

REALSCHULE IN HAMM.

Über den Zusammenhang der rationalen, trigonometrischen und elliptischen Funktionen.

Von

Dr. Richard Uetzmann.

Beilage zum Berichte über das 2. Schuljahr.

HAMBURG 1908.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdruckern.

1908. Programm Nr. 965.



9ha
41 (1908)

965
h



Inhaltsübersicht.

	Seite
I. Zur Einführung	5—22
1. Beispiele für elliptische Integrale	5
2. Definition der elliptischen Integrale	7
3. Definition der elliptischen Funktionen	8
4. Degenerationsfälle	10
5. Die Periodizität der elliptischen Funktionen	12
6. Das Additionstheorem für trigonometrische und elliptische Funktionen . .	14
7. Das Additionstheorem für elliptische Integrale	16
8. Über den Zusammenhang der elliptischen Funktionen mit der sphärischen Trigonometrie	18
9. Rückblick und Ausblick	21
II. Die Theorie der rationalen und trigonometrischen Funktionen	22—35
1. Einige Fundamentalbegriffe der Funktionentheorie	22
2. Darstellung einer rationalen Funktion mit Hilfe ihrer Hauptteile	25
3. Darstellung einer rationalen Funktion durch Pole und Nullstellen	28
4. Die trigonometrischen Funktionen	29
5. Über die Analogieen zwischen rationalen und trigonometrischen Funktionen	34
III. Die elliptischen Funktionen	35—42
1. Einleitende Sätze	35
2. Die σ -, ζ - und p -Funktion	37
3. Periodizitätsbetrachtungen	39
4. Degenerationsfälle	41
IV. Die Partialbruchzerlegung und Reihenentwicklung der elliptischen Funktionen	42—48
1. Zerlegung der ζ -Funktion	42
2. Partialbruchzerlegung der p -Funktion	45
3. Reihenentwicklung der p -, ζ - und σ -Funktion	47
V. Die Zerlegung in Linearfaktoren und das Additionstheorem	49—54
1. Faktorenzerlegung	49
2. Anwendungen der Faktorenzerlegung auf p - und ζ -Funktion	50
3. Das Additionstheorem	52
VI. Über den Zusammenhang der Funktionen $\sin$ am v , $\cos$ am v , Δ am v mit der p -Funktion	55—58

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Untersuchung über die Entwicklung der deutschen Literatur im 19. Jahrhundert. Sie ist in drei Teile gegliedert: I. Die Romantik, II. Die Realismen, III. Die Moderne. Jeder Teil enthält eine allgemeine Einführung und eine Reihe von Kapiteln, die die Entwicklung der Literatur in dieser Zeit darstellen. Die Arbeit ist für die Studierenden der Germanistik und der Literaturwissenschaft gedacht. Sie soll ihnen einen Überblick über die Entwicklung der deutschen Literatur im 19. Jahrhundert geben und ihnen die Möglichkeit bieten, die einzelnen Kapitel zu vertiefen. Die Arbeit ist in deutscher Sprache verfasst und ist für die deutsche Literaturwissenschaft bestimmt.

Erster Abschnitt.

Zur Einführung.

1. Beispiele für elliptische Integrale.

Die Lemniskate hat die Eigenschaft, daß die Entfernungen jedes Kurvenpunktes von zwei festen Punkten, deren Abstand $2a$ ist, das konstante Produkt a^2 beträgt; ihre Gleichung in den Polarkoordinaten ϱ, ψ hat die Form

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\psi.$$

Die Differentiation ergibt

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\psi} = -2a^2 \sin 2\psi,$$

$$\varrho^4 + \varrho^2 \frac{d\varrho^2}{d\psi^2} = 4a^4.$$

Nun ist das Bogendifferential $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2$, also

$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2} = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 \frac{\varrho^2 d\varrho^2}{4a^4 - \varrho^4}} = 2a^2 \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{4a^4 - \varrho^4}},$$

$$ds = 2a^2 \frac{d\varrho}{\varrho \frac{d\varrho}{d\psi}} = \frac{a \sqrt{2} \cdot d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}}.$$

Durch die Substitution $\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi$, $\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}$ wird

$$ds = a \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Wählen wir die Strecke a zur Längeneinheit, so liefert die Integration für die Länge des bei $\psi=0$ beginnenden Lemniskatenbogens den Wert:

$$(1) \quad s = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Die Differentialgleichung für die Bewegung des mathematischen Pendels, d. h. eines unter der Einwirkung der Schwere stehenden materiellen Punktes, der gezwungen ist, sich auf einem Kreise zu bewegen, lautet:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \psi.$$

Hier bedeutet l die Pendellänge, ψ die Abweichung des Pendels von der Vertikalen zur Zeit t , g die Gravitationskonstante.

Nach Multiplikation mit $2 \frac{d\psi}{dt}$ ergibt die Integration:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \psi + C.$$

Für $\frac{d\psi}{dt} = 0$ erhält ψ einen Grenzwert α , dann ist die Integrationskonstante:

$$C = -\frac{2g}{l} \cos \alpha,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \psi - \cos \alpha),$$

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}},$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}$ geht durch die Substitution

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \varphi$$

in die Form $\sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \varphi$ über, so ergibt sich

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2} d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi}}.$$

Aus der Integration folgt dann:

$$(2) \quad t = C \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \text{ wo } k = \sin \frac{1}{2} \alpha < 1.$$

In den beiden vorstehenden Beispielen werden wir auf das Integral $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ geführt; wir stellen es an die Spitze unserer Untersuchungen und geben ihm die Form

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi},$$

indem wir für den Nenner das Legendresche Symbol $\mathcal{A}\varphi$ einführen. Da die Rektifikation der Ellipse auf ein ähnliches Integral führt, so bezeichnete

Legendre dasselbe als elliptische Funktion; heute nennen wir solche Integrale elliptische Integrale. Der Name elliptisch ist beibehalten, er ist rein konventioneller Art; die „Ellipse“ ist weder geometrisch noch analytisch für „elliptische“ Funktionen und Integrale charakteristisch.

2. Definition der elliptischen Integrale.

Das vorstehende Integral kann ersetzt werden durch die sogenannte Normalform des elliptischen Integrals 1. Gattung:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

mit dem es durch die Substitution

$$x = \sin \varphi$$

verbunden ist.

Jacobi und Abel, die beiden genialen Schöpfer der Theorie der elliptischen Funktionen, nehmen dies Integral zum Ausgangspunkt. Die analytisch ausschlaggebende Eigenschaft dieses Integrals besteht darin, daß der Wurzelradikand vom 4. Grade ist. Es zeigte sich nämlich bald nach Entdeckung der Integralrechnung, daß die von allen Seiten bearbeitete Aufgabe, vorgegebene Integrale auszuwerten, d. h. auf bekannte Funktionen zurückzuführen, zwar für rationale algebraische Ausdrücke gelang, und daß man auch irrationale Quadratwurzeln aus Ausdrücken 1. und 2. Grades durch Integration auf algebraische, cyclometrische und logarithmische Funktionen zurückführen konnte, daß aber die angewandten Methoden versagten, wenn die Größen unter dem Wurzelzeichen den 2. Grad überstiegen. Man wurde also auf neue Funktionen geführt.

Elliptische Integrale sind die Integrale solcher algebraischer irrationaler Funktionen, die eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck 3. oder 4. Grades enthalten. Da der erste Fall ein Spezialfall des zweiten ist, so lautet die allgemeinste Form eines elliptischen Integrals:

$$\int f(x, \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}) dx,$$

wo f eine algebraische, rationale Funktion ist.

Legendre zeigte, daß man jedes elliptische Integral auf eine oder mehrere von drei bestimmten einfachen Formen reduzieren kann, von denen wir das Integral der ersten Gattung bereits kennen:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Man nennt k den Modul, φ die Amplitude des elliptischen Integrals u und setzt $u = F(\varphi, k)$. Wir betrachten zunächst die Degene-

rationsfälle, in denen der Modul k , der stets, wie Legendre bewies, ein echter Bruch ist, die Grenzwerte 0 und 1 annimmt:

$$k = 0. \quad u_0 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$k = 1. \quad u_1 = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Die vorstehenden Spezialwerte geben uns einen Fingerzeig für den analytischen Charakter der elliptischen Integrale, diese müssen Verallgemeinerungen der cyklometrischen und logarithmischen Funktionen sein. Nun wissen wir aber, daß in der gesamten Analysis die Umkehrungen dieser Funktionen, die trigonometrischen und Exponentialfunktionen, bei weitem wichtiger sind; daher werden auch die Umkehrungen der elliptischen Integrale, die trigonometrische und Exponentialfunktionen als Spezialfälle umfassen, unser Interesse in erster Linie in Anspruch nehmen.

Auch die Physik führt zu dieser Art der Fragestellung. Bei unserer eingangs behandelten Pendelaufgabe erhielten wir schließlich, wie bei allen derartigen Aufgaben aus der Mechanik, für die Zeit ein Integral, das die Ortskoordinaten des sich bewegenden Punktes enthält, während uns doch in praktischen Fällen die Ortskoordinaten als Funktion der Zeit weit mehr interessieren.

Die Umkehrungen elliptischer Integrale heißen elliptische Funktionen; zwischen elliptischen Funktionen und elliptischen Integralen muß ein ähnlicher Zusammenhang bestehen wie zwischen trigonometrischen bzw. Exponentialfunktionen einerseits und cyklometrischen bzw. logarithmischen Funktionen andererseits. Wir wollen dies im folgenden näher ausführen; dabei müssen wir gemäß dem Titel dieser Abhandlung stets den Zusammenhang zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen im Auge behalten und aus den Analogieen in das Wesen der letzteren einzudringen suchen.

3. Definition der elliptischen Funktionen.¹⁾

Logarithmen und cyklometrische Funktionen sind Integrale algebraischer Funktionen, z. B.:

$$u_1 = \int_0^x \frac{dx}{x} = \log x, \quad u_2 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Betrachten wir die obere Grenze als variabel und die untere so gewählt, daß die Integrationskonstante gleich Null ist, so sind vorstehende

¹⁾ Vgl. H. Durège: Theorie der elliptischen Funktionen. 4. Aufl. Leipzig, 1887, p. 3 ff.

Integrale und damit auch die durch sie dargestellten Funktionen Funktionen ihrer oberen Grenze. Betrachten wir umgekehrt die obere Grenze als Funktion des Integrals, so werden wir auf Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen geführt:

$$u_1 = \log x, \text{ folglich } x = e^{u_1}$$

und ebenso: $u_2 = \arcsin x$, folglich $x = \sin u_2$,

also muß die obere Grenze, als Funktion des Integrals betrachtet, eine trigonometrische oder Exponentialfunktion sein.

Wenden wir nach Abel dieselbe Betrachtung auf das elliptische Integral

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, k)$$

an, so haben wir die Amplitude φ als Funktion von u anzusehen, wir schreiben daher die neue Funktion $\varphi = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am} u$. Gehen wir nun auf das Integral zurück

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

bei dem man immer bewirken kann, daß die obere Grenze des Integrals die Werte -1 und $+1$ nicht überschreitet (Legendre), so kann man, wie wir schon sahen, die Variable x einem Sinus gleichsetzen:

$$x = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u.$$

x ist eine elliptische Funktion, elliptische Funktionen sind trigonometrische Funktionen von Amplitude u , u ist das Argument. Offenbar kann man noch andere elliptische Funktionen einführen; wir betrachten im folgenden $x = \sin \operatorname{am} u$, $x = \cos \operatorname{am} u$ und eine neue dem Cosinus verwandte Funktion $x = \Delta \operatorname{am} u$ (sprich: delta amplitude u), wo $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, so daß wir folgende drei elliptischen Stammfunktionen haben:

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u \\ (3) \quad \sqrt{1 - x^2} &= \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u \\ \sqrt{1 - k^2 x^2} &= \Delta \varphi = \Delta \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

Neben dem Modul k führen wir den mit ihm durch die Gleichung $k^2 + k'^2 = 1$ verbundenen „komplementären“ Modul k' ein. Dann erhalten wir sofort die der trigonometrischen Gleichung: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ entsprechenden Beziehungen:

$$\Delta^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad \Delta^2 \varphi - k^2 \cos^2 \varphi = k'^2.$$

Für $\varphi = 0$ werden $\cos \varphi$ und $\Delta \varphi = 1$, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\cos \varphi = 0$, $\Delta \varphi = k'$. Ferner lassen sich sofort folgende Beziehungen finden: $\operatorname{am} 0 = 0$, $\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzen wir nach Jacobi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = K, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} = K'.$$

Diese nur vom Modul k (k') abhängige Größe K (K'), deren Größe sich für jeden Wert von k (k') berechnen läßt, nennen wir nach Durège das vollständige elliptische Integral; es ist nach der Definition:

$$\text{am}(K, k) = \text{am}(K', k') = \frac{\pi}{2}.$$

Der Übergang zu den elliptischen Funktionen liefert die Formeln:
 $\sin \text{am } 0 = 0, \quad \sin \text{am}(-u) = -\sin \text{am } u, \quad \sin \text{am } K = \sin \text{am } K' = 1,$
 $\cos \text{am } 0 = 1, \quad \cos \text{am}(-u) = \cos \text{am } u, \quad \cos \text{am } K = \cos \text{am } K' = 0,$
 $\mathcal{A} \text{am } 0 = 1, \quad \mathcal{A} \text{am}(-u) = -\mathcal{A} \text{am } u, \quad \mathcal{A} \text{am } K = k', \quad \mathcal{A} \text{am } K' = k.$

$$\text{Aus } u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi} \text{ f. } \frac{d\varphi}{du} = \mathcal{A}\varphi; \quad \frac{d \text{am } u}{du} = \mathcal{A} \text{am } u$$

und den bekannten Differentiationsgesetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \text{am } u}{du} &= \cos \text{am } u \mathcal{A} \text{am } u \\ (4) \quad \frac{d \cos \text{am } u}{du} &= -\sin \text{am } u \mathcal{A} \text{am } u \\ \frac{d \mathcal{A} \text{am } u}{du} &= -k^2 \sin \text{am } u \cos \text{am } u, \end{aligned}$$

d. h. die Differentialquotienten elliptischer Funktionen sind wieder elliptische Funktionen.

4. Degenerationsfälle.

Da die elliptischen Integrale für $k = 1$ und $k = 0$ in Logarithmen und cyclometrischen Funktionen übergehen, so müssen auch die elliptischen Funktionen für diese Spezialwerte des Moduls in trigonometrische und Exponentialfunktionen ausarten:

$$\begin{aligned} k = 0. \quad & \sin \text{am}(u, 0) = \sin u \\ & u = \int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi; \quad \varphi = \text{am}(u, 0) = u; \text{ f. } \cos \text{am}(u, 0) = \cos u \\ & \mathcal{A} \text{am}(u, 0) = 1. \\ k = 1. \quad & u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Die Integration geschieht mit Hilfe der Formel:

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \log \frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x} + C.$$

$u = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$. Die Integrationskonstante ist 0, da die untere Grenze und $\log 1 = 0$ sind, f.

$$e^{2u} = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}};$$

also: $\sin \operatorname{am} (u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$

und hieraus ergibt sich:

$$\cos \operatorname{am} (u, 1) = \mathcal{A} \operatorname{am} (u, 1) = \frac{2}{e^u + e^{-u}}.$$

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wollen wir auch für den Modul 1 die elliptischen Funktionen in trigonometrische überführen, so werden wir auf elliptische Funktionen mit imaginären Argumenten geführt. Hier liegen die Verhältnisse anders als bei trigonometrischen Funktionen; diese gehen für imaginäre Argumente ineinander über.

Nehmen wir in

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi}$$

φ imaginär an und setzen

$$\sin \varphi = i \operatorname{tg} \psi,$$

so ist

$$\cos \varphi = \frac{1}{\cos \psi}, \quad \mathcal{A}\varphi = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}}{\cos \psi} = \frac{\mathcal{A}(\psi, k')}{\cos \psi}, \quad d\varphi = i \frac{d\psi}{\cos \psi},$$

also:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathcal{A}\varphi} = i \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\mathcal{A}(\psi, k')} = iu,$$

$$\psi = \operatorname{am} (u, k'); \quad \varphi = \operatorname{am} (iu).$$

Führen wir diese Werte in die Ausdrücke für $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\mathcal{A}\varphi$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am} iu &= i \operatorname{tg} \operatorname{am} (u, k') \\ \cos \operatorname{am} iu &= \frac{1}{\cos \operatorname{am} (u, k')} \\ \mathcal{A} \operatorname{am} iu &= \frac{\mathcal{A} \operatorname{am} (u, k')}{\cos \operatorname{am} (u, k')} \end{aligned} \quad (5)$$

d. h. die elliptischen Funktionen für imaginäre Argumente verwandeln sich in elliptische Funktionen mit dem komplementären Modul.

Setzen wir in (5) $k' = 1$, so gehen, da dann $k = 0$, die Amplituden in ihre Argumente über und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am} (v, 1) &= i \operatorname{tg} iv \\ \cos \operatorname{am} (v, 1) &= \frac{1}{\cos iv} \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (v, 1) &= \frac{1}{\cos iv} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Formeln (6) bilden das gesuchte Resultat: die Degeneration der elliptischen Funktionen in trigonometrische Funktionen für $k = 1$.

5. Die Periodizität der elliptischen Funktionen.

Aus der Elementarmathematik ist bekannt, daß die trigonometrischen Funktionen die reelle Periode 2π , die Exponentialfunktionen die imaginäre Periode $2\pi i$ besitzen. Da beide Klassen von Funktionen als Spezialfälle in den elliptischen Funktionen enthalten sind, so dürfen wir von vornherein vermuten, daß elliptische Funktionen zwei Perioden, eine reelle und eine imaginäre, haben.

Zum Beweise gehen wir aus von unserm Integral:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{A(\varphi, k)},$$

das immer den Wert K hat, sobald man es zwischen zwei um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Grenzen nimmt. Denn bezeichnen wir mit n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so hat ein derartiges Integral die Form:

$$\int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi} \quad \text{oder} \quad \int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi}.$$

Setzen wir in dem ersten Integral $n\pi - \varphi = \varphi_1$, so erhält dies die Form:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi_1}{A\varphi_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{A\varphi_1} = K;$$

setzen wir in dem zweiten Integral $\varphi_2 = \varphi - n\pi$, so erhalten wir ebenfalls K , da

$$\int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{A\varphi_2} = K.$$

Weil nun in dem Schema:

$$\int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{A\varphi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} + \dots + \int_{(n-1)\frac{\pi}{2}}^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi}$$

jedes Glied der rechten Seite den Wert K hat, so ist

$$\int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\varphi} = n \cdot K,$$

und daher

$$\int_0^{n\pi \pm \varphi} \frac{d\varphi}{A\varphi} = 2n \cdot K \pm \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{A\varphi} = 2n K \pm u.$$

Gehen wir zu den Amplituden über, so ist:

$$\begin{aligned} n\pi \pm \varphi &= \operatorname{am} (2nK \pm u) = n\pi \pm \operatorname{am} u = 2n \operatorname{am} K \pm \operatorname{am} u, \\ \operatorname{am} (u \pm 2nK) &= \operatorname{am} u \pm n\pi. \end{aligned}$$

Da nun $\sin (\operatorname{am} u \pm 2\pi) = \sin \operatorname{am} u$ und

$$\operatorname{am} u \pm 2\pi = \operatorname{am} (u \pm 4K),$$

so ist

$$\sin \operatorname{am} (u \pm 4K) = \sin \operatorname{am} u.$$

Die hier fortgesetzt auftretende Größe K entspricht genau der Zahl $\frac{\pi}{2}$ in der Trigonometrie; gehen die elliptischen Funktionen in trigonometrische über ($k=0$), so wird $K = \frac{\pi}{2}$.

Durch dieselben Betrachtungen wie beim Sinus können wir auch die Periodizität von $\cos \operatorname{am} u$ und $\mathcal{A} \operatorname{am} u$ nachweisen; da

$$\sin (\varphi \pm \pi) = -\sin \varphi,$$

so ist

$$\sin \operatorname{am} (u \pm 2K) = -\sin \operatorname{am} u,$$

und wir gelangen so zu den Formeln:

$$\begin{aligned} (7) \quad \sin \operatorname{am} (u \pm 4K) &= \sin \operatorname{am} u \\ \cos \operatorname{am} (u \pm 4K) &= \cos \operatorname{am} u \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (u \pm 4K) &= \mathcal{A} \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

Aus (5) und (7) läßt sich leicht die imaginäre Periode herleiten: In (5) tritt rechter Hand nur der Modul k' auf, hier bleibt alles unverändert, wenn wir u durch $u \pm 4K'$ ersetzen. Führen wir dann statt iu u ein, so folgt:

$$\begin{aligned} (8) \quad \sin \operatorname{am} (u \pm 4iK') &= \sin \operatorname{am} u \\ \cos \operatorname{am} (u \pm 4iK') &= \cos \operatorname{am} u \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (u \pm 4iK') &= \mathcal{A} \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

(7) und (8) lassen sich vereinigen zu:

$$\begin{aligned} (9) \quad \sin \operatorname{am} (u \pm 4K \pm 4iK') &= \sin \operatorname{am} u \\ \cos \operatorname{am} (u \pm 4K \pm 4iK') &= \cos \operatorname{am} u \\ \mathcal{A} \operatorname{am} (u \pm 4K \pm 4iK') &= \mathcal{A} \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

Die elliptischen Funktionen besitzen also eine reelle und eine imaginäre Periode.

Die hier abgeleiteten Formeln lassen sich noch in der mannigfaltigsten Weise umwandeln und spezialisieren.

6. Das Additionstheorem für trigonometrische und elliptische Funktionen.

I. Um das Additionstheorem für $\sin(u+v)$ abzuleiten, gehen wir aus von der „cyklometrischen“ Differentialgleichung:

$$(10) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Integrieren wir gliedweise und nehmen wir eine willkürliche Konstante C so, daß die unteren Grenzen der beiden Integrale Null sind, so erhält man:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C.$$

Nehmen wir ferner an, daß dem Werte $x=0$ $y=c$ entspricht, so ist

$$C = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}},$$

d. h. (11)
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Wir integrieren (10) nach dem von Sturm¹⁾ angegebenen Verfahren:

$$\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0.$$

$$\int \sqrt{1-y^2} dx + \int \sqrt{1-x^2} dy = C'.$$

Addieren wir nun die beiden durch partielle Integration gefundenen Formeln:

$$\int \sqrt{1-y^2} dx = x \sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dy = y \sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so folgt unter Berücksichtigung von (10):

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = C'.$$

Um die oben eingeführte Konstante c zu erhalten, setzen wir $x=0$, $y=c$; dann ist $C'=c$ und wir erhalten als Integral der Differentialgleichung (10):

$$(12) \quad x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = c.$$

Gehen wir nun von den Integralen zu den inversen Funktionen über, so folgt aus

¹⁾ Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik. Bd. 1, p. 372.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad x = \sin u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos u$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v, \quad y = \sin v, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos v.$$

$$(11) \text{ ergibt den Wert } \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} = u + v, \text{ also } c = \sin(u + v).$$

Substituieren wir diese Werte in (12), so erhalten wir schließlich das Additionstheorem in der aus den Elementen der Trigonometrie bekannten Form:

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v.$$

II. Bei der Ableitung des Additionstheorems für trigonometrische Funktionen gingen wir aus von einer Differentialgleichung, der die arcus-sinusfunktion genügt. Wollen wir ebenso eine analoge Formel für elliptische Funktionen herleiten, so haben wir auszugehen von der „elliptischen“ Differentialgleichung. Ihr genügen die von uns in der Normalform angenommenen elliptischen Integrale, sie lautet also:

$$(13) \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

Die Behandlung geschieht genau in derselben Weise wie oben. Man erhält durch gliedweise Integration und Einführung der Konstanten c :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}}.$$

Auch die Sturmsche Integrationsmethode von (13) ist der obigen entsprechend. Man schafft die Nenner weg, integriert gliedweise, formt jedes Glied durch teilweise Integration um, vereinfacht mit Hilfe der Ausgangsdifferentialgleichung und führt für die sich ergebende Konstante C c ein, indem man $x=0$, $y=c$ setzt. Dann erhält die gesuchte Integralgleichung die Form:

$$(14) \quad \frac{x \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = c.$$

Wir setzen:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u, \quad \begin{aligned} x &= \sin \operatorname{am} u \\ \sqrt{1-x^2} &= \cos \operatorname{am} u \\ \sqrt{1-k^2x^2} &= \Delta \operatorname{am} u, \end{aligned}$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = v, \quad \begin{aligned} y &= \sin \operatorname{am} v \\ \sqrt{1-y^2} &= \cos \operatorname{am} v \\ \sqrt{1-k^2y^2} &= \Delta \operatorname{am} v. \end{aligned}$$

Dann ist $\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = u + v, \quad c = \sin \operatorname{am} (u + v).$

Substituieren wir diese Werte in (14), so erhalten wir das gesuchte Additionstheorem:

$$\sin \operatorname{am} (u + v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \operatorname{Am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \operatorname{Am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Die beiden unter I. und II. dieser Nummer durchgeführten Ableitungen lassen die Analogieen zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen besonders klar und durchsichtig hervortreten; der Übergang von II. zu I. findet, wie es sein muß, für $k = 0$ statt.

7. Das Additionstheorem für elliptische Integrale.

Wir hatten einleitend die elliptischen Funktionen als trigonometrische Funktionen der oberen Grenzen der elliptischen Integrale definiert. Aus dem Additionstheorem können wir daher a priori schließen, daß die Summe zweier elliptischer Integrale $F(\varphi)$ und $F(\psi)$ einem dritten Integral $F(\sigma)$ gleich ist, wobei zwischen den trigonometrischen Funktionen der drei Amplituden φ , ψ und σ eine algebraische Relation besteht. Zum Beweise teilen wir die elegante Methode Lagranges mit, sie führt uns gleich zum letzten in diesem einleitenden Kapitel zu behandelnden Punkt, dem interessanten Zusammenhang zwischen elliptischen Funktionen und sphärischer Trigonometrie.

Wir gehen aus von der Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{d\varphi}{\operatorname{Am} \varphi} + \frac{d\psi}{\operatorname{Am} \psi} = 0.$$

Lagrange führt eine neue Variable t ein:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Dann ist: $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$

Setzen wir:

$$\varphi + \psi = p$$

$$\varphi - \psi = q,$$

so ergibt die Addition, bezw. Subtraktion:

$$\frac{dp}{dt} = \operatorname{Am} \varphi - \operatorname{Am} \psi, \quad \frac{dq}{dt} = \operatorname{Am} \varphi + \operatorname{Am} \psi.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} &= (\mathcal{A}q)^2 - (\mathcal{A}\psi)^2 = -k^2(\sin^2 q - \sin^2 \psi) = -k^2 \left(\sin^2 \frac{p+q}{2} - \sin^2 \frac{p-q}{2} \right) \\ &= -k^2 \sin p \sin q.\end{aligned}$$

Für die zweiten Differentialquotienten ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 p}{dt^2} &= -k^2 \sin p \cos q, \\ \frac{d^2 q}{dt^2} &= -k^2 \cos p \sin q,\end{aligned}$$

mithin ist

$$\frac{\frac{d^2 p}{dt^2}}{\frac{dp}{dt}} = \frac{\cos q}{\sin q} \frac{dq}{dt}; \quad \frac{\frac{d^2 q}{dt^2}}{\frac{dq}{dt}} = \frac{\cos p}{\sin p} \frac{dp}{dt}.$$

Diese Gleichungen sind integrabel:

$$\begin{aligned}\log \frac{dp}{dt} &= \log \sin q + C, & \frac{dp}{dt} &= \alpha \sin q, \\ \log \frac{dq}{dt} &= \log \sin p + C', & \frac{dq}{dt} &= \beta \sin p,\end{aligned}$$

wo α und β die Numeri der logarithmischen Integrationskonstanten C und C' bedeuten.

$$\alpha \sin q \frac{dq}{dt} = \beta \sin p \frac{dp}{dt}.$$

Jetzt können wir wieder integrieren, wobei der Parameter t herausfällt:

$$\begin{aligned}-\alpha \cos q &= -\beta \cos p + \gamma \\ (15) \quad \underline{\beta \cos (q + \psi) - \alpha \cos (q - \psi) = \gamma}\end{aligned}$$

ist also die Integralgleichung von:

$$\frac{dq}{\mathcal{A}q} + \frac{d\psi}{\mathcal{A}\psi} = 0,$$

deren gliedweise Integration die Gleichung:

$$\int_0^q \frac{dq}{\mathcal{A}q} + \int_0^\psi \frac{d\psi}{\mathcal{A}\psi} = C$$

liefert.

Da q und ψ Funktionen von einander sind, so entspricht dem Werte $q = 0$ ein bestimmter Wert ψ , den wir δ nennen.

$$\begin{aligned}\text{Dann ist } C &= \int_0^\delta \frac{d\delta}{\mathcal{A}\delta} \text{ und es ist in der Legendreschen Bezeichnung:} \\ F(q) + F(\psi) &= F(\delta).\end{aligned}$$

Die drei Konstanten α, β, γ bestimmen sich wie folgt:

Setzen wir $\varphi = 0, \psi = \delta$, so liefert (15):

$$a) (\beta - \alpha) \cos \delta = \gamma.$$

Ferner gehen die Werte für $\mathcal{A}\varphi + \mathcal{A}\psi$ und $\mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}\psi$ über in:

$$b) 1 - \mathcal{A}\delta = \alpha \sin(-\delta),$$

$$c) 1 + \mathcal{A}\delta = \beta \sin \delta.$$

Aus a), b) und c) folgen:

$$\alpha = \frac{1 - \mathcal{A}\delta}{\sin(-\delta)}, \quad \beta = \frac{1 + \mathcal{A}\delta}{\sin \delta}, \quad \gamma = \frac{2 \cos \delta}{\sin \delta}.$$

Führen wir die für die Konstanten gefundenen Werte in (15) ein, so ist

$$(1 + \mathcal{A}\delta) \cos(\varphi + \psi) + (1 - \mathcal{A}\delta) \cos(\varphi - \psi) = 2 \cos \delta, \\ \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) + \mathcal{A}\delta (\cos[\varphi + \psi] - \cos[\varphi - \psi]) = 2 \cos \delta, \\ \text{also: } (16) \quad \underline{\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \mathcal{A}\delta = \cos \delta}.$$

Damit ist das Additionstheorem für elliptische Integrale hergeleitet, die Relation (16) gilt zwischen den oberen Grenzen der elliptischen Integrale $F(\varphi)$, $F(\psi)$ und $F(\delta)$, wenn zwischen diesen die Gleichung gilt:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \delta}}.$$

Der Übergang zu den elliptischen Funktionen liefert das Additionstheorem für $\cos \operatorname{am}(u + v)$, denn aus:

$F(\varphi) = u, \varphi = \operatorname{am} u, F(\psi) = v, \psi = \operatorname{am} v; F(\sigma) = u + v, \sigma = \operatorname{am}(u + v)$ folgt durch (16):

$$\cos \operatorname{am}(u + v) = \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am}(u + v).$$

Die Analogie mit der entsprechenden Formel der Trigonometrie $\cos(u + v)$ wird wieder zur Identität, wenn wir den Modul $k = 0$ setzen.

8. Über den Zusammenhang der elliptischen Funktionen mit der sphärischen Trigonometrie.

Bereits Lagrange bemerkte die auffallende Ähnlichkeit der oben hergeleiteten Formel:

$$(17) \cos \sigma = \cos a \cos b - \sin a \sin b \mathcal{A} \sigma, \quad (F[a] + F[b] = F[\sigma]) \\ \text{bezw.}$$

$$(18) \cos \Theta = \cos a \cos b + \sin a \sin b \mathcal{A} \Theta, \quad (F[a] - F[b] = F[\Theta])$$

mit der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie:

$$(19) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

in der a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel bedeuten.

Die Analogie geht in Identität über, wenn man $c = \Theta$ und das konstante Verhältnis:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = k$$

setzt. Dann ist

$$\cos A = \pm Aa, \quad \cos B = \pm Ab, \quad \cos C = \pm Ac,$$

d. h. bei spitzem Winkel C wird $c = \Theta$, $\cos C = A\Theta$, (19) und (18) sind identisch; bei stumpfem Winkel C setzt man $c = \sigma$, $\cos C = -A\sigma$; Formel (19) geht in (17) über. Nach den Betrachtungen in Nr. 7 wird für $a = \text{am } u$, $b = \text{am } v$

$$\Theta = \text{am } (u - v), \quad \sigma = \text{am } (u + v).$$

Hieraus folgt der Satz:

Konstruiert man ein sphärisches Dreieck mit den Seiten $\text{am } u$ und $\text{am } v$, welche einen spitzen Winkel einschließen, so ist die diesem Winkel gegenüberliegende Seite $= \text{am } (u - v)$; sie ist $= \text{am } (u + v)$, wenn der eingeschlossene Winkel stumpf ist.

Nun wissen wir, daß wir unsere Betrachtungen über elliptische Integrale und Funktionen unter der Voraussetzung $k < 1$ gemacht haben. Welches ist nun die Bedingung dafür, daß in einem sphärischen Dreieck $k < 1$ ist? Durège gibt hierfür eine geometrische Bedingung, wir leiten nach Kleiber¹⁾ eine arithmetische Bedingungsrelation her.

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

also:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \text{ f.}$$

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma - (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

$$1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

Hieraus folgt:

$$\text{Falls } \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0, \text{ so ist } 1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \alpha} > 0, \quad k^2 > 1.$$

¹⁾ Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Funktionen und ihr Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie. Königsberg 1880/81. Programm des Stadtgymnasiums.

Wenn also eine grade Anzahl der Größen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ negativ ist, so muß $k^2 > 1$ sein. Es kann also nur in zwei Fällen der Modul < 1 sein, nämlich:

1. wenn ein Winkel stumpf und die beiden andern spitz sind,
2. wenn alle drei Winkel stumpf sind.¹⁾

Übrigens kann man, wenn ein sphärisches Dreieck mit einem Modul > 1 vorliegt, dieses ersetzen durch das Polardreieck, das in diesem Falle, wie sich leicht beweisen läßt, stets einen Modul < 1 hat.

Mit Hilfe des hergeleiteten Satzes über die Konstruktion sphärischer Dreiecke lassen sich die Amplituden von Summe und Differenz von Argumenten sowie von Vielfachen derselben konstruieren. Auch lassen sich infolge des engen Zusammenhanges zwischen elliptischen Funktionen und sphärischer Trigonometrie Formeln der einen Disziplin aus den entsprechenden der andern herleiten, ja auch neue Beziehungen finden; wir verweisen hierfür auf Durège, Abschnitt VII, und begnügen uns an dieser Stelle, um zum Abschluß zu gelangen, damit, das wichtige Additionstheorem der elliptischen Funktionen aus der sphärischen Trigonometrie herzuleiten.

Unter der Voraussetzung, daß der Modul $k = \frac{\sin C}{\sin c}$ konstant und $\sphericalangle C$ stumpf ist, differenzieren wir die Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

vollständig nach a und b und erhalten:

$$0 = (-\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C) da + (-\cos a \sin b + \sin a \cos b \cos C) db.$$

Die erste Klammer hat den Wert:

$$-\sin c \cos B,$$

die zweite Klammer ist: $-\sin c \cos A$,

folglich:
$$0 = -\sin c \cos B da - \sin c \cos A db.$$

¹⁾ Kleiber untersucht diese Frage näher und leitet (a. a. O. p. 30) folgende Regel für die Übertragung von Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen auf sphärische Trigonometrie her: Wenn man eine Formel für elliptische Funktionen hat, in der die Funktionen $\sin \operatorname{am} u$, $\sin \operatorname{am} v$, $\sin \operatorname{am} (u-v)$, $\cos \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} (u-v)$, $\Delta \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} v$, $\Delta \operatorname{am} (u-v)$ vorkommen, so kann man dieselbe in eine Formel für ein sphärisches Dreieck mit einem stumpfen und zwei spitzen Winkeln übertragen, bei welchem (wenn die Reihenfolge der Winkel der Größe nach ist: $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2} > \beta > \gamma > 0$) ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &> \frac{\pm \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \left(\begin{array}{l} \pm \text{ je nachdem} \\ \alpha + \beta \gtrless \pi \end{array} \right) \text{ und zwar hat man dann nur zu setzen: } k = \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \text{ und } \sin a, \sin b, \sin c, \cos a, \cos b, \cos c, -\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \text{ statt} \\ &\text{obiger elliptischer Funktionen in derselben Reihenfolge (wenn } a, b, c \text{ die Seiten und} \\ &\alpha, \beta, \gamma \text{ die Winkel des sphärischen Dreiecks sind).} \end{aligned}$$

Es sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden:

entweder ist $\cos B = Ab, \quad \cos A = Aa,$
 oder $\cos B = -Ab, \quad \cos A = -Aa,$

beide geben: $0 = Ab da + Aa db$

$$\frac{da}{Aa} = \frac{db}{Ab} = 0.$$

Wir werden also auf die Gleichung [vgl. (13)]:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = 0$$

zurückgeführt, deren Zusammenhang mit dem Additionstheorem in Nr. 6 behandelt ist.

9. Rückblick und Ausblick.

Die vorstehenden im engen Anschluß an Durège durchgeführten Betrachtungen hatten den Zweck, auf möglichst einfachem Wege, nur mit Hilfe der Infinitesimalrechnung, in propädeutischer Weise den Zusammenhang zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen darzulegen.

Auch in den folgenden funktionentheoretischen Untersuchungen, die den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung bilden, hat sich der Verfasser einer möglichst elementaren Darstellungsweise bedient; es sind daher die Hauptbegriffe der Funktionentheorie nach Weierstraß kurz erläutert worden. Der Zweck dieser Untersuchung soll wesentlich anregender Art sein, der Verfasser hat auf Vollständigkeit um so eher verzichten zu dürfen geglaubt, als ja ausgezeichnete Lehrbücher ausführlichster Art über elliptische Funktionen vorhanden sind. Andererseits hofft der Verfasser dadurch, daß von der subtilen Schärfe moderner analytischer Betrachtungen abgesehen, auch manches rein referierend unbewiesen mitgeteilt ist, die kleine Schrift vor dem üblichen Schicksal mathematischer Programmarbeiten, nur von einem winzigen Kreis speziell interessierter Fachkollegen gelesen zu werden, nach Möglichkeit bewahrt zu haben. Es muß doch jeden Mathematiklehrer, nicht nur den Mathematiker, interessieren, einmal geläufige Sätze aus der Elementarmathematik wie $\sin(\alpha + \beta)$ u. a. als Spezialfälle allgemeiner funktionentheoretischer Sätze, also gewissermaßen von einer höheren Warte aus, kennen zu lernen. Zu dieser von Universitätslehrern wie Klein, Study, Weber u. a. mit Nachdruck im Interesse der Schule vertretenen Behandlung der Elementarmathematik hofft der Verfasser einen bescheidenen Beitrag geliefert zu haben.

Über die Gliederung der folgenden Abschnitte sei bemerkt:

Im zweiten Abschnitt wird nach Erläuterung einiger wichtiger Begriffe und Sätze der Funktionentheorie die Theorie der rationalen und trigonometrischen Funktionen auf zwei Hauptsätze, die Zerlegung in Partialbrüche und Linearfaktoren, zurückgeführt. Im dritten Abschnitt sind die elliptischen Funktionen neu definiert; die Weierstraßschen Funktionen σu , ζu und $p u$ werden als Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen $\sin u$, $\cotg u$, $\frac{1}{\sin^2 u}$ gewonnen. Als besonders wichtig für den Zweck unserer Untersuchung sind die Degenerationsfälle eingehender behandelt. Im vierten und fünften Abschnitt werden die fundamentalen Theoreme der Lehre von den elliptischen Funktionen: Zerlegung in Partialbrüche und Linearfaktoren, Reihenentwicklung und Additionstheorem, hergeleitet; überall ist auf die Analogie mit den entsprechenden Sätzen aus der Lehre der trigonometrischen Funktionen besonderes Gewicht gelegt. Im sechsten Abschnitt wird der Zusammenhang der im Vordergrund stehenden p -Funktion mit den im propädeutischen Abschnitt gewonnenen Amplitudenfunktionen kurz dargelegt und damit der Kreis der Untersuchungen zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Die wichtigste Literaturquelle sind zwei französische Werke; für Abschnitt 2—5: Appell-Lacour. *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, p. 1—67, Paris 1897; für Abschnitt 6: Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications I*, Paris 1886. Die übrigen benutzten Werke sind unter dem Text zitiert.

Zweiter Abschnitt.

Die Theorie der rationalen und trigonometrischen Funktionen.

1. Einige Fundamentalbegriffe der Funktionentheorie.

Nach Weierstraß¹⁾ nennt man eine eindeutige analytische Funktion $f(u)$ der komplexen Veränderlichen u regulär in der Umgebung einer Stelle $u = a$, wenn sie innerhalb eines gewissen Bereiches, dessen Mittelpunkt a ist, überall einen endlichen und mit u stetig sich ändernden Wert hat. Dann existiert eine Potenzreihe, die innerhalb des genannten Bereiches die Funktion darstellt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(u|a) = f(u) = f(a) + \frac{u-a}{1} f'(a) + \frac{(u-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(u-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Mathematische Werke von Karl Weierstraß, Bd. II. Abhdlg. II. p. 77 ff. Berlin 1895.

Diese mit der Taylorschen Formel nach steigenden Potenzen von $u - a$ entwickelte Potenzreihe nennt man auch wohl das zu der Stelle $u = a$ gehörende Funktionenelement. $f(u)$ hat an der Stelle $u = a$ eine einfache Nullstelle, wenn $f(a) = 0$, dagegen $f'(a) \geq 0$; $f(u)$ hat dort eine n -fache Nullstelle, wenn die zugehörige Reihenentwicklung erst mit der n -Potenz beginnt; indem $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = 0$; dagegen $f^{(n)}(a) \geq 0$, so daß $f(u) = (u - a)^n g(u)$, wo $g(u)$ eine nicht für $u = a$ verschwindende Reihenentwicklung darstellt.

Nun läßt sich leicht zeigen, daß — von einer Konstanten abgesehen — bei jeder Funktion der Bereich, innerhalb dessen sich eine Funktion regulär verhält und sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt, der sogenannte Stetigkeitsbereich, begrenzt ist. Hat nämlich der Radius r des Konvergenzbezirks der Reihe $\mathfrak{P}(u|a)$ einen endlichen Wert, so gibt es unter den Werten u , für welche $|u - a| \geq r$, mindestens einen (u') , der dem betrachteten Bereich nicht angehört. Dann ist entweder u' selbst eine Grenzstelle des Bereiches, oder es liegt eine Grenzstelle zwischen u' und a in der Strecke $(u' \dots a)$. Ist dagegen r unendlich groß, d. h. verhält sich die Funktion im Endlichen überall regulär, so gibt es unendlich große Werte von u , denen auch unendlich große Werte von $f(u)$ entsprechen; in diesem Falle ist also nur die Stelle $u = \infty$ vom Stetigkeitsbereich ausgeschlossen. Jede Funktion $f(u)$ hat also notwendig singuläre Stellen. Die unsern Betrachtungen zugrunde liegenden Potenzreihen sind konvergent innerhalb eines Konvergenzkreises, der von der betrachteten Stelle bis zum nächsten singulären Punkt geht. Von diesen singulären Stellen gibt es zwei Arten: außerwesentliche und wesentliche singuläre Stellen. Im ersteren Falle läßt sich der singuläre Punkt isolieren, d. h. es läßt sich um ihn ein Bereich abgrenzen, innerhalb dessen kein weiterer singulärer Punkt möglich ist. Wesentlich singuläre Punkte, bei denen dies nicht gelingt, schließen wir von unserer Betrachtung aus. Einen solchen außerwesentlich singulären Punkt nennt man einen Pol, wenn in ihm die Funktion nach Art eines rationalen Bruches unendlich wird. a ist also ein Pol für $f(u)$, wenn eine rationale Funktion $\varphi(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A_2}{(u-a)^3} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha}$ existiert, so daß $f(u) - \varphi(u)$ in a regulär ist. Dieser Pol hat die Ordnung α , da α die höchste negative Potenz ist. Innerhalb eines gewissen Konvergenzkreises ist also:

$$f(u) = \varphi(u) + g(u) = \frac{G(u)}{(u-a)^\alpha},$$

wo $g(u)$ und $G(u)$ zwei in a reguläre Funktionen sind.

Das Aggregat der negativen Potenzen heißt Hauptteil der Funktion $f(u)$ (Weierstraß), von den Konstanten A_i heißt A nach Cauchy

das Residuum für die Stelle $u = a$. Die Bedeutung dieser Größe für den analytischen Charakter einer Funktion ersieht man aus $\int f(u) du$, indem die Integration von $A \cdot (u - a)^{-1}$ nicht wie die andern Glieder eine eindeutige rationale Funktion, sondern den um $2n\pi i$ vieldeutigen Logarithmus ergibt. Nennen wir eine Funktion von der Form:

$$e_0 + e_1 (u - a) + e_2 (u - a)^2 + \dots = E(u),$$

die für $u = a$ weder Pole noch Nullstellen hat, eine Einheitsfunktion, so läßt sich nach dem vorhergehenden die Reihenentwicklung einer Funktion für $u = a$ stets auf die Form bringen:

$$f(u) = (u - a)^\rho E(u).$$

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $\rho > 0$ für eine ρ -fache Nullstelle,
- $\rho = 0$ für eine Einheitsfunktion,
- $\rho < 0$ für einen ρ -fachen Pol.

Differentiieren wir logarithmisch, so ist

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\rho}{u - a} + \frac{E'(u)}{E(u)}.$$

Da $\frac{E'(u)}{E(u)}$ regulär, so erhalten wir den für uns wichtigen Satz: Hat eine Funktion an der Stelle $u = a$ eine ρ -fache Nullstelle, so hat ihre logarithmische Derivierte an dieser Stelle einen Pol mit dem Residuum ρ . Ist $u = a$ ein Pol α -Ordnung, also $f(u) = \frac{E(u)}{(u - a)^\alpha}$, so ist $\frac{f'(u)}{f(u)} = -\frac{\alpha}{u - a} + \frac{E'(u)}{E(u)}$, d. h. die logarithmische Derivierte hat dort einen einfachen Pol mit dem Residuum $-\alpha$.

Um das Verhalten einer Funktion im Unendlichen zu beurteilen, setzen wir $u = \frac{1}{u'}$ und betrachten statt $f(u)$ für $u = \infty$ $f\left(\frac{1}{u'}\right)$ für $u' = 0$. Mit Hilfe dieser Fixierung können wir leicht den Fundamentalsatz beweisen:

Eine im Endlichen und im Unendlichen überall reguläre Funktion ist eine Konstante.

Denn da diese Funktion für $u = 0$ regulär ist, gilt für sie die Entwicklung:

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

wobei der Konvergenzbereich $n \cdot V$ die ganze komplexe Ebene ist.

Statt $u = \infty$ betrachten wir $f\left(\frac{1}{u'}\right)$ für $u' = 0$, also:

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = a_0 + \frac{a_1}{u'} + \frac{a_2}{u'^2} + \dots$$

Da $f\left(\frac{1}{u'}\right)$ als reguläre Funktion keine negative Potenzen enthalten darf, sind alle Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n = 0$, und es ergibt sich:

$$f(u) = f\left(\frac{1}{u'}\right) \text{ gleich einer Konstante } a_0.$$

2. Darstellung einer rationalen Funktion mit Hilfe ihrer Hauptteile.

Unter einer ganzen rationalen Funktion einer komplexen Größe u versteht man einen Ausdruck von der Form:

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n,$$

wo die a_i komplexe Konstante sind. Den Quotienten zweier solcher rationalen Funktionen nennt man eine gebrochene rationale Funktion. Wir werden im folgenden die Theorie der rationalen Funktionen auf zwei Fundamentalsätze zurückführen; unsere Beweismethoden und Resultate sind analog den weiterhin in der Theorie der trigonometrischen und elliptischen Funktionen zu entwickelnden Beziehungen.

Wir gehen aus von einem einfachen und durchsichtigen Beispiel, der Funktion

$$f(u) = \frac{u}{(u-1)(u-2)},$$

die offenbar an den Stellen $u=1$ und $u=2$ zwei einfache Pole hat, während sie sich sonst im Endlichen überall regulär verhält. Der zum Pole $u=1$ gehörige Hauptteil ist $g_1(u) = -\frac{1}{u-1}$, das Residuum $= -1$, da $f(u) - g_1(u)$ für $u=1$ regulär. Ebenso läßt sich zeigen, daß zum Punkte $u=2$ der Hauptteil $g_2(u) = \frac{2}{u-2}$, also das Residuum 2 gehört.

Im Punkte $u=0$ hat die Funktion $f(u)$ eine Nullstelle, wie man ohne weiteres sieht; eine zweite Nullstelle liegt im Unendlichen. Denn

$$f(u) = f\left(\frac{1}{u'}\right) = \frac{u'}{(1-u')(1-2u')}$$

ist im Punkte $u'=0$ regulär $=0$; folglich ist $u=\infty$ eine Nullstelle. Wir sehen:

Die rationale Funktion $f(u)$ hat zwei einfache Pole $u=1, u=2$, und zwei einfache Nullstellen $u=0, u=\infty$, sie muß auch alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte zweimal annehmen, d. h. die Gleichung:

$$f(u) = C$$

hat zwei Wurzeln. Aus der Definition der zu den Polen $u = 1$ und $u = 2$ gehörenden Hauptteile g_1 und g_2 geht hervor, daß die Differenz:

$$f(u) - g_1(u) - g_2(u)$$

im Endlichen und Unendlichen regulär sein muß; dann folgt aus dem Nr. 1 bewiesenen Satz:

$$f(u) - g_1(u) - g_2(u) = C.$$

Diese Differenz verschwindet im Unendlichen, wo jede der drei sie zusammensetzenden Funktionen $= 0$ wird, d. h. $C = 0$.

$$f(u) = g_1(u) + g_2(u)$$

$$\frac{u}{(u-1)(u-2)} = -\frac{1}{u-1} + \frac{2}{u-2}.$$

Diese Darstellung einer rationalen Funktion durch die Hauptteile ihrer Pole ist nichts anderes als die aus der Algebra bekannte in der Integralrechnung viel verwandte Zerlegung einer rationalen Funktion in Partialbrüche.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, indem wir setzen:

$$f(u) = \frac{a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + a_2 u^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \dots + b_n} = \frac{P(u)}{Q(u)}.$$

Wir nehmen an, daß Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Linearfaktor haben. Wie man unmittelbar sieht, hat diese Funktion im Endlichen die Wurzeln der Gleichung $Q(u) = 0$ als Pole; nehmen wir eine α -fache Wurzel als α einfache Wurzeln, so ist die Zahl der Pole im Endlichen $= n$. Ebenso ergibt sich, daß $f(u)$ im Endlichen m -Nullstellen hat, die mit den Wurzeln der Gleichung $P(u)$ identisch sind. Um das Verhalten von $f(u)$ im Unendlichen zu finden, untersuchen wir $f\left(\frac{1}{u'}\right)$ für $u' = 0$:

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = \frac{a_0 \left(\frac{1}{u'}\right)^m + a_1 \left(\frac{1}{u'}\right)^{m-1} + \dots}{b_0 \left(\frac{1}{u'}\right)^n + b_1 \left(\frac{1}{u'}\right)^{n-1} + \dots} = u'^{n-m} \frac{a_0 + a_1 u' + \dots}{b_0 + b_1 u' + \dots}$$

$$= u'^{n-m} E(u').$$

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $m > n$. Dann ist der Punkt $u = \infty$ ein Pol von der Ordnung $m - n$, und $f(u)$ hat im ganzen $n + m - n = m$ Pole, d. h. $f(u)$ hat genau so viel Pole wie Nullstellen. $f(u) = C$ hat m -Wurzeln.
2. $m < n$. Dann ist der Punkt $n = \infty$ eine $n - m$ -fache Nullstelle. Zählen wir hierzu die m -Nullstellen im Endlichen, so sind $m + n - m = n$

Nullstellen im ganzen vorhanden, d. h. wieder genau so viel Nullstellen wie Pole. $f(u) = C$ hat n -Wurzeln.

3. $m = n$ gibt dasselbe Resultat, so daß wir den wichtigen Satz finden:
Eine rationale Funktion hat gleichviel Pole und Nullstellen.

Nun können wir den allgemeinen Fall der Darstellung einer Funktion durch ihre Hauptteile behandeln, wir kleiden ihn in die Form:

Eine rationale Funktion ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn ihre Pole und die zugehörigen Hauptteile bekannt sind.

Wir nehmen an, die Funktion habe im Endlichen einen Pol a von der Ordnung α , b von der Ordnung β usw., l von der Ordnung λ und die entsprechenden Hauptteile seien:

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} \\ g_2(u) &= \frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta} \dots \end{aligned}$$

usw., und schließlich sei:

$$g_\infty(u) = M_1 u + M_2 u^2 + \dots + M_s u^s$$

der Hauptteil für eine etwaigen im unendlichen liegenden Pol.

Da nun jeder Hauptteil außer in dem entsprechenden Pol regulär ist, so ist — wie vorhin — die Differenz:

$$f(u) - g_1(u) - g_2(u) - \dots - g_\infty(u)$$

im Endlichen wie im Unendlichen überall regulär, d. h. gleich einer Konstanten M_0 .

$$f(u) = M_0 + g_\infty(u) + g_1(u) + g_2(u) + \dots,$$

$$f(u) = M_0 + M_1 u + M_2 u^2 + \dots + M_s u^s + \sum \left[\frac{A}{u-a} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} \right],$$

wo Σ über alle im Endlichen gelegenen Pole zu erstrecken ist.

Damit ist der Satz bewiesen und wir sind wieder auf die Partialbruchzerlegung geführt worden. Mit Hilfe des gewonnenen Satzes läßt sich leicht beweisen, daß jede Funktion, die im Endlichen und Unendlichen nur eine endliche Anzahl von Polen besitzt, eine rationale Funktion ist.¹⁾

¹⁾ Weierstraß benutzt diese Eigenschaft als Definition: Die Klasse der rationalen Funktionen einer Veränderlichen (x) ist die Gesamtheit derjenigen eindeutigen Funktionen von x , für die es im Gebiete dieser Größe nur außerwesentliche singuläre Stellen gibt (a. a. O. p. 79).

3. Darstellung einer rationalen Funktion durch Pole und Nullstellen.

Der zweite Fundamentalsatz, die Darstellung einer rationalen Funktion durch Pole und Nullstellen, beruht auf der Zerlegung der Polynome P und Q in Linearfaktoren:

$$f(u) = \frac{a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + a_2 u^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \dots + b_n} = \frac{P(u)}{Q(u)},$$

$$f(u) = C \frac{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2) \dots (u - \alpha_m)}{(u - \beta_1)(u - \beta_2) \dots (u - \beta_n)}.$$

Hierbei können auch Faktoren einander gleich sein. Diese Zerlegung einer rationalen Funktion läßt sich aus dem ersten Fundamentalsatz herleiten. Wenn nämlich $f(u)$ die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ und die Pole $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ besitzt, so wissen wir (S. 24), daß die logarithmische Derivierte $\frac{f'(u)}{f(u)}$ die Pole und Nullstellen der Funktion $f(u)$ zu einfachen Polen hat. Stellen wir nunmehr $\frac{f'(u)}{f(u)}$ durch die Partialbruchzerlegung dar, so ist

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u - \alpha_1} + \frac{1}{u - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{u - \alpha_m} - \frac{1}{u - \beta_1} - \frac{1}{u - \beta_2} - \dots - \frac{1}{u - \beta_n}.$$

Die Residuen für die Pole sind n. o. -1 , für die Nullstellen $+1$. Wir integrieren:

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \int \frac{du}{u - \alpha_1} + \int \frac{du}{u - \alpha_2} + \dots + \int \frac{du}{u - \alpha_m} - \int \frac{du}{u - \beta_1} - \int \frac{du}{u - \beta_2} - \dots - \int \frac{du}{u - \beta_n}$$

und finden durch Übergang zu den Numeri:

$$f(u) = C \frac{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2) \dots (u - \alpha_m)}{(u - \beta_1)(u - \beta_2) \dots (u - \beta_n)}.$$

Das vorstehende Resultat können wir durch den Satz ausdrücken:

Eine rationale Funktion ist durch ihre Nullstellen und Pole bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt.

Ehe wir die vorstehenden Betrachtungen auf trigonometrische und elliptische Funktionen übertragen, sei noch auf folgende Punkte in der Theorie der rationalen Funktionen hingewiesen, die ebenfalls später Verallgemeinerungen erfahren werden.

Denkt man sich die Koordinaten eines Punktes in der Form:

$$x = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

$$y = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots$$

als rationale Funktionen eines Parameters dargestellt, so entspricht jedem Werte u ein Punkt x, y . Dann stellt die Gleichung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

bekanntlich einen Kegelschnitt dar. Ebenso erhalten wir eine Kurve 3. Ordnung, wenn wir die Werte für x und y in

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + ky^3$$

einsetzen. So fortfahrend kann man die allgemeinste Form einer Kurve n -Ordnung bilden. Alle diese Kurven enthalten das mögliche Maximum an Doppelpunkten $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, sie sind vom „Geschlechte“ Null. Derartige „Unikursalkurven“ sind dadurch ausgezeichnet, daß sich ihre Koordinaten als rationale Funktionen eines Parameters darstellen lassen.

Ferner hat jede rationale Funktion ein sogenanntes algebraisches Additionstheorem, d. h. wenn $f(u)$ und $f(v)$ zwei rationale Funktionen mit den unabhängigen Variablen u und v bedeuten, so läßt sich $f(u+v)$ als algebraische Funktion von $f(u)$ und $f(v)$ ausdrücken.

4. Die trigonometrischen Funktionen.

Die die trigonometrische Funktion $\sin u$ darstellende unendliche Reihe:

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots$$

konvergiert für alle reellen und komplexen Werte von u . Die Funktion $\sin u$ ist im Endlichen für alle Punkte regulär; sie verschwindet für $u = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$, besitzt also die für einfache periodische Funktionen charakteristische Eigenschaft, im Endlichen unendlich viele Nullstellen zu haben. Der Punkt $u = \infty$ ist ein wesentlich singulärer Punkt, denn setzt man $u = \frac{1}{u'}$ und betrachtet $\sin \frac{1}{u'}$ für $u' = 0$, so können wir, wie klein wir auch immer den Kreis um $u' = 0$ wählen, stets unendlich viele Nullstellen $u' = \frac{1}{m\pi}$ finden, wo m jede beliebige ganze Zahl bedeutet. Daraus folgt, daß die sinus-Funktion für $u' = 0$, also $u = \infty$ einen wesentlich singulären Punkt hat. Hier tritt offenbar ein wichtiger Unterschied gegenüber den rationalen Funktionen auf.

Wir wollen nunmehr nach Weierstraß eine analytische Funktion wie $\sin u$, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle enthält, eine ganze transcendente Funktion nennen; sie unterscheidet sich dadurch von der ganzen rationalen Funktion, daß sie im Unendlichen

eine wesentlich singuläre Stelle hat, während für diese die Unendlichkeitsstelle außerwesentlich singulär ist.¹⁾

Nun können wir eine ganze rationale Funktion auf zwei verschiedene Arten darstellen, als Reihe:

$$a_0 + a_1 (u - a) + a_2 (u - a)^2 + \dots$$

und als Produkt:

$$c_0 \left(1 - \frac{u}{a_1}\right) \left(1 - \frac{u}{a_2}\right) \dots,$$

aus dem die Nullstellen ersichtlich sind. Wie lauten nunmehr die entsprechenden Darstellungen für ganze transcendente Funktionen?

Bekannt ist die bereits genannte Reihenentwicklung:

$$\sin u\pi = u\pi - \frac{(u\pi)^3}{3!} + \frac{(u\pi)^5}{5!} - \dots$$

Es fragt sich nun, ob eine Darstellung etwa wie

$$c_0 \left(1 - \frac{u}{\pi}\right) \left(1 + \frac{u}{\pi}\right) \left(1 - \frac{u}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{u}{2\pi}\right)$$

wo $\pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ die Nullstellen, für $\sin u\pi$ möglich ist; eine Darstellung, die sich von der für ganze rationale Funktionen nur dadurch unterscheidet, daß das Produkt ∞ viele Nullstellen hat. Mit dieser Frage hat sich Weierstraß in der mehrfach erwähnten für die Funktionentheorie bedeutungsvollen Abhandlung eingehend beschäftigt und ist zu folgenden Ergebnissen gelangt: Während sich zwei ganze rationale Funktionen mit denselben Nullstellen nur um eine Konstante unterscheiden, unterscheiden sich zwei ganze transcendente Funktionen mit denselben Null-

¹⁾ Weierstraß (a. a. O. p. 81) gelangt durch folgende Überlegung zum Begriff der ganzen transcendenten Funktion: Werden dem Stetigkeitsbereich einer Funktion $f(u)$ diejenigen seiner Grenzstellen, welche außerwesentliche singuläre Stellen für die Funktion sind, hinzugefügt, so entsteht ein Bereich, in dem sich $f(u)$ überall wie eine rationale Funktion verhält. Dieser Bereich ist ein unbegrenzter oder begrenzter, je nachdem $f(u)$ eine rationale oder transcendente Funktion ist; im letzteren Falle wird seine Begrenzung von den wesentlich singulären Stellen gebildet. Diejenigen Funktionen gehören in eine Klasse, für die der definierte Bereich derselbe ist; dementsprechend bildet die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von u eine solche Klasse. Will man die unzähligen Klassen von transcendenten Funktionen nach einem sachlichen Prinzip einteilen, so muß man offenbar die Funktionen zu einer Gattung rechnen, bei denen die Zahl der singulären Stellen dieselbe ist. Unter diesen Funktionen sind diejenigen die einfachsten, für welche es in der ganzen komplexen Ebene nur eine wesentlich singuläre Stelle $u = \infty$ gibt. Da eine rationale Funktion, die im Unendlichen eine außerwesentlich singuläre Stelle hat, eine ganze rationale Funktion heißt und dargestellt wird durch $f(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_n u^n$, so ist eine ganze transcendente Funktion eine Funktion, für die ∞ eine wesentlich singuläre Stelle ist und deren Reihe nicht abbricht sondern ∞ viele Glieder hat.

stellen um einen multiplikativen Exponentialfaktor $e^{G(u)}$, wo $G(u)$ eine ganze transcendente Funktion ist. Dieser Faktor reicht aber nur aus, wenn das unendliche Produkt konvergiert. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall; auch in unserem Beispiel führt die Anwendung des bekannten Konvergenzkriteriums für unendliche Produkte auf eine divergente unendliche Reihe. Es gelingt auch nicht, wie dies bei manchen Funktionen möglich, durch Festsetzung einer bestimmten Reihenfolge der Faktoren oder durch Vorschrift einer bestimmten Ausführungsweise der unendlich vielen Multiplikationen das Produkt zu einem bedingt konvergenten zu machen. Die Betrachtung des von Gauß untersuchten Produktes:

$\frac{1}{\prod (x)}$, wo $\prod (x) = \left(1 + x\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right) \dots$ immer divergiert, weist auf den einzuschlagenden Weg hin. Dieses Produkt kann nämlich dargestellt werden durch das beständig konvergierende unendliche Produkt:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x} \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x \log \left(\frac{n+1}{n}\right)} \right\}$$

d. h. das Produkt ist darstellbar durch ein Produkt von ∞ vielen Faktoren, welche zwar nicht ganze lineare Funktionen von x , aber wie diese eindeutige Funktionen mit nur einer singulären Stelle (∞) und auch nur einer Nullstelle sind. Auf Grund dieser Tatsache untersucht Weierstraß die Frage, ob sich nicht jede ganze transcendente Funktion $G(x)$ aus Faktoren von der Form $(px + q) e^{G_1(x)}$ zusammensetzen läßt, und gelangt zu einem vollständig befriedigenden Ergebnis. Wir verweisen im übrigen auf die erwähnte Abhandlung; aus den dort entwickelten Gesichtspunkten ergibt sich für $\sin u$ die Produktendarstellung¹⁾:

$$(1) \quad \sin u = u \prod' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

das Produkt $\prod'$ ist über alle ganzzahligen Werte von m zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu erstrecken — ausgenommen ist $m = 0$, wie das Häkchen' bei $\prod$ andeutet. Die Konvergenz des Produktes wird durch den jedem Faktor beizufügenden Weierstraßschen Exponentialfaktor bewirkt. Gibt man der Größe m das entgegengesetzte Zeichen, so ist

$$\sin u = u \prod' \left(1 + \frac{u}{m\pi}\right) e^{-\frac{u}{m\pi}},$$

ersetzt man hier u durch $-u$ und vergleicht mit (1), so folgt:

$$\sin(-u) = -\sin u,$$

der sinus ist eine ungerade Funktion.

¹⁾ Vgl. auch: Biermann, Theorie der analytischen Funktionen, p.305 ff. Leipzig, 1887.

Durch logarithmische Differentiation ergibt sich aus der sinus-Funktion die Cotangente:

$$\cot u = \frac{d}{du} \log \sin u;$$

mithin läßt sich aus der Produktendarstellung des sinus folgende Reihe für $\cot u$ herleiten:

$$\begin{aligned} \cot u &= \frac{1}{u} + \left(\frac{1}{u - \pi} + \frac{1}{\pi} \right) + \left(\frac{1}{u - 2\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{u + \pi} - \frac{1}{\pi} \right) + \left(\frac{1}{u + 2\pi} - \frac{1}{2\pi} \right) + \dots \\ (2) \quad \cot u &= \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi} \right). \end{aligned}$$

Wie oben ist die Summe Σ über alle ganzzahligen Werte von m zwischen $-\infty$ und $+\infty$ außer $m=0$ (') zu erstrecken. Auch die Cotangente ist eine ungerade Funktion. Diese hier für die trigonometrische Funktion $\cot u$ gewonnene Zerlegung entspricht der oben abgeleiteten Partialbruchzerlegung in der Theorie der rationalen Funktionen, (2) zeigt die Pole mit ihren zugehörigen Hauptteilen. Die cot-Funktion hat einfache Pole an den Stellen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ usw. mit den zugehörigen Residuen 1, z. B. befindet sich an der Stelle $u = \pi$ ein Pol; hier ist $\cot u - \frac{1}{u - \pi}$ regulär. Die Stelle $u = \infty$ ist ein wesentlich singulärer Punkt. Die cot-Funktion hat die Periode π , denn bildet man nach (2) $\cot(u + \pi) - \cot u$, so ergibt sich eine Summe:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{u + \pi} - \frac{1}{u} \right) + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u - \pi} \right) + \left(\frac{1}{u - \pi} - \frac{1}{u - 2\pi} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{u + 2\pi} - \frac{1}{u + \pi} \right) + \left(\frac{1}{u + 3\pi} - \frac{1}{u + 2\pi} \right) + \dots, \end{aligned}$$

die sich auf 0 reduziert: $\cot(u + \pi) = \cot u$.

Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \log \sin(u + \pi) &= \log \sin u + \log C, \\ \sin(u + \pi) &= C \sin u. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus $u = -\frac{\pi}{2}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} &= C \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right), \quad C = -1 \quad \text{f.} \\ \sin(u + \pi) &= -\sin u. \end{aligned}$$

Die negative Derivierte der Funktion $\cot u$ ist $\frac{1}{\sin^2 u}$, die zugehörige Reihenentwicklung lautet:

$$(3) \quad \frac{1}{\sin^2 u} = -\frac{d}{du} \cot u = \frac{1}{u^2} + \sum' \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

Diese grade Funktion hat zweifache Pole an den Stellen $u = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$, der zum Pole $u = m\pi$ gehörige Hauptteil ist $\frac{1}{(u - m\pi)^2}$.

Da die Formeln (1), (2) und (3) wichtige Analoga in der Theorie der elliptischen Funktionen haben, so wollen wir noch kurz auf die zugehörige Potenzreihenentwicklung hinweisen.

Für $|u| < |m\pi|$ ergibt die Division:

$$\frac{1}{u - m\pi} = -\frac{1}{m\pi} - \frac{u}{m^2 \pi^2} - \frac{u^2}{m^3 \pi^3} - \dots,$$

diese Werte setzen wir in (2) ein und ordnen nach u :

$$\cot u = \frac{1}{u} - s_1 \frac{u}{\pi^2} - s_2 \frac{u^3}{\pi^4} - s_3 \frac{u^5}{\pi^6} - \dots,$$

$$\text{wo } s_1 = \sum' \frac{1}{m^2}, \quad s_2 = \sum' \frac{1}{m^4}, \quad s_3 = \sum' \frac{1}{m^6} \text{ usw.}$$

Die Glieder, in denen Summen mit ungeraden Potenzen von m auftreten, heben sich.

Da $\log \sin u = \int \cot u du$, so folgt:

$$\log \sin u = \log A + \log u - \frac{s_1 u^2}{2 \pi^2} - \frac{s_2 u^4}{4 \pi^4} - \frac{s_3 u^6}{6 \pi^6} - \dots$$

$$\sin u = A \cdot u \cdot e^{-\frac{s_1 u^2}{2 \pi^2} - \frac{s_2 u^4}{4 \pi^4} - \frac{s_3 u^6}{6 \pi^6} - \dots}$$

Da $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, so ist die Integrationskonstante $A = 1$. Der Wert der Summen s_i läßt sich nunmehr feststellen, indem man die linke Reihe in die sinus-Reihe, die rechte in die Exponentialreihe entwickelt und die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von u vergleicht. So findet man:

$$s_1 = \frac{\pi^2}{3}, \quad s_2 = \frac{\pi^4}{3^2 \cdot 5}, \quad s_3 = \frac{2\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} \text{ usw.}$$

Aus der elementaren Trigonometrie ist bekannt, daß sich sinus und cosinus rational als Funktion der Cotangente des halben Bogens ausdrücken lassen; dementsprechend bezeichnet man eine in $\cot u$ rationale Funktion $f(u)$ als allgemeine trigonometrische Funktion. Eine solche Funktion ist im Endlichen bis auf Pole regulär, sie hat die „primitive“ Periode π ,

d. h. die andern Perioden $\pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ sind ganzzahlige Vielfache von π .

Die Periode π läßt sich stets in eine andere Periode 2ω transformieren. Ist nämlich $f(u + \pi) = f(u)$, so setzt man:

$$u = \frac{\pi u'}{2\omega}, \quad f_1(u') = f(u) = f\left(\frac{\pi u'}{2\omega}\right)$$

und findet so:

$$f_1(u' + 2\omega) = f_1(u').$$

5. Über die Analogieen zwischen rationalen und trigonometrischen Funktionen.

Die in Nr. 4 für die trigonometrische Funktionen durchgeführten Betrachtungen sollen in den folgenden Abschnitten auf elliptische Funktionen ausgedehnt werden, so daß sich die trigonometrischen Funktionen auch unter den funktionentheoretischen Gesichtspunkten als Spezialwerte, „Ausartungen“, der elliptischen Funktionen ergeben müssen. Vorher müssen wir noch einen Moment bei den vorstehend gestreiften Analogieen zwischen rationalen und trigonometrischen Funktionen verweilen; wir sehen dabei von den oben angedeuteten funktionentheoretischen Untersuchungen Weierstraß' ab, da es für unsere Zwecke genügt, auf folgendes hinzuweisen:

Die Hauptsätze der Theorie der rationalen Funktionen reduzieren sich auf zwei Typen:

die Zerlegung in Linearfaktoren:

$$f(u) = A \frac{(u - a_1)(u - a_2)(u - a_3) \dots (u - a_n)}{(u - b_1)(u - b_2)(u - b_3) \dots (u - b_p)}$$

die Partialbruchzerlegung:

$$f(u) = M_0 + M_1 u + M_2 u^2 + \dots + M_s u^s + \sum \left(\frac{A}{u-a} + \frac{B}{u-b} + \dots + \frac{L}{u-l} \right).$$

Entsprechende Formeln gelten auch für die Theorie der trigonometrischen Funktionen:

die Zerlegung in Linearfaktoren, aus der die Pole und Nullstellen ersichtlich:

$$f(u) = A e^{mui} \frac{\sin(u - a_1) \sin(u - a_2) \dots \sin(u - a_n)}{\sin(u - b_1) \sin(u - b_2) \dots \sin(u - b_p)}$$

und die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} f(u) = & C_0 + C_1 e^{2ui} + C_2 e^{4ui} + \dots + C_m e^{2mui} \\ & + C'_1 e^{-2ui} + \dots + C'_n e^{-2mui} \\ & + A \cot(u - a) + B \cot(u - b) + \dots + L \cot(u - l), \end{aligned}$$

aus der die Pole ersichtlich sind.

Bei beiden Gruppen von Funktionen ist das Element der Partialbruchzerlegung der Differentialquotient des Logarithmus des Linearfaktors:

$$\frac{1}{u-a} = \frac{d \log (u-a)}{du}, \quad \cot (u-a) = \frac{d \log \sin (u-a)}{du}.$$

Dasselbe gilt für elliptische Funktionen; auch hier bilden Faktoren- und Partialbruchzerlegung das Fundament der ganzen Theorie.

Auch die am Schluß von Nr. 3 genannten Sätze lassen sich auf trigonometrische und elliptische Funktionen übertragen; für erstere lauten sie:

Sind $f(u)$ und $f_1(u)$ rationale Funktionen von $\cot u$, so besteht zwischen diesen allgemeinen trigonometrischen Funktionen $x = f(u)$, $y = f_1(u)$ mit derselben Periode π eine algebraische Gleichung:

$$\Phi(x, y) = 0,$$

die eine Unikursalkurve definiert.

Ferner: Eine trigonometrische Funktion besitzt ein algebraisches Additionstheorem; $f(u+v)$ ist eine algebraische Funktion von $f(u)$ und $f(v)$. Für diesen Satz bilden die Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ eine bekannte Bestätigung.

Dritter Abschnitt.

Die elliptischen Funktionen.

1. Einleitende Sätze.¹⁾

Unter einer elliptischen Funktion verstehen wir eine doppeltperiodische Funktion, die im Endlichen bis auf Pole regulär ist. Als doppeltperiodische Funktion genügt sie den Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(u + 2\omega) &= f(u), \\ f(u + 2\omega') &= f(u), \end{aligned}$$

die sich zusammenfassen lassen in:

$$f(u + 2m\omega + 2m'\omega') = f(u),$$

wo m und m' ganze positive oder negative Zahlen einschließlich Null bedeuten. ω und ω' sind zwei unabhängige Perioden, d. h. Perioden, zwischen denen keine lineare homogene Relation besteht. Dann muß

¹⁾ H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, p. 32 ff. Leipzig, 1899.

der Quotient $\frac{\omega'}{\omega}$ imaginär sein,¹⁾ andernfalls reduziert sich die Funktion auf eine einfache periodische Funktion oder eine Konstante. Die reelle Periode sei 2ω , die imaginäre $2\omega'$. Die Derivierte einer elliptischen Funktion ist wieder eine elliptische Funktion. Die beiden Perioden lassen sich geometrisch veranschaulichen. Fixieren wir innerhalb der komplexen Ebene einen Punkt u_0 , so können wir von ihm aus unter einem spitzen Winkel zwei Strecken 2ω , $2\omega'$ gezogen denken. Dann können wir durch Parallele zu u_0 , 2ω , $2\omega'$ einen 4. Eckpunkt $u_0 + 2\omega + 2\omega'$ konstruieren, die vier Punkte bilden die Eckpunkte des fundamentalen „Periodenparallelogramms“. Auf diese Weise fortfahrend kann man jeden Punkt $u_0 + 2m\omega + 2m'\omega'$ konstruieren und die ganze komplexe Ebene mit Parallelogrammen lückenlos überdecken. Die Knotenpunkte dieses Netzes von Periodenparallelogrammen sind die Punkte, die die Größen $2m\omega + 2m'\omega'$ geometrisch darstellen. Zwei Punkte verschiedener Periodenparallelogramme, die zusammenfallen, wenn man die Parallelogramme durch Verschiebung zur Deckung bringt, heißen „äquivalent“ oder „kongruent modulis Perioden“, geschrieben: $u_2 \equiv u_1 \pmod{2\omega, 2\omega'}$. Zur Untersuchung der Funktion $f(u)$ genügt die Betrachtung des fundamentalen Periodenparallelogrammes, da sich in ihm zu jedem Punkt der Ebene ein äquivalenter finden läßt. Dementsprechend verstehen wir unter der Ordnungszahl einer doppelperiodischen Funktion die Anzahl der Pole, die sie im fundamentalen Periodenparallelogramm hat, ein m -facher Pol ist dabei $= m$ einfachen Polen zu rechnen. Offenbar muß jede elliptische Funktion im fundamentalen Periodenparallelogramm mindestens einmal unendlich werden, da sie sich sonst überall regulär verhielte, also eine Konstante wäre. Andererseits muß die Anzahl der Pole im Periodenparallelogramm begrenzt, endlich sein, da sonst im Widerspruch zur Definition an irgend einer Stelle ein wesentlich singulärer Punkt wäre. Nun läßt sich leicht zeigen, daß mindestens zwei einfache Pole bzw. ein zweifacher Pol vorhanden sein muß. Denn bildet man $\int f(u) du$ und integriert um das Periodenparallelogramm a , $a + 2\omega$, $a + 2\omega'$, $a + 2\omega + 2\omega'$ in positivem Sinne herum — wobei der Punkt a so gewählt ist, daß kein Pol auf die Begrenzung fällt —, so zerfällt $\int f(u) du$ in:

$$\int_a^{a+2\omega'} f(u) du + \int_{a+2\omega'}^{a+2\omega+2\omega'} f(u) du + \int_{a+2\omega+2\omega'}^{a+2\omega} f(u) du + \int_{a+2\omega}^a f(u) du.$$

¹⁾ Zum Beweise vgl. L. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen I. Leipzig, 1874. p. 328 f. Für ein eingehenderes Studium der elliptischen Funktionen sei auf dieses treffliche Werk hingewiesen.

Hier ist das erste Integral entgegengesetzt gleich dem dritten, das zweite entgegengesetzt gleich dem vierten f. $\oint f(u) du = 0$. Da nun nach einem Fundamentalsatz der Funktionentheorie das längs einer geschlossenen Kurve genommene Integral einer komplexen Funktion gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen aller im Innern dieser Kurve gelegenen Pole ist, so folgt: Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion in den sämtlichen Polen, die im Innern eines Parallelogrammes mit den Ecken $u_0, u_0 + 2\omega, u_0 + 2\omega', u_0 + 2\omega + 2\omega'$ liegen, ist gleich Null. Dementsprechend kann eine elliptische Funktion im Periodenparallelogramm keinen einfachen Pol haben; es müssen, damit diese Bedingung erfüllt werden kann, mindestens zwei einfache Pole oder ein zweifacher vorhanden sein. Es gibt keine elliptische Funktion erster Ordnung.

Wenden wir den Residuensatz auf die elliptische Funktion $\frac{f'(u)}{f(u)}$ an, deren Residuen gleich der Ordnungszahl (vgl. Abschn. II, Nr. 1) von $f(u)$ sind, so muß für $f(u)$ die Summe der Ordnungszahlen im Periodenparallelogramm gleich Null sein, d. h. jede elliptische Funktion hat im Periodenparallelogramm ebensoviele Nullpunkte wie Pole, oder jede elliptische Funktion n -Ordnung hat im Periodenparallelogramm grade n Nullpunkte. Eine elliptische Funktion n -Ordnung nimmt im Periodenparallelogramm jeden vorgeschriebenen Wert n mal an. Die Sätze von der Summe der Residuen sowie von der Anzahl der Pole und Nullstellen gelten bei rationalen Funktionen für die ganze komplexe Ebene.

Wir könnten uns nun die Aufgabe stellen, auf Grund dieser allgemeinen Sätze eine elliptische Funktion mit vorgeschriebenen Eigenschaften zu konstruieren; da aber der Zweck dieser Abhandlung lediglich die Betonung der engen Beziehungen zwischen trigonometrischen und elliptischen Funktionen ist, so wollen wir einen andern Weg einschlagen, der dem bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen angewandten Verfahren entspricht. Hierbei müssen wir die vorstehend genannten Sätze aus der Lehre der elliptischen Funktionen, die für unsere Zwecke ausreichen, als bekannt voraussetzen.

2. Die σ -, ζ - und p -Funktion.

Die sinus-Funktion wurde (1) dargestellt durch das unendliche Produkt:

$$\sin u = u \cdot \prod' \left(1 - \frac{u}{m\pi} \right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

aus dem die Nullstellen ohne weiteres ersichtlich sind. Dementsprechend bilden wir eine wie der sinus im Endlichen überall reguläre Funktion, deren Nullstellen an den Punkten $2m\omega + 2m'\omega'$ liegen sollen. Wir

setzen $2m\omega + 2m'\omega' = w$ und erhalten so als Analogon zum sinus die Weierstraßsche sigma-Funktion:

$$(4) \quad \sigma(u) = u \prod' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}} \right\}.$$

Dieses unendliche Produkt ist über alle Werte $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ und $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ zu erstrecken, außer $m = m' = 0$. Die in der geschweiften Klammer vereinigten Größen dürfen nicht auseinander gerissen werden, zur Konvergenz ist hier ein Exponentialfaktor 2. Grades nötig. Die Nullstellen der σ -Funktion liegen in $u = 0$ und $u = w$; für endliche Werte von u sind keine Pole vorhanden. Die σ -Funktion ist wie der sinus ungerade, d. h.:

$$\sigma(-u) = -\sigma(u),$$

denn da m und m' alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so kann man, ohne den Wert des Produktes zu ändern, in diesem Produkt das Zeichen ändern, man erhält:

$$\sigma(u) = u \cdot \prod' \left(1 + \frac{u}{w} \right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}},$$

ersetzt man u durch $-u$ und vergleicht mit (4), so folgt die Behauptung.

$$\text{Der Formel } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \text{ entspricht } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1.$$

Bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen leiteten wir durch logarithmische Differentiation aus dem sinus die cotangente her; hier gewinnen wir so die dem cot entsprechende Weierstraßsche Zetafunktion:

$$(5) \quad \zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du} = \frac{1}{u} + \sum' \left[\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right].$$

Die ζ -Funktion hat an den Stellen $u = 0$ und $u = 2m\omega + 2m'\omega'$ einfache Pole mit dem Residuum $+1$. Entsprechend hat die Funktion $\zeta(u-a)$, wo a eine Konstante ist, einfache Pole an den Stellen $u = a$ und $u = a + 2m\omega + 2m'\omega'$. Wie cot ist ζ als logarithmische Derivierte einer ungeraden Funktion ungrade.

Schließlich gewinnen wir durch nochmalige Differentiation und Zeichenwechsel die Weierstraßsche p -Funktion:

$$(6) \quad p(u) = -\frac{d\zeta(u)}{du} = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

$p(u)$ entspricht der trigonometrischen Funktion $\frac{1}{\sin^2 u}$. Die p -Funktion ist grade, denn zu jeder Größe w findet sich unter ihnen auch die entgegengesetzte, und die zu zwei entgegengesetzten Werten von w

gehörenden Glieder vertauschen sich einfach, wenn man u durch $-u$ ersetzt. Die p -Funktion hat einen doppelten Pol an den Stellen $u=0$ und den kongruenten Punkten $2m\omega + 2m'\omega'$, entsprechend hat die Funktion $p(u-a)$, wo a eine Konstante, die Punkte a und $a + 2m\omega + 2m'\omega'$ als Doppelpole.

Wir stellen, um den Zusammenhang klar zu zeigen, die einander entsprechenden Formeln nebeneinander:

$$\begin{aligned}\sin u &= u \prod' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}}; & \sigma(u) &= u \prod' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}}. \\ \cot u &= \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right); & \zeta(u) &= \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right). \\ \frac{1}{\sin^2 u} &= \frac{1}{u^2} + \sum' \frac{1}{(u - m\pi)^2}; & p(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum' \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right). \\ \cot u &= \frac{d \log \sin u}{du}; & \zeta(u) &= \frac{d \log \sigma(u)}{du}. \\ \frac{1}{\sin^2 u} &= -\frac{d \cot u}{du} = -\frac{d^2 \log \sin u}{du^2}; & p(u) &= -\frac{d \zeta(u)}{du} = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}.\end{aligned}$$

3. Periodizitätsbetrachtungen.

Von den soeben konstruierten Funktionen ist die p -Funktion doppelperiodisch; sie stellt die einfachste elliptische Funktion dar.

Zum Beweise betrachten wir die Differenz:

$$\begin{aligned}p(u + 2\omega) - p(u) &= \frac{1}{(u + 2\omega)^2} - \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u + 2\omega - w)^2} - \frac{1}{(u - w)^2} \right] \\ &= \sum' \left\{ \frac{1}{[u - 2(m-1)\omega - 2m'\omega']^2} - \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^2} \right\}.\end{aligned}$$

Betrachten wir die letzte über alle Werte von m und m' zu erstreckende Summe, so sehen wir, daß die demselben Wert von m' entsprechenden Terme sich paarweise aufheben, die Summe wird Null und es ist

$$\underline{p(u + 2\omega) = p(u)}.$$

Ebenso ergibt sich die zweite imaginäre Periode:

$$\underline{p(u + 2\omega') = p(u)}.$$

Da nun $p(u) = -\frac{d\zeta(u)}{du}$, so ergibt die Integration:

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta,$$

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'.$$

Ersetzen wir u durch $-\omega$ bzw. $-\omega'$ und beachten, daß die ζ -Funktion ungrade ist, so ergeben sich für die Integrationskonstanten η, η' die Werte:

$$\begin{aligned}\eta &= \zeta(\omega), \\ \eta' &= \zeta(\omega').\end{aligned}$$

Integriert man von neuem und beachtet, daß

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\log \sigma(u + 2\omega) &= \log \sigma(u) + 2\eta u + \log c, \\ \log \sigma(u + 2\omega') &= \log \sigma(u) + 2\eta' u + \log c',\end{aligned}$$

wo $\log c$ und $\log c'$ wieder Integrationskonstante sind.

Die letzten Formeln lassen sich auch schreiben:

$$\begin{aligned}\sigma(u + 2\omega) &= c e^{2\eta u} \sigma(u), \\ \sigma(u + 2\omega') &= c' e^{2\eta' u} \sigma(u).\end{aligned}$$

In der Theorie der elliptischen Funktionen sind neben den hier verwandten Weierstraßschen Bezeichnungen auch die von Jacobi eingeführten Funktionsbenennungen üblich.

Für die ζ -Funktion setzt Jacobi die gleichfalls ungrade Funktion $Z(u) = \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u$; auch sie spielt dieselbe Rolle wie $\frac{1}{u}$ bei den rationalen, $\cot u$ bei den trigonometrischen Funktionen. Der hinzugefügte Ausdruck $\frac{\eta}{\omega} u$ ist so gewählt, daß $Z(u)$ eine reelle Periode hat:

$$Z(u + 2\omega) = Z(u),$$

dagegen:
$$Z(u + 2\omega') = Z(u) - \frac{2}{\omega}(\eta\omega' - \eta'\omega) = Z(u) - \frac{2}{\omega} \delta.$$

Es wird also auf die Symmetrie zugunsten der Periodizität verzichtet. Aus der Entstehung der Funktion ist ersichtlich, daß Z und ζ dieselben polaren Unstetigkeiten und Hauptteile haben, also an den Punkten $u = 0$ und den kongruenten einfache Pole mit den Residuen $+1$.

Ferner ersetzt Jacobi die σ -Funktion, deren logarithmische Derivierte ζ ist, durch die gleichfalls ungrade Funktion $H(u)$, deren logarithmische Derivierte Z ist, also:

$$\frac{H'(u)}{H(u)} = Z(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\eta}{\omega} u.$$

Die Hetafunktion hat dieselben Nullstellen wie die σ -Funktion, sie genügt den Periodizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned}H(u + 2\omega) &= -H(u), \\ H(u + 2\omega') &= -e^{-\frac{2\delta}{\omega}(u + \omega')} H(u).\end{aligned}$$

Wenn auch die betrachteten Funktionen ζ , Z , σ , H keine elliptischen Funktionen sind, so spielen sie doch in der Lehre von den elliptischen Funktionen eine große Rolle. Wir brauchen sie im folgenden, um die beiden für unsere vergleichende Untersuchung wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Funktionen, Partialbruchzerlegung und Zerlegung in Linearfaktoren, wirklich ausführen zu können.

Vorher wollen wir die Degenerationsfälle der p -Funktion betrachten, die uns notwendigerweise auf trigonometrische und rationale Funktionen zurückführen.

4. Degenerationsfälle.

Als Degenerationsfälle der p -Funktion kommen die Fälle in Betracht, in denen die eine oder beide Perioden ∞ wird.

Es sei $\omega' = \infty$.

In der zu betrachtenden Reihe:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

wird w überall da unendlich, wo ω' auftritt, wenn m' von Null verschieden ist. Alle diese Terme werden Null und $p(u)$ reduziert sich auf die Funktion:

$$p(u, \omega' = \infty) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-2m\omega)^2} - \frac{1}{4m^2\omega^2} \right],$$

wo Σ' über alle positiven und negativen ganzzahligen Werte von m außer Null zu erstrecken ist. Nun ist (vgl. S. 13) die Summe der konvergenten Reihe: $\sum' \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{3}$, daraus folgt:

$$p(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{1}{u^2} + \sum' \frac{1}{(u-2m\omega)^2}.$$

Nun fanden wir oben (3):

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum' \frac{1}{(z-m\pi)^2},$$

mithin ist:

$$(7) \quad p(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}.$$

Durch Integration und Zeichenwechsel finden wir:

$$(8) \quad -\int p(u) du = \zeta(u, \omega' = \infty) = \frac{\pi^2}{12\omega^2} u + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega}.$$

Da ζ ungrade ist, fällt die Integrationskonstante weg. Integrieren

wir noch einmal und gehen von den Logarithmen zu den Numeri über, so folgt:

$$\sigma(u, \omega' = \infty) = c e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \cdot \sin \frac{\pi u}{2\omega},$$

wo c eine Integrationskonstante ist.

Da $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$, so ist $c \frac{\pi}{2\omega} = 1$, also:

$$(9) \quad \sigma(u, \omega' = \infty) = \frac{2\omega}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \cdot \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

Die Formeln (7), (8) und (9) zeigen: Die p -, ζ - und σ -Funktionen gehen in trigonometrische Funktionen über, wenn eine Periode ∞ wird.

Lassen wir schließlich auch die andere Periode ∞ werden, so reduziert sich die Reihe für $p(u)$ auf ein Glied:

$$p(u, \omega = \omega' = \infty) = u^2.$$

Hieraus folgt: $\zeta(u, \omega = \omega' = \infty) = \frac{1}{u}$ und $\sigma(u, \omega = \omega' = \infty) = u$.

d. h. wir gelangen zu einfachen rationalen Funktionen.

Damit ist aufs neue der enge Zusammenhang zwischen rationalen, trigonometrischen und elliptischen Funktionen bestätigt.

Vierter Abschnitt.

Die Partialbruchzerlegung und Reihenentwicklung der elliptischen Funktionen.

1. Zerlegung der ζ -Funktion.

Es sei $f(u)$ eine doppeltperiodische Funktion mit den im fundamentalen Periodenparallelogramm gelegenen Polen $a_1, a_2, \dots, a_n$. Zum Punkte a_i gehöre der Hauptteil:

$$g_i(u | a_i) = \frac{c_{-1}^{(i)}}{u - a_i} + \frac{c_{-2}^{(i)}}{(u - a_i)^2} + \dots + \frac{c_{-\mu}^{(i)}}{(u - a_i)^\mu}.$$

Die Funktion $\zeta(u)$ wird im Punkte $u=0$ unendlich wie $\frac{1}{u}$, ihre $(\mu-1)$.

Derivierte wird unendlich wie die Funktion $\frac{(-1)^{\mu-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\mu-1)}{u^\mu}$.

¹⁾ Vgl. Durège-Maurer, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Leipzig, 1906. p. 215 f.

Daher wird die Funktion:

$$\begin{aligned}\Phi_i(u) = & c_{-1}^{(i)} \zeta(u - a_i) - c_{-2}^{(i)} \zeta'(u - a_i) + \frac{c_{-3}^{(i)}}{1 \cdot 2} \zeta''(u - a_i) + \dots \\ & \dots + \frac{(-1)^{\mu-1} c_{-\mu}^{(i)}}{(\mu-1)!} \zeta^{(\mu-1)}(u - a_i)\end{aligned}$$

im Punkte a_i in derselben Weise unstetig wie die Funktion $f(u)$; die Differenz $f(u) - \Phi_i(u)$ bleibt im Punkte a_i stetig.

Wir bilden nun die Funktion:

$$F(u) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(u)$$

und beweisen, daß die Funktion die Perioden 2ω , $2\omega'$ besitzt.

Da $\zeta'(u) = -p(u)$ ist, so müssen offenbar alle Derivierten von ζ diese Perioden haben, mithin ist

$$\Phi_i(u + 2\omega) - \Phi_i(u) = c_{-1}^{(i)} [\zeta(u - a_i + 2\omega) - \zeta(u - a_i)] = c_{-1}^{(i)} 2\eta_1,$$

folglich:
$$F(u + 2\omega) - F(u) = 2\eta_1 \sum_{i=1}^n c_{-1}^{(i)}.$$

Nun ist die rechts stehende Summe die Summe der Residuen für die dem Periodenparallelogramm angehörenden Pole, also = 0. Daher ist

$$F(u + 2\omega) = F(u).$$

Ebenso läßt sich zeigen: $F(u + 2\omega') = F(u)$.

Die Funktion $f(u) - F(u)$ ist also doppelperiodisch; da sie nun im Periodenparallelogramm sich überall regulär verhält, so muß sie gleich einer Konstanten sein, d. h. jede elliptische Funktion läßt sich in der Form darstellen:

$$\begin{aligned}(1) \quad f(u) = & \text{Konst} + \sum_{i=1}^n \left[c_{-1}^{(i)} \zeta(u - a_i) + c_{-2}^{(i)} \zeta'(u - a_i) + \frac{c_{-3}^{(i)}}{2!} \zeta''(u - a_i) + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{\mu-1} \frac{c_{-\mu}^{(i)}}{(\mu-1)!} \zeta^{(\mu-1)}(u - a_i) \right].\end{aligned}$$

Benutzen wir die Jacobische Terminologie, so lautet der allgemeine Ausdruck für eine elliptische Funktion ganz entsprechend:

$$\begin{aligned}(2) \quad f(u) = & C_0 + \sum \left[AZ(u - a) - A_1 Z'(u - a) + \frac{A_2}{2!} Z''(u - a) + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} Z^{(\alpha-1)}(u - a) \right],\end{aligned}$$

wo die Summe wie bei (1) über alle im Innern eines Periodenparallelogramms gelegene Pole zu erstrecken ist und die Summe der Residuen gleich Null ist.

Die Analogie mit rationalen und trigonometrischen Funktionen kommt in dieser Partialbruchzerlegung klar zum Ausdruck. So wie jede rationale Funktion sich als Summe von Ausdrücken von der Form:

$$\frac{1}{u-a}, \frac{1}{(u-a)^2}, \dots, \frac{1}{(u-a)^\alpha},$$

zerlegen läßt, wie eine trigonometrische Funktion in eine Summe von cotangenten zerlegt wird, so läßt sich jede elliptische Funktion als Summe von Ausdrücken von der Form:

$$Z(u-a), Z'(u-a), \dots, Z^{(\alpha-1)}(u-a),$$

darstellen. Umgekehrt ist jede Funktion von der Form (1) oder (2) eine elliptische Funktion, wenn die Summe der Residuen gleich Null ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß wir für die höheren Derivierten auch die p -Funktion mit ihren Ableitungen einführen können. Dann erhalten wir als dritte Art der Partialbruchzerlegung:

$$(3) \quad f(u) = D_0 + \sum \left[A\zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{2!} p'(u-a) - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{(\alpha-2)} \frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} p^{(\alpha-2)}(u-a) \right].$$

Aus den vorstehenden Formeln (1), (2) und (3) sehen wir, daß man zur Zerlegung einer elliptischen Funktion in Partialbrüche die Pole kennen muß. Kennt man diese, so sind die zugehörigen Hauptteile zu bestimmen, was sich im allgemeinen mit der Taylorschen Reihenentwicklung ausführen läßt. Ist z. B. $u=a$ ein Pol von der Ordnung α , also das Produkt:

$$\psi(u) = (u-a)^\alpha f(u)$$

regulär und für $u=a$ von 0 verschieden, so lautet die zu $u=a$ gehörige Reihenentwicklung:

$$\psi(u) = A_{\alpha-1} + A_{\alpha-2}(u-a) + A_{\alpha-3}(u-a)^2 + \dots \\ \dots + A(u-a)^{\alpha-1} + (u-a)^\alpha g(u),$$

wo $g(u)$ eine in $u-a$ ganze Reihe ist.

Setzen wir diese Entwicklung $= (u-a)^\alpha f(u)$, so ergibt die Division durch $(u-a)^\alpha$ die Reihe:

$$f(u) = \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-2}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A}{u-a} + g(u),$$

aus der der gesuchte Hauptteil ersichtlich ist. Diese Rechnung ist für jeden Pol durchzuführen, jeder Pol kann durch einen homologen ersetzt

werden. Die Schwierigkeit liegt offenbar in der Auffindung der Pole, entsprechend liegen die Verhältnisse bei der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen, wo die Wurzeln der Nenner gefunden werden müssen.

2. Partialbruchzerlegung der p -Funktion.

Wir wollen nunmehr die Zerlegung an einer einfachen elliptischen Funktion durchführen. Nun gibt es, wie bereits gezeigt, wegen des Residuensatzes keine doppeltperiodische Funktion, die nur in einem Punkte des Periodenparallelogramms unstetig wird; daher muß eine doppeltperiodische Funktion von möglichst einfacher Ordnung entweder in zwei Punkten des Periodenparallelogramms ∞^1 oder an einem ∞^2 werden. Von diesen beiden ist die letztere die einfachere, da ihre Derivierte ∞^3 wird, während bei der ersten Funktion die Derivierte von der vierten Ordnung wird, da jeder der beiden Pole ∞^2 ergibt. Eine solche möglichst einfache elliptische Funktion ist nun die p -Funktion, ihre beiden Pole fallen in $u = 0$ zusammen. Das zu $u = 0$ gehörende Funktionenelement ist

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{u-w^2} - \frac{1}{w^2} \right] = \frac{1}{u^2} + G(u).$$

Da $G(u)$ eine grade Funktion, die für $u = 0$ regulär ist, so muß $G(u)$ nach graden, positiven Potenzen fortschreiten; entwickeln wir $G(u)$ für $u = 0$ in eine Potenzreihe (vgl. Abschn. II 4), so ergibt sich:

$$G(u) = \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \dots$$

Wir haben sofort die beiden Weierstraßschen Invarianten g_2, g_3 eingeführt, ihre Werte ergeben sich, wenn man in

$$G(u) = \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

jeden Term nach steigenden Potenzen von u entwickelt:

$$\frac{1}{(u-w)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \frac{5u^4}{w^6} + \dots,$$

$$\text{nämlich:} \quad \frac{g_2}{20} = 3 \sum' \frac{1}{w^4}, \quad \frac{g_3}{28} = 5 \sum' \frac{1}{w^6}.$$

In der Nähe von $u = 0$ lautet die Reihenentwicklung:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \dots,$$

$$\text{folglich ist} \quad p^2(u) = \frac{1}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{g_3}{14} u^2 + \dots$$

Die Funktion $p^2(u)$ hat in dem den Punkt $u=0$ umgebenden Periodenparallelogramm nur den Pol vierfacher Ordnung $u=0$ mit dem Hauptteil $\frac{1}{u^4}$; in der Partialbruchzerlegung (3) ist also nur ein Pol $u=0$ von der Ordnung $\alpha=4$ anzunehmen, es ist $A=A_1=A_2=0$, $A_3=1$. Folglich lautet in diesem Falle Formel (3) einfach:

$$p^2(u) = C + \frac{p''(u)}{6}.$$

Nachträglich läßt sich diese Formel leicht verifizieren, denn aus:

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \dots$$

$$p''(u) = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{3g_3}{7}u^2 + \dots$$

folgt, daß die Differenz $p^2(u) - \frac{1}{6}p''(u)$ in $u=0$ regulär, also eine Konstante ist. Wie immer, bestimmen wir auch hier die Konstante durch Annahme eines Spezialwertes, wir setzen in den Reihen $u=0$ und finden aus $p^2(u) - \frac{1}{6}p''(u)$ den Wert $C = \frac{g_2}{12}$, also:

$$(4) \quad p^2(u) = \frac{1}{6}p''(u) + \frac{g_2}{12}.$$

Wir multiplizieren mit $p'(u)$ und integrieren nach u :

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) + C.$$

Ersetzen wir wieder $p(u)$ und $p'(u)$ durch die zugehörigen Reihen, so verschwinden die Glieder mit $\frac{1}{u}$, $u=0$ ergibt $C = -g_3$. So erhalten wir:

$$(5) \quad p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3,$$

also eine algebraische Gleichung zwischen einer elliptischen Funktion und ihrer Derivierten.

Mit dieser Formel sind wir an der Stelle angelangt, wo der im I. Abschnitt bereits dargelegte Zusammenhang mit den elliptischen Integralen ersichtlich wird. Hatten wir dort direkt die elliptischen Funktionen als Umkehrungen der elliptischen Integrale definiert, so werden wir hier bei unserem synthetischen Gang umgekehrt von den Funktionen auf die Integrale geführt, denn setzen wir $z=p(u)$, so ist

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2z - g_3; \quad \frac{du}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}.$$

Wie die Ableitung von $\arcsin z$ ist auch die Ableitung von u in z algebraisch. Für $u = 0$ ist $z = \infty$, folglich ist

$$u = \pm \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

Mit dieser Formel können wir u als Funktion von z berechnen. Rechter Hand steht ein auf die Weierstraßsche Normalform reduziertes elliptisches Integral; als Umkehrung dieses Integrales ergibt sich die p -Funktion:

$$z = p(u).$$

3. Reihenentwicklung der p -, ζ - und σ -Funktion.

In der Reihenentwicklung:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \dots$$

sind die beiden ersten Koeffizienten $c_2 = \frac{g_2}{2^2 \cdot 5}$, $c_3 = \frac{g_3}{2^2 \cdot 7}$, für die weiteren Koeffizienten lautet die Rekursionsformel¹⁾:

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum_{\nu} c_\nu c_{\lambda-\nu} \quad (\nu = 2, 3, \dots, \lambda-2),$$

aus der sich ergibt:

$$c_4 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}, \quad c_5 = \frac{3g_2 \cdot g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \text{ usw.}$$

Da $\zeta(u) = -\int p(u) du$, so folgt:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{3} c_2 u^3 - \frac{1}{5} c_3 u^5 + \dots$$

Da ζ eine ungerade Funktion, so fällt die Integrationskonstante weg.

Aus $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u)$ folgt durch Integration und Übergang zu den Numeri:

$$\sigma(u) = u \cdot e^{-\frac{c_2 u^4}{12} - \frac{c_3 u^6}{30} + \dots} = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots$$

In allen diesen Reihenentwicklungen sind die höheren Koeffizienten ganze Polynome von g_2 und g_3 . Am bequemsten für die Rechnung ist die wie die sinus-Reihe für die ganze komplexe Ebene konvergierende σ -Reihe, aus ihr lassen sich die höheren Ableitungen und damit auch:

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \text{ und } p(u) = -\zeta'(u) = \frac{\sigma'^2(u) - \sigma(u) \sigma''(u)}{\sigma^2(u)}$$

gut berechnen.

¹⁾ Vgl. H. A. Schwarz, Formen und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Berlin, 1893.

Hat man also in einer Pendelaufgabe die Höhe als Funktion der Zeit zu berechnen, so ist das auftretende elliptische Integral zunächst in die Weierstraßsche Form zu transformieren, dann sind hieraus g_2 und g_3 zu entnehmen und für den gegebenen Wert von u aus obigen Reihen $\sigma(u)$ und die Ableitungen, hieraus $\zeta(u)$ und schließlich $p(u)$ zu berechnen. Dabei können die Konstanten g_2 und g_3 beliebige Werte haben. Da man aus den Größen g_2 und g_3 die Perioden 2ω , $2\omega'$ berechnen kann, so pflegt man auch zu schreiben:

$$\sigma(u) = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(u; g_2, g_3)$$

$$p(u) = p(u \mid \omega, \omega') = p(u; g_2, g_3).$$

Im Degenerationsfall, wenn eine der Perioden z. B. $\omega' = \infty$ wird, ist

$$g_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sum' \frac{1}{2^4 m^4 \omega^4}, \quad g_3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sum' \frac{1}{2^6 m^6 \omega^6},$$

und da nun (vgl. Abschn. II, Nr. 4):

$$\sum' \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{3^2 \cdot 5}, \quad \sum' \frac{1}{m^6} = \frac{2\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7},$$

so ergibt sich: $g_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^2}{2\omega^2} \right)^2$, $g_3 = \frac{1}{3^3} \left(\frac{\pi^2}{2\omega^2} \right)^3$, also $g_2^3 - 27g_3 = 0$.

In diesem Falle hat $4z^3 - g_2 z - g_3$ eine doppelte Wurzel, der Ausdruck:

$$\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

führt auf cyclometrische Funktionen und wir gelangen wieder zu denselben Resultaten, wie in Abschnitt III, Nr. 4. Sind schließlich beide Perioden ∞ , so wird $g_2 = g_3 = 0$ und das Integral wird einfach:

$$u = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3}}, \quad \text{also } z = \frac{1}{u^2}.$$

Fünfter Abschnitt.

Die Zerlegung in Linearfaktoren und das Additionstheorem.

1. Faktorenzerlegung.

Einem rationalen Bruch läßt sich die Form geben:

$$A \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_p)},$$

einer trigonometrischen Funktion:

$$A e^{mx} \frac{\sin(x - a_1) \sin(x - a_2) \dots \sin(x - a_n)}{\sin(x - b_1) \sin(x - b_2) \dots \sin(x - b_p)}.$$

Wir suchen eine entsprechende Zerlegung für elliptische Funktionen, aus der Pole und Nullstellen ebenfalls ersichtlich sind.

Zu dem gewünschten Resultat gelangen wir auf demselben Wege wie bei den rationalen Funktionen, wir wenden die Partialbruchzerlegung auf die Funktion $\frac{f'(u)}{f(u)}$ an. Dabei haben wir folgendes zu beachten: Hat die elliptische Funktion $f(u)$ in einem Periodenparallelogramm die r einfachen Pole $a_1, a_2, \dots, a_r$ und die s einfachen Nullstellen $b_1, b_2, \dots, b_s$, so ist die logarithmische Derivierte zunächst überall da regulär, wo $f(u)$ weder Null noch unendlich ist; sie hat dort einen Pol mit dem Residuum $+1$, wo $f(u)$ eine einfache Nullstelle hat; der Pol erhält das Residuum -1 an den Stellen, wo ein Pol von $f(u)$ liegt (vgl. Abschn. II, Nr. 1). Daher lautet die Partialbruchzerlegung für diesen Fall:

$$\begin{aligned} \frac{f'(u)}{f(u)} &= c + \zeta(u - b_1) + \zeta(u - b_2) + \dots + \zeta(u - b_s) \\ &\quad - \zeta(u - a_1) - \zeta(u - a_2) - \dots - \zeta(u - a_r). \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{f'(u)}{f(u)} &= c + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - b_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - b_2) + \dots + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - b_s) \\ &\quad - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - a_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - a_2) - \dots - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - a_r). \end{aligned}$$

Aus dem Satz von der Summe der Residuen gewinnen wir das schon bekannte (Abschn. IV, Nr. 1) Resultat $s - r = 0$; innerhalb des Periodenparallelogramms ist die Zahl der Nullstellen gleich der Zahl der Pole. Wir setzen $s = r$, integrieren und gehen von den Logarithmen zu den Numeri:

$$(2) \quad f(u) = a \cdot e^{cu} \frac{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_r)}.$$

Dies ist die gesuchte Formel, da aus ihr ohne weiteres Nullstellen und Pole ersichtlich sind. Treten n -fache Pole oder Nullstellen auf, so ist der betreffende Linearfaktor n -mal zu setzen; auch kann man sich von der Voraussetzung frei machen, daß die a_ν oder b_ν in einem Periodenparallelogramm liegen, da sich jeder Pol durch einen kongruenten ersetzen läßt, wodurch sich nur die Konstanten ändern. Setzen wir ferner den Liouvilleschen Satz¹⁾ voraus: Innerhalb eines Periodenparallelogramms ist die Summe der Nullstellen kongruent zur Summe der Pole, also:

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_r) - (a_1 + a_2 + \dots + a_r) = 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

so läßt sich (2) noch vereinfachen auf:

$$(3) \quad f(u) = A \frac{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_r)},$$

wobei zu beachten ist, daß $\sum_{\nu=1}^r a_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^r b_\nu$.

Die entsprechende Darstellung in der Jacobischen Bezeichnung würde lauten:

$$(4) \quad f(u) = A' \frac{H(u - b_1) H(u - b_2) \dots H(u - b_r)}{H(u - a_1) H(u - a_2) \dots H(u - a_r)},$$

wobei gleichfalls $\sum_{\nu=1}^r a_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^r b_\nu$.

Der Satz: eine rationale Funktion ist bis auf eine multiplikative Konstante durch ihre Pole und Nullstellen bestimmt, kann auf elliptische Funktionen ohne weiteres übertragen werden. Der schon benutzte Begriff „Ordnung“ einer elliptischen Funktion kann nun schärfer gefaßt werden. Ordnung einer elliptischen Funktion ist die Zahl der Pole (m -fache Pole, m -mal gezählt) oder — was dasselbe — der Nullstellen, die die Funktion im Periodenparallelogramm hat. Da $f(u)$ und $f(u) - C$ (wo C eine Konstante) offenbar dieselben Pole haben, so gilt für elliptische Funktionen der bei rationalen Funktionen für die ganze komplexe Ebene geltende Satz: Die Gleichung $f(u) = C$ hat bei einer elliptischen Funktion r -Ordnung innerhalb eines Periodenparallelogramms genau r Lösungen.

2. Anwendungen der Faktorenzersetzung auf p - und ζ -Funktion.

Wir betrachten die Funktion $p(u) - p(v)^2$, wo v , also auch $p(v)$ eine Konstante ist. $p(u)$ hat an der Stelle $u = 0$ einen Doppelpol,

¹⁾ Burkhardt, a. a. O., p. 40 f.

²⁾ Burkhardt, a. a. O., p. 60 ff.

dementsprechend muß die Funktion im Periodenparallelogramm zwei Nullstellen haben: $u = +v$ und $u = -v$. Daher gilt die Zerlegung:

$$p(u) - p(v) = A \frac{\sigma(u+v) \sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}.$$

Hier sind Pole und Nullstellen unter den unendlich vielen ihnen kongruenten so ausgewählt, daß die Summe der Nullstellen gleich (nicht nur bis auf Perioden) der Summe der Pole ist. Wir erhalten die Größe der Konstanten A , indem wir beiderseits nach Potenzen von u entwickeln und die Koeffizienten von $\frac{1}{u^2}$ vergleichen: $A = -\frac{1}{\sigma^2(v)}$, f.

$$p(u) - p(v) = -\frac{\sigma(u+v) \sigma(u-v)}{\sigma^2(u) \sigma^2(v)}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich durch logarithmische Differentiation nach u bzw. v :

$$\begin{aligned} \frac{p'(u)}{p(u) - p(v)} &= \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) \\ \frac{-p'(v)}{p(u) - p(v)} &= \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v). \end{aligned}$$

Addieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir das sogenannte Additionstheorem der ζ -Funktion:

$$\zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) = \frac{1}{2} \frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}.$$

Das Additionstheorem der ζ -Funktion ist noch nicht algebraisch, da zwischen $p(u)$ und $\zeta(u)$ keine algebraische Gleichung besteht, dagegen gelangen wir durch nochmalige Differentiation zu einem algebraischen Additionstheorem der p -Funktion:

$$\begin{aligned} p(u) - p(u+v) &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)} \right) = \frac{1}{2} \frac{p''(u)}{p(u) - p(v)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{[p'(u) - p'(v)] p'(u)}{[p(u) - p(v)]^2}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von u und v ergibt sich:

$$p(v) - p(u+v) = -\frac{1}{2} \frac{p''(v)}{p(u) - p(v)} + \frac{1}{2} \frac{[p'(u) - p'(v)] p'(v)}{[p(u) - p(v)]^2}.$$

Addieren wir die beiden Gleichungen und beachten, daß

$$p''(u) - p''(v) = 6[p^2(u) - p^2(v)]$$

aus der Gleichung (S. 46): $p^2(u) = \frac{1}{6} p''(u) + \frac{g_2}{12}$ folgt, so ist

$$p(u+v) = \frac{1}{4} \frac{(p'(u) - p'(v))^2}{p(u) - p(v)} - p(u) - p(v)$$

die gesuchte in u und v symmetrische Form des Additionstheorems der p -Funktion.

Führen wir schließlich ein drittes Argument w durch $u+v+w=0$ ein, so erhalten wir eine übersichtliche Formel in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) \\ 1 & p(v) & p'(v) \\ 1 & p(w) & p'(w) \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Differentiation gelangt man zu einem entsprechenden Additionstheorem für $p'(u+v)$; $p(u+v)$ und $p'(u+v)$ sind rational ausdrückbar durch $p(u)$, $p'(u)$, $p(v)$, $p'(v)$. Da man nun auch $p'(u)$ und $p'(v)$, bzw. $p(u)$ und $p(v)$ eliminieren kann, so läßt sich das Resultat auch so formulieren: Zwischen $p(u+v)$, $p(u)$ und $p(v)$ — und ebenso zwischen $p'(u+v)$, $p'(u)$, $p'(v)$ — besteht für beliebige Werte von u und v eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten von u und v unabhängig sind. Von Funktionen mit diesen Eigenschaften sagt man, daß sie ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Die Übereinstimmung, den die elliptische p -Funktion hierdurch mit rationalen und trigonometrischen Funktionen zeigt, werden wir nunmehr für jede elliptische Funktion nachweisen.

3. Das Additionstheorem.

Die Partialbruchzerlegung für eine elliptische Funktion lautete [Abschn. IV, Formel (3)]:

$$f(u) = D_0 + \sum \left[A \zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{2!} p'(u-a) - \dots \dots \dots + (-1)^{(\alpha-2)} \frac{A_{(\alpha-1)}}{(\alpha-1)!} p^{(\alpha-2)}(u-a) \right].$$

Nun wissen wir, daß $p(u-a)$ eine in $p(u)$, $p'(u)$ rationale Funktion ist, ebenso ist $p'(u-a)$ rational in $p(u)$, $p'(u)$, $p''(u)$, oder, da $p''(u) = 6p^2(u) - \frac{g_2}{12}$, rational in $p(u)$ und $p'(u)$. Durch weitere Differentiation läßt sich zeigen, daß $p''(u-a)$ und alle höheren Ableitungen rational in $p(u)$ und $p'(u)$ sind. Was schließlich den übrigbleibenden gleichfalls über alle Pole zu erstreckenden Ausdruck:

$$\sum A \zeta(u-a) = A \zeta(u-a) + B \zeta(u-b) + C \zeta(u-c) + \dots + L \zeta(u-l)$$

angeht, so ist er ebenfalls rational in $p(u)$ und $p'(u)$, da nach dem Additionstheorem der ζ -Funktion:

$$\zeta(u-a) = \zeta(u) - \zeta(a) + \frac{1}{2} \frac{p'(u) + p'(a)}{p(u) - p(a)},$$

wo v durch $-a$ ersetzt, für $\zeta(u-a)$ die rechte Seite gesetzt werden kann, und dann alle Glieder $\zeta(u)$ nach dem Residuensatz verschwinden. Daraus folgt: Jede elliptische Funktion mit den beiden Perioden $2\omega, 2\omega'$ ist eine rationale Funktion von $p(u)$ und $p'(u)$. Da nun aus:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$

folgt, daß man die höheren Potenzen von $p'(u)$ durch Polynome von $p(u)$ ausdrücken kann, so läßt sich jede elliptische Funktion als rationale Funktion von $p(u)$ und $p'(u)$ in die Form bringen:

$$\frac{P(p) + p' Q(p)}{P_1(p) + p' Q_1(p)}.$$

(P, Q, P_1, Q_1 sind ganze Polynome von p .) Hieraus gewinnt man durch passende Umformung und Substitution:

$$f(u) = R(p) + p' R_1(p).$$

Auf diese Form kann jede elliptische Funktion gebracht werden, R und R_1 stellen rationale Funktionen dar. Da $p'(u)$ ungrade ist, so folgt:

$$f(-u) = R(p) - p' R_1(p).$$

Ist nun $f(u)$ eine grade Funktion, also $f(-u) = f(u)$, so ist $R_1(p) = 0$, also $f(u) = R(p)$; ist $f(u)$ eine ungrade Funktion, also $f(-u) = -f(u)$, so ist $R(p) = 0$, also $f(u) = p' \cdot R_1(p)$.

Eine grade elliptische Funktion ist also eine in $p(u)$ rationale Funktion, eine ungrade elliptische Funktion ist gleich einer mit $p'(u)$ multiplizierten rationalen Funktion von $p(u)$. Hieraus folgt ein für unsere vergleichende Untersuchung interessantes Resultat. Nach den bewiesenen Sätzen müssen sich $p(2u), p(3u) \dots p(nu)$ rational als Funktion von $p(u)$ ausdrücken lassen. Entsprechende Formeln aus der Trigonometrie für $\sin(n\alpha)$ usw., wo n eine ganze Zahl ist, sind aus den Elementen bekannt. Ferner können wir nunmehr das Analogon zu den S. 29 und S. 35 genannten geometrischen Sätzen aus der Lehre der rationalen und trigonometrischen Funktionen finden: Betrachten wir die Funktionen $X = f(u)$, $Y = f_1(u)$, so sind X und Y rationale Funktionen von $p(u)$ und $p'(u)$, also:

$$X = R(p, p'), \quad Y = R_1(p, p'),$$

wo

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3.$$

Wir erhalten durch Elimination von $p(u)$ und $p'(u)$ eine in X und Y algebraische Gleichung:

$$F(X, Y) = 0,$$

die eine Kurve C definiert.

Die durch die Gleichung $F(X, Y) = 0$ definierte Kurve C ist vom 1. Grade. Setzen wir nun $x = p(u)$, $y = p'(u)$, so definiert die zwischen x und y bestehende Gleichung:

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

eine Kurve c dritter Ordnung ohne Doppelpunkte.¹⁾ Die Koordinaten X und Y eines Punktes der Kurve C sind rationale Funktionen der Koordinaten x und y eines Punktes von c .

Geben wir einer elliptischen Funktion die Form:

$$f(u) = R[p(u), p'(u)]$$

und setzen ebenso: $f(v) = R[p(v), p'(v)]$

und bilden dann $f(u+v)$ als rationale Funktion von $p(u+v)$ und $p'(u+v)$, drücken wir ferner $p(u+v)$ und $p'(u+v)$ nach dem Additionstheorem rational durch $p(u)$, $p(v)$, $p'(u)$, $p'(v)$ aus, so folgt:

$$f(u+v) = R_1[p(u), p(v), p'(u), p'(v)],$$

und wir erhalten drei Gleichungen, zu denen noch:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3$$

$$p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2p(v) - g_3$$

hinzutreten. Aus den fünf Gleichungen lassen sich $p(u)$, $p(v)$, $p'(u)$, $p'(v)$ eliminieren; wir erhalten eine algebraische Gleichung zwischen $f(u+v)$, $f(u)$, $f(v)$ d. h.:

Jede elliptische Funktion hat ein algebraisches Additionstheorem.²⁾

Mit diesem rationale, trigonometrische und elliptische Funktionen umfassenden Satz ist unsere Betrachtung so weit durchgeführt, wie es für unsere Zwecke notwendig erscheint; es verbleibt uns, um zu einem gewissen Abschluß zu gelangen, nur noch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den im einleitenden Kapitel verwandten Funktionen $\sin am u$, $\cos am u$, $\mathcal{A} am u$ und der p -Funktion darzulegen.

¹⁾ Der Verfasser beabsichtigt die Beziehungen zwischen Kurve dritter Ordnung und der p -Funktion später einmal gesondert zu behandeln, hier müssen diese Andeutungen genügen.

²⁾ Auch die Umkehrung ist richtig: Alle Funktionen einer Variablen mit algebraischem Additionstheorem sind algebraische Funktionen von elliptischen Funktionen oder Ausartungen von solchen (Weierstraß).

Sechster Abschnitt.

Über den Zusammenhang der Funktionen $\sin \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} v$, $\mathcal{A} \operatorname{am} v$ mit der p -Funktion.

Im ersten Abschnitt fanden wir als Wert des Differentialquotienten von $\sin \operatorname{am} v$:

$$\frac{d \sin \operatorname{am} v}{dv} = \cos \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am} v.$$

Erheben wir beiderseits zum Quadrat und führen rechter Hand $\sin \operatorname{am} v$ ein, so folgt:

$$\left(\frac{d \sin \operatorname{am} v}{dv} \right)^2 = 1 - (1 + k^2) \sin^2 \operatorname{am} v + k^2 \sin^4 \operatorname{am} v.^1)$$

Durch die Substitution $\sin^2 \operatorname{am} v = \frac{1}{a+z}$ und die Formeln:

$$\sin^2 \operatorname{am} v + \cos^2 \operatorname{am} v = 1, \quad \mathcal{A}^2 \operatorname{am} v + k^2 \sin^2 \operatorname{am} v = 1$$

ergibt sich:

$$\frac{d \sin^2 \operatorname{am} v}{dv} = - \frac{1}{(a+z)^2} \cdot \frac{dz}{dv},$$

$$\sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am} v = \frac{\sqrt{(z+a)(z+a-1)(z+a-k^2)}}{(a+z)^2},$$

$$\frac{d \sin^2 \operatorname{am} v}{dv} = 2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \mathcal{A} \operatorname{am} v,$$

$$\left(\frac{dz}{dv} \right)^2 = 4 (z+a) (z+a-1) (z+a-k^2).$$

Die hier eingeführte Funktion z hat die Eigenschaft, daß das Quadrat ihrer Derivierten gleich einem Ausdruck dritten Grades, besitzt also bereits eine gewisse Ähnlichkeit mit der p -Funktion, die der Differentialgleichung genügt:

$$\left(\frac{dp}{du} \right)^2 = 4 p^3 - g_2 p - g_3.$$

Wollen wir die zweite Potenz zum Verschwinden bringen, also den Faktor von $z^2 = 0$ setzen, so müssen wir $a = \frac{1+k^2}{3}$ annehmen.

In diesem Falle ist nach einem bekannten Satz der Algebra die Summe der Wurzeln $= 0$, d. h. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$, wenn $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ die drei Wurzeln sind. Die drei Wurzeln haben in diesem Fall die nur vom Modul k abhängigen Lösungen:

$$\varepsilon_1 = 1 - a = \frac{2-k^2}{3}, \quad \varepsilon_2 = k^2 - a = \frac{2k^2-1}{3}, \quad \varepsilon_3 = -a = -\frac{1+k^2}{3},$$

und es ist

$$\left(\frac{dz}{dv} \right)^2 = 4 (z - \varepsilon_1) (z - \varepsilon_2) (z - \varepsilon_3).$$

¹⁾ Vgl. Halphen, a. a. O., p. 23 ff.

Um zwei Wurzeln beliebig annehmen zu können, setzen wir:
 $\varepsilon_1 = \lambda e_1, \varepsilon_2 = \lambda e_2, \varepsilon_3 = \lambda e_3, z = \lambda y, v = \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$. Dann hebt sich die
 neu eingeführte Konstante λ heraus und es ist:

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3).$$

Hier gilt wieder:

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Dann ist y die bekannte Funktion $p(u)^{1)}$ und der gesuchte Zusammenhang zwischen p -Funktion und $\sin$ am u wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(2) \quad y = p(u) = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Hier hängt die p -Funktion außer von dem Argument u von k und λ ab, an Stelle von diesen beiden Konstanten führt man die drei reellen Größen e durch die Formeln ein:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{e_1 - e_3}, \quad k^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Für den komplementären Modul ist schließlich $k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$.

Der Zusammenhang mit den Invarianten g_2 und g_3 der Gleichung:
 $p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3 = 4[p(u) - e_1][p(u) - e_2][p(u) - e_3]$
 wird durch die Gleichungen hergestellt:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3,$$

$$\text{f. } e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = \frac{1}{2} g_2.$$

Die Algebra lehrt, daß bei positiver Diskriminante alle drei Wurzeln reell sind, dann ist also $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$ positiv. Nehmen wir an, daß die drei der Größe nach geordneten Wurzeln $e_1 > e_2 > e_3$ so beschaffen sind, daß $e_1 > 0, e_3 < 0$. Dann folgt aus der Gleichung $e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$, daß e_2 und g_3 entgegengesetzte Werte haben. Da ferner:

$$k^2 - k'^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} - \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \frac{3e_2}{e_1 - e_3},$$

¹⁾ Wir begnügen uns damit, dies an einigen Eigenschaften zu verifizieren und verweisen im übrigen auf das erwähnte Lehrbuch von Halphen, in dem die p -Funktion auf diese Weise eingeführt wird.

so stimmen e_2 und $k^2 - k'^2$ im Vorzeichen überein. Da nun $k^2 - k'^2 = 2k^2 - 1$, so ist

$$\begin{aligned} e_2 &\text{ negativ, } g_3 \text{ positiv für } k^2 < \frac{1}{2}, \\ e_2 &\text{ positiv, } g_3 \text{ negativ für } k^2 > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir schließlich in (2) λ durch $\frac{1}{e_1 - e_3}$, so ist

$$p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Da der Nenner zwischen 0 und 1 liegt, liegt $p(u)$ zwischen e_1 und $+\infty$, nimmt also alle Werte zwischen e_1 und ∞ an.

Aus der Definitionsgleichung der p -Funktion:

$$p(u) = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}$$

folgt, da $\sin \operatorname{am} (-u) = -\sin \operatorname{am} u$, daß $p(-u) = p(u)$. Gleichzeitig sehen wir auch, daß $p(u)$ die Periode $2\omega = 2K\sqrt{\lambda}$ hat, also:

$$\omega = K\sqrt{\lambda} = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad p(u \pm 2m\omega) = p(u).$$

Die imaginäre Periode ergibt sich aus den Formeln:

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_1 e_3 = -\frac{1}{4}g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4}g_3,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

durch folgende Betrachtungen:

Ersetzt man g_3 durch $-g_3$, so ändern alle drei Wurzeln e das Zeichen, und wir müssen, wenn wir der Größe nach ordnen wollen, e_1 durch $-e_3$, e_2 durch $-e_2$, e_3 durch $-e_1$ ersetzen. Dadurch vertauschen sich k^2 und k'^2 und wir erkennen, daß die p -Funktion mit den Invarianten g_2 und $-g_3$ durch die Funktion $\sin \operatorname{am} u$ mit dem Modul k' ebenso definiert ist, wie $p(u|g_2, g_3)$ durch $\sin \operatorname{am} (u, k)$. $\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3}$ wird bei der Vertauschung nicht geändert. K' ist das Analogon zu K für den Modul k' , also:

$$\frac{1}{2}\omega' = K'\sqrt{\lambda}.$$

Wie wir aus den Betrachtungen im ersten Abschnitt gesehen haben, werden die elliptischen Funktionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\mathcal{A} \operatorname{am} u$ zu trigonometrischen und Exponentialfunktionen, wenn der Modul k die Extrem-

so stimmen e_2 und e_3 überein, so ist

Ersetzen wir

Da der Neigungswinkel α gegen $+\infty$, nimmt

Aus der Definition

folgt, daß sin α am Maximum gleichzeitig sehen wir

$$\omega =$$

Die imaginäre

$$e_1 e_3$$

durch folgende

Ersetzt man e_1 durch $-e_3$, so vertauschen sich k^2 und k'^2 . Invarianten g_2 und g_3 sind ebenso definiert. Bei der Vertauschung von k und k' , also:

Wie wir aus (1) sehen, werden die elliptischen Funktionen

Da nun $k^2 = k'^2$

so ist

$p(u)$ zwischen e_1 und e_3 an.

$= p(u)$. Gleichzeitig hat $K\sqrt{\lambda}$, also:

$$= p(u).$$

nehmen:

$$\frac{1}{4} g_3,$$

Die drei Wurzeln e des Polynom (1) ordnen wir e_1, e_2, e_3 zu. Dadurch vertauschen sich k und k' . Die p -Funktion mit dem Modul k' ist

$\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3}$ wird die Funktion $p(u)$ zu K für den

nicht gesehen haben, λ am u zu trigonometrischen Funktionen mit Modul k die Extrem-



werte 0 und 1 annimmt. Auch für die p -Funktion haben wir bereits die Degenerationsfälle ($\omega = \infty$, $\omega' = \infty$) betrachtet (S. 41 f.) und sind dabei auf trigonometrische bzw. rationale Funktionen geführt. Abschließend wollen wir nun die obigen Resultate durch eine vergleichende Untersuchung auf Grund der Koinzidenz der Werte von e ergänzen.

k nimmt den Wert 0 oder 1 an, wenn e_2 mit e_3 oder mit e_1 koinzidiert. In diesen Fällen wird die Diskriminante Δ gleich Null.

Dann haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1. \quad e_2 = e_3 = -\frac{1}{2} e_1, \quad g_2 = 3 e_1^2, \quad g_3 = e_1^3, \\ \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 0, \quad \lambda = \frac{2 g_2}{9 g_3} = \frac{2}{3 e_1}, \quad k = 0, \quad \sin \operatorname{am} u = \sin u.$$

$$g_3 > 0, \quad p(u) = -\frac{3 g_3}{2 g_2} + \frac{9 g_3}{2 g_2} \cdot \frac{1}{\sin^2 u \sqrt{\frac{9 g_3}{2 g_2}}}.$$

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 = \lambda = \frac{2 g_2}{9 g_3}.$$

$$2. \quad e_2 = e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \quad g_2 = 3 e_3^2, \quad g_3 = e_3^3, \\ \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 0, \quad \lambda = -\frac{2 g_2}{9 g_3} = -\frac{2}{3 e_3}, \quad k = 1, \quad \sin \operatorname{am} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$g_3 < 0, \quad p(u) = \frac{3 g_3}{g_2} - \frac{9 g_3}{2 g_2} \left(\frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}}\right)^2, \quad v = u \sqrt{-\frac{9 g_3}{2 g_2}}.$$

$$K = \infty, \quad \omega = \infty.$$

Ist schließlich $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, so ist $g_2 = g_3 = 0$, $\omega = \infty$ und

$$p(u) = \frac{1}{u^2}.$$