

Elementare Auflösung der numerischen Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit einer Unbekannten.

Von Dr. Erner.

1. Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung ist

$$f(x) = x^2 + Ax + B = 0. \quad I.$$

Diese Gleichung, in welcher A und B rational sein sollen, kann betrachtet werden als das Product zweier Factoren

$$(x \pm a) = 0, (x \pm b) = 0,$$

in welchen a und b die Wurzeln der Gleichung bezeichnen. Diese Wurzeln sind positiv oder negativ, je nachdem sie in jenen Factoren, welche wir Wurzelfactoren nennen wollen, negativ oder positiv sind. Ein Wurzelfactor dagegen soll positiv oder negativ heißen, je nachdem er eine Summe oder eine Differenz darstellt.

Eine quadratische Gleichung auflösen, heißt sie in ihre Wurzelfactoren zerlegen.

2. Hinsichtlich der Vorzeichen sind nur folgende Fälle möglich:

$$1. (x \pm a) (x \pm b) = x^2 \pm (a + b)x + ab = x^2 \pm Ax + B = 0.$$

$$2. (x \pm a) (x \mp b) = x^2 \pm (a - b)x - ab = x^2 \pm Ax - B = 0.$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $a > b$ sei.

Die Aufeinanderfolge zweier Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen heißt ein Zeichenwechsel. — Die Anzahl der Zeichenwechsel stimmt also mit der Anzahl der positiven Wurzeln überein.

3. Was auch a und b sein mögen, man kann immer

$$a = \alpha + \beta, \quad b = \alpha - \beta$$

setzen, worin α rational sein soll, aber auch Null sein kann, β dagegen vorläufig nicht näher zu bestimmen ist. Bei dieser Annahme gehen die Gleichungen des § 2. über in:

$$3. [x \pm (\alpha + \beta)] [x \pm (\alpha - \beta)] = x^2 \pm 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Denn da β , wenn auch vorläufig unbestimmt, jedenfalls aber auch größer als α sein kann, so erhält Gl. (3) alle bei ungleichen Wurzeln hinsichtlich der Vorzeichen vorkommenden Fälle.

Wir ziehen aus Gl. (3) folgende allgemeine Regel:

„In einer quadratischen Gleichung mit rationalem Coefficienten ist dieser Coefficient gleich dem doppelten rationalen Theile (α) der Wurzeln; und man erhält das Quadrat des andern Theiles (β) der Wurzeln, wenn man das Quadrat des rationalen Theiles (α) vom letzten Gliede der Gleichung abzieht.“

Der rationale Wurzeltheil (α) erscheint in der Gleichung stets mit dem Vorzeichen, welches er im Wurzelfactor hat.

4. Vergleicht man Gl. (3) mit Gl. (I), so ist

$$A = 2\alpha, \pm B = \alpha^2 - \beta^2,$$

und man erhält nach vorstehender Regel

$$\alpha = \frac{A}{2}, \beta^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \mp B,$$

also für beide Wurzelfactoren:

$$\left[x \mp \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 \mp B}\right] = 0, \left[x \pm \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 \pm B}\right] = 0. \quad \text{II.}$$

Unter dem Wurzelzeichen erscheint also B negativ oder positiv, je nachdem es in der Gleichung selbst positiv oder negativ ist. —

5. Die Wurzelfactoren unter (II) geben uns nähern Aufschluß über β . So lange nämlich B in diesen Formeln positiv ist, oder, wenn negativ, doch kleiner als $\left(\frac{A}{2}\right)^2$, ist β reell. Ist dagegen $-B > \left(\frac{A}{2}\right)^2$, so ist β imaginär. Die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind also entweder reell oder imaginär. Setzt man in dem letzteren Falle

$$a = (\alpha + \beta i), \quad b = (\alpha - \beta i), \quad 1 = \sqrt{-1},$$

so wird das letzte Glied der Gleichung

$$B = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2.$$

6. Um auf bequeme Weise die Wurzelfactoren einer quadratischen Gleichung zu erhalten, „zähle man, nach der Regel in § 3, zum Coefficienten des zweiten Gliedes seine Hälfte mit entgegengesetztem Zeichen; multiplicire diese Summe mit eben dieser Hälfte und zähle dieses Product zum letzten Gliede. Die letzte Summe ist gleich (β^2) , deren Quadratwurzel reell oder imaginär ist, je nachdem (β^2) negativ oder positiv ist.“

Ann. Diese Regel ist, was leicht erweislich, auch anwendbar, wenn der Coefficient irrational ist.

Beispiele. 1. $f(x) = x^2 + 8x - 14 = 0$

$$\begin{array}{r} -4 \quad -16 \\ +4 = \alpha - 30 = \beta^2; \text{ daher} \end{array}$$

$$f(x) = (x + 4 + \sqrt{30})(x + 4 - \sqrt{30}) = 0.$$

2. $f(x) = x^2 - 10x + 35 = 0$

$$\begin{array}{r} +5 \quad -25 \\ -5 = \alpha + 10 = \beta^2; \text{ daher} \end{array}$$

$$f(x) = (x - 5 + \sqrt{-10})(x - 5 - \sqrt{-10}) = 0.$$

Die Wurzel selbst findet man durch eine einfache Wurzelausziehung.

7. Die allgemeine Form einer cubischen Gleichung ist

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

worin A, B, C rational sein sollen. Wir nennen A den ersten, B den zweiten Coefficienten, C das letzte Glied der Gleichung. — Die Gleichung kann betrachtet werden als das Product dreier Wurzelfactoren,

von denen zwei imaginär sein können. Die imaginären Wurzelfactoren nennen wir positive oder negative, je nachdem in ihnen der reelle Theil positiv oder negativ ist.

Eine cubische Gleichung auflösen heißt sie in ihre Wurzelfactoren zerlegen.

A. Bestimmung der Vorzeichen.

8. 1. $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) = x^3 \pm (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x \pm abc = 0.$

2. $(x \pm a)[x \pm (b + ci)][x \pm (b - ci)] = x^3 \pm (2b + a)x^2 + (b^2 + 2ab + c^2)x \pm a(b^2 + c^2) = 0.$

3. $(x \pm a)(x + ci)(x - ci) = x^3 \pm ax^2 + c^2x \pm ac^2 = 0.$

In Gl. (1 und 2) ist offenbar $AB > C$; in Gl. (3) $AB = C$.

Man hat in allen drei Gleichungen

entweder: $+++$, oder: $+-+$.

4. $(x + a)(x + b)(x - c) = x^3 + (a + b - c)x^2 + (ab - (a + b)c)x - abc = 0.$

5. $(x - a)(x - b)(x + c) = x^3 - (a + b - c)x^2 + (ab - (a + b)c)x + abc = 0.$

I. Wenn $c > (a + b)$, so hat man

in Gl. (4): $+- -$, in Gl. (5): $++ -$.

II. Bei $c = (a + b)$ hat man

in Gl. (4): $+0 -$, in Gl. (5): $+0 -$.

III. Wenn $c < (a + b)$ ist, so hat man, da $ab \equiv (a + b)c$ ist,

in Gl. (4): $+++$, oder $++0$, oder $++ -$,

in Gl. (5): $++ +$, oder $++0$, oder $++ -$.

„So viele reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel.“

9. 1. $(x + a)(x - b + ci)(x - b - ci) = x^3 - (2b - a)x^2 + (b^2 - 2ab + c^2)x + a(b^2 + c^2) = 0.$

2. $(x - a)(x + b + ci)(x + b - ci) = x^3 + (2b - a)x^2 + (b^2 - 2ab + c^2)x - a(b^2 + c^2) = 0.$

In beiden Gleichungen ist das dritte Glied positiv, Null oder negativ, je nachdem $b^2 + c^2 \equiv 2ab$ ist.

I. Bei $2b > a$ hat man

in Gl. (1) entweder $+- +$, oder $+-0$, oder $+- -$,

in Gl. (2) entweder $++ +$, oder $++0$, oder $++ -$.

II. Bei $2b = a$ hat man

in Gl. (1) entweder $+0 +$, oder $+00$, oder $+0 -$,

in Gl. (2) entweder $+0 +$, oder $+00$, oder $+0 -$.

III. Bei $2b < a$ hat man

in Gl. (1) entweder $+++$, oder $++0$, oder $++ -$,

in Gl. (2) entweder $++ +$, oder $++0$, oder $++ -$.

Gl. (1) bietet also bisweilen keine, Gl. (2) bisweilen drei Zeichenwechsel dar.

Setzen wir aber für diesen Fall $a = 2b + m$ (m stets positiv), so muß $c^2 > 2(2b + m)b - b^2$

oder $c^2 > 3b^2 + 2mb$ sein. Nehmen wir ferner an, daß $c^2 = 3b^2 + 2mb + n$ (n stets positiv) sei, so gehen die Gleichungen über in

$$\text{Gl. (1')} = x^3 + mx^2 + nx + (2b + m)(4b^2 + 2mb + n) = 0,$$

$$\text{Gl. (2')} = x^3 - mx^2 + nx - (2b + m)(4b^2 + 2mb + n) = 0,$$

worin offenbar $AB < C$ ist.

10. Aus § 8 und § 9 gewinnen wir folgende Zeichenregel:

Wenn eine cubische Gleichung keinen oder drei Zeichenwechsel darbietet, und es ist $AB > C$, so sind ihre drei Wurzelfactoren im erstern Falle positiv, im andern negativ, und zwei derselben können auch imaginär sein. Wenn aber $AB = C$ ist¹⁾, so enthält die Gleichung zwei einfache imaginäre Wurzeln $\pm \sqrt{-B}$. Ist endlich $AB < C$, so enthält die Gleichung im erstern Falle nur einen reellen positiven und zwei imaginäre negative, im andern Falle nur einen reellen negativen und zwei imaginäre positive Wurzelfactoren. — Finden sich ferner in einer Gleichung zwei Zeichenwechsel oder nur einer, so hat dieselbe im erstern Falle zwei, im andern nur einen negativen Wurzelfactor; und von den drei Factoren müssen zwei imaginär sein, wenn entweder die Seitenglieder eines fehlenden Gliedes gleiche Vorzeichen haben, oder wenn zwei Glieder zugleich fehlen.

Endlich enthält jede cubische Gleichung wenigstens einen reellen Wurzelfactor mit dem Zeichen des letzten Gliedes. —

Aus den Gleichungen des § 8 und § 9 ersieht man auch, daß jede Gleichung durch ihre Wurzelfactoren theilbar ist; daß durch gleichzeitige Veränderung der Vorzeichen des zweiten und vierten Gliedes positive Wurzelfactoren in negative, und umgekehrt, verwandelt werden; und daß der erste Coefficient stets gleich ist der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen.

1) Anmerkung. Da auch $(x + a)(x - a)(x \pm b) = x^3 \pm b x^2 - a^2 x \mp a^2 b = 0$, so gewinnt man folgende allgemeine Regel: „Jede cubische Gleichung, in welcher $AB = C$ ist, hat eine Wurzel $-A$ und zwei andere $\pm \sqrt{-B}$.“ Die beiden letztern Wurzeln sind also reell oder imaginär, je nachdem der zweite Coefficient negativ oder positiv ist. —

Es mögen hier noch zwei leicht zu beweisende Sätze stehen.

1. Jede cubische Gleichung von der Form

$a, x^3 \pm 2Mx^2 + (M^2 + N)x \pm MN = 0$, oder $b, x^3 - (M^2 - N)x \pm MN = 0$,
hat eine Wurzel M gleich der Summe der beiden andern, deren Product N ist.

2. Jede cubische Gleichung von der Form

$x^3 \pm 3a x^2 + (2a^2 + M)x \pm a M = 0$
hat eine Wurzel $\mp a$ und zwei andere, deren Product M ist.

B. Auflösung der cubischen Gleichungen, welche wenigstens eine rationale Wurzel haben.

11 Wenn eine cubische Gleichung eine rationale Wurzel (a) hat, so kann man die beiden andern

wenn sie reell sind, mit $(\beta + \gamma)$ und $(\beta - \gamma)$; wenn sie imaginär sind, mit $(\beta + \gamma i)$ u. $(\beta - \gamma i)$ bezeichnen. Es giebt dann nur folgende Fälle:

$$\begin{aligned} (x \pm a) \{ x \pm (\beta + \gamma) \} \{ x \pm (\beta - \gamma) \} &= x^3 \pm (2\beta + a)x^2 + (\beta^2 + 2a\beta - \gamma^2)x \pm a(\beta^2 - \gamma^2) = 0. \\ (x \pm a) \{ x \pm (\beta + \gamma i) \} \{ x \pm (\beta - \gamma i) \} &= x^3 + (2\beta + a)x^2 + (\beta^2 + 2a\beta + \gamma^2)x \pm a(\beta^2 + \gamma^2) = 0. \\ (x \pm a) \{ x \mp (\beta + \gamma) \} \{ x \mp (\beta - \gamma) \} &= x^3 \mp (2\beta - a)x^2 + (\beta^2 - 2a\beta - \gamma^2)x \pm a(\beta^2 - \gamma^2) = 0. \\ (x \pm a) \{ x \mp (\beta + \gamma i) \} \{ x \mp (\beta - \gamma i) \} &= x^3 \mp (2\beta - a)x^2 + (\beta^2 - 2a\beta + \gamma^2)x \pm a(\beta^2 + \gamma^2) = 0. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} \right\}$$

Diese Gleichungen, verglichen mit der allgemeinen cubischen in § 7, geben

$$1, A = 2\beta \pm a. \quad 2, B = \beta^2 \pm 2a\beta \pm \gamma^2. \quad 3, C = a(\beta^2 \mp \gamma^2).$$

Die rationale Wurzel (a) ist also ein Factor des letzten Gliedes. Ist dieselbe gefunden, so giebt Gl. (1) einen Werth für 2β ; und wenn man aus Gl. (2) das Product $2a\beta$ hinwegnimmt, so bleibt ein Rest $(\beta^2 \mp \gamma^2)$, welcher dem andern Factor des letzten Gliedes gleich ist.

Durch Entfernung der Wurzel (a) erhält man eine quadratische Gleichung

$$4, x^2 \pm 2\beta x + \beta^2 \mp \gamma^2 = 0,$$

deren Lösung nach § 6 zu bewerkstelligen ist.

12. Aus den Gleichungen (1. 2. 3.) des §. 11 ergibt sich zur Absonderung von (a) folgende Regel:

„Man zähle (a) mit seinem entsprechenden Wurzelzeichen zum ersten Coefficienten, multiplicire diese Summe mit demselben (a) und zähle das Product zum zweiten Coefficienten; man multiplicire auch diese Summe mit (a) und addire das Product zum letzten Gliede.“

Für die allgemeine cubische Gleichung ist die letzte Summe

$$C \pm aB + a^2A \pm a^3 = f(\pm a),$$

d. h. gleich dem Werthe, welchen die Gleichung darbietet, wenn in derselben $(\pm a)$ für x gesetzt wird. Diese letzte Summe $(\pm a(\beta^2 \mp \gamma^2) \mp a(\beta^2 \mp \gamma^2))$ ist also Null, so oft (a) eine Wurzel der Gleichung ist.

Um nun eine cubische Gleichung mit rationalen Wurzeln aufzulösen, sondere man die Factoren des letzten Gliedes auf die angegebene Weise ab. Einige Beispiele mögen zur Verdeutlichung dienen.

$$1. f(x) = x^3 + 16x^2 + 59x + 44 = 0.$$

Die Wurzeln sind nach § 10 negativ. Das letzte Glied läßt sich zerlegen in 1. 44, 2. 22, 4. 11. Die Rechnung ist folgende:

$$\begin{array}{r|l} 1 & +16 & +59 & +44 \\ -1 & -15 & -44 & \\ \hline +15 & +44 & & \\ -\frac{15}{2} & -\frac{225}{4} & & \\ \hline +\frac{15}{2} & -\frac{49}{4} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = -1 \\ f(-1) = 0. \end{array}$$

$$+\frac{15}{2} = \beta, -\frac{49}{4} = \gamma^2; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x+1) \left\{ x + \frac{15}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} \right\} \left\{ x + \frac{15}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}} \right\} = (x+1)(x+11)(x+4) = 0.$$

$$2. f(x) = x^3 - 14x^2 + 69x - 126 = 0.$$

Das letzte Glied läßt sich zerlegen in 1. 126, 2. 63, 3. 42, 6. 21 u. Die Rechnung zeigt, daß 1, 2, 3 keine Wurzeln sind. Aber + 6 giebt:

$$\begin{array}{r|l} 1 & -14 & +69 & -126 \\ + & 6 & -48 & +126 \\ \hline & -8 & +21 & 0 \\ + & 4 & -16 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = +6 \\ f(+6) = 0. \end{array}$$

$$-4 = \beta, +5 = \gamma^2; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x - 6)(x - 4 + \sqrt{-5})(x - 4 - \sqrt{-5}) = 0.$$

$$3. f(x) = x^3 + 7x^2 + 5x - 21 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} & -3 & -12 & +21 \\ + & 4 & -7 & 0 \\ \hline & -2 & -4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = -3 \\ f(-3) = 0 \end{array}$$

$$+2 = \beta, -11 = \gamma^2; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x + 3)(x + 2 + \sqrt{11})(x + 2 - \sqrt{11}) = 0.$$

$$4. f(x) = x^3 - 75x + 250 = 0. \text{ cf. § 10. Anm. 1.}$$

Man ersetze den ersten Coefficienten durch Null.

$$\begin{array}{r|l} 1 & +0 & -75 & +250 \\ - & 10 & +100 & +250 \\ \hline & -10 & +25 & 0 \\ + & 5 & -25 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = -10 \\ \end{array}$$

$$-5 = \beta, 0 = \gamma^2; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x + 10)(x - 5)^2 = 0.$$

$$5. f(x) = x^3 + 50x^2 + 655x + 750 = 0.$$

Aus § 10. Anm. 1 schließt man, daß eine Wurzel = -25 sei.

$$\begin{array}{r|l} 1 & +50 & +655 & +750 \\ - & 25 & +625 & -750 \\ \hline + & 25 & +30 & 0 \\ - & \frac{25}{2} & -\frac{625}{4} & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = -25 \\ \end{array}$$

$$+\frac{25}{2} = \beta, -\frac{504}{4} = \gamma^2; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x + 25)\left(x + \frac{25}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{504}\right)\left(x + \frac{25}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{504}\right) = 0.$$

$$6. f(x) = x^3 \pm 1 = 0.$$

Man ersetze beide Coefficienten durch Null.

$$\begin{array}{r|l} 1 & +0 & +0 & \pm 1 \\ \mp & 1 & +1 & \mp 1 \\ \hline \mp & 1 & +1 & 0 \\ \pm & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = \mp 1 \\ \end{array}$$

$$\mp \frac{1}{2} = \beta, +\frac{3}{4} = \gamma^2; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x \pm 1)\left\{x \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right\}\left\{x \mp \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right\} = 0.$$

13. Läßt sich das letzte Glied in sehr viele Factoren zerlegen, so kann man sehr leicht gewisse Grenzen bestimmen, innerhalb welcher die Wurzeln liegen müssen, und dadurch die Anzahl der unbrauchbaren Factoren vermindern. Da nämlich für $(\pm a)$ als Wurzel $f(\pm a) = 0$ ist, so schließt man, daß zwischen a' und a'' eine Wurzel liegen müsse, wenn

$$f(\pm a') \geq 0 \text{ und } f(\pm a'') \leq 0$$

sich ergibt. Denn diese Werthe können bei stetigem Wachsen des (a) nicht anders aus dem Positiven ins Negative, und umgekehrt, übergehen, als wenn sie für irgend einen Werth von (a) einmal Null geworden.

Diese Grenzen a' und a'' , denen im Allgemeinen die Zahlen 1, 10, 20, 30 u. entsprechen, kann man leicht enger ziehen; ja man kann von vorn herein bestimmen, welche Factoren des letzten Gliedes allein nur zur Rechnung benutzt werden dürfen.

14. Denn zieht man das letzte Glied der Gleichung vom Producte des ersten und zweiten Coefficienten ab, so erhält man aus den Gleichungen des § 11 folgende Gleichung:

$$AB - C = \pm 2\beta [(\beta \pm a)^2 \mp \gamma^2].$$

Daraus ergibt sich, „daß $(AB - C)$ stets durch 2β theilbar ist, und daß man folglich alle Factoren des letzten Gliedes als unbrauchbar ausschließen müsse, denen Werthe für 2β entsprechen, welche nicht Theiler von $(AB - C)$ sind.“

Ein anderes Mittel, diejenigen Factoren des letzten Gliedes, welche nur Wurzeln sein können, aufzufinden, lehrt folgende Betrachtung.

Wenn $f(x) = (x \pm a) \varphi(x)$ ist, so muß, da $(x \pm a)$ ein Wurzelfactor ist

$$\frac{f(x)}{(x \pm a)} = \varphi(x). \quad A.$$

eine ganze Zahl sein, welchen ganzen Werth man auch der Unbekannten x geben mag. Setzt man nun $x = +1$, so geht (A) über in

$$\frac{f(+1)}{(+1 \pm a)} = \varphi(+1). \quad B;$$

und setzt man $x = -1$, so geht (A) über in

$$\frac{f(-1)}{(-1 \pm a)} = \varphi(-1). \quad C.$$

Daraus gewinnt man folgende Regel: „Wenn $(\pm a)$ eine Wurzel der Gleichung $f(x)$ sein soll, so muß $(\mp a + 1)$ ein Theiler von $f(+1)$, und zugleich auch $(\mp a - 1)$ ein Theiler von $f(-1)$ sein.“

15. Wir wollen auf zwei Beispiele beide Regeln anwenden.

$$1. f(x) = x^3 - 58x^2 + 963x - 3906 = 0.$$

Alle Factoren über 58 sind auszuschließen (cf. § 10 Anm.) Das Folgende ist von selbst verständlich.

1 - 58 + 963 - 3906	a = + 1	AB - C = - 58.963 + 3906
+ 1 - 57 + 906	f(+1) = - 3000	= - 51948.
- 57 + 906 - 3000	a = - 1	
- 1 + 59 - 1022	f(-1) = - 4928.	
- 59 + 1022 - 4928		

Factoren von C.	2	3	6	7	9	14	18	21	31	42
$-a + 1 =$	-1	-2	-5	-6	-8	-13	-17	-20	-30	-41
Theiler von $f(+1) = 3000:$	-1	-2	-5	-6	-8	—	—	-20	-30	—
$-a - 1 =$	-3	-4	-7	-8	-10	—	—	-22	-32	—
Theiler von $f(-1) = 4928:$	—	-4	-7	-8	—	—	—	-22	-32	—
Mögliche Wurzeln:	—	+3	+6	+7	—	—	—	+21	+31	—
Entsprechende Werte von $2\beta:$	—	-55	-52	-51	—	—	—	-37	-27	—
Theiler von $AB - C = -51948:$	—	—	-52	—	—	—	—	-37	-27	—
Mögliche Wurzeln:	—	—	+6	—	—	—	—	+21	+31	—

$$\begin{array}{rcl}
 1 & -58 & +963 & -3906 \\
 + & 6 & -312 & +3906 \\
 - & 52 & +651 & \\
 + & 26 & -676 & \\
 - & 26 = \beta, & -25 = \gamma^2; & \text{daher}
 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 6)(x - 21)(x - 31) = 0.$$

$$\begin{array}{rcl}
 2. & f(x) = x^3 + 18x^2 - 333x - 5670 & = 0 \\
 & + 1 & + 19 & - 314 & a = + 1 \\
 & + 19 & - 314 & - 5984 & f(+1) = - 5984 & AB - C = - 324 \\
 & - 1 & - 17 & + 350 & a = - 1 \\
 & + 17 & - 350 & - 5320 & f(-1) = - 5320 \\
 & + 20 & + 760 & + 8540 & a = + 20 \\
 & + 38 & + 427 & + 2870 & f(+20) = + 2870
 \end{array}$$

Die Factoren über 38 sind unbrauchbar, da die positive Wurzel zwischen 1 und 20 liegt.

Factoren von C:	2	3	5	6	7	9	10	14	15	18	21	27	30	35
$+a + 1 =$	+3	+4	+6	+7	+8	+10	+11	+15	+16	+19	+22	+28	+31	+36
Theiler von $f(+1)$	—	+4	—	—	+8	—	+11	—	+16	—	+22	—	—	—
$+a - 1 =$	—	+2	—	—	+6	—	+9	—	+14	—	+20	—	—	—
Theiler von $f(-1)$	—	+2	—	—	—	—	—	—	+14	—	+20	—	—	—
Mögliche Wurzeln	—	-3	—	—	—	—	—	—	-15	—	-21	—	—	—
Entsprechende Werte von 2β	—	+15	—	—	—	—	—	—	+3	—	-3	—	—	—
Theiler von $AB - C$	—	—	—	—	—	—	—	—	+3	—	-3	—	—	—
Mögliche Wurzeln	—	—	—	—	—	—	—	—	-15	—	-21	—	—	—

$$\begin{array}{rcl}
 1 & +18 & -333 & -5670 \\
 - & 15 & -45 & +5670 \\
 + & 3 & -378 & 0 \\
 - & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \\
 + & \frac{3}{2} = \beta, & -\frac{1521}{14} = \gamma^2; & \text{daher}
 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 15)(x + 21)(x - 18) = 0.$$

16. Die beiden in § 14 aufgestellten Regeln sind selbstverständlich nur anwendbar für Gleichungen mit ganzen Coefficienten, deren rationale Wurzeln allein stets ganze Zahlen sind. Will man sie aber auch zur Auffindung gebrochener Wurzeln anwenden, so muß man die zu lösende Gleichung zuvor in eine andere umformen, deren Coefficienten ganze Zahlen, und deren Wurzeln bestimmte Vielfache der zu suchenden Wurzeln sind.

Sind nämlich die Wurzeln einer Gleichung a, b, c , also ihre m -fachen Werthe am, bm, cm , so sind ihre entsprechenden Gleichungen

$$1. (x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc = 0.$$

$$2. (x + am)(x + bm)(x + cm) = x^3 + (a + b + c)mx^2 + (ab + ac + bc)m^2x + abc m^3 = 0.$$

Daraus ergibt sich die Regel: „Um aus einer gegebenen cubischen Gleichung eine andere abzuleiten, deren Wurzeln gleich dem m -fachen Werthe der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, multiplicire man den ersten Coefficienten mit m , den zweiten mit m^2 , das letzte Glied mit m^3 .“

Man muß also dem m einen solchen Werth geben, daß durch Anwendung vorstehender Regel alle Brüche aus der zu lösenden Gleichung verschwinden.

Beispiele. 1. $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{107}{144}x - \frac{55}{288} = 0.$

Die Brüche verschwinden für $m = 24$; man erhält:

$f(y) = 1 + 8 - 428 - 2640$	$a = + 1$
$+ 1 + 9 - 419 - 3059$	$f(+ 1) = - 3059$
$- 1 - 7 + 435$	$a = - 1$
$- 7 - 435 - 2205$	$f(- 1) = - 2205$
$+ 30 + 1140 + 21360$	$a = + 30$
$+ 38 + 712 + 18720$	$f(+ 30) = + 18720$

Die Factoren über 38 sind unbrauchbar, da die positive Wurzel unter 30 liegt.

Factoren von C:	2	3	4	5	6	8	10	11	12	15	16	20	22	24	30	33
$+ a + 1 =$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+9$	$+11$	$+12$	$+13$	$+16$	$+17$	$+21$	$+23$	$+25$	$+31$	$+34$
Teiler von $f(+ 1)$:	—	—	—	—	$+7$	—	—	—	—	—	—	—	$+23$	—	—	—
$+ a - 1 =$	—	—	—	—	$+5$	—	—	—	—	—	—	—	$+21$	—	—	—
Teiler von $f(- 1)$:	—	—	—	—	$+5$	—	—	—	—	—	—	—	$+21$	—	—	—
Mögliche Wurzeln:	—	—	—	—	-6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-22	—

$1 + 8 - 428 - 2640$	$a = - 6$
$- 6 - 12 + 2640$	
$+ 2 - 740$	
$- 1 - 1$	

$+ 1 = \beta, - 441 = \gamma^2$; daher

$$f(y) = (x + 6)(x + 22)(x - 20) = 0, \text{ also } f(x) = (x + \frac{1}{4})(x + \frac{11}{12})(x - \frac{5}{6}) = 0.$$

2. $f(x) = x^3 + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15} = 0$.

Man erhält für $m = 15$:

1	+	82	—	7785	—	85050	
	+	80	+	12960	+	414000	$a = + 80$.
	+	162	+	5175	+	328950	$f(+80) = + 328950$.
	+	50	+	6600	—	59250	$a = + 50$
	+	132	—	1185	—	144300	$f(+50) = - 144300$.

Factoren von C zwischen 50 und 80	54	63	75
Entsprechende Werthe von 2β :	+ 136	+ 145	+ 157
Teiler von $AB - C = - 553320$:	—	+ 145	—
Mögliche Wurzel:	—	+ 63	—

1	+	82	—	7785	—	85050	
	+	63	+	9135	+	85050	$a = + 63$
	+	145	+	1350		0	
	—	$\frac{145}{2}$	—	$\frac{21025}{4}$			
	+	$\frac{145}{2} = \beta$	—	$\frac{15625}{4} = \gamma^2$			daher

$f(y) = (x - 63)(x + 135)(x + 10) = 0$, also $f(x) = (x - \frac{2}{3})(x + 9)(x + \frac{3}{2}) = 0$.

C. Auflösung der cubischen Gleichungen, deren drei Wurzeln irrational sind.

17. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, Es sei nämlich

$$f(x) = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 \pm b = 0. \quad I.$$

Bählt man auf beiden Seiten ($\mp b$) hinzu, so erhält man

$(x \pm a)^3 = \mp b$, woraus $x = \mp a \mp \sqrt[3]{b}$, oder $(x \pm a \pm \sqrt[3]{b})$ als ein Wurzelfactor gefunden wird. Wenn hierin $\sqrt[3]{b}$ irrational ist, so ist es auch der Wurzelwerth x .

Um die beiden andern Wurzeln zu erhalten, sondere man die gefundene Wurzel ($\mp a \mp \sqrt[3]{b}$) nach § 12 aus der Gleichung (I) ab; man gewinnt so die quadratische Gleichung

$$x^2 \pm (2a \mp \sqrt[3]{b})x + a^2 \mp a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2 = 0,$$

deren Wurzelfactoren nach § 6 Anm. gefunden werden; sie sind

$$(x \pm a \mp \frac{1}{2}\sqrt[3]{b} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}\sqrt{-3}) = 0, (x \pm a \mp \frac{1}{2}\sqrt[3]{b} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}\sqrt{-3}) = 0.$$

Die Gleichung (I.) ist also aufgelöst:

$$f(x) = (x \pm a \pm \sqrt[3]{b}) [x \pm a \mp \frac{1}{2}\sqrt[3]{b} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}\sqrt{-3}] [x \pm a \mp \frac{1}{2}\sqrt[3]{b} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}\sqrt{-3}] = 0. \quad II.$$

18. Bildet man nach vorstehender Auflösung die drei Wurzelfactoren, aber mit dem Unterschiede, daß man statt des einen irrationalen Wurzeltheiles deren zwei annimmt, so findet man nur folgende Fälle, in denen rationale Coefficienten entstehen:

A. $(x \pm a \pm (\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})) [x \pm a \mp \frac{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{2} - \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2}\sqrt{-3}] [x \mp a \mp \frac{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{2} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2}\sqrt{-3}] =$

$$x^3 \pm 3ax^2 + 3(a^2 - \sqrt[3]{bc})x \pm a^3 \mp 3a\sqrt[3]{bc} \pm (b + c) = 0.$$

$$B. (x \pm a \pm (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c})) [x \pm a \mp \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2} - \frac{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{2} \sqrt{-3}] [x \pm a \mp \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2} + \frac{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{2} \sqrt{-3}] = x^3 \pm 3ax^2 + 3(a^2 + \sqrt[3]{bc})x \pm a^3 \pm 3a\sqrt[3]{bc} \pm (b - c) = 0.$$

Wir sehen fest, daß hierin stets $b > c$ sei.

Wird in (A) und (B) $c = 0$, so erhält man den in § 17 behandelten Fall.

19. Setzt man $a = 0$, $(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) = S$, $(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}) = D$, $(b + c) = \Sigma$, $(b - c) = \Delta$, so gehen die Gleichungen (A und B) des § 18 über in folgende:

$$1. (x \pm S) [x \mp \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D\sqrt{-3}] [x \mp \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D\sqrt{-3}] = x^3 - 3\sqrt[3]{bc}. x \pm \Sigma = 0.$$

$$2. (x \pm D) [x \mp \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}S\sqrt{-3}] [x \mp \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}S\sqrt{-3}] = x^3 + 3\sqrt[3]{bc}. x \pm \Delta = 0.$$

Wir ziehen aus Gl. (1 und 2) folgende Regeln:

1. „In jeder cubischen Gleichung, deren zweites Glied fehlt, kann der dritte Theil des zweiten Coefficienten betrachtet werden als das Product zweier, im Allgemeinen irrationaler Wurzeltheile ($\sqrt[3]{b}$ und $\sqrt[3]{c}$), und das letzte Glied entweder als die **Summe**, oder als die **Differenz** der Cuben (b und c) dieser Wurzeltheile, je nachdem der zweite Coefficient der Gleichung **negativ** oder **positiv** ist.“

2. „Der reelle Wurzelfactor enthält entweder die **Summe** oder die **Differenz** der Wurzeltheile, je nachdem das letzte Glied der Gleichung die **Summe** oder **Differenz** der Cuben dieser Wurzeltheile darstellt; und zwar stets mit dem Zeichen des letzten Gliedes.“

3. „Die beiden andern Wurzelfactoren, welche im Allgemeinen imaginär sein werden, bestehen aus einem reellen und aus einem imaginären Theile. Der reelle Theil ist entweder der halben Summe oder der halben Differenz der Wurzeltheile gleich, je nachdem der reelle Wurzelfactor die Summe oder Differenz enthält. Der imaginäre Theil ist im erstern Falle die halbe Differenz, im andern die halbe Summe der Wurzeltheile multiplicirt mit $\sqrt{-3}$. Ist der reelle Factor positiv, so sind die beiden andern negativ, und umgekehrt.“

20. Die Auflösung der Gleichungen gelingt sofort, wenn $b = n^2$, $c = n$ ist. 1)

$$\text{Beispiele. 1. } f(x) = x^3 - 6x \pm 6 = 0 \\ bc = 4.2, b + c = 6; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x \pm (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})) [x \mp \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{-3}] [x \mp \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} \sqrt{-3}] = 0.$$

$$2. f(x) = x^3 + 9x \pm 6 = 0 \\ bc = 9.3, b - c = 6; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x \pm (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})) [x \mp \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}}{2} \sqrt{-3}] [x \mp \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}}{2} \sqrt{-3}] = 0.$$

$$3. f(x) = x^3 - 15x \pm 30 = 0$$

$bc = 25 \cdot 5, b + c = 30$; daher

$$f(x) = (x \pm (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5})) [x \mp \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}}{2} - \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}}{2} \sqrt{-3}] [x \mp \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}}{2} + \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}}{2} \sqrt{-3}] = 0.$$

$$4. f(x) = x^3 - 24x \pm 72 = 0$$

$bc = 64 \cdot 8, b + c = 72$; daher

$$f(x) = (x \pm (\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8})) [x \mp \frac{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}}{2} - \frac{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}}{2} \sqrt{-3}] [x \mp \frac{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}}{2} + \frac{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}}{2} \sqrt{-3}] = (x \pm 6) [x \mp 3 - \sqrt{-3}] [x \mp 3 + \sqrt{-3}] = 0.$$

$$5. f(x) = x^3 + 24x \pm 56 = 0$$

$bc = 64 \cdot 8, b - c = 56$; daher

$$f(x) = (x \pm (\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8})) [x \mp \frac{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}}{2} - \frac{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}}{2} \sqrt{-3}] [x \mp \frac{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}}{2} + \frac{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}}{2} \sqrt{-3}] = (x \pm 2) [x \mp 1 - 3\sqrt{-3}] [x \mp 1 + 3\sqrt{-3}] = 0.$$

1. Anm. Allgemeiner kann man sagen: wenn c ein Theiler von b ist. Ebenso leicht lassen sich die Gleichungen lösen, wenn b und c Theiler von $\left(\frac{b}{3}\right)^3$ sind. So findet man beispielsweise zur Auflösung der Gleichungen:

$$1) x^3 - 18x \pm 217 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 215 = 0,$$

$$2) x^3 - 18x \pm 110 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 106 = 0,$$

$$3) x^3 - 18x \pm 58 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 50 = 0,$$

$$4) x^3 - 18x \pm 42 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 30 = 0,$$

$$5) x^3 - 18x \pm 35 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 19 = 0,$$

$$6) x^3 - 18x \pm 33 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 15 = 0,$$

$$7) x^3 - 18x \pm 30 = 0, \text{ oder } x^3 + 18x \pm 6 = 0,$$

beziehungsweise die Wurzeltheile 1) $\sqrt[3]{216}$ und $\sqrt[3]{1}$, 2) $\sqrt[3]{108}$ und $\sqrt[3]{2}$, 3) $\sqrt[3]{54}$ und $\sqrt[3]{4}$, 4) $\sqrt[3]{36}$ und $\sqrt[3]{6}$, 5) $\sqrt[3]{27}$ und $\sqrt[3]{8}$, 6) $\sqrt[3]{24}$ und $\sqrt[3]{9}$, 7) $\sqrt[3]{18}$ und $\sqrt[3]{12}$, woraus sich die Wurzelfactoren selbst nach § 19 leicht zusammensetzen lassen. —

21. Nicht immer ist die Lösung so leicht; aber die Gleichungen gewähren stets die Mittel, die Größen b und c zu berechnen. Bezeichnet man nämlich die allgemeine Gleichung für diese Fälle mit

$$x^3 \pm px \pm q = 0,$$

so ist nach § 19: $p = 3\sqrt[3]{bc}$, $q = b \pm c$.

1) Wenn $b + c = q$, also $c = q - b$ ist, so erhält man die Gleichung

$$b(q - b) = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

und findet daraus

$$b = + \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}, \quad c = + \frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}. \quad A.$$

Der reelle Wurzelfactor ist nach § 19, 2:

$$(x \pm \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) = \left[x \pm \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} \right) \right].$$

2. Wenn $(b - c) = q$, also $c = b - q$ ist, so erhält man die Gleichung

$$b(b - q) = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

und findet daraus

$$b = + \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}, \quad c = - \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3} = - \left[\left(\frac{1}{2}q\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \right]. \quad B.$$

Der reelle Wurzelfactor ist nach § 19, 2:

$$(x \pm \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}) = \left[x \pm \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} \right) \right].$$

Diese unter A und B gefundenen Formeln sind bekannt unter dem Namen der Cardanischen.

22. Auch die Gleichungen des § 18 lassen sich sofort lösen, wenn sie die Form haben:

$$1) \quad x^3 \pm 3ax^2 + 3(a^2 - n)x \pm a^3 \mp 3an \pm (n^2 + n) = 0,$$

$$2) \quad x^3 \pm 3ax^2 + 3(a^2 + n)x \pm a^3 \pm 3an \pm (n^2 + n) = 0.$$

Beispiele. 1. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 8 = 0$

$$a = + 2, \quad bc = 25.5, \quad b + c = 30; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x + 2 + \sqrt[3]{25 + 3\sqrt{5}}) [x + 2 - \frac{\sqrt[3]{25 + 3\sqrt{5}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{25 - 3\sqrt{5}}}{2} \sqrt{-3}] [x + 2 - \frac{\sqrt[3]{25 + 3\sqrt{5}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{25 - 3\sqrt{5}}}{2} \sqrt{-3}] = 0.$$

$$2. \quad f(x) = x^3 + 12x^2 + 63x + 144 = 0$$

$$a = + 4, \quad bc = 25.5, \quad b - c = 20; \text{ daher}$$

$$f(x) = (x + 4 + \sqrt[3]{25 - 3\sqrt{5}}) [x + 4 - \frac{\sqrt[3]{25 - 3\sqrt{5}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{25 + 3\sqrt{5}}}{2} \sqrt{-3}] [x + 4 - \frac{\sqrt[3]{25 - 3\sqrt{5}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{25 + 3\sqrt{5}}}{2} \sqrt{-3}] = 0.$$

23. Wenn aber die Gleichung

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

nicht von der in vorstehendem § behandelten Art ist, so kann man sie auf die in § 21 angegebene Form zurückführen. Vergleicht man nämlich die allgemeine Gleichung mit den Lösungen des § 22, so findet man, daß

$$3\sqrt[3]{bc} = p = -\frac{1}{3}A^2 + B$$

$$b \pm c = q = 2\left(\frac{A}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}AB + C$$

sei. Man gelangt also stets zu der reducirten Gleichung

$$x^3 \pm px \pm q = 0,$$

deren Lösung nach den Formeln des § 21 zu bewerkstelligen ist.

24. Während Formel (B) in § 21 stets reelle Werthe für b und c liefert, bleibt Formel (A) nur so lange anwendbar, als $\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{q}{2}\right)^2$ ist. Wenn dagegen $\left(\frac{p}{3}\right)^3 < \left(\frac{q}{2}\right)^2$ ist, so erhält man für $\sqrt[3]{b}$ und $\sqrt[3]{c}$ Ausdrücke von der Form $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + ri}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - ri}$.

Könnte man nun auf elementarem Wege diese Ausdrücke auf die Form

$$(\alpha + \beta i) \text{ und } (\alpha - \beta i)$$

bringen, so würde für diesen sogenannten Casus irreducibilis die allgemeine Gleichung sein

$$(x \pm 2\alpha) [x \mp \alpha - \beta \sqrt{3}] [x \pm \alpha + \beta \sqrt{3}] = x^3 - 3(\alpha^2 + \beta^2)x \pm 2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = 0, \quad 1)$$

in welcher, nach unserer Annahme, weder α noch β im Allgemeinen rational ist.

Wenn also Formel (A) des § 21 einen imaginären Ausdruck darbietet, so enthält die Gleichung drei reelle Wurzeln.

1. Anmerkung. Sind alle drei Wurzeln rational, so muß $\beta = \beta' \sqrt{3}$ sein, und die allgemeine Gleichung ist für diesen Fall:

$$(x \pm 2\alpha) [x \mp \alpha - 3\beta'] [x \pm \alpha + 3\beta'] = x^3 - 3(\alpha^2 + 3\beta'^2)x \pm 2\alpha(\alpha^2 - 9\beta'^2) = 0.$$

25. Ohne uns weiter mit der Umformung der Cardanischen Formel zu befassen, wollen wir an § 13 wieder anknüpfen. Nach demselben ist man nämlich im Stande, die Grenzen, zwischen denen die durch das Vorzeichen des letzten Gliedes angedeutete Wurzel liegt, beliebig enger zu ziehen und auf diese Weise die Wurzel selbst bis auf eine ganze Einheit genau zu bestimmen. Zwei Beispiele werden hinreichen, dieses Verfahren zu verdeutlichen.

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 9x + 12$	$= 0$
$- 10 + 30 - 210$	$a = - 10$
$- 3 + 21 - 198$	$f(-10) = - 198$
$- 9 + 18 - 81$	$a = - 9$
$- 2 + 9 - 69$	$f(-9) = - 69$
$- 8 + 8 + 8$	$a = - 8$
$- 1 - 1 + 20$	$f(-8) = + 20$

Da $f(-8) = + 20$, $f(-9) = - 69$, so liegt nach § 13 eine negative Wurzel zwischen 8 und 9, und zwar näher an 8. —

$$2. f(x) = x^3 + 10x - 60 = 0.$$

Man ergänze den ersten Coefficienten durch Null.

1 $+ 0$	$+ 10$	$- 60$	$a = + 10$
$+ 10$	$+ 100$	$+ 1100$	$f(+10) = + 1040$
$+ 5$	$+ 25$	$+ 175$	$a = + 5$
$+ 5$	$+ 35$	$+ 115$	$f(+5) = + 115$
$+ 4$	$+ 16$	$+ 104$	$a = + 4$
$+ 4$	$+ 26$	$+ 44$	$f(+4) = + 44$
$+ 3$	$+ 9$	$+ 57$	$a = + 3$
$+ 3$	$+ 19$	$- 3$	$f(+3) = - 3.$

Nach §. 13 liegt also eine positive Wurzel zwischen 3 und 4, und zwar näher an 3. Wir wollen, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, den größten von zwei Grenzwerten, zwischen denen eine Wurzel liegt, die obere Grenze, den kleinern die untere Grenze nennen.

26. Könnte man nun eine Gleichung ableiten, deren Wurzeln sämtlich um die untere Grenze kleiner, resp. größer wären als die Wurzeln der zu lösenden Gleichung, so würde man auf dieselbe Weise, wie vorhin, zwei auf einander folgende Zehntel finden können, zwischen denen der noch zu berechnende

Wurzelwerth von (a) liegt. Durch wiederholte Ableitung von Gleichungen, deren Wurzeln jedesmal um die gefundenen Werthe der zu berechnenden Wurzel kleiner, resp. größer wären, würde man sich dem wahren Wurzelwerthe (a) beliebig nähern können.

Um aber aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, deren Wurzeln um eine beliebige GröÙe (h) kleiner oder größer sind, braucht man nur in die gegebene Gleichung $(x + h)$ oder $(x - h)$ statt x zu setzen. Die allgemeine cubische Gleichung geht dann über in folgende:

$$f(x \pm h) = x^3 + (A \pm 3h)x^2 + (B \pm 2Ah + 3h^2)x + C \pm Bh + Ah^2 \pm h^3 = 0. \quad \text{I.}$$

Anmerkung. Man bemerke, daß in Gl. (I) das letzte Glied gleich $f(\pm h)$, der Coefficient von x gleich $f'(\pm h)$ und der Coefficient von x^2 gleich $f''(\pm h)$ ist.

Ordnet man ferner Gl. (I) nach Potenzen von h, so giebt sie die Taylorsche Reihe:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) \pm \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) -$$

27. Schreibt man Gl. (I) folgendermaßen:

$$x^3 + [A \pm h \pm h \pm h] x^2 + [B \pm Ah + h^2 \pm Ah + 2h^2] x + C \pm (B \pm Ah + h^2) h = 0,$$

so gewinnt man folgende allgemeine Regel:

„Um aus einer cubischen Gleichung eine andere abzuleiten, deren Wurzeln um $(\pm h)$ von den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung verschieden sind, zähle man $(\pm h)$ dreimal hinter einander zu A, multiplicire sowohl die erste, als auch die zweite Summe mit $(\pm h)$ und zähle beide Producte nach einander zu B; endlich multiplicire man auch die zuerst erhaltene Summe des zweiten Coefficienten mit $(\pm h)$ und zähle dieses Product zu C.“

Beispiel. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 27x + 19 = 0$. Man leite zwei Gleichungen ab, deren Wurzeln um ± 4 von den Wurzeln der $f(x)$ verschieden sind.

$\begin{array}{r} 1 - 18 + 27 + 19 \\ + 4 - 56 - 116 \\ - 14 - 29 - 97 \\ + 4 - 40 \\ - 10 - 69 \\ + 4 \\ - 6 \end{array}$	$h = +4$	$\begin{array}{r} 1 - 18 + 27 + 19 \\ - 4 + 88 - 460 \\ - 22 + 115 - 441 \\ - 4 + 104 \\ - 26 + 219 \\ - 4 \\ - 30 \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 - 18 + 27 + 19 \\ + 4 - 56 - 116 \\ - 14 - 29 - 97 \\ + 4 - 40 \\ - 10 - 69 \\ + 4 \\ - 6 \end{array}$	$h = -4$	$\begin{array}{r} 1 - 18 + 27 + 19 \\ - 4 + 88 - 460 \\ - 22 + 115 - 441 \\ - 4 + 104 \\ - 26 + 219 \\ - 4 \\ - 30 \end{array}$

Die abgeleiteten Gleichungen sind:

$$f(x + 4) = x^3 - 6x^2 - 69x - 97 = 0.$$

$$f(x - 4) = x^3 - 30x^2 + 219x - 441 = 0.$$

28. Setzt man in Gl. (I) des § 26 statt A, B, C ihre Werthe aus § 11 und $h = a$, so geht sie über in

$$x^3 \pm 2(\beta \mp a)x^2 + [(\beta \mp a)^2 \mp \gamma^2]x \pm a(\beta^2 \mp \gamma^2) \mp a(\beta^2 \mp \gamma^2) = 0.$$

Da in dieser Gleichung das letzte Glied Null ist, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 \pm 2(\beta \mp a)x + (\beta \mp a)^2 \mp \gamma^2 = 0, \quad \text{II.}$$

deren Wurzeln um $\pm 2a$ vermehrt die beiden andern Wurzeln der zu lösenden cubischen Gleichung sind.

Anstatt aber die Gl. (II) selbst nach § 6 zu lösen, was in den meisten Fällen sehr weitläufig sein würde, nehme man zur Bestimmung von β und γ den gefundenen Wurzelwerth (a) und die zu lösende Gleichung zu Hilfe.

„Zunächst findet man β aus dem Coefficienten der Gl. (II), wenn man denselben mit 2 dividirt und $\pm a$, d. h. den entgegengesetzten Wurzelwerth (a) hinzuzählt.“

Zieht man ferner vom letzten Gliede der Gl. (II) das Quadrat des ersten Coefficienten ($2\beta \pm a$) der zu lösenden Gleichung ab, so erhält man

$$- 3 (\beta^2 \pm 2a\beta) \mp \gamma^2.$$

Zählt man dazu den dreifachen Coefficienten des dritten Gliedes der Gleichung, nämlich $+ 3[\beta^2 \pm 2a\beta \mp \gamma^2]$, so bleibt $\mp \gamma^2$, je nachdem γ reell oder imaginär ist. cf. § 11. Daraus ergibt sich die Regel:

„Wenn man zum zweiten Coefficienten der letzten abgeleiteten Gleichung den Werth ($3B - A^2$) addirt, dann mit 4 dividirt, so erhält man $\mp \gamma^2$.“

$$\begin{array}{r|l} \text{Beispiel. } f(x) = x^3 + 19x^2 & + 128x + 290 \quad | = 0 \\ \hline - 5 & - 70 \quad - 290 \quad | a = - 5 \\ \hline + 14 & + 58 \quad 0 \\ \hline - 5 & - 45 \\ \hline + 9 & + 13 \\ \hline - 5 & + 23 = 3B - A^2 \\ \hline + 4:2 = + 2 & + 36:4 = + 9 = \gamma^2 \\ \hline + 5 & \\ \hline \beta = + 7 & \end{array}$$

Man erhält: $f(x) = (x + 5)(x + 7 + 3i)(x + 7 - 3i) = 0$.

Man findet also nach dieser Methode ebenfalls, wie oben § 11, zu gleicher Zeit alle drei Wurzeln, von denen die beiden letzteren um so genauer sein werden, je genauer der Werth der Wurzel (a) berechnet worden ist. —

29. Gehe wir nach der Regel des § 27 die Bruchziffern einer irrationalen Wurzel zu berechnen suchen, wollen wir zuvor noch an einigen Beispielen zeigen, daß man nach derselben Regel in ununterbrochener Rechnung auch die Ganzen des Wurzelwerthes finden könne. Zu diesem Zwecke sondere man im Allgemeinen so lange hinter einander 10 mit dem entsprechenden Vorzeichen aus der Gleichung ab, bis die obere Grenze gefunden ist.¹⁾ — Die noch fehlenden, innerhalb der gefundenen Grenzen liegenden Einer der Wurzel ergeben sich leicht aus einer Division des zuletzt erhaltenen zweiten Coefficienten in das zugehörige letzte Glied der Gleichung.

Denn da $B = (\beta^2 \pm 2a\beta \mp \gamma^2)$ und $C = a(\beta^2 \mp \gamma^2)$

ist, so wird $\left(\frac{C}{B}\right)$ um so genauer gleich (a) sein, je kleiner (a) selbst ist, oder je enger die Grenzen sind, innerhalb welcher der gesuchte Wurzelwerth liegt. Da aber nur dann das letzte Glied der Null sich nähern wird, wenn das Product aus dem zweiten Coefficienten und dem abzusondernden Wurzeltheile ein dem letzten Gliede entgegengesetztes Vorzeichen hat, so muß der zweite Coefficient positiv sein oder werden; und nur in dem Falle, daß B positiv ist, wird $\left(\frac{C}{B}\right)$ ein genäherter Wurzelwerth sein²⁾, welcher noch genauer bestimmt werden kann, wenn man die sich leicht ergebende Regel dabei

berücksichtigt, „daß der zweite Coefficient zu= oder abnimmt, je nachdem das zweite und vierte Glied der Gleichung verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben.“

Anmerkung 1. Sind die Coefficienten der Gleichung große Zahlen, so kann man vermittlest der Regel des § 16 die Gleichung stets so einrichten, daß der Wurzelwerth unter 100, oder gar unter 10 zu liegen kommt. cf. Beispiel (4).

Anmerkung 2. Wenn eine Gleichung drei reelle Wurzeln hat (cf. § 24), von denen nur zwei positiv oder negativ sind, so kann man auf dieselbe Weise direct im ersten Falle eine positive, im andern eine negative Wurzel berechnen. Dann muß aber, wie von selbst einleuchtet, der zweite Coefficient grade negativ sein oder werden, so lange durch das Vorzeichen des letzten Gliedes eine andere als die zu berechnende Wurzel angedeutet wird; und für diesen Fall ist $\frac{C}{B}$ ebenfalls ein Näherungswerth. Beachtet man die Vorzeichen, so gewinnt man folgende allgemeine Regel:

Der Quotient $\left(\frac{C}{B}\right)$ ist ein Näherungswerth für reelle positive oder negative Wurzeln, je nachdem derselbe negativ oder positiv ist.“

Anmerkung 3. Aus den zwei folgenden, leicht verständlichen Formeln

$$\begin{array}{r|l} 1 \pm A & + B \quad \pm C \quad | \quad \mp A \\ \mp A & 0 \quad \mp AB \\ \hline 0 & + B \quad 1) \pm C \mp AB \\ \mp A & + A^2 \\ \mp A & 1) + A^2 + B \\ \mp A & \\ 1) \mp 2A & \end{array} \quad \left\| \quad \begin{array}{r|l} 1 \pm A & - B \quad \pm C \quad | \quad \mp A \\ \mp A & 0 \quad \pm AB \\ \hline 0 & - B \quad 1) \pm C \pm AB \\ \mp A & + A^2 \\ \mp A & 1) + A^2 - B \\ \mp A & \\ 1) \mp 2A & \end{array}$$

ziehen wir noch drei sehr nützliche Regeln.

1. In allen cubischen Gleichungen mit keinem oder drei Zeichenwechseln ist der erste Coefficient eine **untere** oder eine **obere** Grenze, je nachdem, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, AB **kleiner** oder **größer** als C ist. cf. 30. 6.

2. In allen cubischen Gleichungen, in denen das dritte Glied **negativ**, das **zweite** und **letzte** Glied aber gleiche Vorzeichen haben, ist der erste Coefficient eine **untere** oder **obere** Grenze, je nachdem A^2 **größer** oder **kleiner** als B ist. cf. 30. 7.

3. In allen cubischen Gleichungen, deren drittes Glied Null ist, und deren zweites und letztes Glied gleiche Vorzeichen haben, ist der erste Coefficient eine **untere** Grenze.

30. Beispiele.

$$\begin{array}{rcl}
 1. f(x) = x^3 - 16x^2 & - 242x & - 468 = 0 \\
 + 10 & - 60 & - 3020 \quad a = + 10 + 10 + 10 - 4 = + 26 \\
 - 6 & - 302 & 1) - 3488 = f(+ 10) \\
 + 10 & + 40 & - 220 \\
 + 4 & 1) - 262 & 2) - 3708 = f(+ 20) \\
 + 10 & + 240 & + 8580 \\
 1) + 14 & - 22 & 3) + 4872 = f(+ 30) \\
 + 10 & + 340 & - 4872 \\
 + 24 & 2) + 318 & 0 = f(+ 26), \\
 + 10 & + 540 & \\
 + 34 & + 858 & \\
 + 10 & + 640 & \\
 2) + 44 & 3) + 1498 & \\
 + 10 & - 280 & \\
 + 54 & + 1218 & \\
 + 10 & - 264 & \\
 + 64 & + 954 & \\
 + 10 & - 982 = 3B - A^2 & \\
 3) + 74 & - 28:4 = - 7 = \gamma^2 & \\
 - 4 & & \\
 + 70 & & \\
 - 4 & & \\
 + 66 & & \\
 + 4 & & \\
 + 62:2 = + 31 & & \\
 - 26 & & \\
 \beta = + 5 & &
 \end{array}$$

Die obere Grenze ist + 30,
die untere + 20.

3) $\frac{C}{B} = \frac{+ 4872}{+ 1498}$ gibt nach
§ 29 als Näherungswert
- 4; + 26 ist also die
rationale Wurzel.

Man findet $f(x) = (x - 26)(x + 5 + \sqrt{7})(x + 5 - \sqrt{7}) = 0$.

$$\begin{array}{rcl}
 2. f(x) = x^3 + 11x^2 & - 62x & - 714 = 0 \\
 - 10 & + 210 & + 1480 \quad a = + 10 - 3 = + 7, \dots \\
 + 21 & + 148 & 1) + 766 = f(+ 10) \\
 + 10 & + 310 & - 1032 \\
 + 31 & 1) + 458 & 2) - 266 = f(+ 7) \\
 + 10 & - 114 & \\
 1) + 41 & + 344 & \\
 - 3 & - 105 & \\
 + 38 & 2) + 239 & \\
 - 3 & & \\
 + 35 & & \\
 - 3 & & \\
 2) + 32 & &
 \end{array}$$

Die obere Grenze ist + 10.

$\frac{C}{B} = \frac{+ 766}{+ 458}$ gibt nach § 29
und mit Rücksicht darauf, daß die
untere Grenze zu bestimmen, - 3
als Näherungswert.

Die positive Wurzel liegt also zwischen 7 und 8, und zwar näher an 8. —

Wenn der zweite Coefficient der Gleichung positiv ist, so kommt man oft schneller zum Ziele, wenn
man sogleich $\left(\frac{C}{B}\right)$ als Näherungswert nimmt.

Eine positive Wurzel liegt also zwischen 3 und 4, und zwar näher an 3.
Für die negative Wurzel würde man 128 und 129 als Grenzen finden. —

$$\begin{array}{r|l}
 6. f(x) = x^3 - 1514x^2 + 78x - 1625 = 0 & a = + 1514... \\
 \hline
 + 1514 & 0 \\
 \hline
 0 & + 78 \\
 + 1514 & + 2292196 \\
 + 1514 & 1) + 2292274 \\
 + 1514 & \\
 1) + 3028 & \\
 \hline
 & 1) C = + 116467 \\
 & B = + 2292274 \text{ giebt} \\
 & - 0,05
 \end{array}$$

Die Wurzel liegt zwischen 1513 und 1514, und zwar näher an 1514.

$$\begin{array}{r|l}
 7. f(x) = x^3 + 715x^2 - 68x + 1315 = 0 & a = - 715 \\
 \hline
 - 715 & 0 \\
 \hline
 0 & - 68 \\
 - 715 & + 511225 \\
 - 715 & 1) + 511157 \\
 - 715 & \\
 1) - 1430 & \\
 \hline
 & 1) C = + 49935 \\
 & B = + 511157 \text{ giebt} \\
 & - 0,09.
 \end{array}$$

Die Wurzel ist also in den ersten Ziffern: — 715.09.

31. Sind die Ganzen der Wurzel gefunden, so läßt sich die irrationale Wurzel leicht bis zu jedem Grade der Genauigkeit berechnen. Denn da man bei der Bestimmung der Decimalen der Wurzel nur darauf zu sehen hat, daß das letzte Glied sein Zeichen behalte, aber mehr und mehr der Null sich nähere; da ferner nach Absonderung der Ganzen des Wurzelwerthes der zweite Coefficient in seinen höchsten Ziffern fast gar keine Veränderung erleidet: „so beruht die Berechnung der Decimalen des Wurzelwerthes lediglich auf einer Division des jedesmaligen zweiten Coefficienten in das zugehörige letzte Glied der Gleichung.“

Wir wollen das 2te Beispiel in § 30 wieder aufnehmen, die Wurzeln bis auf 9 Stellen berechnen und der Deutlichkeit wegen die ganze Rechnung geben.

1 + 11	— 62	— 714	a = + 7.980348008.
+ 7	+ 126	+ 448	
+ 18	+ 64	1) — 266	Berechnung der
+ 7	+ 175	+ 241.749	Decimalen.
+ 25	1) + 239	2) — 24.251	1) 2660 : 239 = 9
+ 7	+ 29.61	+ 24.144992	2) 2425 : 299 = 8
1) + 32.9	+ 268.61	3) — 0.106008	3) 106 : 304 = 0; daher
9	+ 30.42	+ 0.0913835046	1060 : 304 = 3.
+ 33.8	2) + 299.03	4) 146244954.	4) 1462 : 304 = 4.
9	2.7824	121849425.	5) 2439 : 304 = 8.
2) + 34.78	+ 301.8124	5) 24395529.	6) 25 : 304 = 0; daher
8	2.7888	24370019.	255 : 304 = 0; daher
+ 34.86	3) + 304.6012	6) 25510.	2551 : 304 = 8.
8	1048209	24370.	
2) + 34.9403	+ 304.61168209	1140.	
3	1048218		
+ 34.9406	4) + 304.62216427		
3	13976376		
4) + 34.94094	+ 304.6235619076		
4	13976392		
+ 34.94098	5) + 304.6249595468		
4	2795281.		
2) + 34.941028	+ 304.6252390749.		
8	2795282.		
+ 34.941036	6) + 304.6255186031.		
8	2795.		
6) + 34.941044008	+ 304.6255188826.		
8	2795.		
+ 34.941044016	+ 304.6255191621.		
8	— 307. = 3B — A ²		
+ 34.941044024.2	— 2.3744808379 : 4 = — 0.5936202094 = γ^2		
+ 17.470522012	$\pm 0.770467526 = \pm \gamma$		
— 7.980348008			
$\beta = + 9.490174004$			

Man findet also: $f(x) = (x - 7.980348008.) (x + 10.260641530.) (x + 8.719706478) = 0$

Als zweites Beispiel möge noch

$$f(x) = x^3 - 15x^2 - 401x + 6012 = 0$$

berechnet werden. Da in dieser Gleichung $AB = C + 3$ ist, so schließen wir aus § 10. Anm., daß eine Wurzel nahe gleich + 15, von den beiden andern aber die eine nahe gleich + 20, die andere nahe gleich — 20 sei. Die Rechnung ist folgende:

1 — 15	200816086.7	= 401	+ 6012	a = — 20.022845492.	11 + 1
— 20		+ 700	— 5980		
+ 35		+ 299	1) + 32.		Berechnung der
— 20		+ 1100	— 28.010008		Decimalen.
— 55		1) + 1399	2) + 3.989992		1) 320: 1399 = 0; daher
— 20		+ 15004	— 2.804302648		3200: 1399 = 2.
1) — 75.02		+ 1400.5004	3) + 1.185689352		2) 3989: 1400 = 2.
— 2		+ 15008	— 1.121889204		3) 11856: 1402 = 8.
— 75.04		2) + 1402.0012	4) + 0.063801148.		4) 6380: 1402 = 4.
— 2		+ 150124	5) 7703166.		5) 7703: 1402 = 5.
2) — 75.062		+ 1402.151324	7012139.		6) 6910: 1402 = 4.
— 2		+ 150128	6) 691027.		7) 13005: 1402 = 9.
— 75.064		3) + 1402.301452	560971.		8) 3838: 1402 = 2.
— 2		+ 6005344	7) 130056.		
3) — 75.0668		+ 1402.36150544	126218.		
— 8		+ 6005408	8) 3838.		
— 75.0676		4) + 1402.42155952	2805.		
— 8		+ 30027376	1033.		
4) — 75.06844		+ 1402.4245622576			
— 4		+ 30027392			
— 75.06848		5) + 1402.4275649968.			
— 4		+ 3753426.			
5) — 75.068525		+ 1402.4279403394.			
— 5		+ 3753426.			
— 75.068530		6) + 1402.4283156820.			
— 5		+ 300274.			
6) — 75.0685354		+ 1402.4283457094.			
— 4		+ 300274.			
— 75.0685358		7) + 1402.4283757368.			
— 4		+ 67561.			
7) — 75.06853629		+ 1402.4283824929.			
— 9		+ 67561.			
— 75.06853638		8) + 1402.4283892400.			
— 9		+ 1501.			
8) — 75.068536472		+ 1402.4283893991.			
— 0		+ 1501.			
— 75.068536474		+ 1402.4283895492.			
— 2		— 1428. = 3B — A²			
— 75.068536476:2		— 25.5716104508:4			
— 37.534268238		— 6.3929026127 = γ²			
+ 20.022845492		+ 2.528418994 = ± γ.			
β = — 17.511422746					

Man erhält $f(x) = (x + 20.022845491)(x - 14.983003752)(x - 20.039841740) = 0.$

Man bemerke noch, daß die Lösung der cubischen Gleichung

$$x^3 \pm A = 0$$

die drei Cubikwurzeln für jede Zahl $\mp A$ giebt.

32. Die allgemeine Form einer biquadratischen Gleichung ist

$$f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \quad I.$$

Diese Gleichung, in welcher A, B, C und D rational sein sollen, kann betrachtet werden als ein Product aus zwei quadratischen Gleichungen, (zwei Doppelfactoren) oder auch als ein Product aus vier einfachen Wurzelfactoren, die entweder alle reell oder imaginär, oder von denen zwei reell und zwei imaginär sind.

Eine biquadratische Gleichung auflösen heißt sie in ihre Wurzelfactoren zerlegen.

Wenn man die Wurzeln der Gl. (I) um $\frac{1}{4}A$ vermindert, resp. vermehrt, so erhält man die reducirte Gleichung

$$f(z) = z^4 + pz^2 + qz + r = 0. \quad II.$$

Man findet nämlich durch eine ähnliche Ableitung, wie in § 26 für die cubischen, für die biquadratischen Gleichungen folgendes Schema zur Berechnung der abgeleiteten Gleichungen:

$$\begin{array}{r} x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \\ + a \quad + aA' \quad + aB' \quad + aC' \\ + A' \quad + B' \quad + C' \quad + D' \\ + a \quad + aA'' \quad + aB'' \\ + A'' \quad + B'' \quad + C'' \\ + a \quad + aA''' \\ + A''' \quad + B''' \\ + a \\ + A'''' \end{array}$$

Für die reducirte Gleichung wird, da $a = -\frac{A}{4}$ ist, $A'''' = 0$. Würde zu gleicher Zeit auch $C'' = 0$, so ließe sich die reducirte Gleichung selbst nach § 6 auflösen.

33. Die Gleichung (II) kann betrachtet werden als ein Product zweier Doppelfactoren

$$(z^2 + az + \beta)(z^2 - az + \gamma) = 0. \quad III.$$

Führt man die Multiplication aus, so erhält man aus (III) die Gleichung

$$z^4 + (\beta + \gamma - a^2)z^2 + a(\gamma - \beta)z + \beta\gamma = 0. \quad IV.$$

Aus (II) und (IV) folgt, daß

$$1) p = \beta + \gamma - a^2 \quad 2) q = a(\gamma - \beta). \quad 3) r = \beta\gamma.$$

Aus (1) und (2) erhält man, nachdem man (2) durch a dividirt hat, durch Addition und Subtraction

$$4) 2\gamma = a^2 + p + q/a. \quad 5) 2\beta = a^2 + p - q/a;$$

und aus (3. 4. 5) endlich; 6) $4r = (a^2 + p + q/a)(a^2 + p - q/a)$, oder

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0. \quad V.$$

34. Die Gleichung (V) läßt sich wie eine cubische lösen, wenn man (a^2) als Unbekannte betrachtet, und giebt nach §. 10 stets einen reellen positiven Werth für a^2 , woraus also mit Hilfe von Gl. (4 u. 5) Werthe für β und γ berechnet werden können. Die Doppelfactoren der Gl. (III) geben die Wurzeln der reducirten Gleichung (II), nämlich:

$$\left. \begin{aligned} z' &= + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{-R}, & z''' &= - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{-R}, \\ z'' &= + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{-R}, & z'''' &= - \frac{\alpha}{2} - \sqrt{-R}, \end{aligned} \right\} \text{VI.}$$

wenn man zur Abkürzung $R = \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2\alpha} \right)$ setzt. Man bemerke noch, daß man in R den Divisor α stets mit dem Vorzeichen zu nehmen hat, welches ihm außerhalb des Wurzelzeichens zukommt; und daß die Wurzeln selbst reell oder imaginär sind, je nachdem R negativ oder positiv wird.

Zur Auflösung einer biquadratischen Gleichung gilt also folgende Regel:

„Man leite aus der reducirten Gleichung (II) die Hilfgleichung (V) ab, berechne (α^2) nach § 29 und § 31, und zuletzt die Wurzeln selbst nach den Formeln (VI), die man noch um $\frac{1}{4}A$ vermehren, resp. vermindern muß.“

35. Beispiel. $f(x) = x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 224x - 396 = 0 \quad | -\frac{1}{4}A = +2$

+ 2	- 12	- 56	+ 336
- 6	- 28	+ 168	- 60
+ 2	- 8	- 72	
- 4	- 36	+ 96	
+ 2	- 4		
- 2	- 40		
+ 2			
0			

Die reducirte Gleichung ist also

$$f(z) = z^4 - 40z^2 + 96z - 60 = 0.$$

Da $p = -40$, $q = +96$, $r = -60$ ist, so gewinnt man die Hilfgleichung

$$\alpha^6 - 80\alpha^4 + 1840\alpha^2 - 9216 = 0.$$

Ein positive Wurzel liegt zwischen 6 und 7. Die weitere Rechnung ist folgende:

1 - 80	+ 1840	- 9216	$\alpha^2 = + 6.9003311295$
+ 6	- 444	+ 8376	
- 74	+ 1396	- 840	
+ 6	- 408		
- 68	+ 988		
+ 6			
- 62			

Berechnung der Wurzelziffern.

$$\frac{C}{B} = \frac{-9216}{+1840} \text{ gibt nach § 29 } + 6. -$$

1 + 0.9	— 54.99	+ 839.709	1) 8400: 988 = 9
— 61.1	+ 933.01	2) 0.291	2) 29: 878 = 0; daher
+ 0.9	— 54.18	263643663	291: 878 = 0; daher
— 60.2	2) + 878.83	3) 27356337	2910: 878 = 3.
+ 0.9	1778991	26363725.	3) 2735: 878 = 3.
2) — 59.3	+ 878.81221009	4) 992612.	4) 992: 878 = 1.
+ 0.0003	1778982	878791.	5) 1138: 878 = 1.
— 59.2997	3) + 878.79442027.	5) 113821.	6) 2594: 878 = 2
3	177897.	87879.	7) 8367: 878 = 9.
— 59.2994	+ 878.79264130.	6) 25942.	8) 4590: 878 = 5.
3	177897.	17575.	
3) — 59.2991.0	4) + 878.79086233.	7) 8367.	
3	:	7908.	
— 59.29907	:	8) 459.	
3		439.	
— 59.29904		20	
3			
4) — 59.29901			
:			
:			

Von 4) ab braucht man die beiden Coefficienten nicht weiter zu berechnen, da die ersten Ziffern des zweiten unverändert bleiben. —

$$\alpha^2 = + 6.9003311295. \quad ; \quad \alpha = \pm 2.626848134.$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 1.7250827823. \quad ; \quad \frac{\alpha}{2} = \pm 1.313424067.$$

$$\frac{p}{2} = - 20 \quad ; \quad \frac{q}{2\alpha} = \pm 18.272849254.$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 1.725082782.$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 1.725082782.$$

$$\frac{p}{2} = - 20.$$

$$\frac{p}{2} = - 20.$$

$$q = + 18.272849254.$$

$$q = - 18.272849254.$$

$$+ 2\alpha$$

$$- 2\alpha$$

$$R = - 0.002067963.$$

$$R = - 36.547766472.$$

Alle vier Wurzeln sind also reell:

$$z' = + 1.3134240 + \sqrt{0.002067963} = + 1.3588989.$$

$$z'' = + 1.3134240 - \sqrt{0.002067963} = + 1.2679492.$$

$$z''' = - 1.3134240 + \sqrt{36.547766472} = + 4.7320508.$$

$$z'''' = - 1.3134240 - \sqrt{36.547766472} = - 7.3588989.$$

Diese Werthe sind noch um + 2 zu vermehren; daher:

$$f(x) = (x - 3.3588989)(x - 3.2679492)(x - 6.7320508)(x + 5.3588989) = 0.$$

Die genaue Lösung wäre gewesen:

$$f(x) = (x - 5 + \sqrt{3})(x - 5 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{19})(x + 1 - \sqrt{19}) = 0.$$

Die berechneten Wurzeln sind also bis auf die 7te Stelle genau.

36. Eine genaue Lösung der biquadratischen Gleichungen ist immer möglich, wenn die Größen α, β, γ der Gleichung (III) in § 33 rational sind, d. h. wenn die biquadratische Gleichung hervorgegangen ist aus zwei quadratischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Denn in diesem Falle muß nothwendig die Hilfs Gleichung (V) wenigstens eine rationale positive Wurzel haben, die wir nach den oben § 11 — § 16 entwickelten Regeln finden können, und wobei selbstverständlich nur die quadratischen Factoren des letzten Gliedes der Hilfs Gleichung zu benutzen sind.

Als erstes Beispiel einer genauen Lösung möge die in § 35 näherungsweise gelöste Gleichung dienen. Um aber mit kleinern Zahlen zu rechnen, verwandle man die oben gefundene Hilfs Gleichung

$$f(\alpha) = \alpha^6 - 80\alpha^4 + 1840\alpha^2 - 9216 = 0.$$

in eine andere, deren Wurzeln (β^2) nur gleich dem vierten Theile der Wurzeln (α^2) der Gl. $f(\alpha)$ sind. Man findet nach § 16:

$$\begin{array}{r|l} f(\beta) = \beta^6 - 20\beta^4 + 115\beta^2 - 144 & \\ \hline + 1 & - 19 + 96 \\ - 19 & + 96 - 48 \end{array} \quad \begin{array}{l} a = + 1 \\ f(+1) = - 48 \end{array}$$

Quadratische Factoren von C unter 20	4	9	16	Entsprechende Werthe von 2β	- 16	- 11	-
- a + 1	- 3	- 8	- 15	Theiler von $AB - C =$ - 2156	-	- 11	-
Theiler von $f(+1)$ = - 48	- 3	- 8	-	Mögliche Wurzel	-	+ 9	-
Mögliche Wurzeln	+ 4	+ 9	-				

$$\begin{array}{r|l} 1 - 20 + 115 - 144 & \alpha^2 \\ + 9 - 99 + 144 & \hline - 11 + 16 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\alpha^2}{4} = + 9 \\ f(+9) = 0. \end{array}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 9$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 9$$

$$\frac{p}{2} = - 20$$

$$\frac{p}{2} = - 20$$

$$\frac{q}{+2\alpha} = + 8$$

$$\frac{q}{-2\alpha} = - 8$$

$$R = - 3$$

$$R = - 19; \text{ daher}$$

$$f(z) = (x - 3 + \sqrt{3})(x - 3 - \sqrt{3})(x + 3 + \sqrt{19})(x + 3 - \sqrt{19}) = 0, \text{ oder}$$

$$f(x) = (x - 5 + \sqrt{3})(x - 5 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{19})(x + 1 - \sqrt{19}) = 0, \text{ da } x = z + 2.$$

$$2. f(x) = x^4 - 15x^2 + 18x + 10 = 0.$$

Daraus gewinnt man die Hilfs Gleichung:

$$\alpha^6 - 30\alpha^4 + 185\alpha^2 - 324 = 0$$

Quadratische Factoren von C unter 30	4	9	1	— 30	+ 185	— 324	
Entsprechende Werthe von 2β	— 26	— 21		+ 4	— 104	+ 324	+ 4 = α^2
Theiler von $AB - C = - 5226$	— 26	—		— 26	+ 81	0	$f(+4) = 0$
Mögliche Wurzel	+ 4	—		$\frac{\alpha^2}{4} = + 1$	+ 1		

$$\frac{p}{2} = - 7,5 \quad - 7,5$$

$$\frac{q}{+2\alpha} = + 4,5 \quad - 4,5$$

$$R = - 2 \quad = - 11; \text{ daher:}$$

$$f(x) = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{11})(x + 1 - \sqrt{11}) = 0.$$

$$3 f(x) = x^4 + 4x^2 + 3x + 42 = 0.$$

$$\text{Die Hilfgleichung ist: } \alpha^6 + 8\alpha^4 - 152\alpha^2 - 9 = 0 \quad \alpha^2 = + 9$$

$$\begin{array}{r|rrrr} + 9 & + 153 & + 9 & & \\ \hline + 17 & + 1 & 0 & & \end{array}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + \frac{9}{4} \quad + \frac{9}{4}$$

$$\frac{p}{2} = + 2 \quad + 2 \quad ; \text{ daher: } f(x) = (x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-19})(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-19})$$

$$(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-15})(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-15}) = 0.$$

$$\frac{q}{+2\alpha} = + \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{2}$$

$$R = + \frac{19}{4} \quad = + \frac{19}{4}$$

Anmerkung. Um bei der Ableitung der reducirten Gleichung Brüche zu vermeiden, verwandle man zuvor die zu lösende Gleichung in eine andere, deren erster Coefficient durch 4 theilbar ist. Dies erreicht man offenbar dadurch, daß man die Gleichung in eine andere umformt, deren Wurzeln entweder gleich dem doppelten oder vierfachen Werthe der vorigen sind, je nachdem der erste Coefficient eine grade oder ungrade Zahl ist. Man findet aber für eine solche Umformung, ähnlich wie in §. 16 für die cubischen Gleichungen, folgende Regel: „Um aus einer biquadratischen Gleichung eine andere abzuleiten, deren Wurzeln m mal größer sind, multiplicire man den ersten Coefficienten mit m, den zweiten mit m^2 , den dritten mit m^3 , das letzte Glied mit m^4 .“

$$4. f(x) = x^4 + 9x^3 - 135x^2 - 513x + 2430 = 0.$$

Daraus erhält man nach vorstehender Regel:

$$f(y) = y^4 + 36y^3 - 2160y^2 - 32832y + 622080 = 0 \quad | - \frac{1}{4}A = - 9$$

$$\begin{array}{r|rrrr} - 9 & - 243 & + 21627 & + 100845 & \\ \hline + 27 & - 2403 & - 11205 & + 722925 & = r \\ - 9 & - 162 & + 23085 & & \\ \hline + 18 & - 2565 & + 11880 & = q \\ - 9 & - 81 & & & \\ \hline + 9 & - 2646 & = p \\ - 9 & & & & \\ \hline 0 & & & & \end{array}$$

Die reducirte Gleichung

$$f(z) = z^4 - 2646z^2 + 11880z + 722925 = 0$$

gibt die Hilfspgleichung:

$$f(\alpha) = \alpha^6 - 5292\alpha^4 + 4109616\alpha^2 - 141134400 = 0$$

+ 30	- 157860	+ 118552680	$\alpha^2 = + 30 + 6 = 36.$
- 5262	+ 3951756 ¹⁾	- 22581720	$\frac{C}{B} = \frac{-141..}{+ 4..} \text{ giebt } + 30.$
+ 30	- 156960	+ 22581720	$\frac{1) C}{B} = \frac{-225..}{+ 37.} \text{ giebt } + 6.$
- 5232 ¹⁾	+ 3794796	0	
+ 30	- 31176		
¹⁾ - 5202	+ 3763620		
+ 6	⋮		
- 5196			

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 9$$

$$\frac{p}{2} = - 1323$$

$$\frac{q}{+2\alpha} = + 990$$

$$R = - 324 = (18)^2$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = + 9$$

$$\frac{p}{2} = - 1323$$

$$\frac{q}{-2\alpha} = - 990$$

$$R = - 2304 = (48)^2$$

Man findet:

$$f(z) = (z + 15)(z - 21)(z + 51)(z - 45) = 0,$$

also, da $x = \frac{1}{4}y = \frac{z-9}{4}$ ist,

$$f(x) = (x + 6)(x - 3)(x + 15)(x - 9) = 0.$$

Statt des vorkommenden Zeichens $\sqrt[3]{}$ bittet man $\sqrt[3]{}$ zu lesen.

Anmerkung des Setzers.