

Auflösung der numerischen Gleichungen aller Grade mit einer Unbekannten, entwickelt an den Gleichungen des sechsten Grades.

1. Die allgemeine Form einer Gleichung des sechsten Grades ist

$$f(x) = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0. \quad I.$$

Diese Gleichung, in welcher A, B, C, D, E und F ganze Zahlen sein sollen, kann betrachtet werden

- 1) entweder als ein Product aus sechs einfachen Wurzelfactoren; oder
- 2) als ein Product aus einer Gleichung des fünften Grades und einem einfachen Wurzelfactor; oder
- 3) als ein Product aus zwei cubischen Gleichungen; oder
- 4) als ein Product aus einer biquadratischen und einer quadratischen Gleichung; oder
- 5) als ein Product aus drei quadratischen Gleichungen.

Eine Gleichung des sechsten Grades kann als aufgelöst gelten, wenn eine reelle Wurzel, oder ein quadratischer oder cubischer Factor derselben gefunden worden ist.

2. Nach der ersten Annahme ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e)(x + f) = 0, \text{ oder entwickelt} \\ &= x^6 + (a + b + c + d + e + f)x^5 + (ab + ac + ad + ae + af + bc + bd \\ &\quad + be + bf + cd + ce + cf + de + df + ef)x^4 + (abc + abd + abe \\ &\quad + abf + acd + ace + acf + ade + adf + aef + bcd + bce + bcf + bde \\ &\quad + bdf + bef + cde + cdf + cef + def)x^3 + (abcd + abce + abcf + abde \\ &\quad + abdf + abef + acde + acdf + acef + adef + bede + bedf + becf \\ &\quad + bdef + cdef)x^2 + (abcde + abcdf + abcef + abdef + acdef + bedef)x \\ &\quad + abcdef = 0. \quad II. \end{aligned}$$

Aus Gl. (II) ergibt sich für die Coefficienten der Gl. (I) folgendes Gesetz:

„In einer Gleichung des sechsten Grades ist der Coefficient A gleich der Summe aller Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; der Coefficient B gleich der Summe aller Producte aus je zwei Wurzeln; der Coefficient C gleich der Summe aller Producte aus je drei Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; der Coefficient D gleich der Summe aller Producte aus je vier Wurzeln; der Coefficient E gleich der Summe aller Producte aus je fünf Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; das letzte Glied F gleich dem Producte aus allen sechs Wurzeln.“

Wir sehen ferner, daß die Gleichungen des sechsten Grades durch jeden ihrer Wurzelfactoren theilbar sind, und daß die Vorzeichen des zweiten, vierten und sechsten Gliedes sich ändern, wenn alle Wurzeln der Gleichung ihre Vorzeichen ändern.

3. Wenn statt der einfachen Wurzeln die mfachen Werthe derselben gesetzt werden, so geht die Gleichung (II) über in

$$\begin{aligned} f(mx) &= (x + ma)(x + mb)(x + mc)(x + md)(x + me)(x + mf) = 0, \text{ oder entwickelt} \\ &= x^6 + (a + b + c + \dots) mx^5 + (ab + ac + ad + \dots) m^2 x^4 + (abc \\ &\quad + abd + abe + \dots) m^3 x^3 + (abcd + abce + abef + \dots) m^4 x^2 \\ &\quad + (abcde + abedf + \dots) m^5 x + abedf m^6 = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Regel:

„Um aus einer Gleichung des sechsten Grades eine andere abzuleiten, deren Wurzeln gleich dem mfachen Werthe der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, multiplicire man den Coefficienten des zweiten Gliedes mit m , den Coefficienten des dritten Gliedes mit m^2 , des vierten Gliedes mit m^3 , des fünften Gliedes mit m^4 , des sechsten Gliedes mit m^5 , das letzte Glied mit m^6 .“

Mit Hilfe dieses Satzes kann man also jede Gleichung mit gebrochenen Coefficienten in eine andere verwandeln, deren Coefficienten ganze Zahlen sind.

4. Wenn statt der einfachen Wurzeln die Quadrate derselben gesetzt werden, so geht Gl. (II) über in:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a^2)(x - b^2)(x - c^2)(x - d^2)(x - e^2)(x - f^2) = 0, \text{ oder entwickelt:} \\ &= x^6 - (a^2 + b^2 + c^2 + \dots) x^5 + (a^2 b^2 + a^2 c^2 + a^2 d^2 + \dots) x^4 \\ &\quad - (a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + \dots) x^3 + (a^2 b^2 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^2 e^2 + \dots) x^2 \\ &\quad - (a^2 b^2 c^2 d^2 e^2 + a^2 b^2 c^2 d^2 f^2 + \dots) x + a^2 b^2 c^2 d^2 e^2 f^2 = 0. \text{ IIb.} \end{aligned}$$

Ändert man die Vorzeichen des zweiten, vierten und sechsten Gliedes, so erhält man lauter positive Wurzelfactoren.

Um das Gesetz der Ableitung zu finden, denke man sich die Gl. (I) entstanden aus dem Producte:

$$(x^{\frac{1}{2}} + a)(x^{\frac{1}{2}} + b)(x^{\frac{1}{2}} + c)(x^{\frac{1}{2}} + d)(x^{\frac{1}{2}} + e)(x^{\frac{1}{2}} + f) = 0, \text{ welches entwickelt giebt:}$$

$$x^{\frac{6}{2}} + Ax^{\frac{5}{2}} + Bx^{\frac{4}{2}} + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^{\frac{2}{2}} + Ex^{\frac{1}{2}} + F = 0. \text{ IIc.}$$

Zur Beseitigung der Wurzelgrößen kann man davon ausgehen, daß für $p + q = 0$, auch $p^2 - q^2 = 0$ ist. Wenn man also die Gl. (IIc) in zwei solche Theile abtheilt, daß jeder für sich in's Quadrat erhoben von aller Irrationalität frei wird, so ist das Verlangte erreicht. Diese Theile aber sind:

$$p = x^{\frac{6}{2}} + Bx^{\frac{4}{2}} + Dx^{\frac{2}{2}} + F.$$

$$q = Ax^{\frac{5}{2}} + Cx^{\frac{3}{2}} + Ex^{\frac{1}{2}}.$$

Ihre Quadrate sind:

$$p^2 = x^6 + 2Bx^4 + (B^2 + 2D)x^2 + (2BD + 2F)x^3 + (D^2 + 2BF)x^2 + 2DFx + F^2.$$

$$q^2 = A^2 x^5 + 2ACx^3 + (C^2 + 2AE)x^2 + 2CEx + E^2 x.$$

Nimmt man hierauf die Differenz dieser Quadrate und ändert man die Zeichen, wie oben bemerkt wurde, so wird:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 + (A^2 - 2B)x^5 + (B^2 - 2AC + 2D)x^4 + (C^2 - 2BD + 2AE - 2F)x^3 \\ &\quad + (D^2 - 2CE + 2BF)x^2 + (E^2 - 2DF)x + F^2 = 0. \text{ II d.} \end{aligned}$$

Diese Form giebt eine höchst einfache und übersichtliche Rechnung:

„Der Coefficient einer Potenz von x in der neuen Gleichung wird gebildet durch die Verbindung des Quadrates des Coefficienten derselben Potenz von x in der ursprünglichen Gleichung

mit den doppelten Producten je zweier gleichweit zu beiden Seiten von ihm abstehenden Coefficienten, die letzteren regelmäßig mit abwechselnden Zeichen genommen."

5. Die Herleitung dieser Regel zeigt, daß dieselbe auf Gleichungen aller Grade anwendbar ist, So erhält man für die quadratische Gleichung:

$$x^2 + Ax + B = 0;$$

als Gleichung für die Quadrate der Wurzeln:

$$x^2 + (A^2 - 2B)x + B^2 = 0;$$

für die cubische Gleichung:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0;$$

als Gleichung für die Quadrate der Wurzeln:

$$x^3 + (A^2 - 2B)x^2 + (B^2 - 2AC)x + C^2 = 0;$$

für die biquadratische Gleichung:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0;$$

als Gleichung für die Quadrate der Wurzeln:

$$x^4 + (A^2 - 2B)x^3 + (B^2 - 2AC + 2D)x^2 + (C^2 - 2BD)x + D^2 = 0;$$

für die Gleichung des fünften Grades:

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0;$$

als Gleichung für die Quadrate der Wurzeln:

$$x^5 + (A^2 - 2B)x^4 + (B^2 - 2AC + 2D)x^3 + (C^2 - 2BD + 2AE)x^2 + (D^2 - 2CE)x + E^2 = 0.$$

Von diesen abgeleiteten Gleichungen wird später Gebrauch gemacht werden.

6. Nach der zweiten Annahme ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^5 + A_1x^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1)(x + r) = 0, \text{ oder entwickelt:} \\ &= x^6 + (A_1 + r)x^5 + (B_1 + rA_1)x^4 + (C_1 + rB_1)x^3 + (D_1 + rC_1)x^2 + \\ &\quad (E_1 + rD_1)x + rE_1 = 0. \text{ III.} \end{aligned}$$

Daraus ersehen wir, daß die rationale Wurzel, wenn eine vorhanden ist, immer ein Factor des letzten Gliedes sein muß. Außerdem giebt die Gl. (III) für die rationale Wurzel folgendes Absonderschema:

$$\begin{array}{cccccc} x^5 + (A_1 + r)x^4 + (B_1 + rA_1)x^3 + (C_1 + rB_1)x^2 + (D_1 + rC_1)x + rE_1 & & & & & \\ \frac{-r}{+A_1} & \frac{-rA_1}{+B_1} & \frac{-rB_1}{+C_1} & \frac{-rC_1}{+D_1} & \frac{-rD_1}{+E_1} & \frac{-rE_1}{0}. \end{array}$$

Auch jede irrationale, selbst jede imaginäre Wurzel läßt sich, wenn sie bekannt ist, nach diesem Schema aus der Gleichung absondern. Beispiele werden später gegeben werden.

Die resultirende Gleichung des fünften Grades ist:

$$x^5 + A_1x^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0.$$

7. Dieses Schema giebt ein Mittel an die Hand, die rationalen Wurzeln einer Gleichung zu finden:

„Sondert man nämlich aus der Gleichung nach einander die Factoren des letzten Gliedes ab, so sind diejenigen Factoren, bei deren Absondern das letzte Glied der resultirenden Gleichung Null wird, Wurzeln der Gleichung.“

Beispiel.

$$f(x) = x^6 + 21x^5 + 175x^4 + 735x^3 + 1624x^2 + 1764x + 720 = 0$$

$\begin{array}{r} - 1 \\ + 20 \\ + 21 \\ - 2 \\ + 19 \\ + 21 \\ - 3 \\ + 18 \\ + 21 \\ - 4 \\ + 17 \\ + 21 \\ - 5 \\ + 16 \\ + 21 \\ - 6 \\ + 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 20 \\ + 155 \\ + 175 \\ - 38 \\ + 137 \\ + 175 \\ - 54 \\ + 121 \\ + 175 \\ - 68 \\ + 107 \\ + 175 \\ - 80 \\ + 95 \\ + 175 \\ - 90 \\ + 85 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 155 \\ + 580 \\ + 735 \\ - 274 \\ + 461 \\ + 735 \\ - 363 \\ + 372 \\ + 735 \\ - 428 \\ + 307 \\ + 735 \\ - 475 \\ + 260 \\ + 735 \\ - 510 \\ + 225 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 580 \\ + 1044 \\ + 1624 \\ - 922 \\ + 702 \\ + 1624 \\ - 1116 \\ + 508 \\ + 1624 \\ - 1228 \\ + 396 \\ + 1624 \\ - 1300 \\ + 324 \\ + 1624 \\ - 1350 \\ + 274 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 1044 \\ + 720 \\ + 1764 \\ - 1404 \\ + 360 \\ + 1764 \\ - 1524 \\ + 240 \\ + 1764 \\ - 1584 \\ + 180 \\ + 1764 \\ - 1620 \\ + 144 \\ + 1764 \\ - 1644 \\ + 120 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 720 \\ 0 \\ + 720 \\ - 720 \\ 0 \\ + 720 \\ - 720 \\ 0 \\ + 720 \\ - 720 \\ 0 \\ + 720 \\ - 720 \\ 0 \\ + 720 \\ - 720 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} r = - 1 \\ r = - 2 \\ r = - 3 \\ r = - 4 \\ r = - 5 \\ r = - 6 \end{array}$
---	--	--	--	---	--	---

Die Gleichung ist also aufgelöst:

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 0.$$

8. Zur Berechnung einer Gleichung, deren Wurzeln sich um eine bestimmte Größe h von den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung unterscheiden, erhält man nach Analogie von § 18 der Gleichungen des fünften Grades folgendes Schema der Ableitung:

$x^6 + Ax^5$	$+ Bx^4$	$+ Cx^3$	$+ Dx^2$	$+ Ex$	$+ F$
$+ h$	$+ hA_1$	$+ hB_1$	$+ hC_1$	$+ hD_1$	$+ hE_1$
$+ A_1$	$+ B_1$	$+ C_1$	$+ D_1$	$+ E_1$	$+ F_1$
$+ h$	$+ hA_2$	$+ hB_2$	$+ hC_2$	$+ hD_2$	
$+ A_2$	$+ B_2$	$+ C_2$	$+ D_2$	$+ E_2$	
$+ h$	$+ hA_3$	$+ hB_3$	$+ hC_3$		
$+ A_3$	$+ B_3$	$+ C_3$	$+ D_3$		
$+ h$	$+ hA_4$	$+ hB_4$			
$+ A_4$	$+ B_4$	$+ C_4$			
$+ h$	$+ hA_5$				
$+ A_5$	$+ B_5$				
$+ h$					
$+ A_6$					

Die abgeleitete Gleichung selbst ist:

$$f(x + h) = x^6 + A_6x^5 + B_5x^4 + C_4x^3 + D_3x^2 + E_2x + F_1 = 0. \quad \text{IIIa.}$$

Dieses Ableitungsschema ist für Zahlengleichungen zur Rechnung sehr bequem. Bisweilen aber ist es wünschenswerth, die Coefficienten der abgeleiteten Gl. (IIIa) unmittelbar zu erhalten. Wie dies geschieht, soll in den nächstfolgenden Paragraphen gezeigt werden.

9. Wenn in einer Gleichung jedes Glied mit dem Exponenten seines x multiplicirt, der Exponent selbst aber um eine Einheit vermindert wird, so nennt man die so entstandene neue Gleichung die erste Ableitung von $f(x)$ und bezeichnet sie mit $f'(x)$. Verfährt man mit $f'(x)$ ebenso, so erhält man die zweite Ableitung von $f(x)$ und bezeichnet sie mit $f''(x)$. Man kann aus jeder Gleichung so viele Ableitungen bilden, als der Grad der Gleichung anzeigt. Die Gleichung des sechsten Grades giebt folgende Ableitungen:

$$\left. \begin{aligned} f^1(x) &= 6x^5 + 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E = 0 \\ f^2(x) &= 30x^4 + 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D = 0 \\ f^3(x) &= 120x^3 + 60Ax^2 + 24Bx + 6C = 0 \\ f^4(x) &= 360x^2 + 120Ax + 24B = 0 \\ f^5(x) &= 720x + 120A = 0 \\ f^6(x) &= 720. \end{aligned} \right\} A.$$

10. Leitet man nach dem Schema in § 8 die $f(x+a)$ wirklich ab, so erhalten die Coefficienten der Gl. (IIIa), verglichen mit den Gleichungen unter (A), folgende Werthe:

$$\begin{aligned} F_1 &= f(h) = h^6 + Ah^5 + Bh^4 + Ch^3 + Dh^2 + Eh + F. \\ E_2 &= f'(h) = 6h^5 + 5Ah^4 + 4Bh^3 + 3Ch^2 + 2Dh + E. \\ D_3 &= \frac{f''(h)}{1.2.} = 15h^4 + 10Ah^3 + 6Bh^2 + 3Ch + D. \\ C_4 &= \frac{f'''(h)}{1.2.3.} = 20h^3 + 10Ah^2 + 4Bh + C. \\ B_5 &= \frac{f^{(4)}(h)}{1.2.3.4.} = 15h^2 + 5Ah + B. \\ A_6 &= \frac{f^{(5)}(h)}{1.2.3.4.5.} = 6h + A. \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{r|l} f(x) = x^6 + 8x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 - x + 4 = 0 & h = -3 \\ \hline -3 & -15 & +27 & -90 & +285 & -852 \\ +5 & -9 & +30 & -95 & +284 & -848 \\ -3 & -6 & +45 & -225 & +960 & \\ +2 & -15 & +75 & -320 & +1244 & \\ -3 & +3 & +36 & -333 & & \\ -1 & -12 & +111 & -653 & & \\ -3 & +12 & +0 & & & \\ -4 & 0 & +111 & & & \\ -3 & +21 & & & & \\ -7 & +21 & & & & \\ -3 & & & & & \\ -10 & & & & & \end{array}$$

daher: $f(x-3) = x^6 - 10x^5 + 21x^4 + 111x^3 - 653x^2 + 1244x - 848 = 0.$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^6 + 8(-3)^5 + 6(-3)^4 + 3(-3)^3 - 5(-3)^2 - (-3) + 4 = 848. \\ f'(-3) &= 6(-3)^5 + 40(-3)^4 + 24(-3)^3 + 9(-3)^2 - 10(-3) - 1 = 1244. \end{aligned}$$

$$\frac{f^2(-3)}{1, 2} = 15(-3)^4 + 80(-3)^3 + 36(-3)^2 + 9(-3) - 5 = -653.$$

$$\frac{f^3(-3)}{1, 2, 3} = 20(-3)^3 + 80(-3)^2 + 24(-3) + 3 = +111.$$

$$\frac{f^4(-3)}{1, 2, 3, 4} = 15(-3)^2 + 40(-3) + 6 = +21.$$

$$\frac{f^5(-3)}{1, 2, 3, 4, 5} = 6(-3) + 8 = -10.$$

11. Setzt man daher statt der Coefficienten A_0, B_3 u. ihre Werthe aus den Gleichungen in § 10, so ergibt sich:

$$f(x+h) = \frac{f^5(h)}{1,2,3,4,5,6} x^6 + \frac{f^4(h)}{1,2,3,4,5} x^5 + \frac{f^3(h)}{1,2,3,4} x^4 + \frac{f^2(h)}{1,2,3} x^3 + \frac{f^1(h)}{1,2} x^2 + f^1(h)x + f(h) = 0.$$

Nach dieser nothwendigen Entwicklung kehren wir zur Gl. (III) in § 7 zurück.

12. Wenn in Gl. (III) $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ ist, so geht sie über in folgende:

$$f(x) = x^6 + rx^5 + D_1x^2 + (E_1 + rD_1)x + rE_1 = 0. \quad \text{IIIb.}$$

Daraus ziehen wir den Satz:

„Eine Gleichung des sechsten Grades, in welcher $B = C = 0$ ist, die andern Coefficienten der Gleichung aber der Gleichung

$$A(E - AD) = F$$

genügen, hat einen Wurzelfactor $(x + A) = 0$.“

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 + 7x^5 - 5x^2 + 13x + 336 = 0. \quad 7(13 + 7.5) = 336.$

$$\begin{array}{r} -7 \quad 0 \quad +35 \quad -336 \\ 0 \quad -5 \quad +48 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{daher } f(x) = (x+7)(x^5 - 5x + 48) = 0.$$

Bei der Absonderung der Wurzel sollten eigentlich die fehlenden Glieder durch Nullen ersetzt werden; dies kann aber in diesem besondern Falle unterbleiben.

2. $f(x) = x^6 + 5x^5 + 8x^2 + 31x - 45 = 0. \quad 5(31 - 5.8) = -45.$

$$\begin{array}{r} -5 \quad 0 \quad -40 \quad +45 \\ 0 \quad +8 \quad -9 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{daher } f(x) = (x+5)(x^5 + 8x - 9) = 0.$$

13. Für $D=0$ geht die Bedingungsgleichung über in $AE=F$. Dieser Annahme entspricht die Gleichung:

$$f(x) = x^6 + Ax^5 + Ex + AE = 0,$$

welche ein Product ist aus $(x + A)(x^5 + E) = 0$.

$$\text{Beispiele. 1. } f(x) = x^6 + 8x^5 + 9x + 72 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} -8 \quad 0 \quad -72 \\ 0 \quad +9 \quad 0 \end{array} \right| r = -8$$

$$\text{daher } f(x) = (x+8)(x^5 + 9) = 0.$$

$$\text{2. } f(x) = x^6 - 7x^5 + 3x - 21 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} +7 \quad 0 \quad +21 \\ 0 \quad +3 \quad 0 \end{array} \right| r = +7$$

$$\text{daher } f(x) = (x-7)(x^5 + 3) = 0.$$

Bei der Absonderung der Wurzel kann auch hier eine Ergänzung der fehlenden Glieder durch Nullen unterbleiben.

14. Vergleichen wir die Bedingung des § 13 mit den ähnlichen in (I) § 10 und (II) § 8, so ergibt sich folgender allgemeine Satz:

„Jede Gleichung von der Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Rx + AR = 0$$

läßt sich zerlegen in die beiden Factoren $(x + A) = 0$ und $(x^{n-1} + R) = 0$."

So haben beispielsweise die folgenden Gleichungen

$$x^3 + 5x^2 - 7x - 35 = 0$$

$$x^4 + 5x^3 - 7x - 35 = 0$$

$$x^5 + 5x^4 - 7x - 35 = 0$$

$$x^6 + 5x^5 - 7x - 35 = 0$$

$$x^7 + 5x^6 - 7x - 35 = 0 \text{ u.}$$

den Factor $(x + 5) = 0$ gemein; ihr anderer Factor ist beziehungsweise $(x^2 - 7) = 0$, $(x^3 - 7) = 0$, $(x^4 - 7) = 0$, $(x^5 - 7) = 0$, $(x^6 - 7) = 0$ u.

15. Wird in der Bedingungsgleichung in § 12 der Coefficient $E = 0$, so geht sie über in

$$A^2D = -F.$$

Daraus folgt:

„Jede Gleichung des sechsten Grades, in welcher $B = D = E = 0$ ist und die andern Coefficienten die Bedingung erfüllen, daß

$$A^2D = -F$$

ist, hat einen Factor $(x + A) = 0$."

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 + 5x^5 + 7x^2 - 175 = 0$.

Um die Wurzel abzusondern, ersetze man die fehlenden Glieder durch Nullen. Man erhält dann:

$$\begin{array}{r} 1 + 5 + 0 + 0 + 7 + 0 - 175 \\ - 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 - 35 + 175 \\ \hline 0 + 0 + 0 + 7 - 35 \quad 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} r = -5 \end{array} \right.$$

daher $f(x) = (x + 5)(x^5 + 7x - 35) = 0$.

2. $f(x) = x^6 - 8x^5 - 9x^2 + 576 = 0$.

$$\begin{array}{r} 1 - 8 + 0 + 0 - 9 + 0 + 576 \\ + 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 - 72 - 576 \\ \hline 0 + 0 + 0 - 9 - 72 \quad 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} r = +8 \end{array} \right.$$

daher $f(x) = (x - 8)(x^5 - 9x - 72) = 0$.

3. $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^2 - 324 = 0$.

$$\begin{array}{r} 1 - 6 + 0 + 0 + 9 + 0 - 324 \\ + 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 + 54 + 324 \\ \hline + 0 + 0 + 0 + 9 + 54 \quad 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} r = +6 \end{array} \right.$$

daher $f(x) = (x - 6)(x^5 + 9x + 54) = 0$.

16. Diese Bedingung giebt Veranlassung zu folgendem allgemeinen Satze:

„Gleichungen von der Form

$$x^n + Ax^{n-1} \pm Qx^2 \mp A^2Q = 0$$

lassen sich zerlegen in die Factoren $(x + A) = 0$ und $(x^{n-1} \pm Qx \mp AQ) = 0$."

So haben beispielsweise die Gleichungen:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 252 = 0$$

$$x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 252 = 0$$

$$x^6 + 6x^5 + 7x^4 - 252 = 0$$

$$x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 252 = 0$$

$$x^8 + 6x^7 + 7x^6 - 252 = 0 \text{ u.}$$

alle den Factor $(x + 6) = 0$, und beziehungsweise die Factoren $(x^3 + 7x - 42) = 0$, $x^4 + 7x - 42 = 0$, $x^5 + 7x - 42 = 0$, $x^6 + 7x - 42 = 0$, $x^7 + 7x - 42 = 0$ u.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der Anwendbarkeit des Absenderungsschema in § 6 für Gleichungen aller Grade.

17. Nach der dritten Annahme ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0, \text{ oder entwickelt} \\ &= x^6 + (a + \alpha)x^5 + (b + a\alpha + \beta)x^4 + (c + a\beta + b\alpha + \gamma)x^3 \\ &\quad + (a\gamma + b\beta + c\alpha)x^2 + (b\gamma + c\beta)x + c\gamma = 0. \text{ IV.} \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = \alpha = 0$, so geht sie über in folgende:

$$f(x) = x^6 + (b + \beta)x^4 + (c + \gamma)x^3 + b\beta x^2 + (b\gamma + c\beta)x + c\gamma = 0. \text{ IVa.}$$

Zwischen den Coefficienten der Gleichung (I) und Gl. (IVa) ergeben sich folgende Beziehungen:

1. $B = b + \beta$
2. $C = c + \gamma$
3. $D = b\beta$
4. $E = b\gamma + c\beta$
5. $F = c\gamma$.

Aus (1) und (3) folgt: 6. $b = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D}}{2}$

7. $\beta = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4D}}{2}$

Aus (2) und (5) folgt: 8. $c = \frac{C + \sqrt{C^2 - 4F}}{2}$

9. $\gamma = \frac{C - \sqrt{C^2 - 4F}}{2}$

Setzt man die für b, β, c, γ gefundenen Werthe in Gl. (4), so erhält man

$$E = \frac{BC - \sqrt{(B^2 - 4D)(C^2 - 4F)}}{2} \text{ V.}$$

Daraus folgt:

„Jede reducirte Gleichung des sechsten Grades, deren Coefficienten die Gleichung (V) befriedigen, läßt sich in zwei reducirte cubische Gleichungen

$$x^3 + bx + c = 0 \text{ und } x^3 + \beta x + \gamma = 0$$

zerlegen, deren Coefficienten b, c, β, γ durch die Gleichungen (6), (7), (8), (9) bestimmt werden.“

18. Wenn $E = 0$ ist, so geht Gl. (IVa) über in

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + \frac{C^2D}{4D - B^2} = 0. \text{ IVb.}$$

und diese Gleichung läßt sich zerlegen in zwei cubische Gleichungen mit reellen Coefficienten, wenn entweder D negativ ist, oder wenn es kleiner als $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ ist.

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 - 3x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 10 = 0$
läßt sich zerlegen in die beiden Factoren:

$$(x^3 + 2x - 2) = 0 \text{ und } (x^3 - 5x - 5) = 0$$

$$2. f(x) = x^6 + 9x^4 - 2x^3 + 20x^2 - 80 = 0$$

läßt sich zerlegen in die beiden Factoren:

$$(x^3 + 5x - 10) = 0 \text{ und } (x^3 + 4x + 8) = 0.$$

19. Wenn in Gl. (IVb) auch $B = 0$ ist, so geht sie über in folgende:

$$f(x) = x^6 + Cx^3 + Dx^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 0. \text{ IVe.}$$

und läßt sich zerlegen in die beiden Factoren:

$$\left(x^3 + \sqrt{-D}x + \frac{C}{2}\right) = 0 \text{ und } \left(x^3 - \sqrt{-D}x + \frac{C}{2}\right) = 0,$$

deren Coefficienten reell sind, wenn D negativ; und rational, wenn D außerdem ein Quadrat ist. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist demnach:

$$f(x) = x^6 \pm 2nx^3 - p^2x^2 + n^2 = 0,$$

wo für n und p jede ganze Zahl gesetzt werden kann. Diese Gleichung läßt sich zerlegen in die Factoren:

$$(x^3 + px + n) = 0 \text{ und } (x^3 - px + n) = 0.$$

Beispiele dazu sind:

$$x^6 + 8x^3 - 16x^2 + 16 = 0 = (x^3 + 4x + 4)(x^3 - 4x + 4).$$

$$x^6 - 12x^3 - 25x^2 + 36 = 0 = (x^3 + 5x - 6)(x^3 - 5x - 6).$$

$$x^6 + 14x^3 + 18x^2 + 49 = 0 = (x^3 + 3\sqrt{-2}x + 7)(x^3 - 3\sqrt{-2}x + 7).$$

Ist in Gl. (IVb.) auch $D = 0$, so geht sie über in:

$$f(x) = x^6 \pm Cx^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = \left(x^3 \pm \frac{C}{2}\right)^2 = 0.$$

20. Wenn in Gl. (IVa.) $C = 0$ und $B^2 = 4D$ ist, so geht sie über in:

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 x^2 + F = 0. \text{ IVc.}$$

und läßt sich zerlegen in die beiden Factoren:

$$\left(x^3 + \frac{B}{2}x + \sqrt{-F}\right) = 0 \text{ und } \left(x^3 + \frac{B}{2}x - \sqrt{-F}\right) = 0.$$

Sollen auch hier die letzten Glieder reell und rational sein, so muß F selbst negativ und ein Quadrat sein. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist demnach:

$$f(x) = x^6 \pm 2nx^4 + n^2x^2 - p^2 = 0,$$

worin ebenfalls für n und p jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

Diese Gleichung besteht aus den Factoren:

$$(x^3 + nx + p) = 0 \text{ und } (x^3 + nx - p) = 0.$$

Beispiele dazu sind: $x^6 + 8x^4 + 16x^2 - 25 = 0 = (x^3 + 4x + 5)(x^3 + 4x - 5).$

$$x^6 + 12x^4 + 36x^2 - 49 = 0 = (x^3 + 6x + 7)(x^3 + 6x - 7).$$

21. Wenn in Gl. (IVa.) zugleich $B = C = 0$ ist, so geht sie über in

$$f(x) = x^6 \pm Dx^2 \pm 2\sqrt{DF}x \pm F = 0. \text{ IVd,}$$

welche sich zerlegen läßt in die beiden Factoren:

$$x^3 + \sqrt{\mp DF}x + \sqrt{\mp F} = 0 \text{ und } x^3 - \sqrt{\mp DF}x - \sqrt{\mp F} = 0$$

Für reelle Werthe der Coefficienten der Wurzelfactoren müssen also D und F in der Gleichung selbst negativ, und für rationale Werthe der Coefficienten muß außerdem D ein Quadrat sein. Diesem Falle entspricht die Gleichung

$$f(x) = x^6 - p^2x^2 - qx - \frac{q^2}{4p^2} = 0,$$

welche sich in die beiden Factoren

$$x^3 + px + \frac{q}{2p} = 0 \text{ und } x^3 - px - \frac{q}{2p} = 0$$

zerlegen läßt.

Beispiele dazu sind:

$$x^6 - 4x^2 - 12x - 9 = 0 = (x^3 + 2x + 3)(x^3 - 2x - 3).$$

$$x^6 - 3x^2 - 12x - 12 = 0 = (x^3 + \sqrt{3}x + 2\sqrt{3})(x^3 - \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}).$$

22. Wenn in Gl. (IVa) $B^2 = 4D$ ist, so geht sie über in

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Cx^3 + \left(\frac{B}{2}\right)^2x^2 + \frac{BC}{2}x + F = 0, \text{ IV e,}$$

welche sich in die beiden Factoren

$$x^3 + \frac{B}{2}x + \frac{C + \sqrt{C^2 - 4F}}{2} = 0 \text{ und } x^3 + \frac{B}{2}x + \frac{C - \sqrt{C^2 - 4F}}{2} = 0$$

zerlegen läßt.

Beispiel. $x^6 + 8x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 28x + 12 = 0 = (x^3 + 4x - 3)(x^3 + 4x - 4).$

Für $C^2 = 4F$ geht Gl. (IVa.) über in

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + \frac{BC}{2}x + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 0, \text{ IV f.}$$

welche in die beiden Factoren

$$x^3 + \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D}}{2}x + \frac{C}{2} = 0 \text{ und } x^3 + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4D}}{2}x + \frac{C}{2} = 0$$

zerfällt.

Beispiele.

1. $x^6 + 9x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 27x + 9 = 0 = (x^3 + 10x - 3)(x^3 - x - 3).$

2. $x^6 - 13x^4 + 8x^3 + 30x^2 - 52x + 16 = 0 = (x^3 - 3x + 4)(x^3 - 10x + 4).$

23. Wird in Gl. (IVf.) auch $D = 0$, so erhält man

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Cx^3 + \frac{BC}{2}x + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 0, \text{ IV g.}$$

welche sich in die beiden Factoren

$$x^3 + Bx + \frac{C}{2} = 0 \text{ und } x^3 + \frac{C}{2} = 0$$

zerlegen läßt.

Beispiele. 1. $x^6 - 8x^4 + 10x^3 - 40x + 25 = 0 = (x^3 - 8x + 5)(x^3 + 5).$

2. $x^6 + 7x^4 - 8x^3 - 28x + 16 = 0 = (x^3 + 7x - 4)(x^3 - 4).$

Für $D = \left(\frac{B}{2}\right)^2$ und $F = \left(\frac{C}{2}\right)^2$ wird $E = \frac{BC}{2}$ und die Gl. (IVa.) geht über in

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Cx^3 + \left(\frac{B}{2}\right)^2x^2 + \frac{BC}{2}x + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 0, \text{ IV h.}$$

welche Gleichung ein Quadrat ist der cubischen Gleichung

$$x^3 + \frac{B}{2}x + \frac{C}{2} = 0.$$

Beispiele. 1. $x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 16x + 4 = 0 = (x^3 + 4x + 2)^2$.
 2. $x^6 - 10x^4 + 6x^3 + 25x^2 - 30x + 9 = 0 = (x^3 - 5x + 3)^2$.

24. Nach der vierten Annahme ist

$$f(x) = (x^3 + A_1 x^2 + B_1 x + C_1) (x^2 + ax + b) = 0, \text{ oder entwickelt} \\ = x^5 + (A_1 + a) x^4 + (B_1 + aA_1 + b) x^3 + (C_1 + aB_1 + bA_1) x^2 + \\ + (D_1 + aC_1 + bB_1) x + bD_1 = 0. \text{ VI.}$$

Diese Gleichung (VI.) verglichen mit Gl. (I.) giebt folgende Beziehungen zwischen den Coefficienten gleicher Potenzen von x :

$$\begin{aligned} 1. A_1 + a &= A, & \text{daher 7) } A_1 &= A - a. \\ 2. B_1 + aA_1 + b &= B, & \text{daher 8) } B_1 &= B - aA + a^2 - b. \\ 3. C_1 + aB_1 + bA_1 &= C, & \text{daher 9) } C_1 &= C - bA + 2ab - aB + a^2A - a^3. \\ 4. D_1 + aC_1 + bB_1 &= D, & \text{daher 10) } C_1 &= \frac{D - D_1 - bB + abA - a^2b + b^2}{a}. \\ 5. aD_1 + bC_1 &= E, & \text{daher 11) } C_1 &= \frac{E - aD_1}{b}. \\ 6. bD_1 &= F, & \text{daher 12) } D_1 &= \frac{F}{b}. \end{aligned}$$

Man setze noch $D - D_1 = A$, so ergibt sich aus (10) und (11):

$$13. \frac{A - bB + abA - a^2b + b^2}{a} = \frac{E - aD_1}{b}, \text{ oder nach Potenzen von } a \text{ geordnet:}$$

$$f(a) = (D_1 - b^2) a^2 + (b^2A - E) a + b^3 - b^2B + bA = 0. \text{ VII.}$$

Aus (9) und (11) ergibt sich:

$$14. C - bA + 2ab - aB + a^2A - a^3 = \frac{E - aD_1}{b}, \text{ oder nach Potenzen von } a \text{ geordnet:}$$

$$f(a) = ba^3 - bAa^2 - (2b^2 - bB + D_1) a + E - bC + b^2A = 0. \text{ VIII.}$$

Die den beiden Gleichungen (VII) und (VIII) gemeinschaftliche Wurzel ist der zu b gehörige Werth von a des quadratischen Factors $x^2 + ax + b = 0$.

25. Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgende indirecte Auflösung der Gleichungen sechsten Grades, welche einen quadratischen Factor mit rationalen Coefficienten enthalten:

„Man zerlege das letzte Glied der Gleichung in seine Factoren und setze dieselben für b in die Gleichungen (VII.) und (VIII.); diejenigen Factoren, für welche die beiden Gleichungen eine gemeinsame rationale Wurzel geben, sind Werthe für b , und die rationale Wurzel ist der zugehörige Coefficient a für den quadratischen Factor $x^2 + ax + b = 0$.“

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 40x^3 + 23x^2 + 12x + 12 = 0$.

Nimmt man $b = 6$, so erhält man für (VII) und (VIII) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1. f(a) &= 17a^2 - 138a + 261 = 0 \\ 2. f(a) &= 3a^3 - 24a^2 + 35a + 30 = 0. \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt: 3. $3a^2 - 94a + 255 = 0$.

Aus (1) und (3) folgt: 4. $1184a - 3552 = 0$, woraus $a = + 3$.

Die Gleichung erhält also den quadratischen Factor: $x^2 + 3x + 6 = 0$.

$$2. f(x) = x^6 + 6x^5 - 8x^4 - 78x^3 - 29x^2 + 216x + 180 = 0.$$

Für $b = +6$ erhält man $a = +5$; die Gleichung enthält also die beiden quadratischen Factoren: $(x^2 + 5x + 6) = 0$ und $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Für $b = +10$ erhält man $a = +7$, die Gleichung enthält also den Factor:

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Für $b = -6$ erhält man $a = +1$; die Gleichung enthält also die beiden Factoren:
 $x^2 + x - 6 = 0$ und $x^2 - x - 6 = 0$. Daher ist

$$f(x) = (x + 2)(x + 3)(x + 5)(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0.$$

26. Wenn in Gl. (VI) $A = 0$ ist, so gehen die beiden Hilfgleichungen über in folgende:

$$f(a) = (D_1 - b^2)a^2 - Ea + b^3 - b^2B + bA = 0. \quad \text{VIIa.}$$

$$f(a) = ba^3 - (2b^2 - bB + D_1)a + E - bC = 0. \quad \text{VIIIa.}$$

Dieser Fall tritt ein, wenn entweder $A_1 + a = 0$, oder $A_1 = a = 0$ ist.

Im letztern Falle gehen die Gleichungen (VII) und (VIII) über in:

$$b^3 - b^2B + bD - F = 0. \quad \text{VIIb.}$$

$$E - bC = 0. \quad \text{VIIIb.}$$

Aus (VIIIb) folgt, daß $b = \frac{E}{C}$ ist. Wir ziehen daraus den Satz:

„Eine Gleichung des sechsten Grades, in welcher $A = 0$ ist und außerdem $b = \frac{E}{C}$ eine Wurzel der Gleichung (VIIb) ist, hat einen quadratischen Factor:

$$\left(x^2 + \frac{E}{C}\right) = 0.$$

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 - x^4 + 7x^3 - 67x^2 - 63x - 45 = 0$.

Hierin ist $E : C = -9$ eine Wurzel der Gleichung (VIIb),

$$\begin{array}{r|l} b^3 + b^2 - 67b + 45 = 0 \\ -9 + 72 - 45 \\ -8 + 5 - 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \quad r = -9$$

daher $f(x) = (x^2 - 9)(x^4 + 8x^2 + 7x + 5) = 0$.

$$2. f(x) = x^6 + 11x^4 + 3x^3 + 23x^2 + 15x - 35 = 0.$$

Hierin ist $E : C = +5$ eine Wurzel der Gleichung (VIIb):

$$\begin{array}{r|l} b^3 - 11b^2 + 23b + 35 = 0 \\ +5 - 55 + 115 + 35 \\ -6 - 7 - 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \quad r = +5$$

daher $f(x) = (x^2 + 5)(x^4 + 6x^2 + 3x - 7) = 0$.

27. Für die Folge wird es notwendig werden, auch für die Gleichungen anderer Grade ähnliche Gleichungen wie die Gl. (VII) und Gl. (VIII) zu haben. Wir wollen daher auch zu den Gleichungen des dritten, vierten und fünften Grades noch nachträglich diese Hilfgleichungen ableiten und das allgemeine Gesetz für die Bildung derselben aufstellen.

Aus den beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ und}$$

$$x^3 + (A_1 + a)x^2 + (b + aA_1)x + bA_1 = 0$$

ergibt sich: 1. $A = A_1 + a$, also $A_1 = A - a$

$$2. B = b + aA_1, \text{ also } A_1 = \frac{B - b}{a}$$

$$3. C = bA_1, \text{ also } A_1 = \frac{C}{b}.$$

Aus (1) und (2) folgt: $f(a) = a^2 - aA + B - b = 0. M_3$

Aus (1) und (3) folgt: $f(a) = ab - Ab + C = 0. N_3$

Aus (2) und (3) folgt: $f(a) = aC + b^2 - bB = 0. O_3.$

Aus den beiden biquadratischen Gleichungen:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \text{ und}$$

$$x^4 + (A_1 + a)x^3 + (B_1 + aA_1 + b)x^2 + (bA_1 + aB_1)x + bB_1 = 0$$

ergibt sich: 1. $A = A_1 + a$, also $A_1 = A - a$

$$2. B = B_1 + aA_1 + b, \text{ also } B_1 = B - b - aA + a^2$$

$$3. C = bA_1 + aB_1, \text{ also } B_1 = \frac{C - bA + ab}{a}$$

$$4. D = bB_1, \text{ also } B_1 = \frac{D}{b}.$$

Aus (2) und (3) folgt: $f(a) = a^3 - Aa^2 + (B - 2b)a - (C - bA) = 0. M_4$

Aus (2) und (4) folgt: $f(a) = a^2b - abA - b^2 + bB - D = 0. N_4$

Aus (3) und (4) folgt: $f(a) = a(b^2 - D) - b^2A + bC = 0. O_4.$

Aus den beiden Gleichungen des fünften Grades:

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0, \text{ und}$$

$$x^5 + (A_1 + a)x^4 + (B_1 + aA_1 + b)x^3 + (C_1 + aB_1 + bA_1)x^2 + (bB_1 + aC_1)x + bC_1 = 0$$

folgt: 1. $A = A_1 + a$, daher $A_1 = A - a$

$$2. B = B_1 + aA_1 + b, \text{ daher } B_1 = B - b - aA + a^2$$

$$3. C = C_1 + aB_1 + bA_1, \text{ daher } C_1 = C - bA + 2ab - aB + a^2A - a^3$$

$$4. D = bB_1 + aC_1, \text{ daher } C_1 = \frac{D - b(B - b - aA + a^2)}{a}$$

$$5. E = bC_1, \text{ daher } C_1 = \frac{E}{b}.$$

Aus (3) und (4) findet man $f(a) = a^4 - Aa^3 + (B - 3b)a^2 - (C - 2Ab)a + D - bB + b^2 = 0. M_5$

Aus (3) und (5) findet man $f(a) = a^3b - a^2bA + (Bb - 2b^2)a + E - bC + b^2A = 0. N_5$

Aus (4) und (5) findet man $f(a) = a^2b^2 - (b^2A - E)a - b^3 + b^2B - bD = 0. O_5.$

28. Eine Vergleichung der unter M, N und O gefundenen Hilfsleichungen ergibt folgenden allgemeinen Satz:

„Wenn M_n, N_n, O_n die Bestimmungsgleichungen für a zu einer Gleichung des n ten Grades sind, so sind die entsprechenden Bestimmungsgleichungen für die Gleichungen des $(n + 1)$ ten Grades

$$M_{n+1} = aM_n - N_n.$$

$$N_{n+1} = bM_n \pm T = aN_n - O_n \pm T.$$

$$O_{n+1} = bN_n \pm aT.$$

T bezeichnet das letzte Glied der Gleichung des $(n + 1)$ ten Grades; das obere Zeichen gilt, wenn $(n + 1)$ eine ungerade Zahl ist, das untere, wenn $(n + 1)$ eine gerade Zahl ist."

O ergibt sich stets aus M und N durch Algorithmus.

29. Nach dem vorstehenden Satze findet man für die Gleichungen des sechsten Grades:

$$f(a) = a^5 - Aa^4 + (B - 4b)a^3 - (C - 3Ab)a^2 + (D - 2bB + 3b^2)a - (E - bC + b^2A) = 0. \quad M_6$$

$$f(a) = a^4b - a^3bA + (Bb - 3b^2)a^2 - (Cb - 2Ab^2)a + (Db - Bb^2 + b^3 - F) = 0. \quad N_6$$

$$f(a) = a^3b^2 - a^2b^2A + (Bb^2 - 2b^3 - F)a + (E - bC + b^2A) = 0. \quad O_6$$

Die Gl. (O_6) ist durch b theilbar und mit Gl. (VIII) übereinstimmend; die Gleichung (VII) erhält man aus der Verbindung von N_6 und O_6 .

Diese Gleichungen M, N und O geben combinirt Gleichungen, in denen a nur in erster Potenz vorkommt; man erhält also für jedes b das zugehörige a .

Für die biquadratischen Gleichungen z. B. ist diese Endgleichung:

$$f(a) = a(\beta - b) + Ab - C = 0, \text{ worin } \beta = \frac{D}{b} \text{ zu setzen ist.}$$

Für die Gleichungen des fünften Grades ist diese Endgleichung:

$$f(a) = (bD - b^3 - Ab\beta + \beta^2)a - [b^2(C - bA) + \beta(D - bB)] = 0,$$

worin $\beta = \frac{E}{b}$ zu setzen ist.

30. Es lassen sich aber auch Gleichungen finden, wodurch man a und b direct erhält. Zu diesem Zwecke denke man sich die Gl. (I) entstanden aus

$$f(x) = (x^4 + A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta) = 0, \text{ oder entwickelt} \\ = x^6 + (A_1 + 2\alpha)x^5 + (B_1 + 2\alpha A_1 + \alpha^2 + \beta)x^4 + (C_1 + 2\alpha B_1 + \alpha^2 A_1 + \beta A_1)x^3 \\ + (D_1 + 2\alpha C_1 + \alpha^2 B_1 + \beta B_1)x^2 + (2\alpha D_1 + \alpha^2 C_1 + \beta C_1)x + (\alpha^2 + \beta)D_1 = 0. \quad IX.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (I) und (IX) giebt folgende Beziehungen ihrer Coefficienten:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + 2\alpha. \\ B &= B_1 + 2\alpha A_1 + \alpha^2 + \beta. \\ C &= C_1 + 2\alpha B_1 + \alpha^2 A_1 + \beta A_1. \\ D &= D_1 + 2\alpha C_1 + \alpha^2 B_1 + \beta B_1. \\ E &= 2\alpha D_1 + \alpha^2 C_1 + \beta C_1. \\ F &= \alpha^2 D_1 + \beta D_1. \end{aligned} \right\} A.$$

Sondert man aus der Gl. (I) α ab nach dem Schema in § 8, so geht sie über in:

$$f(x - \alpha) = x^6 + A_6x^5 + B_6x^4 + C_6x^3 + D_6x^2 + E_6x + F_6 = 0. \quad IIIa.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind aber nach § 10:

$$\left. \begin{aligned} A_6 &= A - 6\alpha. \\ B_6 &= B - 5A\alpha + 15\alpha^2. \\ C_6 &= C - 4B\alpha + 10A\alpha^2 - 20\alpha^3. \\ D_6 &= D - 3C\alpha + 6B\alpha^2 - 10A\alpha^3 + 15\alpha^4. \\ E_6 &= E - 2D\alpha + 3C\alpha^2 - 4B\alpha^3 + 5A\alpha^4 - 6\alpha^5. \\ F_6 &= F - E\alpha + D\alpha^2 - C\alpha^3 + B\alpha^4 - A\alpha^5 + \alpha^6. \end{aligned} \right\} B.$$

Setzt man aus den Gleichungen unter (A) die Werthe für A_1, B_1, C_1 etc. in die Gleichungen unter (B), so ergibt sich:

$$A_6 = A_1 - 4\alpha = f_1(\alpha).$$

$$B_5 = B_1 - 3A_1\alpha + 6\alpha^2 + \beta = f_2(\alpha) + \beta.$$

$$C_4 = C_1 - 2B_1\alpha + 3A_1\alpha^2 - 4\alpha^3 + (A_1 - 4\alpha)\beta = f_3(\alpha) + A_6\beta.$$

$$D_3 = D_1 - C_1\alpha + B_1\alpha^2 - A_1\alpha^3 + \alpha^4 + (B_1 - 3A_1\alpha + 6\alpha^2)\beta$$

$$= D_1 - C_1\alpha + B_1\alpha^2 - A_1\alpha^3 + \alpha^4 + (B_5 - \beta)\beta = f_4(\alpha) + B_5\beta - \beta^2.$$

$$E_2 = (C_1 - 2B_1\alpha + 3A_1\alpha^2 - 4\alpha^3)\beta = C_4\beta - A_6\beta^2.$$

$$F_1 = (D_1 - C_1\alpha + B_1\alpha^2 - A_1\alpha^3 + \alpha^4)\beta = D_3\beta - B_5\beta^2 + \beta^3.$$

Die beiden letzten Gleichungen:

$$1. A_6\beta^2 - C_4\beta + E_2 = 0$$

$$2. \beta^3 - B_5\beta^2 + D_3\beta - F_1 = 0$$

geben

$$\beta = \frac{E_2(A_6B_5 - C_4) - A_6^2F_1}{C_4(A_6B_5 - C_4) - A_6(A_6D_3 - E_2)} \quad X.$$

Eliminirt man β zwischen den Gleichungen (1) und (2), so erhält man die Relation:

$$[C_4(A_6B_5 - C_4) - A_6(A_6D_3 - E_2)][E_2(A_6D_3 - E_2) - A_6C_4F_1] = [E_2(A_6B_5 - C_4) - A_6^2F_1]^2 \quad Xa.$$

Setzt man in die Gl. (Xa) endlich ihre Werthe aus den Gleichungen unter (B), so erhält man eine Gleichung zwischen den bekannten Coefficienten der Gl. (I) und α , aber in Bezug auf α vom 15ten Grade, welche im Allgemeinen zur Berechnung von α wenig brauchbar ist. Aber ein für α gefundener Werth würde in Gl. (X) gesetzt das entsprechende β geben.

31. Von der Gleichung (Xa) wollen wir nur ihr letztes Glied näher betrachten, welches für den Fall, daß $A = 0$ ist, ohne seinen Zahlendivisor durch die Formel

$$E^2(BC - E) - C^2(DE - CF)$$

ausgedrückt wird. Wenn $\alpha = 0$ ist, so wird dieses Glied ebenfalls gleich Null sein, und β ist in diesem Falle, wie wir schon oben § 26 gesehen haben, gleich $\frac{E}{C}$.

Daraus ergibt sich der Satz:

„Wenn in einer reducirten Gleichung des sechsten Grades zwischen den Coefficienten die Beziehung statt findet, daß

$$E^2(BC - E) = C^2(DE - CF) \quad XI.$$

ist, so hat die Gleichung selbst zwei Wurzeln $+\sqrt{\frac{E}{C}}$ und $-\sqrt{\frac{E}{C}}$.“

32. Ist in Gl. (XI) $BC = E$, also auch $BD = F$, so geht Gl. (I) über in

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + BCx + BD = 0 \quad XII.$$

welche den Factor $(x^2 + B) = 0$ enthält.

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 - 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 32x - 12 = 0$.

Ersetzt man das fehlende Glied durch Null, so läßt sich $+2$ und -2 als Wurzel absondern:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & -4 & +8 & +3 & -32 & -12 \\ +2 & +4 & 0 & +16 & +38 & +12 & 0 \\ +2 & 0 & +8 & +19 & +6 & 0 & \\ -2 & 0 & 0 & -16 & -6 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & +8 & +3 & 0 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} r_1 = +2 \\ r_2 = -2 \end{array}$$

daher $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x^4 + 8x + 3) = 0$.

$$2. f(x) = x^6 + 9x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 63x - 45 = 0.$$

Ersetzt man das fehlende Glied durch Null, so läßt sich $+3i$ und $-3i$ als Wurzel absondern:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & +9 & +7 & -5 & +63 & -45 \\ +3i & -9 & 0 & +21i & -15i & -63 & +45 \\ +3i & 0 & +7 & -5 & +21i & -15i & 0 \\ -3i & 0 & 0 & -21i & +15i & +63 & -45 \\ \hline 0 & 0 & +7 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} r_1 = +3i \\ r_2 = -3i \end{array}$$

daher $f(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x^4 + 7x - 5) = 0$.

33. Wenn in Gl. (I) $A = B = E = 0$ ist, so geht sie über in

$$f(x) = x^6 + Bx^4 + Dx^2 + F = 0.$$

Wenn hierin außerdem $BD = F$ ist, so läßt sie sich nach § 13 zerlegen in die beiden Factoren $(x^4 + D) = 0$ und $(x^2 + B) = 0$. cf. § 20.

Beispiele. 1. $f(x) = x^6 - 9x^4 + 5x^2 - 45 = 0$.

Ersetzt man die fehlenden Glieder durch Nullen, so läßt sich $+3$ und -3 als Wurzel absondern:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & -9 & +0 & +5 & +0 & -45 \\ +3 & +9 & 0 & 0 & +15 & +45 & 0 \\ +3 & 0 & 0 & +5 & +15 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -15 & -45 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & +5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} r_1 = +3 \\ r_2 = -3 \end{array}$$

Es ist also $f(x) = (x - 3)(x + 3)(x^4 + 5) = 0$.

$$2. f(x) = x^6 + 8x^4 - 25x^2 - 200 = 0.$$

Ersetzt man die fehlenden Glieder durch Nullen, so läßt sich $+2\sqrt{-2}$ und $-2\sqrt{-2}$ als Wurzel absondern:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & +8 & +0 & -25 & +0 & -200 \\ +2\sqrt{-2} & -8 & 0 & 0 & -50\sqrt{-2} & +200 & 0 \\ +2\sqrt{-2} & 0 & 0 & -25 & -50\sqrt{-2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{-2} & 0 & 0 & 0 & +50\sqrt{-2} & -200 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} r_1 = 2\sqrt{-2} \\ r_2 = -2\sqrt{-2} \end{array}$$

Es ist also $f(x) = (x - 2\sqrt{-2})(x + 2\sqrt{-2})(x^4 - 25) = 0$.

34. Nach der fünften Annahme ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + ax + b)(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0, \text{ oder entwickelt} \\ &= x^6 + (a + a_1 + a_2)x^5 + (b + b_1 + b_2 + aa_1 + aa_2 + a_1a_2)x^4 \\ &+ [b(a_1 + a_2) + b_1(a + a_2) + b_2(a + a_1) + aa_1a_2]x^3 + (bb_1 + bb_2 \\ &+ b_1b_2 + aa_1b_2 + aa_2b_1 + a_1a_2b)x^2 + (ab_1b_2 + a_1bb_2 + a_2bb_1)x + bb_1b_2 = 0. \quad \text{XIII.} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, daß das letzte Glied derselben nur dann negativ sein wird, wenn entweder nur einer der quadratischen Factoren ein negatives letztes Glied hat, oder wenn die letzten Glieder in allen drei Factoren negativ sind. Im erstern Falle hat die Gleichung wenigstens zwei, im andern Falle sechs reelle Wurzeln. Für ein positives b hat bekanntlich der Factor $x^2 + ax + b = 0$ nur so lange reelle Wurzeln, als $a \geq 2\sqrt{b}$ ist.

Gleichungen des sechsten Grades, deren letztes Glied negativ ist, lassen sich also nach dem Absonderungsschema in § 8 auch für den Fall lösen, daß die reellen Wurzeln irrational sind. Ein Beispiel einer solchen Lösung möge zur Verdeutlichung genügen. Ist das letzte Glied der Gleichung positiv, so wird man dieses Absonderungsschema zur Auflösung der Gleichung nur dann benutzen können, wenn man anderweitig weiß, daß die Gleichung reelle Wurzeln enthält.

35. Beispiel. $f(x) = x^6 + 9x^5 + 15x^4 - 21x^3 - 47x^2 - 120x - 117 = 0.$

Ein vorläufiger Versuch zeigt, daß eine positive Wurzel zwischen 2 und 3, eine negative Wurzel zwischen 5 und 10 liegt und zwar näher an 5. Wir berechnen zuerst die positive Wurzel.

1	+	21	—	47	—	120	—	117	—	4	r ₁ = +2.123105
+	2	+	74	+	106	+	118	—	4		
+	11	+	53	+	59	—	2	1) —	121		
+	2	+	126	+	358	+	834	+	95.305711		
+	13	+	179	+	417	1) +	832	2) —	25.694289		
+	2	+	186	+	730	+	121.05711	+	22.15546493		
+	15	+	365	1) +	1147	+	953.05711	3) —	3.53882406 ...		
+	2	+	254	63.5711	+	127.58345	+	3.41808318 ...			
+	17	+	127	1) +	1210.5711	2) +	1080.64056 ...	4) —	0.12073088		
+	2	+	38	65.2634	+	27.13268664					
+	19	1) +	165	+	1275.8345	+	1107.77324664				
+	2	2.11	16.923	66.9770	3) +	1135.18360208	27.41035544				
1) +	21.1	+	652.634	13.81283296	4) +	1139.34439418	4.16079210 ...				
+	1	+	17.136	1356.63433296	+	4.16611303					
+	21.2	+	669.770	13.88343904	1) F	1210 = 1.					
+	1	2.13	17.350	1370.51777200	2) F	2569 = 2.					
+	21.3	+	687.120	13.97421840	3) F	3538 = 3.					
+	1	2.14	3.521648	2.10697812	4) F	1207 = 105.					
+	21.4	+	173.50	1384.49199040							
+	1	2.15	3.530304	2.10697812							
+	21.5	2) +	694.171952	1386.59736700							
1	432.4	+	3.538968	1388.70434512							
2) +	21.62	+	697.710920								
2	432.8	+	3.547640								
+	21.64	+	176.5152	3) +	701.258560 ...						
2	433.2	+	53364320								
+	21.66	+	176.9484	+	701.70220320						
2	433.6	+	53383904								
+	21.68	+	177.3820	+	702.32604224						
2	434.0										
+	21.70	3) +	177.8160								
2	651.69										
3) +	21.723	+	177.881169								
2	651.78										
+	21.726	+	177.946347								
3											
+	21.729										

Berechnung der
Decimalen:

$$\begin{aligned} 1) \frac{F}{E} &= \frac{1210}{832} = 1. \\ 2) \frac{F}{E} &= \frac{2569}{1080} = 2. \\ 3) \frac{F}{E} &= \frac{3538}{1135} = 3. \\ 4) \frac{F}{E} &= \frac{1207}{1143} = 105. \end{aligned}$$

Die Rechnung ist nur so weit fortgeführt, als es die auf sechs
Decimalen zu berechnende Übung verlangt.

Berechnung der negativen Wurzel.				Berechnung der positiven Wurzel.			
1	+	9	15	—	21	47	117
—	—	6	18	+	18	120	—
+	—	3	3	—	3	54	—
—	—	6	18	—	90	3174	1)
—	—	3	15	—	93	3120	2)
—	—	6	54	—	414	371.99771	3)
—	—	9	69	—	507	387.18585	4)
—	—	6	90	—	954	3879.18356...	5)
—	—	15	159	1)	1461	3719.9771	
—	—	6	126	—	28 771	151.8814	
—	—	21	285	—	1489.771	3871.8585	
—	—	6	271	1)	29.043	154.8130	
1)	+	27.1	287.71	—	1518.814	4026.6715...	
—	—	1	2.72	—	29.316	31.67408096	3)
—	—	27.2	290.43	—	1548.130	4058.34558096	
—	—	1	2.73	—	29.590	31.79398304	
—	—	27.3	293.16	2)	1577.720	4090.13956400	4)
—	—	1	2.74	—	5.984048	31.91410640	
—	—	27.4	295.90	—	1583.704048	4122.05367040	
—	—	1	2.75	—	5.995104	4.80788117	
—	—	27.5	298.65	2)	1589.699152	4126.86155157	
—	—	1	5324	—	6.006168	4.81059541	
2)	—	27.62	299.2024	—	1595.705320	4131.67214698	
—	—	2	5528	3)	6.017240		
—	—	27.64	299.7552	—	1601.722560...		
—	—	2	5532	—	90449750		
—	—	27.66	300.3084	—	1602.62705750		
—	—	2	5536	—	90474704		
—	—	27.68	300.8620	—	1603.53180454		
—	—	2	5540	3)			
—	—	27.70	301.4160	—			
—	—	2	83169	—			
3)	—	27.723	301.499169	—			
—	—	3	83178	—			
—	—	27.726	301.582347	—			
—	—	3		—			
—	—	27.729		—			

Berechnung der
Decimalen:

1)	F	=	4410	=	1.
	E	=	3120	=	
2)	F	=	9180	=	2.
	E	=	3879	=	
3)	F	=	12593	=	3.
	E	=	4042	=	
4)	F	=	4296	=	105.
	E	=	4066	=	

Auch hier ist die Rechnung nur soweit ausgeführt, als es die auf
sechs Decimalen zu berechnende Wurzel verlangte.

Die beiden berechneten Wurzeln $r_1 = + 2.123105$ und $r_2 = - 6.123105$ haben die Form $- 2 + 4.123105$ und $- 2 - 4.123105$, oder, da $4.123105 = \sqrt{17}$ ist, die Form $- 2 + \sqrt{17}$ und $- 2 - \sqrt{17}$, der quadratische Factor ist also:

$$(x + 2 + \sqrt{17})(x + 2 - \sqrt{17}) = x^2 + 4x - 13 = 0.$$

Die Absonderung dieses Factors bringt die obige Gleichung auf die des vierten Grades.

36. Wenn in Gl. (XIII) $a = a_1 = a_2 = 0$ ist, so geht sie über in

$$f(x) = x^6 + (b + b_1 + b_2)x^4 + (bb_1 + bb_2 + b_1b_2)x^2 + bb_1b_2 = 0, \text{ XIIIa}$$

welche Gleichung sich wie eine cubische lösen läßt.

Wird in dieser Gleichung noch $b = b_1 = b_2$, so erhält man

$$f(x) = x^6 + 3bx^4 + 3b^2x^2 + b^3 = 0, \text{ oder}$$

$$(x^2 + b)^3 = 0. \text{ XIIIb.}$$

Ist dagegen in Gl. (XIII) $a = a_1 = a_2$ und $b = b_1 = b_2$, so geht sie über in

$$f(x) = x^6 + 3ax^5 + 3(a^2 + b)x^4 + (a^3 + 6ab)x^3 + 3(a^2b + b^2)x^2 + 3ab^2x + b^3 = 0, \\ = (x^2 + ax + b)^3 = 0. \text{ XIIIc.}$$

37. Vergleichen wir Gl. (I) mit Gl. (XIIIc), so ergeben sich folgende Beziehungen ihrer Coefficienten:

1. $A = 3a$
2. $B = 3a^2 + 3b$
3. $C = a^3 + 6ab$
4. $D = 3a^2b + 3b^2$
5. $E = 3ab^2$
6. $F = b^3$.

Aus (1) und (2) folgt: 7. $B - aA = 3b$

Aus (2) und (3) folgt: 8. $3C - aB = 15ab$

Aus (4), (5) und (6) folgt: 9. $bD - aE = 3F$

Aus (7) folgt: 10. $b = \frac{B - aA}{3}$

Aus (9) folgt: 11. $b = \frac{3F + aE}{D}$

Aus (10) und (11) folgt: 12. $a = \frac{BD - 9F}{AD + 3E}$

$$13. b = \frac{BE + 3AF}{AD + 3E}$$

Setzt man diese Werthe für a und b in die Gleichung (8), so erhält man

$$14. 3C(AD + 3E)^2 = (BD - 9F)(ABD + 45AF + 18BE).$$

„Jede Gleichung des sechsten Grades, deren Coefficienten die Gleichung (14) befriedigen, ist ein Product aus drei gleichen quadratischen Factoren von der Form $x^2 + ax + b = 0$, deren Constanten a und b durch die Gleichungen (12) und (13) bestimmt werden.“

38. Außer diesen vereinzelt Fällen, in welchen die Lösung der Gleichungen des sechsten Grades mehr oder weniger leicht ist, haben wir zwar in § 30 eine Methode gefunden, jede Gleichung des sechsten Grades aufzulösen, die aber in ihrer Anwendung große Schwierigkeiten darbieten würde. Wir wollen daher im Folgenden eine leichtere allgemeine Lösungsmethode auffuchen und dazu die § 4 gefundene Gleichung der Quadrate der Wurzeln benutzen.

39. Vermittelt dieses Satzes in § 4 kann man aus jeder Gleichung andere Gleichungen ableiten, deren Wurzeln der 2ten, 4ten, 8ten u. Potenz der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung gleich sind. Bei lauter reellen Wurzeln geht die Gl. (II) in § 2 dann über in:

$$f(x) = x^n + (a^n + b^n + c^n + \dots) x^{n/2} + (a^n b^n + a^n c^n + a^n d^n + \dots) x^{n/4} + (a^n b^n c^n + a^n b^n d^n + \dots) x^{n/8} + (a^n b^n c^n d^n + a^n b^n e^n + \dots) x^{n/16} + (a^n b^n c^n d^n e^n + a^n b^n c^n d^n f^n + \dots) x^{n/32} + a^n b^n c^n d^n e^n f^n = 0. \quad \Pi_n.$$

Nehmen wir nun an, daß in Gl. (II_n) $a > b > c > d > e > f$ sei, so werden sämtliche Coefficienten der Gleichung bei Entwicklung der Gleichung der nten Potenz der Wurzeln stetig wachsen; aber das Wachsen der einzelnen Größen, aus denen sie bestehen, wird ein sehr verschiedenes sein, a wird schneller wachsen als b, dieses schneller als c u. c., und bei einem hinlänglich großen n wird a^n so groß werden, daß die Summe der andern Größen ($b^n + c^n + d^n + e^n + f^n$) dagegen verschwindet, der Coefficient des zweiten Gliedes also gleichbedeutend wird mit a^n . Ebenso wird der Coefficient des dritten Gliedes gleichbedeutend werden mit $a^n b^n$, des vierten mit $a^n b^n c^n$ u. c.; kurz die Gleichung (II_n) wird bei einem sehr hohen Werthe von n gleichbedeutend werden mit

$$f(x) = x^n + a^n x^{n/2} + a^n b^n x^{n/4} + a^n b^n c^n x^{n/8} + a^n b^n c^n d^n x^{n/16} + a^n b^n c^n d^n e^n x^{n/32} + a^n b^n c^n d^n e^n f^n = 0. \quad \Pi_v.$$

Wann diese Höhe erreicht ist, zeigt eine aufmerksame Betrachtung der Ableitungsformel selbst; es werden nämlich dann die Coefficienten der folgenden abgeleiteten Gleichungen nur die Quadrate der respectiven Coefficienten der zunächst vorhergehenden Gleichung sein.

40. Wenn diese letzte abgeleitete Gleichung allgemein bezeichnet wird mit

$$f(x) = x^n + A_n x^{n/2} + B_n x^{n/4} + C_n x^{n/8} + D_n x^{n/16} + E_n x^{n/32} + F_n = 0,$$

so ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß

$$a = \sqrt[n]{A_n}, \quad b = \sqrt[n]{\frac{B_n}{A_n}}, \quad c = \sqrt[n]{\frac{C_n}{B_n}}, \quad d = \sqrt[n]{\frac{D_n}{C_n}}, \quad e = \sqrt[n]{\frac{E_n}{D_n}}, \quad f = \sqrt[n]{\frac{F_n}{E_n}}.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln findet man durch eine einfache Substitution.

Da übrigens diese Methode auf Gleichungen aller Grade anwendbar ist, so mögen zunächst die Lösungen cubischer, biquadratischer und Gleichungen des fünften Grades folgen. Bei Berechnung der Potenzgleichungen sind die Gauß'schen Tafeln für Summen und Differenzen von Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, benutzt worden.

41. Beispiele.

$$1. f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Berechnung der Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2¹.

$$A^2 - 2B = (16 + 22) = + 38 \text{ und } C^2 - 2AC = (121 + 240) = + 361, \quad C^2 = 900.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2¹.

$$x^3 + 38x^2 + 361x + 900 = 0.$$

Berechnung der Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2².

$$(A^2 - 2B) = (38^2 - 722) = + 722, \quad (B^2 - 2AC) = (361^2 - 2.38.900) = + 61921, \quad C^2 = 810000.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2².

$$x^3 + 722x^2 + 61921x + 810000 = 0, \text{ oder in Logarithmen:}$$

$$x^3 + 2.85854x^2 + 4.79184x + 5.90848 = 0.$$

Berechnung der Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^3 .

$$2 \log A = 5.71708$$

$$2 \log B = 9.58368$$

$$\log 2B = 5.09287$$

$$\log 2AC = 9.06805$$

$$0.62421$$

$$0.51563$$

$$0.62390 \text{ in } C = 0.11790 \text{ in } B$$

$$0.51522 \text{ in } C = 0.15822 \text{ in } B.$$

$$31 = 10$$

$$41 = 17$$

$$0.62421 = 0.11780$$

$$0.51563 = 0.15805$$

$$5.71708$$

$$9.58368$$

$$\log(A^2 - 2B) = 5.59928$$

$$\log(B^2 - 2AC) = 9.42563$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^3 .

$$x^3 + 5.59928x^2 + 9.42563x + 11.81697 = 0.$$

Berechnung der Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^4 .

$$2 \log A = 11.19856$$

$$2 \log B = 18.85126$$

$$\log 2B = 9.72666$$

$$\log 2AC = 17.71728$$

$$1.47190$$

$$1.13398$$

$$1.47190 \text{ in } C = 0.01490 \text{ in } B$$

$$1.13320 \text{ in } C = 0.03320 \text{ in } B$$

$$11.19856$$

$$78 = 7$$

$$\log(A^2 - 2B) = 11.18366$$

$$1.13398 = 0.03313$$

$$18.85126$$

$$\log(B^2 - 2AC) = 18.81813$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^4 .

$$x^3 + 11.18366x^2 + 18.81813x + 23.63394 = 0.$$

Berechnung der Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^5 .

$$2 \log A = 22.36732$$

$$2 \log B = 37.63626$$

$$\log 2B = 19.11916$$

$$\log 2AC = 35.11863$$

$$3.24816$$

$$2.51763$$

$$3.24025 \text{ in } C = 0.00025 \text{ in } B$$

$$2.51134 \text{ in } C = 0.00134 \text{ in } B$$

$$791 = 1$$

$$629 = 2$$

$$3.24816 = 0.00024$$

$$2.51763 = 0.00132$$

$$22.36732$$

$$37.63626$$

$$\log(A^2 - 2B) = 22.36708$$

$$\log(B^2 - 2AC) = 37.63494$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^5 .

$$x^3 + 22.36708x^2 + 37.63494x + 47.26788 = 0.$$

Berechnung der Gleichung der Potenz = 2^6 .

$$2 \log A = 44.73416$$

$$2 \log B = 75.26988$$

$$\log 2B = 37.93597$$

$$\log 2AC = 69.93599$$

$$6.77819$$

$$5.33389$$

$$6.77819 \text{ in } C = 0.00000 \text{ in } B$$

$$5.33389 \text{ in } C = 0.00000 \text{ in } B$$

also

also

$$\log(A^2 - 2B) = 44.73416$$

$$\log(B^2 - 2AC) = 75.26988$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^6 .

$$x^3 + 44.73416x^2 + 75.26988x + 94.53576 = 0.$$

Die Rechnung zeigt, daß die weitere Entwicklung nutzlos sein würde.

$$\log a = \frac{44.73416}{64} = 0.69897, \text{ daher } a = 5.$$

$$\log B = 75.26988$$

$$\log A = 44.73416$$

$$\log b = \frac{30.53572}{64} = 0.47712, \text{ daher } b = 3.$$

$$\log C = 94.53576$$

$$\log B = 75.26988$$

$$\log c = \frac{19.26588}{64} = 0.30103, \text{ daher } c = 2.$$

Substitution zur Bestimmung der Vorzeichen:

$$\begin{array}{r|l} 1 & -4 & -11 & +30 \\ +2 & -4 & -30 & \\ -2 & -15 & & 0 \\ +5 & +15 & +5 & \\ +3 & & 0 & \end{array} \quad +2$$

Es ist also $f(x) = (x + 3)(x - 5)(x - 2) = 0$.

Bei den folgenden Beispielen wollen wir nur die Gleichungen der Potenzen der Wurzeln geben, die Berechnung derselben aber weglassen.

$$2. f(x) = x^4 - 7x^3 - 49x^2 + 223x + 840 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln $= 2^1$.

$$x^4 + 147x^3 + 7203x^2 + 132049x + 705600 = 0, \text{ oder in Logarithmen}$$

$$x^4 + 2.16732x^3 + 3.85751x^2 + 5.12074x + 5.84856 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln $= 2^2$.

$$x^4 + 3.85753x^3 + 7.16053x^2 + 9.86170x + 11.69711 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln $= 2^3$.

$$x^4 + 7.36065x^3 + 14.02381x^2 + 19.58527x + 23.39422 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln $= 2^4$.

$$x^4 + 14.49847x^3 + 27.98636x^2 + 39.15491x + 46.78844 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln $= 2^5$.

$$x^4 + 28.90264x^3 + 55.96855x^2 + 78.30956x + 93.57688 = 0.$$

Hier ist die Entwicklung zu Ende.

$$\log a = \frac{28.90264}{32} = 0.90320, \text{ daher } a = 8.002....$$

$$\log B = 55.96855$$

$$\log A = 28.90264$$

$$\log b = \frac{27.06591}{32} = 0.84581, \text{ daher } b = 7.011....$$

$$\log C = 78.30956$$

$$\log B = 55.96855$$

$$\log c = \frac{22.34101}{32} = 0.69815, \text{ daher } c = 4.990 \dots$$

$$\log D = 93.57688$$

$$\log C = 78.30956$$

$$\log d = \frac{15.26732}{32} = 0.47710, \text{ daher } d = 3.000 \dots$$

Substitution zur Bestimmung der Vorzeichen und genauere Berechnung der Wurzeln.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -7 & -49 & +223 & +840 & a = +8 \\ +8 & +8 & -328 & -840 & 0 & \\ +1 & -41 & -105 & 0 & & \\ +7 & +56 & +105 & b = +7 \\ +8 & +15 & 0 & & & \\ -5 & -15 & c = -5 \\ +3 & 0 & & & & \end{array}$$

Es ist also $f(x) = (x + 3)(x + 5)(x - 7)(x - 8) = 0$.

$$3. f(x) = x^5 - 3x^4 - 93x^3 + 47x^2 + 2316x + 3780 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^1 in Logarithmen:

$$x^5 + 2.29003x^4 + 4.13236x^3 + 5.61311x^2 + 6.69971x + 7.15498 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^2 .

$$x^5 + 4.03739x^4 + 7.53036x^3 + 10.58045x^2 + 13.12583x + 14.30997 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^3 .

$$x^5 + 7.70729x^4 + 14.54053x^3 + 20.73774x^2 + 26.21212x + 28.61994 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^4 .

$$x^5 + 15.27978x^4 + 28.81381x^3 + 41.26885x^2 + 52.42349x + 57.23988 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^5 .

$$x^5 + 30.54368x^4 + 57.54842x^3 + 82.49188x^2 + 104.84698x + 114.47976 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^6 .

$$x^5 + 61.08711x^4 + 115.08924x^3 + 164.98264x^2 + 209.69396x + 228.95952 = 0.$$

$$\log a = \frac{61.08711}{64} = 0.95448; \text{ daher } a = 9.004 \dots$$

$$\log b = \frac{54.00213}{64} = 0.84378; \text{ daher } b = 6.9788 \dots$$

$$\log c = \frac{49.89340}{64} = 0.77958; \text{ daher } c = 6.019 \dots$$

$$\log d = \frac{44.71132}{64} = 0.69861; \text{ daher } d = 4.995 \dots$$

$$\log e = \frac{19.26556}{64} = 0.30102; \text{ daher } e = 2.000 \dots$$

Substitution zur Bestimmung der Vorzeichen und genauere Berechnung der Wurzeln.

$$\begin{array}{r|l}
 1 - 3 - 93 + 47 + 2316 + 3780 & \\
 - 2 + 10 + 166 - 426 - 3780 & e = - 2 \\
 - 5 - 83 + 213 + 1890 & 0 \\
 - 5 + 50 + 165 - 1890 & d = - 5 \\
 - 10 - 33 + 378 & 0 \\
 - 6 + 96 - 378 & c = - 6 \\
 - 16 + 63 & 0 \\
 + 7 - 63 & b = + 7 \\
 - 9 & 0
 \end{array}$$

daher $f(x) = (x - 9)(x - 7)(x + 6)(x + 5)(x + 2) = 0$.

42. Für den Fall, daß alle Wurzeln imaginär sind, wollen wir unsrer ferneren Betrachtung die Gleichung (XIII) in § 34 zu Grunde legen. Jeder ihrer quadratischen Factoren, wie $x^2 + ax + b = 0$, wird nur dann imaginäre Wurzeln enthalten, wenn $a < 2\sqrt{b}$ ist. Für diesen Fall mögen die Wurzeln mit

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ und } r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

bezeichnet werden, woraus sich der quadratische Factor

$$x^2 + 2r \cos \varphi x + r^2 = 0$$

ergiebt. Zur Berechnung von φ haben wir die beiden Gleichungen:

$$a = 2r \cos \varphi \text{ und } b = r^2, \text{ woraus } \cos \varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}} \text{ sich ergiebt.}$$

Wendet man auf diesen Factor die Ableitungsformel in § 5 an, so erhält man für die Potenzen der Wurzeln gleich $2^1, 2^2, 2^3$ u. nach einander folgende Gleichungen:

$$x^2 + 2r^2 \cos 2\varphi x + r^4 = 0.$$

$$x^2 + 2r^4 \cos 4\varphi x + r^8 = 0.$$

$$x^2 + 2r^8 \cos 8\varphi x + r^{16} = 0.$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$x^2 + 2r^n \cos n\varphi x + r^{2n} = 0.$$

worin also $r^2 = b, r^4 = b^2, r^8 = b^4$ u. ist.

43. Man ersieht sogleich, daß hierin der Coefficient von x nicht stetig wachsen werde, da der Factor $\cos n\varphi$ für verschiedene Werthe von n bald größer, bald kleiner, bald positiv, bald negativ sein wird. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen einen solchen schwankenden Coefficienten mit A , so wird die aus Gl. (XIII) entwickelte Gleichung der Potenzen der Wurzeln sein:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & x^5 + (A + A_1 + A_2) x^5 + (r^{2n} + r_1^{2n} + r_2^{2n} + AA_1 + AA_2 + A_1A_2) x^4 \\
 & + [r^{2n}(A_1 + A_2) + r_1^{2n}(A + A_2) + r_2^{2n}(A + A_1) + (AA_1A_2)] x^3 \\
 & + (r^{2n}r_1^{2n} + r^{2n}r_2^{2n} + r_1^{2n}r_2^{2n} + r^{2n}A_1A_2 + r_1^{2n}AA_2 + r_2^{2n}AA_1) x^2 \\
 & + (r^{2n}r_1^{2n}A_2 + r^{2n}r_2^{2n}A_1 + r_1^{2n}r_2^{2n}A) x + r^{2n}r_1^{2n}r_2^{2n} = 0. \text{ XIII n.}
 \end{aligned}$$

In dieser Gleichung werden die Coefficienten des zweiten, vierten und sechsten Gliedes, da sie entweder ganz oder zum größeren Theile aus Größen mit schwankendem Werthe zusammengesetzt sind, für die wachsenden Werthe von n nicht stetig wachsen, sondern ebenfalls schwankende Werthe

haben; dagegen werden die Coefficienten des dritten, fünften und siebenten Gliedes stetig wachsen, da die Hauptgrößen, aus denen sie bestehen, stetig wachsen.

44. Nehmen wir nun an, daß $r > r_1 > r_2$ sei und setzen wir $A = 2r^n$, $A_1 = 2r_1^n$, $A_2 = 2r_2^n$, welchen Werthen sich die Größen A , A_1 , A_2 wohl nähern, sie aber nie erreichen können, da ja bei unserer Annahme $\cos \varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}}$ nie gleich 1 werden kann; so geht der Coefficient des dritten Gliedes über in:

$$r^{2n} + r_1^{2n} + r_2^{2n} + 4r^n r_1^n + 4r^n r_2^n + 4r_1^n r_2^n.$$

Bei einer bestimmten Größe von n wird auch hier r_2^{2n} gegen r_1^{2n} , und dieses gegen r^{2n} verschwinden, so daß dann dieser Coefficient gleichbedeutend sein wird mit

$$r^{2n} + 4r^n r_1^n.$$

Auch dieser Ausdruck wird endlich in r^{2n} übergehen. Denn $r^{2n} + 4r^n r_1^n = r^n (r^n + 4r_1^n)$ wird in r^{2n} übergehen, sobald $r^n > 4r_1^n$, oder sobald $r > r_1 \sqrt[4]{4}$ ist. Die Zahl unter dem Wurzelzeichen ist aber unabhängig von der Potenz n und bleibt für alle Werthe derselben constant; folglich wird sich $\sqrt[4]{4}$ der Einheit immer mehr nähern, je größer n wird, und zuletzt mit ihr zusammenfallen, was z. B. bei $n = 128$ fast schon der Fall ist, da $\sqrt[128]{4} = 1.011$ ist. Die obige Bedingung geht also über in die, daß $r > r_1$ ist, was wir schon angenommen haben.

Der Coefficient des fünften Gliedes wird durch unsere Substitution

$$r^{2n} r_1^{2n} + r^{2n} r_2^{2n} + r_1^{2n} r_2^{2n} + 4r^{2n} r_1^n r_2^n + 4r_1^{2n} r^n r_2^n + 4r_2^{2n} r^n r_1^n.$$

Auch dieser Coefficient wird bei einem bestimmten Werthe von n gleichbedeutend sein mit

$$r^{2n} r_1^{2n} + 4r^{2n} r_1^n r_2^n.$$

und wird bei weiterem Wachsen von n endlich in $r^{2n} r_1^{2n}$ übergehen. Denn da $r^{2n} r_1^{2n} + 4r^{2n} r_1^n r_2^n = r^{2n} r_1^n (r_1^n + 4r_2^n)$ ist, so muß auch hier bei hinreichend hohem n endlich r_1 größer werden als $r_2 \sqrt[4]{4}$.

45. Bezeichnen wir nun die Coefficienten mit schwankenden Werthen allgemein mit C_0 , und setzen wir für r , r_1 , r_2 ihre Werthe ein, so geht die Gleichung (XIII_n) für ein hinreichend hohes n über in

$$f(x) = x^6 + C_0 x^5 + b^n x^4 + C_0 x^3 + b^n b_1^n x^2 + C_0 x + b^n b_1^n b_2^n = 0. \quad (\text{XIII}\omega.)$$

Wir erhalten also aus dieser Gleichung die n te Potenz der letzten Glieder der drei quadratischen Factoren, in welche die Gleichung (XIII) selbst zerlegt werden kann, und zwar durch den Coefficienten des dritten Gliedes die n te Potenz des größten b , durch den Coefficienten des fünften Gliedes das Product der n ten Potenz des größten und nächstgrößten b , durch das letzte Glied das Product der n ten Potenz aller drei b .

Wenn aber b , b_1 , b_2 gefunden sind, so geben die Gleichungen M, N, O des § 24 und § 27 die Werthe der zugehörigen Coefficienten a , a_1 , a_2 . Aus den quadratischen Factoren lassen sich endlich die Wurzeln selbst berechnen.

46. Es ist einleuchtend, daß man auf diese Weise jede Gleichung jeden Grades von geradem Exponenten auflösen kann, die Wurzeln mögen reell oder imaginär sein, da das stetige Wachsen der Coefficienten des dritten, fünften u. Gliedes von den Coefficienten a der quadratischen Factoren unabhängig ist, ja vielmehr durch solche Coefficienten, die zu reellen Wurzeln gehören, nur vermehrt wird.

Da ferner nach dem Vorgetragenen alle Coefficienten der Gleichungen der Potenzen der Wurzeln stetig wachsen müssen, wenn alle Wurzeln reell sind, dagegen nicht alle Coefficienten stetig wachsen können, wenn die Wurzeln imaginär sind, so folgt daraus, daß in jeder Gleichung von geradem Grade so viele Paare imaginärer Wurzeln vorhanden sein müssen, so viele Coefficienten mit schwankendem Werthe die Gleichungen für höhere Potenzen der Wurzeln aufweisen.

Da endlich jede Gleichung von ungeradem Grade angesehen werden kann als eine Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied Null ist, so gilt das eben Gefundene ohne Unterschied des Grades für alle Gleichungen.

47. Beispiele. 1. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 3x + 42 = 0$.

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^1 .

$$x^4 - 8x^3 + 100x^2 - 327x + 1764 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^2 .

$$x^4 - 136x^3 + 8296x^2 - 245871x + 3111696 = 0, \text{ oder in Logarithmen}$$

$$x^4 - 2.11354x^3 + 3.91887x^2 - 5.39071x + 6.49299 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^3 .

$$x^4 + 3.27974x^3 + 6.91220x^2 + 9.93987x + 12.98598 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^4 .

$$x^4 - 7.10423x^3 + 13.72383x^2 - 19.91588x + 25.97196 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^5 .

$$x^4 + 13.74640x^3 + 26.98379x^2 - 39.49676x + 51.94392 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^6 .

$$x^4 + 27.07318x^3 + 54.11253x^2 - 78.85010x + 103.88784 = 0.$$

Da die Coefficienten des zweiten und vierten Gliedes schwankende Werthe darbieten, so enthält die Gleichung zwei Paar imaginärer Wurzeln.

$$\log b = \frac{54.11253}{64} = 0.84550, \text{ daher } b = 7$$

$$\log D = 103.88784$$

$$\log B = \frac{54.11253}{64}$$

$$\log b_1 = \frac{49.77531}{64} = 0.77773, \text{ daher } b_1 = 5.994 \dots$$

Die zugehörigen a und a_1 finden wir aus der Endgleichung in § 29

$$f(a) = a(\beta - b) + Ab - C = 0.$$

Da hier $A = 0$, $C = +3$, $\beta = 6$, $b = 7$ ist, so findet man $a = -3$, $a_1 = +3$.

Die obige Gleichung ist demnach ein Product aus den beiden quadratischen Factoren

$$x^2 - 3x + 7 = 0 \text{ und } x^2 + 3x + 6 = 0.$$

$$2. f(x) = x^5 + 12x^4 + 66x^3 + 189x^2 + 170x - 168 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^1 .

$$x^5 + 12x^4 + 160x^3 + 9249x^2 + 92404x + 28224 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^2 .

$$x^5 - 176x^4 - 11568x^3 + 56652097x^2 + 8016411664x + 796594176 = 0,$$

oder in Logarithmen

$$x^5 - 2.24551x^4 - 4.06325x^3 + 7.75321x^2 + 9.90398x + 8.90123 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^3 .

$$x^5 + 4.73329x^4 + 10.55761x^3 + 15.53080x^2 + 19.80735x + 17.80246 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^4 .

$$x^5 - 10.84066x^4 + 21.02725x^3 + 30.83819x^2 + 39.61470x + 35.60492 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^5 .

$$x^5 + 21.42673x^4 + 42.32153x^3 + 61.58768x^2 + 79.22940x + 71.20984 = 0.$$

Hier ist die Entwicklung abzubrechen. Die Gleichung enthält zwei imaginäre Wurzeln angezeigt durch den negativen Coefficienten des zweiten Gliedes der vorletzten Gleichung. Es ist

$$\log b^{32} = 42.32153, \text{ daher } b = 21.015 \dots$$

$$\log C = 61.58768$$

$$\log B = 42.32153$$

$$\log r^{32} = 19.26615, \text{ daher } r = 4.000 \dots$$

$$\log D = 79.22940$$

$$\log C = 61.58768$$

$$\log r_1^{32} = 17.64172, \text{ daher } r_1 = 3.56 \dots$$

$$\log E = 71.20984$$

$$\log D = 79.22940$$

$$\log r_2^{32} = 23.98044 - 32, \text{ daher } r_2 = 0.561 \dots$$

Setzt man $b = 21$, so giebt die Endgleichung in § 29 für das entsprechende a den Werth $+ 5$, und die Gleichung enthält den quadratischen Factor:

$$x^2 + 5x + 21 = 0.$$

Eine Division der Gleichung mit diesem Factor giebt die cubische Gleichung:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 10x - & = 0 \\ - 4 & - 12 & + 8 \\ \hline + 3 & - 2 & 0 \\ \hline & 3 & 9 \\ - 2 & 4 \\ \hline & 3 & 17 \\ + 2 & 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} r = -4 \end{array} \right.$$

daher ist $f(x) = (x^2 + 5x + 21)(x + 4)(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17})(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}) = 0$.

$$3. f(x) = x^6 + 3x^5 - 94x^4 + 109x^3 - 585x^2 + 1196x - 3360 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^1 .

$$x^6 + 197x^5 + 7012x^4 - 84203x^3 + 713177x^2 - 2500784x + 11289600 = 0,$$

oder in Logarithmen

$$x^6 + 2.29446x^5 + 3.84584x^4 - 4.92532x^3 + 5.86319x^2 - 6.39807x + 7.05267 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^2 .

$$x^6 + 4.39418x^5 + 7.92328x^4 - 9.61592x^3 + 11.43180x^2 - 13.00356x + 14.10535 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^3 .

$$x^6 + 8.64998x^5 + 15.85906x^4 - 19.45919x^3 + 22.04653x^2 + 25.51523x + 28.21070 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^4 .

$$x^6 + 17.26730x^5 + 31.71834x^4 + 38.91840x^3 + 45.35106x^2 + 50.85688x + 56.42140 = 0.$$

Gleichung der Potenz der Wurzeln = 2^5 .

$$x^6 + 34.53327x^5 + 63.43668x^4 + 77.65522x^3 + 90.58483x^2 - 101.82416x + 112.84280 = 0.$$

Die weitere Entwicklung kann unterbleiben. Die Gleichung enthält zwei Paar imaginärer Wurzeln, welche durch die negativen Glieder angezeigt werden. Die beiden reellen Wurzeln werden durch die Coefficienten des zweiten und dritten Gliedes bestimmt.

$$\log r = \frac{34.53327}{32} = 1.07916, \text{ daher } r = 12.00..$$

$$\log B = 63.43668$$

$$\log A = 34.53327$$

$$\log r_1 = \frac{28.90341}{32} = 0.90313, \text{ daher } r_1 = 8.00...$$

Dagegen findet man:

$$\log D = 90.58483$$

$$\log B = 63.43668$$

$$\log b = \frac{27.14815}{32} = 0.84837; \text{ daher } b = 7.053....$$

$$\log F = 112.84280$$

$$\log D = 90.58483$$

$$\log b_1 = \frac{22.25797}{32} = 0.69556; \text{ daher } b_1 = 4.9609....$$

Substitution zur Bestimmung der Vorzeichen und genauere Berechnung der reellen Wurzeln.

$$\begin{array}{r|l} 1 & + & 3 & - & 94 & + & 109 & - & 585 & + & 1196 & - & 3360 \\ - & 12 & + & 108 & - & 168 & + & 708 & - & 1476 & + & 3360 & r = - 12 \\ - & 9 & + & 14 & - & 59 & + & 123 & - & 280 & & 0 \\ + & 8 & - & 8 & + & 48 & - & 88 & + & 280 & r_1 = + 8 \\ - & 1 & + & 6 & - & 11 & + & 35 & & 0 \end{array}$$

Die Gleichung besteht aus den Factoren $x + 12 = 0$ und $(x - 8) = 0$ und der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 11x + 35 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß wenn $b = 7$ ist, $b_1 = 5$ sein muß.

Da hier $A = - 1$, $C = - 11$, so giebt die Endgleichung in § 29 für $b = 7$ das zu-

gehörige $a = + 2$, und für $b_1 = 5$ das zugehörige $a_1 = - 3$. Die biquadratische Gleichung besteht also aus den beiden quadratischen Factoren:

$$x^2 + 2x + 7 = 0 \text{ und } x^2 - 3x + 5 = 0$$

und damit ist die Lösung der obigen Gleichung vollendet.

48. Nach der eben vorgetragenen Methode kann man zwar die numerischen Gleichungen aller Grade lösen, man erhält aber nur mehr oder weniger genaue Näherungswerthe der reellen Wurzeln, die jedoch nach dem Beispiele in § 35 bis zu jedem Grade der Genauigkeit berechnet werden können. Sind ein oder zwei Paar imaginärer Wurzeln vorhanden, so lassen sich auch diese genauer berechnen, da man es nach der Absonderung der reellen Wurzeln nur im erstern Falle mit einer quadratischen, im andern Falle mit einer biquadratischen Gleichung zu thun hat, deren Lösung keine besondere Schwierigkeiten darbietet. Sind dagegen drei und mehr Paar imaginärer Wurzeln vorhanden, so erfordert ihre genauere Werthbestimmung eine sehr complicirte Rechnung, deren Vortrag hier unterbleiben muß, da der Zweck dieser Abhandlung war, nur solche Lösungsmethoden zu entwickeln, deren Anwendung verhältnißmäßig leicht ist, und durch deren Auffuchung zugleich die wichtigsten Sätze über die Gleichungen selbst entwickelt werden konnten. —
