

Reducible Oktaedergleichungen.

Programm

des

K. humanistischen Gymnasiums St. Stephan

in

Augsburg

zum Schlusse des Schuljahres 1914/15

verfasst

von

Dr. P. Otmar Zettl

O. S. B.



Augsburg.

Druck von Ph. J. Pfeiffer.

1915.

Ota
5 (1915)



d
D
st
w
S
g
g
s
F
h
g
G
d
a
a
n
e
(
d
a
.
K
v
e
c
e
C
V
A

Einleitung.

F. Klein stellt in „Vorlesungen über das Ikosaeder“ zuerst die Gruppe der Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Drehungen auf (I, 1 § 3—8). Diesen Rotationsgruppen entsprechen Gruppen von linearen Substitutionen (I, 2 § 1). Dann werden die rationalen Funktionen Z gebildet, die bei diesen Substitutionsgruppen ungeändert bleiben. (I, 2 § 14). Ist umgekehrt die rationale Funktion Z ihren Zahlenwerte nach gegeben, dann kann man das zugehörige z als Unbekannte ansehen. So entstehen die Gleichungen, die (entsprechend den Rotationsgruppen) Dieder-, . . . und Ikosaeder-Gleichung heissen. (p. 62).

Die Gleichungen haben ihrem Bildungsgesetze nach folgende Eigenschaft: Die sämtlichen Wurzeln der Dieder-, . . . Gleichung gehen aus einer von ihnen durch die Drehungen der Dieder-, . . . Gruppe hervor. Diese Gleichungen sind im allgemeinen irreducibel, und weil sich alle Wurzeln durch eine aus ihnen rational darstellen lassen, sind die Gleichungen normal und können daher, solange sie irreducibel sind, als ihre eigenen Galois'schen Resolventen angesehen werden (p. 93); (die Koeffizienten, die in den Substitutionen auftreten, sind dabei als zum Rationalitätsbereich gehörig gedacht). Für diesen allgemeinen Fall hat Klein p. 96 f. die Auflösung der Dieder-, . . . und Oktaeder-Gleichung gegeben. Für spezielle Werte des Koeffizienten Z können jedoch unsere Gleichungen reducibel werden. Die naheliegenden Fragen sind nun: Wann tritt dies ein und wie erhalte ich die irreduciblen Faktoren? Ich will diese Frage auf rein analytischem Wege allein an der Oktaeder-Gleichung beantworten. Die Behandlung der übrigen Gleichungen würde sich ganz analog gestalten.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdankt der Verfasser H. Professor Hartogs, der ihn auch während der Anfertigung mit seinem Rate unterstützte.

CHAPTER 1

The first part of the book is devoted to a general survey of the history of the subject. It begins with a discussion of the early attempts to explain the origin of life, and then proceeds to a consideration of the more recent theories. The author then discusses the various methods used to study the origin of life, and finally concludes with a summary of the current state of the field.

The second part of the book is devoted to a detailed study of the various theories of the origin of life. It begins with a discussion of the chemical evolution theory, and then proceeds to a consideration of the other major theories. The author then discusses the various methods used to study the origin of life, and finally concludes with a summary of the current state of the field.

The third part of the book is devoted to a detailed study of the various theories of the origin of life. It begins with a discussion of the chemical evolution theory, and then proceeds to a consideration of the other major theories. The author then discusses the various methods used to study the origin of life, and finally concludes with a summary of the current state of the field.

o
g
n
w
(
d
u
a
G
G
—
m
di

Es ist die

Aufgabe:

1. Für welche Werte des Koeffizienten Z kann die Oktaedergleichung reducibel werden?
2. Wie lautet dabei die Zerlegung in irreducible Faktoren?

§ 1.

Theorie.

Die allgemeine Oktaedergleichung ist

$W^3 - 108t^4Z = 0$ „Ikosaeder“, Klein (62a) p. 60
oder $(z^8 + 14z^4 + 1)^3 - 108z^4(z^4 - 1)^4Z = 0$; Klein (51a) p. 54.

Die Galois'sche Gruppe dieser Gleichung ist für ein allgemeines Z im Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) $\mathfrak{S}_{24}^{1)}$ die isomorph ist zur Gruppe $\mathfrak{S}'_{24}$ der rationalen Operationen, durch welche die Wurzeln aus einer von ihnen hervorgehen. (Klein (31a) p. 43). Zunächst muss der Zusammenhang zwischen der Galois'schen Gruppe der irreduciblen Oktaedergleichung und der Gruppe der Drehungen, durch welche die Wurzeln aus einer von ihnen hervorgehen, klar gelegt werden.

Die Oktaedergleichung ist im allgemeinen ihre eigene Galois'sche Resolvente. Die Substitutionen der Galois'schen Gruppe sind demnach $H_\alpha = \begin{pmatrix} z_0 & \mathfrak{I}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{I}_\alpha(z_0) & \mathfrak{I}_1(\mathfrak{I}_\alpha(z_0)) & \dots \end{pmatrix}$, wobei

¹⁾ P_0 = natürlicher Rationalitätsbereich. — Die Gruppen sollen immer mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden; dabei gibt der untere Index die Ordnung an.

$\mathfrak{g}_\alpha(z_0)$ die sämtlichen 24 Wurzeln der Oktaedergleichung durchläuft.

Geht jedoch bei einer Drehung der Punkt z_0 über in $\mathfrak{g}_\alpha(z_0)$, dann geht gleichzeitig der andere Punkt $\mathfrak{g}_1(z_0)$ über in $\mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{g}_1(z_0))$. Eine Drehung würde daher dargestellt durch $\begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\alpha(z_0) & , & \mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{g}_1(z_0)) & \dots \end{pmatrix}$. Ich kann nun die Galois'sche Gruppe und die Gruppe der Drehungen isomorph aufeinander beziehen, wenn ich folgende Zuordnung treffe:

Der Drehung $\begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\alpha(z_0) & , & \mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{g}_1(z_0)) & \dots \end{pmatrix}$ soll entsprechen die Substitution der Galois'schen Gruppe

$\begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\alpha^{-1}(z_0) & , & \mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_\alpha^{-1}(z_0)) & \dots \end{pmatrix}$; $\mathfrak{g}_\alpha^{-1}(z_0)$ hat dabei folgende Bedeutung:

Wenn durch $\begin{pmatrix} z_0 \\ \mathfrak{g}_\alpha(z_0) \end{pmatrix}$ das z_0 übergeführt wird in $\mathfrak{g}_\alpha(z_0)$, dann soll durch $\begin{pmatrix} z_0 \\ \mathfrak{g}_\alpha^{-1}(z_0) \end{pmatrix}$ das $\mathfrak{g}_\alpha(z_0)$ übergeführt werden in z_0 .

Nun ist zu beweisen, dass beide Gruppen tatsächlich isomorph auf einander bezogen sind. Dies geschieht auf die gewöhnliche Weise: Ich nehme 2 Drehungen und die ihnen zugeordneten Elemente der Galois'schen Gruppe. Dem Produkt der Drehungen muss dann das Produkt der zugeordneten Elemente entsprechen.

$$\begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\alpha(z_0) & , & \mathfrak{g}_\alpha \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\beta(z_0) & , & \mathfrak{g}_\beta \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\beta \mathfrak{g}_\alpha(z_0) & , & \mathfrak{g}_\beta \mathfrak{g}_\alpha \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \end{pmatrix};$$

Die entsprechenden Substitutionen der Galois'schen Gruppe:

$$\begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\alpha^{-1}(z_0) & , & \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_\alpha^{-1}(z_0) & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\beta^{-1}(z_0) & , & \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_\beta^{-1}(z_0) & \dots \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ \mathfrak{g}_\alpha^{-1} \mathfrak{g}_\beta^{-1}(z_0) & , & \mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_\alpha^{-1} \mathfrak{g}_\beta^{-1}(z_0)) & \dots \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} z_0 & , & \mathfrak{g}_1(z_0) & \dots \\ (\mathfrak{g}_\beta \mathfrak{g}_\alpha(z_0))^{-1} & , & \mathfrak{g}_1((\mathfrak{g}_\beta \mathfrak{g}_\alpha)^{-1}(z_0)) & \dots \end{pmatrix};$$

Die beiden Gruppen sind somit durch die angegebene Zuordnung tatsächlich isomorph auf einander bezogen.

Die Substitutionen, mit denen wir es im folgenden zu tun haben, sind im allgemeinen Substitutionen einer Galois'schen Gruppe. Wenn wir uns auf die Gruppen der Drehungen, die Klein ableitet, beziehen, so wird es sich dabei meist um die zu ihnen isomorphen Galois'schen Gruppen handeln.

Unsere Aufgabe ist, die Fälle anzugeben, in denen die Gleichung des Oktaeders reducibel wird. Wir wissen: Die Galois'sche Gruppe einer reduciblen Gleichung ist intransitiv. Nun gilt aber: Die Galois'sche Gruppe unserer Oktaedergleichung kann in speziellen Fällen nur zu einer Untergruppe der einfach transitiven Gruppe $\mathfrak{S}_{24}$ (Grad und Ordnung sind 24) werden, von denen jede intransitiv ist. Es ist demnach zu untersuchen, was eintritt, wenn eine der Untergruppen von $\mathfrak{S}_{24}$ die Galois'sche Gruppe der Oktaedergleichung wird. Die Gruppe der Drehungen und daher auch die Galois'sche Gruppe der irreduciblen Oktaedergleichung besitzt folgende Untergruppen:

- | | | | | | |
|----|---|-------------|-----------------|--------------|-----------------------|
| a) | 3 | konjugierte | cyklische | Untergruppen | $\mathfrak{S}_4^I$ |
| | 4 | " | " | " | $\mathfrak{S}_3$ |
| | 6 | " | " | " | $\mathfrak{S}_2^{II}$ |
| | 3 | " | " | " | $\mathfrak{S}_2$ |
| b) | 3 | " | Diedergruppen | | $\mathfrak{S}_8$ |
| | 4 | " | " | | $\mathfrak{S}_6$ |
| | 3 | " | " | | $\mathfrak{S}_4^{II}$ |
| | 1 | invariante | Untergruppe | | $\mathfrak{S}_4$ |
| c) | | die | Tetraedergruppe | | $\mathfrak{S}_{12}$ |

Dyck, Math. Ann. 22, p. 103.

Es möge eine dieser Untergruppen ($\mathfrak{S}_n$) die Galois'sche Gruppe der Oktaedergleichung werden. Dann zerfallen die 24 Wurzeln in $\frac{24}{n}$ Intransitivitätsabteilungen von je n Grössen.¹⁾

¹⁾ Diese Behauptung ist nur richtig, solange i zum Rationalitätsbereich gehört, weil nur dann die einfach transitive Gruppe $\mathfrak{S}_{24}$ die Galois'sche Gruppe der allgemeinen Oktaedergleichung ist.

Durch Anwendung der Substitutionen von $\mathfrak{S}_n$ gehe z_0 über in $z_0, \vartheta_1(z_0) \dots \vartheta_{n-1}(z_0)$. Dies sind dann die Grössen einer Intransitivitätsabteilung. Wie erhalte ich die übrigen Intransitivitätsabteilungen? Es ist

$$\mathfrak{S}_{24} = E\mathfrak{S}_n + G_1\mathfrak{S}_n + \dots + G_{s-1}\mathfrak{S}_n; s.n = 24.$$

E (Einheitselement), $G_1 \dots G_{s-1}$ bilden die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems 2. Art von $\mathfrak{S}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{S}_n$ ¹⁾. Diese mögen z_0 überführen in

$$z_0, \varphi_1(z_0) \dots \varphi_{s-1}(z_0).$$

Wende ich auf diese s Grössen die Substitutionen von $\mathfrak{S}_n$ an, so erhalte ich damit die s Intransitivitätsabteilungen:

$$\begin{array}{ccccccc} z_0 & , & \vartheta_1(z_0) & , & \vartheta_2(z_0) & \dots & \vartheta_{n-1}(z_0) , \\ \varphi_1(z_0), & \varphi_1(\vartheta_1(z_0)), & \varphi_1(\vartheta_2(z_0)) & \dots & \varphi_1\vartheta_{n-1}(z_0), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{s-1}(z_0), & \varphi_{s-1}\vartheta_1(z_0), & \varphi_{s-1}\vartheta_2(z_0) & \dots & \varphi_{s-1}\vartheta_{n-1}(z_0); \end{array}$$

Die irreduciblen Faktoren sind entsprechend:

$$\begin{array}{l} [(z - z_0) \dots (z - \vartheta_1(z_0)) \dots (z - \vartheta_{n-1}(z_0))] \cdot \\ [(z - \varphi_1(z_0)) \cdot (z - \varphi_1\vartheta_1(z_0)) \dots (z - \varphi_1\vartheta_{n-1}(z_0))] \cdot \\ \dots \dots \dots \\ [(z - \varphi_{s-1}(z_0)) \cdot (z - \varphi_{s-1}\vartheta_1(z_0)) \dots (z - \varphi_{s-1}\vartheta_{n-1}(z_0))] \end{array}$$

Die Koeffizienten, die in den einzelnen Faktoren auftreten, haben die Form Symmetrische Funktion von

$$[\varphi_\alpha(z_0), \varphi_\alpha\vartheta_1(z_0), \dots, \varphi_\alpha\vartheta_{n-1}(z_0)]; \alpha = 0, 1 \dots s-1$$

dabei $\varphi_0\vartheta_\nu(z_0) = \vartheta_\nu(z_0)$.

Diese Koeffizienten gehören ihrem Bildungsgesetze nach zu $\mathfrak{S}_n$. Wir können aber noch weiter behaupten, dass alle Koeffizienten der obigen Zerlegung, soweit sie nicht von z_0 unabhängig sind, linear in einem aus ihnen sind mit Koeffizienten aus (P_0, i) . Das lässt sich zeigen mittels eines Beweises bei Klein § 14, p. 58.

Ich wähle zunächst als Rationalitätsbereich (P_0, i) . 2 Koeffizienten unserer Zerlegung seien $R(z_0) = C$ und $R'(z_0) = C'$.

¹⁾ Unter Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems schlechthin will ich im folgenden die Substitutionen $E, G^1, \dots, G^{(s-1)}$ verstehen, wenn $\mathfrak{S}_{24} = \mathfrak{S}_n E + \mathfrak{S}_n G^1 + \dots + \mathfrak{S}_n G^{(s-1)}$; wenn $\mathfrak{S}_n$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{S}_{24}$ ist, dann fallen beide Arten zusammen.

Die Werte C und C' müssen nach Voraussetzung zu (P_0, i) gehören. Ich nehme nun für einen Augenblick z_0 als Variable z an; dann habe ich 2 Gleichungen $R(z) - C = 0$ und $R'(z) - C' = 0$; ich kann auch schreiben $R(z) = \text{Symmetrische Funktion } [\varphi_\alpha(z), \varphi_\alpha \vartheta_1(z), \dots, \varphi_\alpha \vartheta_{n-1}(z)] = C$; der Grad von $R(z)$ ist n , weil es eine symmetrische Funktion von n , in z linearen Funktionen ist.

Es sei nun ζ eine Wurzel von $R(z) - C = 0$; dann ist also Symmetrische Funktion aus

$$[\varphi_\alpha(\zeta), \varphi_\alpha \vartheta_1(\zeta), \dots, \varphi_\alpha \vartheta_{n-1}(\zeta)] - C = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass auch Symmetrische Funktion $[\varphi_\alpha \vartheta_\nu(\zeta), \varphi_\alpha \vartheta_1(\vartheta_\nu(\zeta)), \dots, \varphi_\alpha \vartheta_{n-1}(\vartheta_\nu(\zeta))] - C = 0$ $\nu = 1, 2, \dots, n-1$.

Wir haben damit n Wurzeln von $R(z) - C = 0$. Sollte diese Gleichung vom Grade n mehr als n Wurzeln besitzen, dann müsste $R(z) - C$ identisch verschwinden, d. h. $R(z)$ sich auf eine Konstante reduzieren. Das gleiche gilt für $R'(z)$. Wir können jetzt sagen: Der Wert, den C und C' erhält, wenn ich für z ein bestimmtes ζ einsetze, bleibt dann und nur dann erhalten, wenn ich für ζ irgend eine der n (von einander verschiedenen) Grössen substituiere, die aus ζ durch die n Drehungen der zu $\mathfrak{H}_n$ isomorphen Rotationsgruppe entstehen. „So schliessen wir, dass $R(z)$ von $R'(z)$ und ebenso $R'(z)$ von $R(z)$ rational abhängt, d. h. $R'(z)$ eine lineare Funktion von $R(z)$.“

(Klein p. 59). Es ist also $R'(z) = \frac{\alpha \cdot R(z) + \beta}{\gamma \cdot R(z) + \delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Grössen von (P_0, i) sind; denn wir haben bisher den Rationalitätsbereich (P_0, i) vorausgesetzt. Jetzt erweitern wir den Rationalitätsbereich zu (P_0, i, Z) ; wir wählen dann $z = \zeta$ so, dass $R(\zeta)$ Grösse von (P_0, i, Z) . Es gilt nun immer noch die Beziehung $R'(\zeta) = \frac{\alpha \cdot R(\zeta) + \beta}{\gamma \cdot R(\zeta) + \delta}$; dabei sind also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Grössen von (P_0, i) , $R(\zeta)$ und daher auch $R'(\zeta)$ Grössen von (P_0, i, Z) . Das Resultat ist somit: Alle Koeffizienten unserer Zerlegung lassen sich linear durch einen aus ihnen darstellen mit Koeffizienten aus (P_0, i) , oder aber, sie reduzieren sich auf reine Zahlen.

Zu jeder Untergruppe $\mathfrak{H}_n$ existieren, wenn $\mathfrak{H}_n$ nicht invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}_{24}$ ist, bezüglich $\mathfrak{H}_{24}$ konjugierte

Untergruppen. Wir wollen zeigen: Es ergibt sich stets die gleiche Zerlegung in irreducible Faktoren, gleichgültig, welche von mehreren konjugierten Untergruppen von $\mathfrak{H}_{24}$ die Galois'sche Gruppe der Gleichung wird. Der Beweis ist folgender:

Wir gehen aus von der Zerlegung in irreducible Faktoren, die sich ergibt, wenn $\mathfrak{H}_n$ die Galois'sche Gruppe ist. ($\mathfrak{H}_n$ sei nicht invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}_{24}$). Ein irreducibler Faktor sei $z^n + \dots + \psi(z_0) \cdot z^{n-a} + \dots$; $\psi(z_0)$ sei ein Koeffizient, der keine von z_0 unabhängige Zahl und auch nicht identisch Null ist. $\psi(z_0)$ gehört zu $\mathfrak{H}_n$. Nun wende ich auf die Koeffizienten des obigen Faktors die Substitution G von $\mathfrak{H}_{24}$ an, die nicht in $\mathfrak{H}_n$ ist und erhalte

$$z^n + \dots + [\psi(z_0)]_G \cdot z^{n-a} + \dots;$$

die jetzt auftretenden Koeffizienten gehören zu der zu $\mathfrak{H}_n$ bezüglich $\mathfrak{H}_{24}$ konjugierten Gruppe $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$; denn

G^{-1} führt ψ_G in ψ über,

$\mathfrak{H}_n$ lässt ψ ungeändert,

G führt ψ in ψ_G über;

also $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$ lässt ψ_G ungeändert.

Wende ich so G auf die Koeffizienten in allen irreduciblen Faktoren an, so entstehen lauter Koeffizienten, die (sofern sie nicht reine Zahlen sind) zu $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$ gehören. Wir haben also die Zerlegung für den Fall, dass $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$ die Galois'sche Gruppe wird. (Denn die 24 Wurzeln der Oktaeder-Gleichung lassen sich nur auf eine Weise so zusammenfassen, dass die Koeffizienten in allen irreduciblen Faktoren zu $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$ gehören). Dies ist jedoch keine neue Zerlegung. Ich erhielt sie nämlich, indem ich auf die Koeffizienten der ersten Zerlegung die Substitution $G = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ g(z_0) & \dots \end{pmatrix}$ anwandte. Dies kann ich so deuten:

Ich ersetze z_0 in allen Koeffizienten durch $g(z'_0)$ und drücke nun alles durch z'_0 aus, d. h. stelle die Koeffizienten als Funktion einer anderen Wurzel z'_0 dar. Die n Wurzeln, die zusammengehören, wenn $\mathfrak{H}_n$ die Galois'sche Gruppe ist, gehören auch zusammen, wenn $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$ ¹⁾ (irgend eine zu $\mathfrak{H}_n$ bezüg-

¹⁾ Die zu $\mathfrak{H}_n$ konjugierte Untergruppe $G^{-1}\mathfrak{H}_nG$ entsteht schliesslich auch nur aus $\mathfrak{H}_n$, wenn ich in den beiden Zeilen von $\mathfrak{H}_n$ die Substitution G ausführe, was nichts anderes bedeutet, als dass nun alle Wurzeln rational durch eine andere z'_0 ausgedrückt werden.

lich $\mathfrak{S}_{24}$ konjugierte Gruppe) die Galois'sche Gruppe ist; nur drücken sie sich jetzt mittelst einer anderen Wurzel aus. Das Resultat ist demnach: Jedes System konjugierter Untergruppen liefert genau eine Zerlegungsmöglichkeit der Oktaedergleichung.¹⁾

Sehr einfach wird das Verfahren der Aufsuchung der irreduciblen Faktoren, wenn eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{S}_{24}$ die Galois'sche Gruppe der Oktaedergleichung wird. Eine solche sei $\mathfrak{U}_m$; dann ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{24} &= \mathfrak{U}_m + R_1 \mathfrak{U}_m + \dots + R_{t-1} \cdot \mathfrak{U}_m, \\ &= \mathfrak{U}_m + \mathfrak{U}_m R_1 + \dots + \mathfrak{U}_m \cdot R_{t-1}; \quad t \cdot m = 24;\end{aligned}$$

Vorher haben wir sämtliche Intransitivitätsabteilungen und damit sämtliche irreduciblen Faktoren erhalten, indem wir auf die Wurzeln, die aus irgend einer durch Anwendung der Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems 2. Art entstanden, sämtliche Substitutionen der Galois'schen Gruppe anwandten. Aber weil $\mathfrak{U}_m$ eine invariante Untergruppe, so darf ich statt dessen auf z_0 zuerst die Substitutionen von $\mathfrak{U}_m$ anwenden. Wende ich dann $R_1 \dots R_{t-1}$ auf die m Wurzeln des einen irreduciblen Faktors an, so erhalte ich die sämtlichen Intransitivitätsabteilungen. Dies kann ich noch vereinfachen, indem ich $R_1, \dots, R_{t-1}$ gleich auf die symmetrischen Funktionen der Wurzeln, das ist auf die Koeffizienten des ersten irreduciblen Faktors anwende. Für den Fall also, dass eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{S}_{24}$ die Galois'sche Gruppe wird, erhalten wir sämtliche irreduciblen Faktoren, wenn wir auf die Koeffizienten eines irreduciblen Faktors die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{S}_{24}$ bezüglich der invarianten Untergruppe anwenden.

Wenn wir in der angegebenen Weise von allen konjugierten Untergruppen eine beliebige nehmen, sie zur Galois'schen Gruppe machen und so verfahren, wie oben durchgeführt wurde, so erhalten wir jede mögliche Zerlegung der Oktaedergleichung (andere Zerlegungen gibt es nicht) und zwar haben alle irreduciblen Faktoren den gleichen Grad;²⁾

¹⁾ Im Grund genommen sagt auch der Satz bei Klein p. 88 das gleiche aus: Es gibt so viel verschiedenartige Resolventen einer vorgelegten Gleichung $f(z) = 0$, als innerhalb der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ verschiedene Systeme konjugierter Untergruppen existieren.

²⁾ Gilt nur, solange i zum Rationalitätsbereich gehört.

denn jeder irreducible Faktor stellt, gleich 0 gesetzt, eine Galois'sche Resolvente dar.

§ 2.

Zerlegung der Oktaedergleichung

in 2 (3, 6, 12) Faktoren vom Grade 12 (8, 4, 2).

Wir gehen aus von einer invarianten Untergruppe von $\mathfrak{S}_{24}$, nämlich der Vierergruppe

$$\mathfrak{S}_4 = E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix};$$

Klein (21) p. 37. Wenn $\mathfrak{S}_4$ die Galois'sche Gruppe wird, dann zerfällt die Oktaedergleichung in 6 irreducible Faktoren vom Grade 4. Der Faktor, der die Grössen, die aus z_0 durch Anwendung von $\mathfrak{S}_4$ entstehen, zu Wurzeln hat, lautet:

$$z^4 - z^2 \left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} \right) + 1.$$

Weil $\mathfrak{S}_4$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{S}_{24}$ ist, so erhalte ich die übrigen irreduciblen Faktoren vom Grade 4, wenn ich die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{S}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{S}_4$ auf den Koeffizienten $z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}$ anwende.

$\mathfrak{S}_{24} = \mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{12} H$; $\mathfrak{S}_{12} =$ Galois'sche Gruppe der Tetraedergleichung. Klein (30 a) p. 42.¹⁾

$$H = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \cdot z_0 & \dots \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_4 + \mathfrak{S}_4 H_1 + \mathfrak{S}_4 H_2; H_1 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \cdot \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix}; H_2 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+i}{z_0-i} & \dots \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{S}_{24} = \mathfrak{S}_4 + \mathfrak{S}_4 H_1 + \mathfrak{S}_4 H_2 + (\mathfrak{S}_4 + \mathfrak{S}_4 H_1 + \mathfrak{S}_4 H_2) H;$$

$E, H_1, H_2, H, H_1 \cdot H, H_2 \cdot H$ (Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{S}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{S}_4$) sind nun auf

¹⁾ Die hier angegebene Form ist für unsere Zwecke nur umzugestalten in eine Galois'sche Gruppe; also

$$\mathfrak{S}_{12} = E + \begin{pmatrix} z_0 & -z_0 & \dots \\ -z_0 & z_0 & \dots \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -i \cdot \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix}.$$

$z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}$ anzuwenden. Damit erhalten wir die 6 irreduciblen Faktoren

$$\begin{aligned} & \{z^4 - z^2(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}) + 1\} \cdot \{z^4 + z^2(\frac{z_0+1}{z_0-1})^2 + (\frac{z_0-1}{z_0+1})^2 + 1\} \\ & \{z^4 - z^2(\frac{z_0+i}{z_0-i})^2 + (\frac{z_0-i}{z_0+i})^2 + 1\} \cdot \{z^4 + z^2(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}) + 1\} \\ & \{z^4 + z^2(\frac{z_0+i}{z_0-i})^2 + (\frac{z_0-i}{z_0+i})^2 + 1\} \cdot \{z^4 - z^2(\frac{z_0+1}{z_0-1})^2 + (\frac{z_0-1}{z_0+1})^2 + 1\}. \end{aligned}$$

Die ersten 3 Faktoren geben die Tetraedergleichung; die sämtlichen 6 Faktoren geben die Oktaedergleichung.

Die Koeffizienten gehören (soweit sie von z_0 abhängig sind) zu $\mathfrak{H}_4$ und müssen nach der vorausgeschickten Theorie lineare Funktionen eines aus ihnen sein. Wenn sonach einer der Koeffizienten z. B. $z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}$ zum Rationalitätsbereich gehört, dann gehören alle zu dem Rationalitätsbereich und wir haben damit eine mögliche Zerlegung in 6 irreducible Faktoren. An Stelle von $z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}$ führen wir ein

$$Z_2 = \frac{(z_0^2 - 1)^2}{-4z_0^2} = b; \text{ Klein (10) u. (11) p. 97.}$$

$$z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} = 2 - 4Z_2;$$

wenn $z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}$ rational bekannt ist, ist es auch Z_2 und umgekehrt. Nun sind alle Koeffizienten durch Z_2 auszudrücken.

$$\left(\frac{z_0+1}{z_0-1}\right)^2 + \left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)^2 = 2 + \frac{16z_0^2}{(z_0^2-1)^2} = 2 - \frac{4}{Z_2};$$

$$\left(\frac{z_0+i}{z_0-i}\right)^2 + \left(\frac{z_0-i}{z_0+i}\right)^2 = 2 - \frac{16}{z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} + 2} = 2 + \frac{4}{Z_2-1}.$$

Die Zerlegung ist demnach

$$\begin{aligned} & \{z^4 - 2z^2(1 - 2Z_2) + 1\} \cdot \{z^4 + 2z^2(1 - \frac{2}{Z_2}) + 1\} \\ & \{z^4 - 2z^2(1 + \frac{2}{Z_2-1}) + 1\} \cdot \{z^4 + 2z^2(1 - 2Z_2) + 1\} \\ & \{z^4 + 2z^2(1 + \frac{2}{Z_2-1}) + 1\} \cdot \{z^4 - 2z^2(1 - \frac{2}{Z_2}) + 1\}. \end{aligned}$$

Für welche Werte des Koeffizienten Z der allgemeinen Oktaedergleichung ist diese Zerlegung möglich? Zu diesem Zwecke suchen wir eine Beziehung zwischen Z_2 und Z_1 und dann zwischen Z_1 und Z . (Z_1 = Koeffizient der Tetraedergleichung.)

$$\psi^3 - \phi^3 Z_1 = 0 \quad \text{Klein (5) p. 96}^1)$$

$$\text{oder } (z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 + 1)^3 - (z^4 + 2i\sqrt{3}z^2 + 1)^3 \cdot Z_1 = 0$$

$$\text{Klein (45) p. 51.}$$

Wir vergleichen nun einmal, nachdem wir den Koeffizienten von z^{12} zu 1 gemacht haben, die Koeffizienten von z^{10} in dieser Tetraedergleichung und in der obigen (Produkt der 3 ersten Faktoren der Zerlegung) und bekommen damit die Beziehung zwischen Z_1 und Z_2 .

$$-2\left(1 - 2Z_2 - 1 + \frac{2}{Z_2} + 1 + \frac{2}{Z_2 - 1}\right) = -6i\sqrt{3} \cdot \frac{1+Z_1}{1-Z_1}$$

$$\frac{-2Z_2^3 + 3Z_2^2 + 3Z_2 - 2}{Z_2^2 - Z_2} = 3i\sqrt{3} \frac{1+Z_1}{1-Z_1};$$

$$\text{somit } Z_1 = \left(\frac{Z_2 + \alpha}{Z_2 + \alpha^2}\right)^3; \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}^2)$$

In dieser Formel tritt ausser i die Irrationalität $\sqrt{3}$ auf. Aber $\sqrt{3}$ ist nicht notwendig in Z_1 und in Z . Wir adjungieren daher $\sqrt{3}$ nicht. Dann müssen wir aber für Z_1 eine andere Grösse als Koeffizient der Tetraedergleichung einführen. Wir führen ein

$$-6i\sqrt{3} \frac{1+Z_1}{1-Z_1} = -6Z'_1;$$

denn $-6i\sqrt{3} \frac{1+Z_1}{1-Z_1}$ ist der Koeffizient von z^{10} in der allgemeinen Tetraedergleichung (wenn der Koeffizient von z^{12} gleich 1 ist); die übrigen Koeffizienten sind dann sicher rational in Z'_1 mit Koeffizienten aus (P_0, i) .

Die Tetraedergleichung gestaltet sich folgendermassen:

$$\text{Es ist } Z_1 = \frac{\frac{i}{\sqrt{3}} Z'_1 + 1}{\frac{i}{\sqrt{3}} Z'_1 - 1};$$

Aus $\psi^3 - \phi^3 Z_1 = 0$ wird

$$(z^4 + 1 - 2i\sqrt{3}z^2)^3 \left(\frac{i}{\sqrt{3}} Z'_1 - 1\right) - (z^4 + 1 + 2i\sqrt{3}z^2)^3 \left(\frac{i}{\sqrt{3}} Z'_1 + 1\right) = 0$$

$$-2(z^4 + 1)^3 + 2 \cdot 36z^4(z^4 + 1) + 2 \cdot 6z^2((z^4 + 1)^2 - 4z^4)Z'_1 = 0$$

$$z^{12} - 33z^8 - 33z^4 + 1 - 6z^2(z^4 - 1)^2 Z'_1 = 0$$

allgemeine Tetraedergleichung.

¹⁾ Um in Übereinstimmung mit Klein (61a) p. 60 zu bleiben, ist bei Klein in (5) p. 96 zu lesen $\frac{\psi^3}{\phi^3} = Z_1$.

²⁾ Bei Klein (9) p. 97 ist die Formel so abzuändern. Ich habe die obige Entwicklung auch noch aus dem Grunde gegeben, weil Klein die Formel nicht eigentlich ableitet.

Hieraus ersehen wir auch, für welche Werte von Z_1 die Tetraedergleichung in 3 Faktoren vom Grade 4 zerfällt (d. h. Z_2 dem Rationalitätsbereich angehört).

Wir hatten:

$$3i\sqrt[3]{\frac{1+Z_1}{1-Z_1}} = \frac{-2Z_2^3 + 3Z_2^2 + 3Z_2 - 2}{Z_2^2 - Z_2};$$

da $Z_2 = b$ und $i\sqrt[3]{\frac{1+Z_1}{1-Z_1}} = Z'_1$, so erhalten wir:

Ist P ein beliebiger Rationalitätsbereich, welcher i enthält und ist $3Z'_1 = \frac{-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2}{b^2 - b}$, wo b irgend eine Grösse des Rationalitätsbereiches P bedeutet, dann kann ich die Tetraedergleichung im Rationalitätsbereich P in 3 Faktoren vom Grade 4 zerlegen. [Wir werden später genauer auf die Frage nach der Wahl des Rationalitätsbereiches eingehen].

Wir können obige Beziehung zwischen Z'_1 und b (und ebenso alle übrigen später auftretenden Beziehungen zwischen rationalen Funktionen der Wurzeln) noch auf andere Art ableiten.

$b = \frac{z_0^4 - 2z_0^2 + 1}{-4z_0^2}$ ist eine rationale Funktion der Wurzeln, die bei den Substitutionen einer Untergruppe ($\mathfrak{H}_4$) von $\mathfrak{H}_{12}$ ungeändert bleibt. Ich nehme nun für einen Augenblick an, b sei nicht rational bekannt und frage nach der irreduciblen Gleichung für b .

Es war $\mathfrak{H}_{12} = \mathfrak{H}_4 + \mathfrak{H}_4 H_1 + \mathfrak{H}_4 H_2$; b, b_{H_1}, b_{H_2} sind deshalb die konjugierten Werte und die im Rationalitätsbereich (P_0, i, Z'_1) irreducible Gleichung für b ist

$$(u - b)(u - b_{H_1})(u - b_{H_2}) = 0.$$

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right); \quad b_{H_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{z_0+1}{z_0-1}\right)^2 + \left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)^2\right);$$

$$b_{H_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{z_0+i}{z_0-i}\right)^2 + \left(\frac{z_0-i}{z_0+i}\right)^2\right);$$

Die irreducible Gleichung ist demnach

$$\left(2u - 1 + \frac{z_0^4 + 1}{2z_0^2}\right) \left(2u - 1 - \frac{z_0^4 + 6z_0^2 + 1}{(z_0^2 - 1)^2}\right) \left(2u - 1 + \frac{z_0^4 - 6z_0^2 + 1}{(z_0^2 + 1)^2}\right) = 0$$

$$(2u - 1)^3 + (2u - 1)^2 \frac{z_0^{12} - 33z_0^9 - 33z_0^6 + 1}{2z_0^3(z_0^4 - 1)^2} - (2u - 1) \frac{9z_0^9 - 18z_0^6 + 9}{(z_0^4 - 1)^2} - \frac{z_0^{12} - 33z_0^9 - 33z_0^6 + 1}{2z_0^3(z_0^4 - 1)^2} = 0;$$

$$\text{Nun ist } Z'_1 = \frac{z_0^{12} - 33z_0^9 - 33z_0^6 + 1}{6z_0^2(z_0^4 - 1)^2};$$

Somit $(2u-1)^3 + 3(2u-1)^2 Z'_1 - 9(2u-1) - 3Z'_1 = 0$

$$2u^3 + 3u^2(Z'_1 - 1) - 3u(Z'_1 + 1) + 2 = 0;$$

Die irreducible Gleichung für b ist sonach:

$$2b^3 + 3b^2(Z'_1 - 1) - 3b(Z'_1 + 1) + 2 = 0;^1)$$

Daraus ergibt sich wieder die obige Beziehung:

$$3Z'_1 = \frac{-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2}{b^2 - b}.$$

Wir haben noch anzugeben für welche Werte von Z die Oktaedergleichung in die oben (p. 13) berechneten Faktoren zerfällt. Die Zerlegung war:

$$\begin{aligned} & \{z^4 - 2z^2(1 - 2b) + 1\} \cdot \{z^4 + 2z^2(1 - \frac{2}{b}) + 1\} \\ & \{z^4 - 2z^2 \frac{b+1}{b-1} + 1\} \cdot \{z^4 + 2z^2(1 - 2b) + 1\} \\ & \{z^4 + 2z^2 \frac{b+1}{b-1} + 1\} \cdot \{z^4 - 2z^2(1 - \frac{2}{b}) + 1\}; \end{aligned}$$

Wir haben bereits Z'_1 durch $b = Z_2 = \frac{(z_0^2 - 1)^2}{-4z_0^2}$ dargestellt. Nun ist noch Z durch Z'_1 auszudrücken.

Aus dem Faktor

$$\psi^3 - \phi^3 \frac{\frac{i}{V^3} Z'_1 + 1}{\frac{i}{V^3} Z'_1 - 1}$$

(p. 14) erhalte ich den andern Faktor der Oktaedergleichung, wenn ich auf den Koeffizienten Z'_1 die Substitution $H = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ iz_0 & \dots \end{pmatrix}$ anwende (p. 12).

Es ist $Z'_1 = \frac{z_0^{12} - 33z_0^8 - 33z_0^4 + 1}{6z_0^3(z_0^4 - 1)^2}$; sonach $(Z'_1)_H = -Z'_1$; die Oktaedergleichung ist daher:

$$\left(\psi^3 - \phi^3 \frac{\frac{i}{V^3} Z'_1 + 1}{\frac{i}{V^3} Z'_1 - 1} \right) \left(\psi^3 - \phi^3 \frac{\frac{i}{V^3} Z'_1 - 1}{\frac{i}{V^3} Z'_1 + 1} \right) = 0$$

¹⁾ Nur weil in dieser irreduciblen Gleichung für b die Grösse Z'_1 linear vorkommt, kann ich Z'_1 als rationale Funktion von b darstellen mit Koeffizienten aus (P_0, i) . Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folgerung aus dem p. 9 angegebenen Gesetze, dass alle Koeffizienten einer Zerlegung sich linear durch einen ausdrücken mit Koeffizienten aus (P_0, i) . Eine rationale Funktion der Wurzeln, die zu ξ_{mn} gehört, lässt sich daher rational darstellen durch eine rationale Funktion der Wurzeln, die zu ξ_n gehört, mit Koeffizienten aus (P_0, i) .

$$\Psi^6 + \Phi^6 - 2\Psi^3\Phi^3 \frac{-\frac{1}{3}Z_1'^2 + 1}{-\frac{1}{3}Z_1'^2 - 1} = 0;$$

da $\Psi\Phi = W$ Klein (43) p. 50

$$\Psi^3 - \Phi^3 = -12i\sqrt{3}t^2 \text{ Klein (46a) p. 51}$$

so ergibt sich:

$$-3 \cdot 144t^4 + 2W^3 + 2W^3 \frac{3 - Z_1'^2}{3 + Z_1'^2},$$

oder
$$W^3 - 108t^4 \left(1 + \frac{Z_1'^2}{3}\right) = 0$$

Nun ist die allgemeine Oktaedergleichung:

$$W^3 - 108t^4 \cdot Z = 0 \text{ Klein (4) p. 96}$$

$$\text{somit } Z = 1 + \frac{1}{3}Z_1'^2;$$

Wir setzen nun $Z_1' = a^1$) und können unser Resultat so aussprechen:

Wenn die durch $Z = 1 + \frac{a^2}{3}$ bestimmte Grösse a dem Rationalitätsbereich $(P_0, i, Z)^2$) angehört, dann ist die Oktaedergleichung in 2 Faktoren vom Grade 12 zerlegbar und die Zerlegung lautet:

$$\begin{aligned} & \{ z^{12} - 33z^8 - 33z^4 + 1 - 6z^2(z^4 - 1)^2 a \} \\ & \{ z^{12} - 33z^8 - 33z^4 + 1 + 6z^2(z^4 - 1)^2 a \}; \end{aligned}$$

Wenn nun weiterhin a spezielle Werte annimmt, nämlich

$$a = \frac{-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2}{3(b^2 - b)},$$

wobei b Grösse des Rationalitätsbereiches (P_0, i, Z) , dann zerfällt jeder der obigen Faktoren in 3 Teilfaktoren und wir erhalten die p. 16 angegebene Zerlegung in 6 Faktoren.

Hier schliesst sich unmittelbar die Frage an: Für welche Werte von b zerfallen die 6 Faktoren vom Grade 4 in je 2 Faktoren vom Grade 2?

¹⁾ Führen wir in der Formel $Z = 1 + \frac{Z_1'^2}{3}$ wieder ein

$$Z_1' = i\sqrt{3} \frac{1 + Z_1}{1 - Z_1},$$

dann wird daraus $Z = -\frac{4Z_1}{(Z_1 - 1)^2}$; so ist auch zu lesen bei Klein (8) p. 97.

²⁾ Gehört z. B. Z zu P_0 , dann muss a Grösse von (P_0, i) sein, braucht also nicht notwendig reell zu sein.

$$\mathfrak{H}_4 \text{ hat 3 maximale in-} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_2 = E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix}; \\ \text{variante Untergruppen} \quad \mathfrak{H}'_2 = E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ 1 & \dots \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{H}''_2 = E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -1 & \dots \end{pmatrix}; \end{array} \right.$$

Aber diese Untergruppen sind bezüglich $\mathfrak{H}_{24}$ (selbst schon bez. $\mathfrak{H}_{12}$) konjugiert.

$$\begin{aligned} \text{Denn} \quad & \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0+i & \dots \\ -z_0-i & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \frac{z_0-1}{z_0+1} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ 1 & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix}; \\ & \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \frac{z_0-1}{z_0+1} & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0+i & \dots \\ -z_0-i & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -1 & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Es ergibt sich sonach jedesmal die gleiche Zerlegung der Oktaedergleichung, welche dieser 3 Untergruppen auch die Galois'sche Gruppe wird.

Es werde z. B. die Galois'sche Gruppe der Oktaedergleichung $\mathfrak{H}_2 = E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix}$; $\mathfrak{H}_2$ ist keine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}_{24}$. Wenn ich sämtliche irreduciblen Faktoren bestimmen will, kann ich darum nicht so verfahren, dass ich die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{H}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{H}_2$ auf die Koeffizienten irgend eines irreduciblen Faktors anwende. Ich gehe darum folgendermassen vor: Die Wurzeln, die aus z_0 durch Anwendung eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{H}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{H}_4$ hervorgehen, sind:

$$z_0, i \frac{z_0+1}{z_0-1}, \frac{z_0+i}{z_0-i}, i z_0, i \frac{z_0-i}{z_0+i}, \frac{z_0+1}{z_0-1}; \text{ (p. 12.)}$$

Ich wende $\mathfrak{H}_2$ auf diese 6 Wurzeln an und erhalte, wenn ich immer die 2 Wurzeln, die aus einer der obigen 6 durch Anwendung von $\mathfrak{H}_2$ entstehen, zu einem irreduciblen Faktor zusammennehme, folgende Faktoren:

$$\begin{aligned} & (z^2 - z_0^2) (z^2 - 2 z i \frac{z_0^2+1}{z_0^2-1} - 1) (z^2 - 2 z \frac{z_0^2-1}{z_0^2+1} + 1) \\ & (z^2 + z_0^2) (z^2 - 2 z i \frac{z_0^2-1}{z_0^2+1} - 1) (z^2 - 2 z \frac{z_0^2+1}{z_0^2-1} + 1); \end{aligned}$$

Nun ist $\mathfrak{H}_4 = \mathfrak{H}_2 \left(E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ 1 & \dots \end{pmatrix} \right)$, $\mathfrak{H}_2$ also invariante Untergruppe

von $\mathfrak{S}_4$. Um sonach die 6 übrigen Faktoren zu erhalten, wende ich auf jeden der 6 bereits berechneten Faktoren das Verfahren an, das ich p. 11 f. angegeben habe. Die Stelle von $\mathfrak{S}_{24}$ vertritt jetzt $\mathfrak{S}_4$, die von $\mathfrak{U}_m$ vertritt $\mathfrak{S}_2$. Ich habe sonach auf die Koeffizienten der obigen 6 Faktoren die Substitution $\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix}$ anzuwenden und erhalte die übrigen 6 Faktoren.

$$(z_0^2)^{\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix}} = \frac{1}{z_0^2}; \text{ führen wir } z_0^2 = c \text{ ein, so lauten die}$$

12 Faktoren:

$$\begin{aligned} & (z^2 - c) (z^2 - 2z i \frac{c+1}{c-1} - 1) (z^2 - 2z \frac{c-1}{c+1} + 1) \\ & (z^2 + c) (z^2 - 2z i \frac{c-1}{c+1} - 1) (z^2 - 2z \frac{c+1}{c-1} + 1) \\ & (z^2 - \frac{1}{c}) (z^2 + 2z i \frac{c+1}{c-1} - 1) (z^2 + 2z \frac{c-1}{c+1} + 1) \\ & (z^2 + \frac{1}{c}) (z^2 + 2z i \frac{c-1}{c+1} - 1) (z^2 + 2z \frac{c+1}{c-1} + 1); ^1) \end{aligned}$$

Für welche Werte von Z gilt diese Zerlegung?

Wir hatten (p. 17): Wenn $b = \frac{(z_0^2 - 1)^2}{-4z_0^2}$ zum Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) gehört, dann zerfällt die Oktaedergleichung in 6 Faktoren vom Grade 4. Nun gilt weiter: Wenn die durch $b = \frac{(c-1)^2}{-4c}$ bestimmte Grösse c dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z)

¹⁾ Wir hätten bei der Frage nach den 12 Faktoren vom Grade 2 auch benützen können, dass $\mathfrak{S}_2$ eine invariante Untergruppe von

$$\mathfrak{S}_8 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & z_0 & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix} \quad k=0, 1, 2, 3$$

ist. Es wäre dabei $\mathfrak{S}_2$ anzuwenden gewesen auf die 3 Wurzeln, die aus z_0 durch Anwendung der Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems 2. Art von $\mathfrak{S}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{S}_8$ entstehen. Dies hätte 3 Faktoren vom Grad 2 ergeben. Aus diesen hätten wir die sämtlichen Faktoren ableiten können durch Anwendung der Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{S}_8$ bezüglich $\mathfrak{S}_2$, d. i.

$$E, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & z_0 & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix},$$

auf die Koeffizienten der 3 berechneten Faktoren. So sehen wir die Regelmässigkeit der obigen Zerlegung besser ein.

angehört; dann zerfällt jeder der oben angegebenen 6 Faktoren in 2 Faktoren vom Grade 2.

Wir können auch noch Z unmittelbar durch c ausdrücken.

$$Z = \frac{(z_0^8 + 14 z_0^4 + 1)^3}{108 z_0^4 (z_0^4 - 1)^4}; \quad \text{Klein (62 a) p. 60;}$$

„ (51 a) p. 54;

Wenn sonach $Z = \frac{(c^4 + 14 c^2 + 1)^3}{108 c^2 (c^2 - 1)^4}$, dann gilt die Zerlegung.

Wir haben in der Oktaedergruppe 3 verschiedene Systeme konjugierter Untergruppen von der Ordnung 4. Dies führt sonach auf 3 verschiedene, von einander unabhängige Zerlegungsmöglichkeiten in 6 Faktoren vom Grade 4. Eine derselben haben wir bereits gegeben. Nun sind noch die übrigen abzuleiten.

Eine der konjugierten cyklischen Untergruppen der Ordnung 4 ist

$$\mathfrak{S}_4^I = E + \begin{pmatrix} z_0 & & \\ i z_0 & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & & \\ & z_0 & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & & \\ & i z_0 & \\ & & \end{pmatrix};$$

invariante Untergruppe derselben ist $\mathfrak{S}_2 = E + \begin{pmatrix} z_0 & & \\ & z_0 & \\ & & \end{pmatrix}$; dann ist $\mathfrak{S}_4^I = \mathfrak{S}_2 (E + \begin{pmatrix} z_0 & & \\ i z_0 & & \\ & & \end{pmatrix})$.

Wir können darum aus der Zerlegung, die sich ergibt, wenn $\mathfrak{S}_2$ die Galois'sche Gruppe wird, unmittelbar die Zerlegung gemäss $\mathfrak{S}_4^I$ ableiten (d. h. die Zerlegung, die sich ergibt, wenn $\mathfrak{S}_4^I$ die Galois'sche Gruppe wird). Wir haben von der Zerlegung gemäss $\mathfrak{S}_2$ (p. 18) immer 2 solche Faktoren zu einem irreduciblen Faktor zusammenzunehmen, deren Koeffizienten durch Anwendung von $\begin{pmatrix} z_0 & & \\ i z_0 & & \\ & & \end{pmatrix}$ aus einander hervorgehen.

$$(c) \quad \begin{pmatrix} z_0 & & \\ i z_0 & & \\ & & \end{pmatrix} = -z_0^2 = -c;$$

So ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \{(z^2 - c)(z^2 + c)\}' \cdot \{(z^2 - 2 z i \frac{c+1}{c-1} - 1)(z^2 - 2 z i \frac{c-1}{c+1} - 1)\}' \\ & \{(z^2 - 2 z \frac{c-1}{c+1} + 1)(z^2 - 2 z \frac{c+1}{c-1} + 1)\}' \cdot \{(z^2 - \frac{1}{c})(z^2 + \frac{1}{c})\}' \\ & \{(z^2 + 2 z i \frac{c+1}{c-1} - 1)(z^2 + 2 z i \frac{c-1}{c+1} - 1)\}' \cdot \{(z^2 + 2 z \frac{c-1}{c+1} + 1)(z^2 + 2 z \frac{c+1}{c-1} + 1)\}' \\ & (z^2 + 2 z \frac{c+1}{c-1} + 1)'; \end{aligned}$$

Führen wir nun ein $c^2 = r_1$, so lautet die Zerlegung:

$$\begin{aligned} & (z^4 - r_1) (z^4 - 4z^3 i \frac{r_1+1}{r_1-1} - 6z^2 + 4z i \frac{r_1+1}{r_1-1} + 1) \\ & (z^4 - 4z^3 \frac{r_1+1}{r_1-1} + 6z^2 - 4z \frac{r_1+1}{r_1-1} + 1) (z^4 - \frac{1}{r_1}) \\ & (z^4 + 4z^3 i \frac{r_1+1}{r_1-1} - 6z^2 - 4z i \frac{r_1+1}{r_1-1} + 1) \\ & (z^4 + 4z^3 \frac{r_1+1}{r_1-1} + 6z^2 + 4z \frac{r_1+1}{r_1-1} + 1); \end{aligned}$$

Diese Zerlegung gilt für $Z = \frac{(r_1^2 + 14r_1 + 1)^3}{108 r_1 (r_1 - 1)^4}$, wenn $r_1 = z_0^4$ dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) angehört.

Um die 3. Zerlegung in 6 Faktoren vom Grade 4 zu erhalten, brauchen wir eine der 3 konjugierten Diedergruppen.

Eine solche ist $\mathfrak{H}_4^{\text{II}} = E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -i & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix}$;

Eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}_4^{\text{II}}$ ist $\mathfrak{H}_2$.

$$\mathfrak{H}_4^{\text{II}} = \mathfrak{H}_2 \left(E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix} \right);$$

Wir erhalten demnach die gesuchte Zerlegung, wenn wir von der Zerlegung gemäss $\mathfrak{H}_2$ (p. 18) immer 2 Faktoren zusammennehmen, deren Koeffizienten aus einander hervorgehen durch

Anwendung von $\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & \dots \\ z_0 & \dots \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_0^2} = -\frac{1}{c}$; die Zerlegung wird daher:

$$\begin{aligned} & \{z^2 - c\} \{z^2 + \frac{1}{c}\} \cdot \{z^2 - 2z i \frac{c+1}{c-1} - 1\} \{z^2 - 2z i \frac{c-1}{c+1} - 1\} \cdot \\ & \{z^2 - 2z \frac{c-1}{c+1} + 1\} \{z^2 + 2z \frac{c+1}{c-1} + 1\} \cdot \{z^2 + c\} \{z^2 - \frac{1}{c}\} \cdot \\ & \{z^2 - 2z i \frac{c-1}{c+1} - 1\} \{z^2 + 2z i \frac{c+1}{c-1} - 1\} \cdot \\ & \{z^2 - 2z \frac{c+1}{c-1} + 1\} \{z^2 + 2z \frac{c-1}{c+1} + 1\}; \end{aligned}$$

Führen wir ein $\frac{c^2-1}{c} = \frac{z_0^4-1}{z_0^2} = 2r_2$, so werden die Faktoren:

$$\begin{aligned} & \{z^4 - 2z^2 r_2 - 1\} \{z^4 - \frac{4i}{r_2} z^3 + 2z^2 + \frac{4i}{r_2} z + 1\} \\ & \{z^4 + \frac{4i}{r_2} z^3 - 2z^2 + \frac{4i}{r_2} z + 1\} \{z^4 + 2z^2 r_2 - 1\} \\ & \{z^4 + \frac{4i}{r_2} z^3 + 2z^2 - \frac{4i}{r_2} z + 1\} \{z^4 - \frac{4i}{r_2} z^3 - 2z^2 - \frac{4i}{r_2} z + 1\}; \end{aligned}$$

Für welche Werte von Z gilt diese Zerlegung?

Bevor wir diese Frage beantworten, gehen wir zur Zerlegung der Oktaedergleichung in 3 Faktoren vom Grade 8 über; gleichzeitig erledigt sich dann auch die angeführte Frage.

Es gibt nur eine Zerlegungsmöglichkeit in 3 Faktoren vom Grade 8; denn sämtliche Untergruppen von der Ordnung 8 sind zu einander konjugiert. Eine derselben ist

$$\mathfrak{H}_8 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ k & \\ i & z_0 \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ k & \\ i & \\ z_0 & \dots \end{pmatrix}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$\mathfrak{H}_8$ hat 3 maximale invariante Untergruppen $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_4; \\ \mathfrak{H}_4^I; \\ \mathfrak{H}_4^{II}; \end{array} \right.$

um die gesuchte Zerlegung zu erhalten, können wir irgend eine der Zerlegungen in 6 Faktoren vom Grade 4 benützen.

Wir nehmen $\mathfrak{H}_4^{II}$. Es ist $\mathfrak{H}_8 = \mathfrak{H}_4^{II} (E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & z_0 \dots \end{pmatrix})$. Wir haben sonach von der zuletzt angeführten Zerlegung in Faktoren vom Grade 4 immer 2 solche zu 1 Faktor zusammenzunehmen, deren Koeffizienten durch Anwendung von $\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & z_0 \dots \end{pmatrix}$ aus einander hervorgehen.

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & z_0 \dots \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^4 - 1 \\ 2 z_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i & z_0 \dots \end{pmatrix} = -r_2;$$

Somit werden die Faktoren:

$$\begin{aligned} & \{(z^4 - 2 z^2 r_2 - 1) (z^4 + 2 z^2 r_2 - 1)\} \cdot \\ & \{(z^4 - \frac{4i}{r_2} z^3 + 2 z^2 + \frac{4i}{r_2} z + 1) (z^4 + \frac{4i}{r_2} z^3 + 2 z^2 - \frac{4i}{r_2} z + 1)\} \cdot \\ & \{(z^4 + \frac{4}{r_2} z^3 - 2 z^2 + \frac{4}{r_2} z + 1) (z^4 - \frac{4}{r_2} z^3 - 2 z^2 - \frac{4}{r_2} z + 1)\} \\ & \quad = \{z^8 - 2 z^4 (1 + 2 r_2^2) + 1\}. \end{aligned}$$

$$\{z^8 + 4 z^6 (1 + \frac{4}{r_2^2}) + 2 z^4 (3 - \frac{16}{r_2^2}) + 4 z^2 (1 + \frac{4}{r_2^2}) + 1\} \cdot$$

$$\{z^8 - 4 z^6 (1 + \frac{4}{r_2^2}) + 2 z^4 (3 - \frac{16}{r_2^2}) - 4 z^2 (1 + \frac{4}{r_2^2}) + 1\};$$

Damit diese Zerlegung möglich ist, muss $r_2^2 = R$ rational bekannt sein. Für welche Werte Z gilt dies? Ich will nun

zuerst r_2^2 rational darstellen durch Z_2 ; dies ist möglich, weil Z_2 zu $\mathfrak{H}_4$ gehört, das Untergruppe von $\mathfrak{H}_8$ ist.

$$Z_2 = -\frac{(z_0^2 - 1)^2}{4 z_0^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} \right); \quad (\text{p. 13});$$

$$R = r_2^2 = \frac{z_0^3 - 2 z_0^4 + 1}{4 z_0^4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(z_0^4 + \frac{1}{z_0^4} \right);$$

$$Z_2^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} \right) + \frac{1}{16} \left(z_0^4 + \frac{1}{z_0^4} \right)$$

$$- Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} \right)$$

$$\frac{Z_2^2 - Z_2}{1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \left(z_0^4 + \frac{1}{z_0^4} \right) = \frac{1}{4} r_2^2 = \frac{1}{4} R;$$

Nun stelle ich noch Z durch Z_2 dar.

$$Z = \frac{-4 Z_1}{(Z_1 - 1)^2}; \quad Z_1 = \left(\frac{Z_2 + \alpha}{Z_2 + \alpha^2} \right)^3; \quad \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3};$$

Klein (8) und (9) p. 97.

$$Z = -4 \frac{[(Z_2 + \alpha)(Z_2 + \alpha^2)]^3}{[(Z_2 + \alpha)^3 - (Z_2 + \alpha^2)^3]^2} = -4 \cdot \frac{[Z_2^2 - Z_2 + 1]^3}{[3(\alpha - \alpha^2)Z_2^2 - 3(\alpha - \alpha^2)Z_2]^2}$$

$$= \frac{4(Z_2^2 - Z_2 + 1)^3}{27(Z_2^2 - Z_2)^2};$$

$$\text{Folglich } Z = \frac{4}{27} \cdot \frac{(r_2^2 + 1)^3}{(r_2^2)^2} = \frac{1}{27} \cdot \frac{(r_2^2 + 4)^3}{(r_2^2)^2} = \frac{1}{27} \cdot \frac{(R + 4)^3}{R^2}$$

Für diese Werte von Z und nur für diese zerfällt die Oktaedergleichung in 3 Faktoren vom Grade 8. Dabei muss R dem Rationalitätsbereiche (P_0, i, Z) angehören.

Damit ist nun auch die Frage gelöst, für welche Werte von Z die p. 21 gegebene Zerlegung in 6 Faktoren möglich ist. Sie gilt für $Z = \frac{(r_2^2 + 4)^3}{27 r_2^2}$, wo nun r_2 rational bekannt sein muss.

An Hand der Zerlegung in 3 Faktoren vom Grade 8 lässt sich als einem Beispiel einfach zeigen, was wir am Anfang behaupteten, nämlich: Wenn wir von einer anderen der 3 konjugierten Untergruppen $\mathfrak{H}_8$ ausgehen, erhalten wir eine Zerlegung, die für die gleichen Werte von Z möglich ist wie die obige, welche also von ihr überhaupt nicht verschieden ist.

Die eine Zerlegung war

$$\{z^8 - 2z^4(1 + 8(Z_2^2 - Z_2)) + 1\}.$$

$$\left\{ z^8 - 4z^6 \left(1 + \frac{1}{Z_2^2 - Z_2} \right) + 2z^4 \left(3 - \frac{4}{Z_2^2 - Z_2} \right) - 4z^2 \left(1 + \frac{1}{Z_2^2 - Z_2} \right) + 1 \right\}.$$

$$\left\{ z^8 + 4z^6 \left(1 + \frac{1}{Z_2^2 - Z_2} \right) + 2z^4 \left(3 - \frac{4}{Z_2^2 - Z_2} \right) + 4z^2 \left(1 + \frac{1}{Z_2^2 - Z_2} \right) + 1 \right\};$$

Wir haben nun die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems von $\mathfrak{H}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{H}_8$ z. B.

$$E, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+i}{z_0-i} & \dots \end{pmatrix}$$

auf die obigen Koeffizienten anzuwenden und erhalten die Zerlegungen gemäss der konjugierten Untergruppen

$$\begin{aligned} (Z_2^3 - Z_2) \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix} &= \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{16} (z_0^4 + \frac{1}{z_0^4}) \right) \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \frac{(z_0+1)^8 + (z_0-1)^8}{(z_0^2-1)^4} = -\frac{1}{8} + \frac{z_0^8 + 28z_0^6 + 70z_0^4 + 28z_0^2 + 1}{8(z_0^2-1)^4} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(1 + 32 \frac{z_0^2}{(z_0^2-1)^2} \cdot \frac{z_0^4 + 2z_0^2 + 1}{(z_0^2-1)^2} \right) \\ &= \frac{4z_0^2}{(z_0^2-1)^2} \left(1 + \frac{4z_0^2}{(z_0^2-1)^2} \right) = -\frac{1}{Z_2} \left(1 - \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{1}{Z_2^3} - \frac{1}{Z_2}; \\ (Z_2^3 - Z_2) \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+i}{z_0-i} & \dots \end{pmatrix} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \left(\left(\frac{z_0+i}{z_0-i} \right)^4 + \left(\frac{z_0-i}{z_0+i} \right)^4 \right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{z_0^8 - 28z_0^6 + 70z_0^4 - 28z_0^2 + 1}{8(z_0^2+1)^4} = \frac{-4z_0^2}{(z_0^2+1)^2} \cdot \frac{z_0^4 - 2z_0^2 + 1}{z_0^4 + 2z_0^2 + 1} \\ &= -\frac{4z_0^2}{(z_0^2+1)^2} \left(1 - \frac{4z_0^2}{(z_0^2+1)^2} \right) = \frac{1}{Z_2-1} \left(1 + \frac{1}{Z_2-1} \right) = \frac{Z_2}{(Z_2-1)^2}; \end{aligned}$$

Aus der angegebenen Zerlegung in 3 Faktoren entsteht sonach die Zerlegung gemäss der beiden andern konjugierten Untergruppen, wenn wir $Z_2^3 - Z_2$ ersetzen durch

$$\frac{1}{Z_2^3} - \frac{1}{Z_2} \text{ bzw. } \frac{Z_2}{(Z_2-1)^2};$$

diese beiden Zerlegungen sind auch für keine andern Werte von Z möglich als die erste Zerlegung.

Es war nämlich $Z = \frac{4(Z_2^3 - Z_2 + 1)^3}{27(Z_2^3 - Z_2)^2}$ und die erste Zerlegung war möglich für $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$;

Es ist aber $Z - \frac{4(Z_2^3 - Z_2 + 1)^3}{27(Z_2^3 - Z_2)^2} = 0$ eine rationale Gleichung zwischen Wurzeln (wenn ich für Z_2 eingesetzt denke $-\frac{(z_0^2-1)^2}{4z_0^2}$); darauf darf ich die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} z_0 & \cdots \\ z_0 + 1 & \cdots \\ z_0 - 1 & \cdots \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} z_0 & \cdots \\ z_0 + i & \cdots \\ z_0 - i & \cdots \end{pmatrix}$$

anwenden. So erhalte ich

$$Z - \frac{4(\frac{1}{Z_2^2} - \frac{1}{Z_2} + 1)^3}{27(\frac{1}{Z_2^2} - \frac{1}{Z_2})^2} = 0 \text{ und } Z - \frac{4(\frac{Z_2}{(Z_2-1)^2} + 1)^3}{27(\frac{Z_2}{(Z_2-1)^2})^2} = 0;$$

Wir wissen bereits: Die Zerlegungen gemäss der beiden konjugierten Untergruppen sind möglich, wenn $\frac{1}{Z_2^2} - \frac{1}{Z_2}$ bzw. $\frac{Z_2}{(Z_2-1)^2}$ dem Rationalitätsbereiche (P_0, i, Z) angehören.¹⁾

Sollen also diese Zerlegungen möglich sein, dann muss sein $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$, wo R Grösse von (P_0, i, Z) , ebenso wie bei der zuerst gegebenen Zerlegung.

Schliesslich wollen wir noch die Zerlegung der Oktaedergleichung ableiten, die sich ergibt, wenn eine der 6 konjugierten Untergruppen von der Ordnung 2 die Galois'sche Gruppe wird. Eine solche ist

$$\mathfrak{S}_2^{\text{II}} = E + \begin{pmatrix} z_0 & \cdots \\ i & \cdots \\ -z_0 & \cdots \end{pmatrix};$$

sie ist invariante Untergruppe von $\mathfrak{S}_4^{\text{II}}$ (p. 21);

$$\mathfrak{S}_4^{\text{II}} = \mathfrak{S}_2^{\text{II}} (E + \begin{pmatrix} z_0 & \cdots \\ -z_0 & \cdots \end{pmatrix});$$

die Faktoren, in welche die Oktaedergleichung zerfällt, wenn $\mathfrak{S}_2^{\text{II}}$ die Galois'sche Gruppe wird, erhalten wir auf die gewöhnliche Weise.

¹⁾ Wenn $Z_2^2 - Z_2$ Grösse des Rationalitätsbereichs ist, dann sind natürlich nicht gleichzeitig die dazu konjugierten Werte $\frac{1}{Z_2^2} - \frac{1}{Z_2}$ und $\frac{Z_2}{(Z_2-1)^2}$ rational bekannt. Unser Resultat sagt nur aus, dass es gleichgültig, welcher der konjugierten Werte rational bekannt ist.

Die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems 2. Art von $\mathfrak{H}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{H}_8$ sind

$$E, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ z_0+1 & \dots \\ z_0-1 & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix};$$

da $\mathfrak{H}_8 = (E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -i z_0 & \dots \end{pmatrix}) \cdot \mathfrak{H}_4^{\text{II}}$, so sind die Substitutionen eines vollständigen Repraesentantensystems 2. Art von $\mathfrak{H}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{H}_4^{\text{II}}$:

$$E, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -i z_0 & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ z_0+1 & \dots \\ z_0-1 & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ z_0+i & \dots \\ z_0-i & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ i \frac{z_0+i}{z_0-i} & \dots \end{pmatrix};$$

Wir wenden nun $\mathfrak{H}_2^{\text{II}}$ auf die 6 Wurzeln an, die aus z_0 durch Anwendung des vollständigen Repraesentantensystems 2. Art von $\mathfrak{H}_{24}$ bezüglich $\mathfrak{H}_4^{\text{II}}$ entstehen und fassen immer die 2 zusammengehörigen Wurzeln zusammen:

$$\begin{aligned} & \{z^2 - z(z_0 + \frac{i}{z_0}) + i\} \cdot \{z^2 + i z(z_0 + \frac{i}{z_0}) - i\} \cdot \\ & \{z^2 - z(\frac{z_0+1}{z_0-1} - \frac{z_0+i}{z_0-i}) - \frac{z_0+1}{z_0-1} \cdot \frac{z_0+i}{z_0-i}\} \cdot \{z^2 + z(\frac{z_0+1}{z_0-1} - \frac{z_0+i}{z_0-i}) - \frac{z_0+1}{z_0-1} \cdot \frac{z_0+i}{z_0-i}\} \cdot \\ & \{z^2 - i z(\frac{z_0+1}{z_0-1} - \frac{z_0+i}{z_0-i}) + \frac{z_0+1}{z_0-1} \cdot \frac{z_0+i}{z_0-i}\} \cdot \{z^2 + i z(\frac{z_0+1}{z_0-1} - \frac{z_0+i}{z_0-i}) + \frac{z_0+1}{z_0-1} \cdot \frac{z_0+i}{z_0-i}\}; \end{aligned}$$

Bevor wir die 6 übrigen Faktoren aufstellen, wollen wir in diesen Faktoren alle Koeffizienten durch einen ausdrücken. Sie lassen sich linear durch einen darstellen mit Koeffizienten aus (P_0, i) ; (p. 8).

Wir führen zu diesem Zwecke ein $\frac{z_0+1}{z_0-1} \cdot \frac{z_0+i}{z_0-i} = d$;

$$\frac{z_0^2 + (1+i)z_0 + i}{z_0^2 - (1+i)z_0 + i} = 1 + \frac{2(1+i)}{\frac{z_0^2+i}{z_0} - (1+i)} = d;$$

$$\text{somit } \frac{z_0^2+i}{z_0} = 1 + i + 2 \frac{1+i}{d-1} = (1+i) \frac{d+1}{d-1};$$

$$\frac{z_0+1}{z_0-1} - \frac{z_0+i}{z_0-i} = 2 \frac{1-i}{\frac{z_0^2+i}{z_0} - (1+i)} = -i(d-1);$$

Die 6 Faktoren sind demnach

$$\begin{aligned} & \{z^2 - (1+i) \frac{d+1}{d-1} z + i\} \cdot \{z^2 - (1-i) \frac{d+1}{d-1} z - i\} \cdot \\ & \{z^2 + i(d-1)z - d\} \cdot \{z^2 - i(d-1)z - d\} \cdot \\ & \{z^2 - (d-1)z + d\} \cdot \{z^2 + (d-1)z + d\}; \end{aligned}$$

Weil $\mathfrak{H}_4^{\text{II}} = \mathfrak{H}_2^{\text{II}}(E + (\frac{z_0}{-z_0}))$, $\mathfrak{H}_2^{\text{II}}$ also invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}_4^{\text{II}}$, so erhalten wir die übrigen 6 Faktoren, wenn wir die Substitution $(\frac{z_0}{-z_0})$ auf die Koeffizienten der obigen 6 Faktoren anwenden.

$$(d) \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0+1)(z_0+i) \\ (z_0-1)(z_0-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix} = \frac{z_0-1}{z_0+1} \cdot \frac{z_0-i}{z_0+i} = \frac{1}{d};$$

Die 6 weiteren Faktoren entstehen sonach aus den 6 schon berechneten, wenn wir d ersetzen durch $\frac{1}{d}$; so entsteht:

$$\begin{aligned} & \{z^3 + (1+i)\frac{d+1}{d-1}z + i\} \cdot \{z^3 + (1-i)\frac{d+1}{d-1}z - i\} \cdot \\ & \{z^3 + i(\frac{1}{d} - 1)z - \frac{1}{d}\} \cdot \{z^3 - i(\frac{1}{d} - 1)z - \frac{1}{d}\} \cdot \\ & \{z^3 - (\frac{1}{d} - 1)z + \frac{1}{d}\} \cdot \{z^3 + (\frac{1}{d} - 1)z + \frac{1}{d}\}; \end{aligned}$$

Wann ist diese Zerlegung möglich?

Sie ist möglich, wenn d dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) angehört. Nun ist Z durch d darzustellen.

$$\text{Wir hatten } Z = \frac{4(Z_2^2 - Z_2 + 1)^3}{27(Z_2^2 - Z_2)^2} = \frac{(r_2^2 + 4)^3}{27 \cdot r_2^4}; \quad (\text{p. 23}).$$

Dabei war $r_2 = \frac{z_0^4 - 1}{2z_0^2}$ und gehörte zu $\mathfrak{H}_4^{\text{II}}$.

$\mathfrak{H}_2^{\text{II}}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{H}_4^{\text{II}}$, es muss sich sonach r_2 rational ausdrücken lassen durch $d = \frac{z_0+1}{z_0-1} \cdot \frac{z_0+i}{z_0-i}$;

$$\left(\frac{z_0^2+i}{z_0}\right)^2 = \frac{z_0^4-1}{z_0^3} + 2i = 2r_2 + 2i;$$

$$\left((1+i)\frac{d+1}{d-1}\right)^2 = 2r_2 + 2i; \quad r_2 + i = i\left(\frac{d+1}{d-1}\right)^2;$$

$$r_2 = \frac{4id}{(d-1)^2};$$

Wenn sonach r_2 in der p. 21 angegebenen Zerlegung den Wert annimmt $r_2 = \frac{4id}{(d-1)^2}$, wo d irgend eine Grösse des Rationalitätsbereichs, dann zerfällt jeder der 6 Faktoren in 2 Faktoren vom Grade 2, oder die Oktaedergleichung zerfällt in 12 Faktoren vom Grade 2, wenn

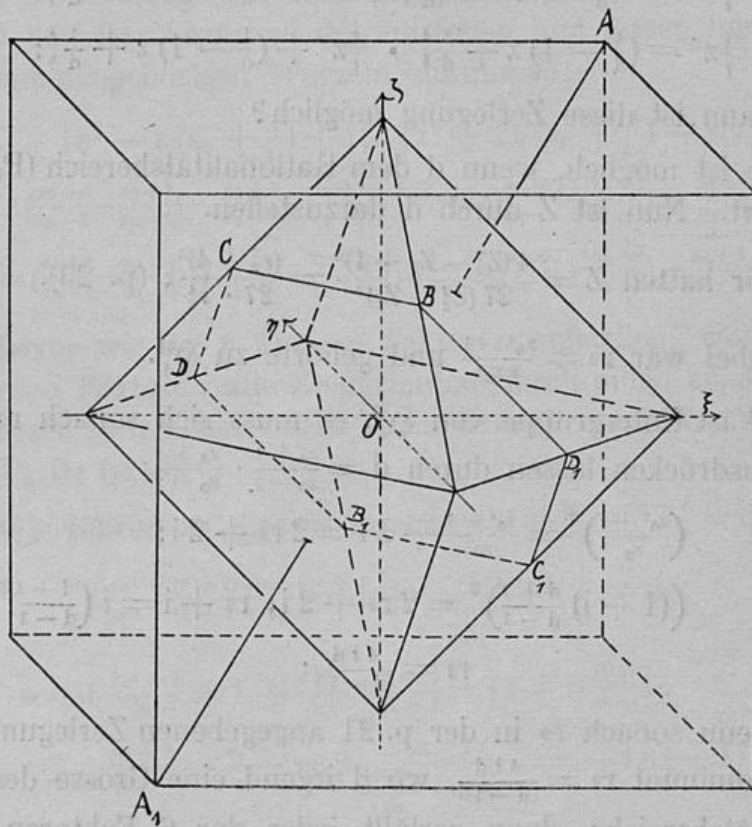
$$Z = \frac{(d^4 - 4d^3 + 2d^2 - 4d + 1)^3}{27d^4(d-1)^4},$$

wo d Grösse des Rationalitätsbereichs.

§ 3.

Zerlegung der Oktaedergleichung in 4 (8) Faktoren vom Grade 6 (3).

Damit die Oktaedergleichung in 4 (8) Faktoren vom Grade 6 (3) zerfällt, muss eine der konjugierten Untergruppen von der Ordnung 6 (3) von $\mathfrak{S}_{24}$ die Galois'sche Gruppe der Oktaedergleichung werden. Zunächst müssen wir darum eine solche Gruppe kennen. Zur Bestimmung von $\mathfrak{S}_6$ benützen wir die Angabe bei Klein: Jede Würfeldiagonale ist Hauptachse einer Diedergruppe von 6 Drehungen.¹⁾ Klein p. 16.



Ist AA_1 Hauptachse einer Diedergruppe, dann ist $BCDB_1 \dots$ der Äquator.

¹⁾ Die gesuchte Diedergruppe können wir auch direkt am Modell ablesen nach der Methode, die Klein p. 26 angibt.

(Die Figur ist so zu denken, dass Oktaeder und Würfel auf die Kugel um 0 mit dem Radius $OA=1$ von 0 aus projiziert werden.)

Wir benützen die Formel Klein (12) und (14) p. 34.

Koordinaten von A: $\xi = \eta = \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

a) Drehung um AA_1 um den Winkel $\alpha = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi; \\ \frac{4}{3}\pi; \end{cases}$

$$a = \xi \sin \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}; \end{cases} \quad b = \eta \sin \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}; \end{cases} \quad c = \zeta \sin \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$d = \cos \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}; \\ -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$z_0' = \begin{cases} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right) / \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right) = \frac{z_0 + i}{z_0 - i}; \\ \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right) / \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_0 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right) = i \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1}; \end{cases}$$

b) Umklappung um die Nebenachsen BB_1 , CC_1 , DD_1 .

Koordinaten $\xi \quad \eta \quad \zeta$

$$B : 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$C : -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$D : -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0;$$

$$a = \begin{cases} 0; \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \end{cases} \quad b = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \\ 0; \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}; \end{cases} \quad c = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2}; \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}; \\ 0; \end{cases} \quad d = 0$$

$$z_0' = \begin{cases} \frac{i z_0 + 1}{-z_0 - i} = -i \frac{z_0 - i}{z_0 + i}; \\ \frac{i z_0 - i}{-z_0 - i} = -i \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}; \\ \frac{-(1+i)}{(1-i)z_0} = -\frac{i}{z_0}; \end{cases}$$

Somit ist

$$\mathfrak{H}_6 = E + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} z_0 & \dots \\ i \frac{z_0+1}{z_0-1} & \dots \end{smallmatrix} \right)}_{\mathfrak{H}_3} + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{z_0+i}{z_0-i} & \dots \end{smallmatrix} \right)}_{\mathfrak{H}_3} + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} z_0 & \dots \\ -i \frac{z_0-i}{z_0+i} & \dots \end{smallmatrix} \right)}_{\mathfrak{H}_3} + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{z_0-i}{z_0+i} & \dots \end{smallmatrix} \right)}_{\mathfrak{H}_3} + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{smallmatrix} \right)}_{\mathfrak{H}_3};$$

$\mathfrak{H}_3$ ist Untergruppe von $\mathfrak{H}_{12}$.

Wollten wir nun unmittelbar die Zerlegung in 4 Faktoren vom Grade 6 angeben, so würden die Rechnungen ziemlich umständlich. Wir geben darum zuerst die Zerlegung in Faktoren für den Fall, dass $\mathfrak{H}_3$ die Galois'sche Gruppe wird. Dann können wir alle Koeffizienten linear durch einen aus ihnen darstellen, was die Ausdrücke sehr vereinfacht. Von hier gehen wir dann zur Zerlegung in 4 Faktoren vom Grade 6 über, indem wir je 2 der Faktoren vom Grade 3 so zusammennehmen, dass die neu auftretenden Koeffizienten zu $\mathfrak{H}_6$ gehören.

$$\mathfrak{H}_6 = \mathfrak{H}_3 \left(E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix} \right); \quad \mathfrak{H}_6 \text{ ist keine Untergruppe von } \mathfrak{H}_{12}.$$

$$\mathfrak{H}_{12} = E \mathfrak{H}_3 + S_1 \mathfrak{H}_3 + S_2 \mathfrak{H}_3 + S_3 \mathfrak{H}_3; \quad \mathfrak{H}_{12} \text{ ist angegeben p. 12.}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -z_0 & \dots \end{pmatrix}; \quad S_2 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ \frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{1}{z_0} & \dots \end{pmatrix};$$

Wir erhalten zunächst die Intransitivitätsabteilungen, in welche die 12 Wurzeln der Tetraedergleichung zerfallen und damit 4 Faktoren vom Grade 3, wenn wir je 3 Wurzeln zusammennehmen, die durch Anwendung von

$$S_\nu \cdot \mathfrak{H}_3 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3; S_0 = E)$$

auf z_0 entstehen.

$$\begin{aligned} z_0, \quad \frac{z_0+i}{z_0-i}, \quad i \frac{z_0+1}{z_0-1} &: (z-z_0) \left(z - \frac{z_0+i}{z_0-i} \right) \left(z - i \frac{z_0+1}{z_0-1} \right) = z^3 - A' z^2 + B' z - C'; \\ -z_0, \quad -\frac{z_0+i}{z_0-i}, \quad -i \frac{z_0+1}{z_0-1} &: (z+z_0) \left(z + \frac{z_0+i}{z_0-i} \right) \left(z + i \frac{z_0+1}{z_0-1} \right) = z^3 + A' z^2 + B' z + C'; \\ \frac{1}{z_0}, \quad \frac{z_0-i}{z_0+i}, \quad -i \frac{z_0-1}{z_0+1} &: \left(z - \frac{1}{z_0} \right) \left(z - \frac{z_0-i}{z_0+i} \right) \left(z + i \frac{z_0-1}{z_0+1} \right) = z^3 - \frac{B'}{C'} z^2 + \frac{A'}{C'} z - \frac{1}{C'}; \\ -\frac{1}{z_0}, \quad -\frac{z_0-i}{z_0+i}, \quad i \frac{z_0-1}{z_0+1} &: \left(z + \frac{1}{z_0} \right) \left(z + \frac{z_0-i}{z_0+i} \right) \left(z - i \frac{z_0-1}{z_0+1} \right) = z^3 + \frac{B'}{C'} z^2 + \frac{A'}{C'} z + \frac{1}{C'}; \end{aligned}$$

¹⁾ Die Wurzeln dieses Faktors sind reciprok zu den Wurzeln des 1. Faktors, daher geht dieser 3. Faktor aus dem 1. hervor, wenn wir die Reihenfolge der Koeffizienten umkehren und gleichzeitig durch Multiplizieren mit $-\frac{1}{C'}$ den neuen Koeffizienten von z^3 zu 1 machen.

Nun sind die Koeffizienten linear durch einen aus ihnen darzustellen, z. B. durch

$$C' = z_0 \frac{z_0 + i}{z_0 - i} \cdot i \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} = i \frac{z_0^3 + (1+i)z_0^2 + iz_0}{z_0^3 - (1+i)z_0 + i};$$

$$A' = z_0 + \frac{z_0 + i}{z_0 - i} + i \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} = \frac{z_0^3 + 3iz_0 + (1-i)}{(z_0 - i)(z_0 - 1)};$$

$$A' - \frac{C'}{i} = \frac{-(1+i)z_0^3 + 2iz_0 + (1-i)}{z_0^3 - (1+i)z_0 + i} = -(1+i); A' = -(1+i) - iC';$$

$$B' = \frac{(1+i)z_0^3 + 3iz_0^2 - 1}{z_0^3 - (1+i)z_0 + i}; B' - \frac{C'}{i}(1+i) = \frac{iz_0^2 + (1-i)z_0 - 1}{z_0^3 - (1+i)z_0 + i} = i;$$

$$B' = i + (1-i)C';$$

Die Zerlegung ist sonach:

$$\{z^3 + z^2(1+i+iC') + z(i+(1-i)C') - C'\}.$$

$$\{z^3 - z^2(1+i+iC') + z(i+(1-i)C') + C'\}.$$

$$\{z^3 - z^2(1-i+\frac{1}{C'}) + z(-i-\frac{1+i}{C'}) - \frac{1}{C'}\}.$$

$$\{z^3 + z^2(1-i+\frac{1}{C'}) + z(-i-\frac{1+i}{C'}) + \frac{1}{C'}\};$$

Wir können diese Zerlegung in schönerer Form schreiben, wenn wir C einführen, das gegeben sei durch $C' = (1-i)C$; so erhalten wir

$$\{z^3 + (1+i)(1+C)z^2 + i(1-2C)z - (1-i)C\}$$

$$\{z^3 - (1+i)(1+C)z^2 + i(1-2C)z + (1-i)C\}$$

$$\{z^3 - (1-i)(1-\frac{1}{2C})z^2 - i(1+\frac{1}{C})z - (1+i)\frac{1}{2C}\}$$

$$\{z^3 + (1-i)(1-\frac{1}{2C})z^2 - i(1+\frac{1}{C})z + (1+i)\frac{1}{2C}\};$$

Wir fragen nun zunächst: Für welche Werte von Z_1 (Koeffizient der Tetraedergleichung) ist diese Zerlegung der Tetraedergleichung in 4 Faktoren möglich? Von hier aus ist es dann nicht schwer zur Oktaedergleichung überzugehen. Wir vergleichen die Koeffizienten von z^{10} (nachdem die Koeffizienten von z^{12} gleich sind) in der allgemeinen Tetraedergleichung und in dem obigen Produkte.

$$\{z^8 + i(1-2C)z^2 - ((1+i)(1+C)z^2 \dots)^2\}.$$

$$\{z^3 - i(1+\frac{1}{C})z^2 - ((1-i)(1-\frac{1}{2C})z^2 \dots)^2\}$$

$$= z^{12} + (-8Ci - 2iC^2 - \frac{4i}{C} + \frac{1}{2C^2})z^{10} \dots = 0$$

Die allgemeine Tetraedergleichung war:

$$z^{12} - 6 Z_1' z^{10} \dots = 0. \quad (\text{p. 14})$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } 6 Z_1' &= 2i C^2 - \frac{i}{2C^2} + 8iC + \frac{4i}{C} \\ &= 2i(C^2 - \frac{1}{4C^2}) + 8i(C + \frac{1}{2C}); \\ Z_1' &= \frac{1}{3}i(C + \frac{1}{2C})(C - \frac{1}{2C} + 4); \end{aligned}$$

Für diese Werte von Z_1' zerfällt die Tetraedergleichung in 4 Faktoren vom Grade 3; dabei muss C Grösse von (P_0, i, Z_1') sein.

Nun können wir auch die Zerlegung der Oktaedergleichung in 8 Faktoren vom Grade 3 angeben. Wir hatten (p. 30)

$$\mathfrak{H}_6 = \mathfrak{H}_3 (E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix});$$

Weil $\mathfrak{H}_3$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}_6$ ist, erhalten wir die übrigen 4 Faktoren vom Grade 3, wenn wir auf die Koeffizienten der 4 ersten die Substitution $\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix}$ anwenden. (Dies führt nur zum Ziel, weil $\mathfrak{H}_6$ keine Untergruppe von $\mathfrak{H}_{12}$ ist; sonst würden wir durch dies Verfahren nur wieder Teilfaktoren der Tetraedergleichung erhalten).

$$\begin{aligned} (C) \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & z_0 \frac{z_0+i}{z_0-i} i \frac{z_0+1}{z_0-1} \\ 1-i & z_0 \frac{z_0-i}{z_0+1} i \frac{z_0-1}{z_0+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{z_0} \cdot \frac{z_0-1}{z_0+1} \cdot \frac{z_0-i}{z_0+1} = -\frac{1}{2C}; \end{aligned}$$

Wir haben sonach C durch $-\frac{1}{2C}$ zu ersetzen.

So ergeben sich die 8 Faktoren der Oktaedergleichung:

$$\begin{aligned} &\{z^3 + (1+i)(1+C)z^2 + i(1-2C)z - (1-i)C\}, \\ &\{z^3 - (1+i)(1+C)z^2 + i(1-2C)z + (1-i)C\}, \\ &\{z^3 - (1-i)(1-\frac{1}{2C})z^2 - i(1+\frac{1}{C})z - \frac{1+i}{2C}\}, \\ &\{z^3 + (1-i)(1-\frac{1}{2C})z^2 - i(1+\frac{1}{C})z + \frac{1+i}{2C}\}, \\ &\{z^3 + (1+i)(1-\frac{1}{2C})z^2 + i(1+\frac{1}{C})z + \frac{1-i}{2C}\}, \\ &\{z^3 - (1+i)(1-\frac{1}{2C})z^2 + i(1+\frac{1}{C})z + \frac{1-i}{2C}\}, \\ &\{z^3 - (1-i)(1+C)z^2 - i(1-2C)z + (1+i)C\}, \\ &\{z^3 + (1-i)(1+C)z^2 - i(1-2C)z - (1+i)C\}; \end{aligned}$$

Für welche Werte von Z gilt diese Zerlegung?

Es ist $Z = 1 + \frac{1}{3} Z_1^2$ (p. 16).

Wenn sonach die durch

$$Z = 1 - \frac{1}{27} (C + \frac{1}{2C})^3 (C - \frac{1}{2C} + 4)^2$$

bestimmte Grösse C dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) angehört, dann ist obige Zerlegung möglich.

Jetzt ist noch die Zerlegung in 4 Faktoren vom Grade 6 aufzustellen. Wir haben oben schon benützt, dass

$$\mathfrak{H}_6 = \mathfrak{H}_3 (E + \begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix});$$

wir haben demnach immer 2 Faktoren der obigen Zerlegung zusammenzunehmen, deren Koeffizienten durch Anwendung von $\begin{pmatrix} z_0 & \dots \\ -\frac{i}{z_0} & \dots \end{pmatrix}$ aus einander hervorgehen; entsprechende Koeffizienten müssen also sein C und $-\frac{1}{2C}$.

$$\begin{aligned} & \{z^3 + (1+i)(1+C)z^2 + i(1-2C)z - (1-i)C\} \cdot \\ & \{z^3 + (1+i)(1-\frac{1}{2C})z^2 + i(1+\frac{1}{C})z + \frac{1-i}{2C}\} \\ & = z^6 + (1+i)(2+C-\frac{1}{2C})z^5 + 3iz^4 - 4(1-i)z^3 \\ & + 3z^2 - (1+i)(2+C-\frac{1}{2C})z + i; \end{aligned}$$

Die 3 übrigen Faktoren vom Grade 6 können wir aus diesem ableiten. Im 2. Faktor haben die Wurzeln entgegengesetztes Zeichen wie im obigen ersten. Die Wurzeln im 3. und 4. Faktor sind reciprok zu denen im 1. und 2. Faktor. Wir kennen somit sämtliche Faktoren.

Führen wir noch als Grösse, die rational bekannt sein muss, $2c' = 2 + C - \frac{1}{2C}$ ein, dann lautet die Zerlegung in 4 Faktoren:

$$\begin{aligned} & \{z^6 + 2(1+i)c'z^5 + 3iz^4 - 4(1-i)z^3 + 3z^2 - 2(1+i)c'z + i\} \cdot \\ & \{z^6 - 2(1+i)c'z^5 + 3iz^4 + 4(1-i)z^3 + 3z^2 + 2(1+i)c'z + i\} \cdot \\ & \{z^6 - 2(1-i)c'z^5 - 3iz^4 + 4(1+i)z^3 + 3z^2 + 2(1-i)c'z - i\} \cdot \\ & \{z^6 + 2(1-i)c'z^5 - 3iz^4 - 4(1+i)z^3 + 3z^2 - 2(1-i)c'z - i\}; \end{aligned}$$

Für welche Werte von Z gilt diese Zerlegung? Wir könnten hier wie gewöhnlich die Methode der Koeffizientenvergleichung anwenden. Aber einfacher beantwortet sich die Frage wie folgt:

$$\text{Es war } Z = 1 - \frac{1}{27} \left(C + \frac{1}{2}C\right)^2 \left(C - \frac{1}{2}C + 4\right)^2;$$

$$C - \frac{1}{2}C + 4 = 2(c' + 1); \quad \left(C + \frac{1}{2}C\right)^2 = \left(C - \frac{1}{2}C\right)^2 + 2 = 4c'^2 - 8c' + 6;$$

$$\text{Somit } Z = 1 - \frac{8}{27} (2c'^2 - 4c' + 3)(c' + 1)^2;$$

Wenn also die durch obige Beziehung bestimmte Grösse c' dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) angehört, dann ist obige Zerlegung in 4 Faktoren möglich.



denen

ist v

"

ist s

ist ff

"

"

dies
gehört

durch

wenn
2 Fa
legur

Anhang.

Wir wollen noch eine Übersicht geben über die verschiedenen Fälle, in denen die Oktaedergleichung reducibel wird.

Ist $Z = 1 + \frac{a^2}{3}$, so erhalten wir 2 Faktoren,
angegeben p. 17.

ist weiter $a = \frac{-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2}{3(b^2 - b)}$, so erhalten wir 6 Faktoren,
angegeben p. 16.

„ „ $b = \frac{(c-1)^2}{-4c}$, so erhalten wir 12 Faktoren,
angegeben p. 19.

ist schliesslich $c = z_0^2$, so erhalten wir 24 Linearfaktoren.

Ist $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$, so erhalten wir 3 Faktoren,
angegeben p. 22.

ist ferner $R = r_2^2$, so erhalten wir 6 Faktoren,
angegeben p. 22.

„ „ $r_2 = 4i \frac{d}{(d-1)^2}$, so erhalten wir 12 Faktoren,
angegeben p. 26f.

„ „ $d = \frac{z_0^2 + (1+i)z_0 + i}{z_0^2 - (1+i)z_0 + i}$, so erhalten wir 24 Linearfaktoren.

Ist $Z = \frac{(r_1^2 + 14r_1 + 1)^3}{108r_1(r_1 - 1)^4}$, so erhalten wir 6 Faktoren,¹⁾
angegeben p. 21.

¹⁾ b, r_1, r_2 gehören bzw. zu $\mathfrak{G}_4$ (p. 12), $\mathfrak{G}_4^I$ (p. 20), $\mathfrak{G}_4^{II}$ (p. 21); da dies Untergruppen von $\mathfrak{G}_8$ sind, so könnten wir auch R , das zu $\mathfrak{G}_8$ (p. 22) gehört, als rationale Funktion von b und r_1 darstellen. Man erhält auch

durch das gewöhnliche Verfahren $R = \begin{cases} -1 + (1-2b)^2; \\ -\frac{1}{2} + \frac{r_1^2 + 1}{4r_1}; \end{cases}$ d. h. auch dann,

wenn R einen dieser Werte annimmt, zerfällt jeder der 3 Faktoren in 2 Faktoren vom Grade 4. Wir hätten also auch auf diese Weise die Zerlegung in 6 Faktoren vom Grade 4 erhalten können.

Ist $Z = 1 - \frac{8}{27} (2c'^2 - 4c' + 3)(c' + 1)^2$, so erhalten wir 4 Faktoren, angegeben p. 33.

ist ferner $c' = 1 + \frac{1}{2} (C - \frac{1}{2C})$, so erhalten wir 8 Faktoren, angegeben p. 32.

„ „ $C = \frac{i}{1-i} \cdot \frac{z_0^3 + (1+i)z_0^2 + iz_0}{z_0^2 - (1+i)z_0 + i}$, so erhalten wir 24 Linearfaktoren.

Für diese und nur für diese Werte von Z wird die Oktaedergleichung reducibel und zerfällt eindeutig in der angegebenen Weise. Dabei müssen immer die betreffenden Grössen ($a, b, c \dots$) rational bekannt sein, d. h. dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) angehören. Je nachdem Z angenommen wird, wird sich (P_0, i, Z) ändern. Es ist darum noch einiges zu bemerken über die

Wahl des Rationalitätsbereiches.

In jedem Falle gilt, dass der Rationalitätsbereich i enthalten muss; denn dies war die Grundvoraussetzung, von der wir ausgingen.

Der einfachste Fall ist gegeben, wenn der Rationalitätsbereich (P_0, i) ist; dann muss sein $Z = s_0 + s_1 i$, wo s_0 und s_1 zu P_0 gehören. Wenn wir wollen, können wir statt jeder der obigen Beziehungen 2 Beziehungen zwischen reellen Grössen anschreiben. Aus

$$Z = 1 + \frac{1}{3} a^2 \text{ wird z. B. } s_0 + s_1 i = 1 + \frac{1}{3} (a_0 + a_1 i)^2$$

$$\text{oder } s_0 = 1 + \frac{1}{3} (a_0^2 - a_1^2); s_1 = \frac{2}{3} a_0 a_1;$$

nun gehören s_0, s_1, a_0, a_1 zu P_0 .

Der allgemeinere Fall ist jedoch: Z enthält die Irrationalität γ , die einer in Bezug auf (P_0, i) irreduciblen Gleichung vom Grade m genügt. Diese irreducible Gleichung für γ sei

$$c_0 + c_1 \gamma + \dots + c_{m-1} \gamma^{m-1} + \gamma^m = 0;$$

[$c_0, c_1 \dots c_{m-1}$ Grössen von (P_0, i)]. γ und die irreducible Gleichung für γ werden natürlich als bekannt vorausgesetzt. Der Rationalitätsbereich ist jetzt (P_0, i, γ) . Die Antwort auf die Frage: Für welche Werte von Z wird die Oktaedergleichung zerlegbar, z. B. in 3 Faktoren vom Grade 8, lautet zunächst

wie früher. Es muss sein $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$, wo R Grösse des Rationalitätsbereiches (P_0, i, γ) ist. Wenn aber R zu (P_0, i, γ) gehören soll, dann muss es sich schreiben lassen

$$R = a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_{m-1} \gamma^{m-1};$$

dabei $a_0, a_1 \dots$ Grössen von (P_0, i) . Z enthält die Irrationalität γ , hat sonach ebenfalls die Form

$$Z = b_0 + b_1 \gamma + \dots + b_{m-1} \gamma^{m-1};$$

Die Frage: Für welche Werte Z des Bereiches (P_0, i, γ) tritt die Zerlegung ein, ist jetzt genauer folgende: Welchen Bedingungen unterliegen $b_0, b_1 \dots b_{m-1}$, damit eine Zerlegung möglich ist?

Aus $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$ wird jetzt

$$b_0 + b_1 \gamma + \dots + b_{m-1} \gamma^{m-1} = \frac{(4 + a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_{m-1} \gamma^{m-1})^3}{27(a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_{m-1} \gamma^{m-1})^2};$$

Durch Benützung der irreduciblen Gleichung für γ kann ich die rechte Seite zuerst als ganze rationale Funktion von γ schreiben und dann diese noch umformen in eine rationale Funktion von γ , deren Grad $\leq m-1$. Die rechte Seite erscheint dann in der Form

$$A_0 + A_1 \gamma + \dots + A_{m-1} \gamma^{m-1}.$$

Dabei sind die A_ν rationale Funktionen der a_λ [die ganz beliebige Grössen von (P_0, i) sind] und der c_λ (Koeffizienten der irreduciblen Gleichung für γ). Die Bedingungen ergeben sich schliesslich in der Form

$$b_\gamma = A_\nu = \text{Rationale Funktion}(a_\lambda, c_\lambda);$$

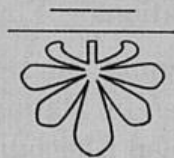
Für jede einzelne Bedingung im Rationalitätsbereich (P_0, i, γ) erhalte ich m Bedingungen im Rationalitätsbereich (P_0, i) wenn m der Grad der irreduciblen Gleichung von γ im Rationalitätsbereich (P_0, i) ist.



Schluss.

Es war im vorausgehenden durchwegs angenommen, dass die Grösse $i = \sqrt{-1}$ rational bekannt ist. Man kann nun die Frage stellen: Wie gestaltet sich die Behandlung der Aufgabe, wenn i nicht mehr als rational bekannt vorausgesetzt wird? Dabei ergibt sich: Es ändert sich sofort die Galois'sche Gruppe der Oktaedergleichung. Sie erhält die Ordnung $2 \cdot 24$ und lässt sich ziemlich einfach finden. Darauf sind die Untergruppen dieser erweiterten Gruppe aufzusuchen. Im übrigen ist ähnlich zu verfahren wie im vorausgehenden.

Mit der Ausführung dieses Teiles würde der Umfang eines Programms überschritten. Darum musste sie unterbleiben.



ss
ie
e,
?
oe
st
n
h
es

Es
 die Grö
 Frage s
 wenn i
 Dabei e
 der Okt
 sich zie
 dieser e
 zu verf
 Mit
 Program



genommen, dass
 an kann nun die
 ung der Aufgabe,
 ausgesetzt wird?
 alois'sche Gruppe
 g 2 • 24 und lässt
 die Untergruppen
 brigen ist ähnlich

der Umfang eines
 e unterbleiben.

