, f.

$$e^{2u} = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}};$$

also: $\sin \operatorname{am} (u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$

und hieraus ergibt sich:

$$\cos \operatorname{am} (u, 1) = \mathcal{A} \operatorname{am} (u, 1) = \frac{2}{e^u + e^{-u}}.$$

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wollen wir auch für den Modul 1 die elliptischen Funktionen in trigonometrische überführen, so werden wir auf elliptische Funktionen mit imaginären Argumenten geführt. Hier liegen die Verhältnisse anders als bei trigonometrischen Funktionen; diese gehen für imaginäre Argumente ineinander über.

Nehmen wir in

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi}$$

φ imaginär an und setzen

$$\sin \varphi = i \operatorname{tg} \psi,$$

so ist

$$\cos \varphi = \frac{1}{\cos \psi}, \quad \mathcal{A}\varphi = \frac{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi}}{\cos \psi} = \frac{\mathcal{A}(\psi, k')}{\cos \psi}, \quad d\varphi = i \frac{d\psi}{\cos \psi},$$

also:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi} = i \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\mathcal{A}(\psi, k')} = iu,$$

$$\psi = \operatorname{am} (u, k'); \quad \varphi = \operatorname{am} (iu).$$

Führen wir diese Werte in die Ausdrücke für $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\mathcal{A}\varphi$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am} iu &= i \operatorname{tg} \operatorname{am} (u, k') \\ \cos \operatorname{am} iu &= \frac{1}{\cos \operatorname{am} (u, k')} \\ \mathcal{A} \operatorname{am} iu &= \frac{\mathcal{A} \operatorname{am} (u, k')}{\cos \operatorname{am} (u, k')} \end{aligned} \quad (5)$$

d. h. die elliptischen Funktionen für imaginäre Argumente verwandeln sich in elliptische Funktionen mit dem komplementären Modul.

Setzen wir in (5) $k' = 1$, so gehen, da dann $k = 0$, die Amplituden in ihre Argumente über und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am} (v, 1) &= i \operatorname{tg} iv \\ \cos \operatorname{am} (v, 1) &= \frac{1}{\cos iv} \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (v, 1) &= \frac{1}{\cos iv} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Formeln (6) bilden das gesuchte Resultat: die Degeneration der elliptischen Funktionen in trigonometrische Funktionen für $k = 1$.

5. Die Periodizität der elliptischen Funktionen.

Aus der Elementarmathematik ist bekannt, daß die trigonometrischen Funktionen die reelle Periode 2π , die Exponentialfunktionen die imaginäre Periode $2\pi i$ besitzen. Da beide Klassen von Funktionen als Spezialfälle in den elliptischen Funktionen enthalten sind, so dürfen wir von vornherein vermuten, daß elliptische Funktionen zwei Perioden, eine reelle und eine imaginäre, haben.

Zum Beweise gehen wir aus von unserm Integral:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{A(\varphi, k)},$$

das immer den Wert K hat, sobald man es zwischen zwei um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Grenzen nimmt. Denn bezeichnen wir mit n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so hat ein derartiges Integral die Form:

$$\int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi} \quad \text{oder} \quad \int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi}.$$

Setzen wir in dem ersten Integral $n\pi - \varphi = \varphi_1$, so erhält dies die Form:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi_1}{A\varphi_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{A\varphi_1} = K;$$

setzen wir in dem zweiten Integral $\varphi_2 = \varphi - n\pi$, so erhalten wir ebenfalls K , da

$$\int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{A\varphi_2} = K.$$

Weil nun in dem Schema:

$$\int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} + \dots + \int_{(n-1)\frac{\pi}{2}}^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi}$$

jedes Glied der rechten Seite den Wert K hat, so ist

$$\int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} = n \cdot K,$$

und daher

$$\int_0^{n\pi \pm \varphi} \frac{d\varphi}{A\varphi} = 2n \cdot K \pm \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{A\varphi} = 2n K \pm u.$$

Gehen wir zu den Amplituden über, so ist:

$$\begin{aligned} n\pi \pm \varphi &= \operatorname{am} (2nK \pm u) = n\pi \pm \operatorname{am} u = 2n \operatorname{am} K \pm \operatorname{am} u, \\ \operatorname{am} (u \pm 2nK) &= \operatorname{am} u \pm n\pi. \end{aligned}$$

Da nun $\sin (\operatorname{am} u \pm 2\pi) = \sin \operatorname{am} u$ und

$$\operatorname{am} u \pm 2\pi = \operatorname{am} (u \pm 4K),$$

so ist

$$\sin \operatorname{am} (u \pm 4K) = \sin \operatorname{am} u.$$

Die hier fortgesetzt auftretende Größe K entspricht genau der Zahl $\frac{\pi}{2}$ in der Trigonometrie; gehen die elliptischen Funktionen in trigonometrische über ($k=0$), so wird $K = \frac{\pi}{2}$.

Durch dieselben Betrachtungen wie beim Sinus können wir auch die Periodizität von $\cos \operatorname{am} u$ und $\mathcal{A} \operatorname{am} u$ nachweisen; da

$$\sin (\varphi \pm \pi) = -\sin \varphi,$$

so ist

$$\sin \operatorname{am} (u \pm 2K) = -\sin \operatorname{am} u,$$

und wir gelangen so zu den Formeln:

$$\begin{aligned} (7) \quad \sin \operatorname{am} (u \pm 4K) &= \sin \operatorname{am} u \\ \cos \operatorname{am} (u \pm 4K) &= \cos \operatorname{am} u \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (u \pm 4K) &= \mathcal{A} \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

Aus (5) und (7) läßt sich leicht die imaginäre Periode herleiten: In (5) tritt rechter Hand nur der Modul k' auf, hier bleibt alles unverändert, wenn wir u durch $u \pm 4K'$ ersetzen. Führen wir dann statt iu u ein, so folgt:

$$\begin{aligned} (8) \quad \sin \operatorname{am} (u \pm 4iK') &= \sin \operatorname{am} u \\ \cos \operatorname{am} (u \pm 4iK') &= \cos \operatorname{am} u \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (u \pm 4iK') &= \mathcal{A} \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

(7) und (8) lassen sich vereinigen zu:

$$\begin{aligned} (9) \quad \sin \operatorname{am} (u \pm 4K \pm 4iK') &= \sin \operatorname{am} u \\ \cos \operatorname{am} (u \pm 4K \pm 4iK') &= \cos \operatorname{am} u \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (u \pm 4K \pm 4iK') &= \mathcal{A} \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

Die elliptischen Funktionen besitzen also eine reelle und eine imaginäre Periode.

Die hier abgeleiteten Formeln lassen sich noch in der mannigfaltigsten Weise umwandeln und spezialisieren.

6. Das Additionstheorem für trigonometrische und elliptische Funktionen.

I. Um das Additionstheorem für $\sin(u+v)$ abzuleiten, gehen wir aus von der „cyklometrischen“ Differentialgleichung:

$$(10) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Integrieren wir gliedweise und nehmen wir eine willkürliche Konstante C so, daß die unteren Grenzen der beiden Integrale Null sind, so erhält man:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C.$$

Nehmen wir ferner an, daß dem Werte $x=0$ $y=c$ entspricht, so ist

$$C = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}},$$

d. h.
$$(11) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Wir integrieren (10) nach dem von Sturm¹⁾ angegebenen Verfahren:

$$\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0.$$

$$\int \sqrt{1-y^2} dx + \int \sqrt{1-x^2} dy = C'.$$

Addieren wir nun die beiden durch partielle Integration gefundenen Formeln:

$$\int \sqrt{1-y^2} dx = x \sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dy = y \sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so folgt unter Berücksichtigung von (10):

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = C'.$$

Um die oben eingeführte Konstante c zu erhalten, setzen wir $x=0$, $y=c$; dann ist $C'=c$ und wir erhalten als Integral der Differentialgleichung (10):

$$(12) \quad x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = c.$$

Gehen wir nun von den Integralen zu den inversen Funktionen über, so folgt aus

¹⁾ Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik. Bd. 1, p. 372.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad x = \sin u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos u$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v, \quad y = \sin v, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos v.$$

$$(11) \text{ ergibt den Wert } \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} = u + v, \text{ also } c = \sin(u + v).$$

Substituieren wir diese Werte in (12), so erhalten wir schließlich das Additionstheorem in der aus den Elementen der Trigonometrie bekannten Form:

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v.$$

II. Bei der Ableitung des Additionstheorems für trigonometrische Funktionen gingen wir aus von einer Differentialgleichung, der die arcus-sinusfunktion genügt. Wollen wir ebenso eine analoge Formel für elliptische Funktionen herleiten, so haben wir auszugehen von der „elliptischen“ Differentialgleichung. Ihr genügen die von uns in der Normalform angenommenen elliptischen Integrale, sie lautet also:

$$(13) \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

Die Behandlung geschieht genau in derselben Weise wie oben. Man erhält durch gliedweise Integration und Einführung der Konstanten c :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}}.$$

Auch die Sturmsche Integrationsmethode von (13) ist der obigen entsprechend. Man schafft die Nenner weg, integriert gliedweise, formt jedes Glied durch teilweise Integration um, vereinfacht mit Hilfe der Ausgangsdifferentialgleichung und führt für die sich ergebende Konstante C c ein, indem man $x=0$, $y=c$ setzt. Dann erhält die gesuchte Integralgleichung die Form:

$$(14) \quad \frac{x \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = c.$$

Wir setzen:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u, \quad \begin{aligned} x &= \sin \operatorname{am} u \\ \sqrt{1-x^2} &= \cos \operatorname{am} u \\ \sqrt{1-k^2x^2} &= \Delta \operatorname{am} u, \end{aligned}$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = v, \quad \begin{aligned} y &= \sin \operatorname{am} v \\ \sqrt{1-y^2} &= \cos \operatorname{am} v \\ \sqrt{1-k^2y^2} &= \Delta \operatorname{am} v. \end{aligned}$$

Dann ist $\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = u + v, \quad c = \sin \operatorname{am} (u + v).$

Substituieren wir diese Werte in (14), so erhalten wir das gesuchte Additionstheorem:

$$\sin \operatorname{am} (u + v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \operatorname{Am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \operatorname{Am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Die beiden unter I. und II. dieser Nummer durchgeführten Ableitungen lassen die Analogieen zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen besonders klar und durchsichtig hervortreten; der Übergang von II. zu I. findet, wie es sein muß, für $k = 0$ statt.

7. Das Additionstheorem für elliptische Integrale.

Wir hatten einleitend die elliptischen Funktionen als trigonometrische Funktionen der oberen Grenzen der elliptischen Integrale definiert. Aus dem Additionstheorem können wir daher a priori schließen, daß die Summe zweier elliptischer Integrale $F(\varphi)$ und $F(\psi)$ einem dritten Integral $F(\sigma)$ gleich ist, wobei zwischen den trigonometrischen Funktionen der drei Amplituden φ , ψ und σ eine algebraische Relation besteht. Zum Beweise teilen wir die elegante Methode Lagranges mit, sie führt uns gleich zum letzten in diesem einleitenden Kapitel zu behandelnden Punkt, dem interessanten Zusammenhang zwischen elliptischen Funktionen und sphärischer Trigonometrie.

Wir gehen aus von der Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{d\varphi}{\operatorname{Am} \varphi} + \frac{d\psi}{\operatorname{Am} \psi} = 0.$$

Lagrange führt eine neue Variable t ein:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Dann ist: $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$

Setzen wir:

$$\varphi + \psi = p$$

$$\varphi - \psi = q,$$

so ergibt die Addition, bezw. Subtraktion:

$$\frac{dp}{dt} = \operatorname{Am} \varphi - \operatorname{Am} \psi, \quad \frac{dq}{dt} = \operatorname{Am} \varphi + \operatorname{Am} \psi.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} &= (\mathcal{A}q)^2 - (\mathcal{A}\psi)^2 = -k^2(\sin^2 q - \sin^2 \psi) = -k^2 \left(\sin^2 \frac{p+q}{2} - \sin^2 \frac{p-q}{2} \right) \\ &= -k^2 \sin p \sin q.\end{aligned}$$

Für die zweiten Differentialquotienten ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 p}{dt^2} &= -k^2 \sin p \cos q, \\ \frac{d^2 q}{dt^2} &= -k^2 \cos p \sin q,\end{aligned}$$

mithin ist

$$\frac{\frac{d^2 p}{dt^2}}{\frac{dp}{dt}} = \frac{\cos q}{\sin q} \frac{dq}{dt}; \quad \frac{\frac{d^2 q}{dt^2}}{\frac{dq}{dt}} = \frac{\cos p}{\sin p} \frac{dp}{dt}.$$

Diese Gleichungen sind integrabel:

$$\begin{aligned}\log \frac{dp}{dt} &= \log \sin q + C, & \frac{dp}{dt} &= \alpha \sin q, \\ \log \frac{dq}{dt} &= \log \sin p + C', & \frac{dq}{dt} &= \beta \sin p,\end{aligned}$$

wo α und β die Numeri der logarithmischen Integrationskonstanten C und C' bedeuten.

$$\alpha \sin q \frac{dq}{dt} = \beta \sin p \frac{dp}{dt}.$$

Jetzt können wir wieder integrieren, wobei der Parameter t herausfällt:

$$\begin{aligned}-\alpha \cos q &= -\beta \cos p + \gamma \\ (15) \quad \underline{\beta \cos (q + \psi) - \alpha \cos (q - \psi) = \gamma}\end{aligned}$$

ist also die Integralgleichung von:

$$\frac{dq}{\mathcal{A}q} + \frac{d\psi}{\mathcal{A}\psi} = 0,$$

deren gliedweise Integration die Gleichung:

$$\int_0^q \frac{dq}{\mathcal{A}q} + \int_0^\psi \frac{d\psi}{\mathcal{A}\psi} = C$$

liefert.

Da q und ψ Funktionen von einander sind, so entspricht dem Werte $q = 0$ ein bestimmter Wert ψ , den wir δ nennen.

$$\begin{aligned}\text{Dann ist } C &= \int_0^\delta \frac{d\delta}{\mathcal{A}\delta} \text{ und es ist in der Legendreschen Bezeichnung:} \\ F(q) + F(\psi) &= F(\delta).\end{aligned}$$

Die drei Konstanten α, β, γ bestimmen sich wie folgt:

Setzen wir $\varphi = 0, \psi = \delta$, so liefert (15):

$$a) (\beta - \alpha) \cos \delta = \gamma.$$

Ferner gehen die Werte für $\mathcal{A}\varphi + \mathcal{A}\psi$ und $\mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}\psi$ über in:

$$b) 1 - \mathcal{A}\delta = \alpha \sin(-\delta),$$

$$c) 1 + \mathcal{A}\delta = \beta \sin \delta.$$

Aus a), b) und c) folgen:

$$\alpha = \frac{1 - \mathcal{A}\delta}{\sin(-\delta)}, \quad \beta = \frac{1 + \mathcal{A}\delta}{\sin \delta}, \quad \gamma = \frac{2 \cos \delta}{\sin \delta}.$$

Führen wir die für die Konstanten gefundenen Werte in (15) ein, so ist

$$(1 + \mathcal{A}\delta) \cos(\varphi + \psi) + (1 - \mathcal{A}\delta) \cos(\varphi - \psi) = 2 \cos \delta, \\ \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) + \mathcal{A}\delta (\cos[\varphi + \psi] - \cos[\varphi - \psi]) = 2 \cos \delta, \\ \text{also: } (16) \quad \underline{\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \mathcal{A}\delta = \cos \delta}.$$

Damit ist das Additionstheorem für elliptische Integrale hergeleitet, die Relation (16) gilt zwischen den oberen Grenzen der elliptischen Integrale $F(\varphi)$, $F(\psi)$ und $F(\delta)$, wenn zwischen diesen die Gleichung gilt:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \delta}}.$$

Der Übergang zu den elliptischen Funktionen liefert das Additionstheorem für $\cos \operatorname{am}(u + v)$, denn aus:

$F(\varphi) = u, \varphi = \operatorname{am} u, F(\psi) = v, \psi = \operatorname{am} v; F(\sigma) = u + v, \sigma = \operatorname{am}(u + v)$ folgt durch (16):

$$\cos \operatorname{am}(u + v) = \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am}(u + v).$$

Die Analogie mit der entsprechenden Formel der Trigonometrie $\cos(u + v)$ wird wieder zur Identität, wenn wir den Modul $k = 0$ setzen.

8. Über den Zusammenhang der elliptischen Funktionen mit der sphärischen Trigonometrie.

Bereits Lagrange bemerkte die auffallende Ähnlichkeit der oben hergeleiteten Formel:

$$(17) \quad \cos \sigma = \cos a \cos b - \sin a \sin b \mathcal{A} \sigma, \quad (F[a] + F[b] = F[\sigma]) \\ \text{bezw.}$$

$$(18) \quad \cos \Theta = \cos a \cos b + \sin a \sin b \mathcal{A} \Theta, \quad (F[a] - F[b] = F[\Theta])$$

mit der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie:

$$(19) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

in der a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel bedeuten.

Die Analogie geht in Identität über, wenn man $c = \Theta$ und das konstante Verhältnis:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = k$$

setzt. Dann ist

$$\cos A = \pm Aa, \quad \cos B = \pm Ab, \quad \cos C = \pm Ac,$$

d. h. bei spitzem Winkel C wird $c = \Theta$, $\cos C = A\Theta$, (19) und (18) sind identisch; bei stumpfem Winkel C setzt man $c = \sigma$, $\cos C = -A\sigma$; Formel (19) geht in (17) über. Nach den Betrachtungen in Nr. 7 wird für $a = \text{am } u$, $b = \text{am } v$

$$\Theta = \text{am } (u - v), \quad \sigma = \text{am } (u + v).$$

Hieraus folgt der Satz:

Konstruiert man ein sphärisches Dreieck mit den Seiten $\text{am } u$ und $\text{am } v$, welche einen spitzen Winkel einschließen, so ist die diesem Winkel gegenüberliegende Seite $= \text{am } (u - v)$; sie ist $= \text{am } (u + v)$, wenn der eingeschlossene Winkel stumpf ist.

Nun wissen wir, daß wir unsere Betrachtungen über elliptische Integrale und Funktionen unter der Voraussetzung $k < 1$ gemacht haben. Welches ist nun die Bedingung dafür, daß in einem sphärischen Dreieck $k < 1$ ist? Durège gibt hierfür eine geometrische Bedingung, wir leiten nach Kleiber¹⁾ eine arithmetische Bedingungsrelation her.

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

also:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \text{ f.}$$

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma - (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

$$1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

Hieraus folgt:

$$\text{Falls } \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0, \text{ so ist } 1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \alpha} > 0, \quad k^2 > 1.$$

¹⁾ Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Funktionen und ihr Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie. Königsberg 1880/81. Programm des Stadtgymnasiums.

Wenn also eine grade Anzahl der Größen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ negativ ist, so muß $k^2 > 1$ sein. Es kann also nur in zwei Fällen der Modul < 1 sein, nämlich:

1. wenn ein Winkel stumpf und die beiden andern spitz sind,
2. wenn alle drei Winkel stumpf sind.¹⁾

Übrigens kann man, wenn ein sphärisches Dreieck mit einem Modul > 1 vorliegt, dieses ersetzen durch das Polardreieck, das in diesem Falle, wie sich leicht beweisen läßt, stets einen Modul < 1 hat.

Mit Hilfe des hergeleiteten Satzes über die Konstruktion sphärischer Dreiecke lassen sich die Amplituden von Summe und Differenz von Argumenten sowie von Vielfachen derselben konstruieren. Auch lassen sich infolge des engen Zusammenhanges zwischen elliptischen Funktionen und sphärischer Trigonometrie Formeln der einen Disziplin aus den entsprechenden der andern herleiten, ja auch neue Beziehungen finden; wir verweisen hierfür auf Durège, Abschnitt VII, und begnügen uns an dieser Stelle, um zum Abschluß zu gelangen, damit, das wichtige Additionstheorem der elliptischen Funktionen aus der sphärischen Trigonometrie herzuleiten.

Unter der Voraussetzung, daß der Modul $k = \frac{\sin C}{\sin c}$ konstant und $\sphericalangle C$ stumpf ist, differenzieren wir die Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

vollständig nach a und b und erhalten:

$$0 = (-\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C) da + (-\cos a \sin b + \sin a \cos b \cos C) db.$$

Die erste Klammer hat den Wert:

$$-\sin c \cos B,$$

die zweite Klammer ist:

$$-\sin c \cos A,$$

folglich: $0 = -\sin c \cos B da - \sin c \cos A db.$

¹⁾ Kleiber untersucht diese Frage näher und leitet (a. a. O. p. 30) folgende Regel für die Übertragung von Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen auf sphärische Trigonometrie her: Wenn man eine Formel für elliptische Funktionen hat, in der die Funktionen $\sin am u$, $\sin am v$, $\sin am (u-v)$, $\cos am u$, $\cos am v$, $\cos am (u-v)$, $\Delta am u$, $\Delta am v$, $\Delta am (u-v)$ vorkommen, so kann man dieselbe in eine Formel für ein sphärisches Dreieck mit einem stumpfen und zwei spitzen Winkeln übertragen, bei welchem (wenn die Reihenfolge der Winkel der Größe nach ist: $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2} > \beta > \gamma > 0$) ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &> \frac{\pm \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \left(\begin{array}{l} \pm \text{ je nachdem} \\ \alpha + \beta \gtrless \pi \end{array} \right) \text{ und zwar hat man dann nur zu setzen: } k = \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \text{ und } \sin a, \sin b, \sin c, \cos a, \cos b, \cos c, -\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \text{ statt} \\ &\text{obiger elliptischer Funktionen in derselben Reihenfolge (wenn } a, b, c \text{ die Seiten und} \\ &\alpha, \beta, \gamma \text{ die Winkel des sphärischen Dreiecks sind).} \end{aligned}$$

Es sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden:

entweder ist $\cos B = Ab, \quad \cos A = Aa,$
 oder $\cos B = -Ab, \quad \cos A = -Aa,$

beide geben: $0 = Ab da + Aa db$

$$\frac{da}{Aa} = \frac{db}{Ab} = 0.$$

Wir werden also auf die Gleichung [vgl. (13)]:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = 0$$

zurückgeführt, deren Zusammenhang mit dem Additionstheorem in Nr. 6 behandelt ist.

9. Rückblick und Ausblick.

Die vorstehenden im engen Anschluß an Durège durchgeführten Betrachtungen hatten den Zweck, auf möglichst einfachem Wege, nur mit Hilfe der Infinitesimalrechnung, in propädeutischer Weise den Zusammenhang zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen darzulegen.

Auch in den folgenden funktionentheoretischen Untersuchungen, die den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung bilden, hat sich der Verfasser einer möglichst elementaren Darstellungsweise bedient; es sind daher die Hauptbegriffe der Funktionentheorie nach Weierstraß kurz erläutert worden. Der Zweck dieser Untersuchung soll wesentlich anregender Art sein, der Verfasser hat auf Vollständigkeit um so eher verzichten zu dürfen geglaubt, als ja ausgezeichnete Lehrbücher ausführlichster Art über elliptische Funktionen vorhanden sind. Andererseits hofft der Verfasser dadurch, daß von der subtilen Schärfe moderner analytischer Betrachtungen abgesehen, auch manches rein referierend unbewiesen mitgeteilt ist, die kleine Schrift vor dem üblichen Schicksal mathematischer Programmarbeiten, nur von einem winzigen Kreis speziell interessierter Fachkollegen gelesen zu werden, nach Möglichkeit bewahrt zu haben. Es muß doch jeden Mathematiklehrer, nicht nur den Mathematiker, interessieren, einmal geläufige Sätze aus der Elementarmathematik wie $\sin(\alpha + \beta)$ u. a. als Spezialfälle allgemeiner funktionentheoretischer Sätze, also gewissermaßen von einer höheren Warte aus, kennen zu lernen. Zu dieser von Universitätslehrern wie Klein, Study, Weber u. a. mit Nachdruck im Interesse der Schule vertretenen Behandlung der Elementarmathematik hofft der Verfasser einen bescheidenen Beitrag geliefert zu haben.

Über die Gliederung der folgenden Abschnitte sei bemerkt:

Im zweiten Abschnitt wird nach Erläuterung einiger wichtiger Begriffe und Sätze der Funktionentheorie die Theorie der rationalen und trigonometrischen Funktionen auf zwei Hauptsätze, die Zerlegung in Partialbrüche und Linearfaktoren, zurückgeführt. Im dritten Abschnitt sind die elliptischen Funktionen neu definiert; die Weierstraßschen Funktionen σu , ζu und $p u$ werden als Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen $\sin u$, $\cotg u$, $\frac{1}{\sin^2 u}$ gewonnen. Als besonders wichtig für den Zweck unserer Untersuchung sind die Degenerationsfälle eingehender behandelt. Im vierten und fünften Abschnitt werden die fundamentalen Theoreme der Lehre von den elliptischen Funktionen: Zerlegung in Partialbrüche und Linearfaktoren, Reihenentwicklung und Additionstheorem, hergeleitet; überall ist auf die Analogie mit den entsprechenden Sätzen aus der Lehre der trigonometrischen Funktionen besonderes Gewicht gelegt. Im sechsten Abschnitt wird der Zusammenhang der im Vordergrund stehenden p -Funktion mit den im propädeutischen Abschnitt gewonnenen Amplitudenfunktionen kurz dargelegt und damit der Kreis der Untersuchungen zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Die wichtigste Literaturquelle sind zwei französische Werke; für Abschnitt 2—5: Appell-Lacour. *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, p. 1—67, Paris 1897; für Abschnitt 6: Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications I*, Paris 1886. Die übrigen benutzten Werke sind unter dem Text zitiert.

Zweiter Abschnitt.

Die Theorie der rationalen und trigonometrischen Funktionen.

1. Einige Fundamentalbegriffe der Funktionentheorie.

Nach Weierstraß¹⁾ nennt man eine eindeutige analytische Funktion $f(u)$ der komplexen Veränderlichen u regulär in der Umgebung einer Stelle $u = a$, wenn sie innerhalb eines gewissen Bereiches, dessen Mittelpunkt a ist, überall einen endlichen und mit u stetig sich ändernden Wert hat. Dann existiert eine Potenzreihe, die innerhalb des genannten Bereiches die Funktion darstellt:

$$\begin{aligned} \Re(u|a) = f(u) = f(a) + \frac{u-a}{1} f'(a) + \frac{(u-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(u-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Mathematische Werke von Karl Weierstraß, Bd. II. Abhdlg. II. p. 77 ff. Berlin 1895.