

Ellipse und Hyperbel.

Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und den Winkeln α, β, γ ; so ist C ein Punkt der Ellipse mit den Brennpunkten A und B, deren große Achse $EF = 2a_e = a + b$ ist. Ebenso liegt C auf einer Hyperbel mit der Hauptachse $2a_h = a - b$, die dieselben Brennpunkte A und B wie die Ellipse hat. Bezeichnen wir die Längen der Nebenachsen mit $2b_e$ und $2b_h$, die lineare Excentricität mit e , so ist

$$1) \quad e^2 = a_e^2 - b_e^2 = a_h^2 + b_h^2$$

und die Seiten des Dreiecks sind

$$a = a_e + a_h, \quad b = a_e - a_h, \quad c = 2e,$$

woraus sich für das Produkt der Brennstrahlen ergibt:

$$2) \quad ab = a_e^2 - a_h^2 = b_e^2 + b_h^2.$$

Bezeichnet man den halben Umfang des Dreiecks mit s , so ist, wenn $a > b$ vorausgesetzt wird:

$$s = a_e + e, \quad s - a = e - a_h, \quad s - b = e + a_h, \quad s - c = a_e - e,$$

$$\text{also } b_e = \sqrt{s(s-c)} \text{ und } b_h = \sqrt{(s-a)(s-b)}.$$

Der Inhalt*) des Dreiecks ABC wird dann ausgedrückt durch

$$F = b_e \cdot b_h$$

und die Höhe durch

$$CD = \frac{b_e \cdot b_h}{e}$$

Für die Abschnitte $AD = q, DB = p$, welche D auf AB bestimmt, ergibt sich ferner $p^2 - q^2 = a^2 - b^2 = 4a_e a_h$, und da $p \pm q = 2e$ ist,

je nachdem $\alpha \leq 90^\circ$, so ist $p \mp q = \frac{2a_e a_h}{e}$ und $p = e + \frac{a_e a_h}{e}$, während

für $\alpha = 90^\circ$ $p = \frac{2a_e a_h}{e}$ ist.

*) Durch Einführung der Größen b_e und b_h gewinnen auch andere Formeln der Trigonometrie eine anschauliche Bedeutung.

Figur 1.

Wählen wir also AB als x-Achse, O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und ist OA die positive Richtung der x-Achse, so werden die Koordinaten eines Punktes C ihren absoluten Werten nach ausgedrückt durch

$$I) \quad x = \frac{a_e a_h}{e}, \quad y = \frac{b_e b_h}{e}.$$

Hieraus ergeben sich mit Beachtung von 1) sogleich die Mittelpunkts-
gleichungen der Ellipse und Hyperbel. Denn:

$$3) \quad \begin{aligned} b_e^2 x^2 + a_e^2 y^2 &= a_e^2 b_e^2 \cdot \frac{a_h^2 + b_h^2}{e^2} = a_e^2 b_e^2 \\ b_h^2 x^2 - a_h^2 y^2 &= a_h^2 b_h^2 \cdot \frac{a_e^2 - b_e^2}{e^2} = a_h^2 b_h^2. \end{aligned}$$

Für den Winkel γ in $\triangle ABC$ findet man entsprechend den Formeln
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ u. f. w.

$$II) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{b_h}{b_e}, \quad \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{b_h}{\sqrt{ab}}, \quad \cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{b_e}{\sqrt{ab}}, \quad \text{in welchen}$$

Formeln $\sqrt{ab}$ nach 2) noch ersetzt werden kann durch $\sqrt{a_e^2 - a_h^2} = \sqrt{b_e^2 + b_h^2}$.

Ferner, aus den Formeln:

$(a+b):c = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin \frac{1}{2} \gamma$, $(a-b):c = \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos \frac{1}{2} \gamma$
bekommt man, wenn man die für die Seiten des Dreiecks geltenden
Beziehungen und die Formeln II) beachtet:

$$III) \quad \begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \frac{a_e}{e} \cdot \frac{b_h}{\sqrt{ab}}, \quad \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a_h}{e} \cdot \frac{b_e}{\sqrt{ab}} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \frac{a_h \cdot b_e}{a_e \cdot b_h}. \end{aligned}$$

Brennpunkte und Tangenten. Die Brennstrahlen a und b waren
bestimmt durch

$$a = a_e + a_h, \quad b = a_e - a_h.$$

Berechnet man a_h nach I), so wird

$$4) \quad a = a_e + \frac{e}{a_e} x, \quad b = a_e - \frac{e}{a_e} x.$$

Eliminiert man, um die Brennstrahlen nach einem Hyperbelpunkt zu
finden, a_e — wir beschränken uns durchgehend auf Punkte des 1. Qua-
dranten — so ist:

$$5) \quad a = \frac{e}{a_h} x + a_h, \quad b = \frac{e}{a_h} x - a_h.$$

Für das Produkt der beiden nach einem Punkt der Ellipse gezogenen
Brennstrahlen ergibt sich also:

$$ab = \frac{1}{a_e^2} (a_e^4 - e^2 x^2),$$

während derselbe Ausdruck für die Hyperbel lautet:

$$ab = \frac{1}{a_h^2} (e^2 x^2 - a_h^4).$$

Dadurch lassen sich unter Benutzung von I) die Formeln III) folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) &= \frac{a_e^2}{b_e} \cdot \frac{y}{\sqrt{a_e^4 - e^2 x^2}} = b_h \cdot \frac{x}{\sqrt{e^2 x^2 - a_h^4}} \\ \text{III')} \quad \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) &= b_e \cdot \frac{x}{\sqrt{a_e^4 - e^2 x^2}} = \frac{a_h^2}{b_h} \cdot \frac{y}{\sqrt{e^2 x^2 - a_h^4}} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) &= \frac{b_e^2}{a_e^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a_h^2}{b_h^2} \cdot \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Vermittelt III) oder III') lassen sich nun die Ausdrücke für die Längen der Tangente (t), Subtangente (t'), Normale (n) und Subnormale (n') aufstellen. Denn die Ellipsentangente und damit die Hyperbelnormale des Punktes C bildet als Halbierungslinie*) des Außenwinkels C mit der x-Achse den — spitzen — Winkel $\frac{1}{2} (\alpha - \beta)$, während die Hyperbeltangente und damit die Ellipsennormale mit ihr den Winkel $90^\circ - \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ bildet. Figur 1.

So ist:

$$6) \quad t_e = n_h = \frac{y}{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} = \frac{b_h}{a_h} \sqrt{ab}, \quad t_h = n_e = \frac{y}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} = \frac{b_e}{a_e} \sqrt{ab}$$

oder:

$$\begin{aligned} t_e &= \frac{1}{b_e} \cdot \frac{y \sqrt{a_e^4 - e^2 x^2}}{x}, \quad t_h = \frac{1}{b_h} \cdot \frac{y \sqrt{e^2 x^2 - a_h^4}}{x} \\ n_e &= \frac{b_e}{a_e^2} \sqrt{a_e^4 - e^2 x^2}, \quad n_h = \frac{b_h}{a_h^2} \sqrt{e^2 x^2 - a_h^4}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes der Ellipse resp. der Hyperbeltangente mit ξ und η , so lautet die Gleichung der ersteren:

$$7) \quad \frac{\eta - y}{x - \xi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{b_e^2}{a_e^2} \cdot \frac{x}{y},$$

woraus sich unter Berücksichtigung der Mittelpunkts-Gleichung der Ellipse (3) die übliche Form ergibt. Für die Hyperbeltangente ist analog:

$$8) \quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{b_h^2}{a_h^2} \cdot \frac{x}{y}.^{**})$$

*) Diese Eigenschaften der Tangenten werden also vorausgesetzt; sie sind event. elementar-geometrisch zu beweisen.

**) Man kann diese Erörterungen auch an die Figur der Berührungskreise des Dreiecks anknüpfen. Z. B.: Die Tangente der Ellipse CT_e geht durch die Mittelpunkte der den Seiten a und b von $\triangle ABC$ anbeschriebenen Kreise M_a und M_b . Letztere Punkte liegen auf den Scheiteltangenten der Ellipse, und die Radien dieser Kreise sind:

Fällt man von A und B auf die Tangente der Ellipse die Lote p_e' und p_e'' , so ist:

$$p_e' = b \cos \frac{1}{2} \gamma, \quad p_e'' = a \cos \frac{1}{2} \gamma, \quad \text{also nach II)}$$

$$9) \quad p_e' = \frac{b b_e}{\sqrt{ab}}, \quad p_e'' = \frac{a b_e}{\sqrt{ab}}, \quad p_e' \cdot p_e'' = b_e^2,$$

und die Tangente hat von O den Abstand:

$$d_e = \frac{1}{2} (p_e' + p_e'') = \frac{a b_e}{\sqrt{ab}}.$$

Analog ist für die Hyperbel:

$$p_h' = b \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{b b_h}{\sqrt{ab}}, \quad p_h'' = a \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{a b_h}{\sqrt{ab}}$$

$$10) \quad p_h' \cdot p_h'' = b_h^2, \quad d_h = \frac{a b_h}{\sqrt{ab}}.$$

Wir projizieren ferner die Normale der Ellipse CT_h auf einen der Brennpunkte, so ist die Projektion $p_e = n_e \cos \frac{1}{2} \gamma$, also nach II) und 6)

$$11) \quad p_e = \frac{b_e^2}{a_e}$$

d. h. gleich dem Halbparameter der Ellipse.

Ebenso ist die Projektion von n_h auf b :

$$12) \quad p_h = n_h \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{b_h^2}{a_h}.$$

CT_h teilt AB innen im Verhältnis der beiden Seiten b und a , daher ist:

$$AT_h = \frac{b \cdot c}{a + b} = b \frac{e}{a_e}.$$

Die Projektion dieses Abschnitts auf AB ist $b \frac{e}{a_e} \cos \alpha$, also findet man:

$$b = b \frac{e}{a_e} \cos \alpha + p_e.$$

Führt man für α seinen Nebenwinkel φ ein, so ergibt sich die auf den Brennpunkt A bezogene Polargleichung der Ellipse:

$\varphi_a = \frac{b_e b_h}{e - a_h}, \quad \varphi_b = \frac{b_e b_h}{e + a_h}.$ CT_e schneidet die y -Achse auf dem um $\triangle ABC$ umgeschriebenen Kreise, und es ist $OR = \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b) = \frac{e b_e}{b_h} = \frac{b_e^2}{y}$, — eine Beziehung, die auch zur Aufstellung der Gleichung der Tangente benutzt werden kann. Analoges gilt für die Hyperbeltangente. Ferner lassen sich die — auch dem Gymnasialschüler geläufigen — harmonischen Eigenschaften der Mittelpunkte der Berührungskreise auf die Tangenten von Ellipse und Hyperbel übertragen; u. a. m. z. B. $RC \cdot CT_e = CS \cdot CT_h = ab$.

$$13) \quad b = \frac{p_e}{1 + \frac{e}{a_e} \cos \varphi}.$$

Wir projizieren in gleicher Weise $AT_e = \frac{b \cdot c}{a - b} = b \frac{e}{a_h}$ auf b , so ist

$b = p_h - b \frac{e}{a_h} \cos \alpha$. Nehmen wir für diese Gleichung die positive Richtung der x -Achse nach der zu A gehörigen Zeitlinie der Hyperbel, also von O nach B gerichtet, so ist:

$$14) \quad b = \frac{p_h}{1 + \frac{e}{a_h} \cos \varphi}.$$

Konjugierte Durchmesser. Wir verbinden O mit C und ziehen durch O einen der Tangente CT_e parallelen Durchmesser der Ellipse $2a'_e$. $OC = b'_e$ möge mit AB den spitzen Winkel ε bilden. Dann ist, da b'_e eine Seitenhalbierende in $\triangle ABC$ ist:

$$15) \quad b'^2_e = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a_e^2 + a_h^2 - e^2 = b_e^2 + a_h^{2*})$$

$$\cos \varepsilon = \frac{x}{b'_e} = \frac{a_e a_h}{e b'_e}, \quad \sin \varepsilon = \frac{y}{b'_e} = \frac{b_e b_h}{e b'_e}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b_e b_h}{a_e a_h}.$$

Nennen wir den Winkel, den $2a'_e$ mit der positiven Richtung der x -Achse bildet, ϑ , so ist $\operatorname{tg} \vartheta = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Also ist entsprechend III) oder III')

$$16) \quad \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{b_e^2}{a_e^2}.$$

Das ist die Beziehung, die zwischen 2 konjugierten Durchmessern einer Ellipse besteht.

Bezeichnen wir die Koordinaten der Schnittpunkte des Durchmessers $2a'_e$ mit der Ellipse mit ξ und η , so ist $\xi = \pm a'_e \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\eta = \pm a'_e \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, welche Werte wir in die Gleichung (3) der Ellipse einsetzen.

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{a_e^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{b_e^2} = \frac{1}{a'^2_e} \quad \text{oder nach III)}$$

$$\frac{b_h^2}{e^2 ab} + \frac{a_h^2}{e^2 ab} = \frac{1}{a'^2_e},$$

woraus, da $e^2 = a_h^2 + b_h^2$ ist, folgt:

$$17) \quad a'^2_e = ab.$$

*) Aus dieser und der folgenden Formel für $\cos \varepsilon$ kann man durch Elimination von a_h die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Ellipse ableiten.

Ersetzen wir die rechte Seite dieser Gleichung durch $a_e^2 - a_h^2$ (2) und addieren $b_e'^2 = b_e^2 + a_h^2$, so erhalten wir:

$$18) \quad a_e'^2 + b_e'^2 = a_e^2 + b_e^2.$$

Nehmen wir die beiden konjugierten Durchmesser als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems und bezeichnen die Koordinaten mit u und v , so ist:

Figur 2. $x = u \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + v \cos \varepsilon$, $y = -u \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + v \sin \varepsilon$,
oder mit Anwendung der Formeln III) und 15)

$$\frac{x}{a_e} = \frac{u b_h}{e \sqrt{ab}} + \frac{v a_h}{e b_e'}, \quad \frac{y}{b_e} = -\frac{u a_h}{e \sqrt{ab}} + \frac{v b_h}{e b_e'}, \text{ also}$$

$$1 = \frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} = \frac{u^2}{e^2 ab} (a_h^2 + b_h^2) + \frac{v^2}{e^2 b_e'^2} (a_h^2 + b_h^2),$$

woraus sich mit Berücksichtigung von 1) und 17) ergibt:

$$19) \quad \frac{u^2}{a_e'^2} + \frac{v^2}{b_e'^2} = 1.$$

Der spitze Winkel, den die konjugierten Durchmesser bilden, sei ω_e , so ist $\omega_e = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \varepsilon$, woraus man wieder mit Anwendung von III) und 15) und unter Berücksichtigung von 1) und 17) findet:

$$20) \quad \sin \omega_e = \frac{a_e b_e}{a_e' b_e'}, \quad \cos \omega_e = \frac{a_h b_h}{a_e' b_e'}, \text{ also ist}$$

$$a_e' b_e' \sin \omega_e = a_e b_e.$$

Auf analoge Weise erhält man die Beziehungen zwischen den konjugierten Durchmessern einer Hyperbel, die sich oft aus dem früheren sogleich dadurch ergeben, daß

$$ab = a_h'^2 \text{ und } \omega_e + \omega_h = 90^\circ \text{ ist.}$$

Asymptoten der Hyperbel. Wir beschreiben mit e um O einen Kreis und errichten auf der x -Achse in den Scheiteln der Hyperbel die Senkrechten, so bestimmen die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise und O die „Asymptoten“. Die zu x gehörige Ordinate der Asymptote $DI = Y$ ist dann zu berechnen aus:

$Y : x = b_h : a_h$, also nach Einsetzung von x aus I) ist:

$$Y = \frac{a_e b_h}{e}.$$

Derselbe Wert ergibt sich, wenn man die Ordinate des Ellipsenpunkts C bis zum Schnittpunkt mit dem um O mit a_e beschriebenen Kreise verlängert. Denn die Kreisordinate ist $\sqrt{a_e^2 - x^2}$, daher nach Einsetzung von x aus I) auch gleich $\frac{a_e b_h}{e}$. Der Endpunkt der Kreisordinate liegt daher auf der Asymptote.

Ferner ist:

$$Y - y = \frac{a_o b_h}{e} - \frac{b_o b_h}{e} = \frac{b_h}{e} (a_o - b_o).$$

Rückt der Punkt C auf derselben Hyperbel vor, so behält $\frac{b_h}{e}$ seinen konstanten endlichen Wert, während $a_o - b_o$ gegen Null konvergiert. Asymptote!

$$Y + y = \frac{b_h}{e} (a_o + b_o), \text{ also } Y^2 - y^2 = b_h^2.$$

Bezeichnet man den Asymptotenwinkel, durch den die x-Achse geht, mit $2\varepsilon_o$, so ist:

$$\sin \varepsilon_o = \frac{b_h}{e}, \quad \cos \varepsilon_o = \frac{a_h}{e}, \quad \sin 2\varepsilon_o = \frac{2 a_h b_h}{e^2}.$$

Für die auf die Asymptoten als Achsen bezogenen Koordinaten u und v ergeben sich dann aus der Figur leicht die Beziehungen

Figur 3.

$$\sin \varepsilon_o = \frac{1}{2} (Y - y) : u = \frac{1}{2} (Y + y) : v.$$

Also ist nach dem vorigen:

$$u = \frac{1}{2} (a_o - b_o), \quad v = \frac{1}{2} (a_o + b_o) \text{ und}$$

$$21) \quad u v = \frac{1}{4} (a_o^2 - b_o^2) = \frac{1}{4} e^2$$

$$22) \quad u v \sin 2\varepsilon_o = \frac{1}{2} a_h b_h.$$

Leitlinien. Wir verlängern CA bis zum zweiten Schnittpunkt C_1 mit der Ellipse und ziehen durch C_1 die Tangente, indem wir $2a_o$ auf AC von A bis B'' abtragen und auf BB'' die Mittelsenkrechte errichten. Vom Schnittpunkt der beiden Tangenten R_o wird $R_o R'_o \perp AB$ gefällt, und von C aus $CH_o \perp R_o R'_o$ gezogen. Dann ist $R_o A \perp CC_1$.*) Da also $ACH_o R_o$ ein Sehnenviereck ist, so ist $\sphericalangle CH_o A = \sphericalangle CR_o A = \frac{1}{2} \gamma$ und $\sphericalangle H_o A C = \sphericalangle H_o R_o C = 90^\circ - \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$. Also ist nach dem Sinussatz in $\triangle ACH_o$:

$$CA : CH_o = \sin \frac{1}{2} \gamma : \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung $= c : (a + b)$ ist, so ergibt sich:

$$23) \quad CA : CH_o = e : a_o.$$

$R_o R'_o$ ist die zum Brennpunkt A gehörige Leitlinie der Ellipse.**)

Wir verfahren in analoger Weise bei der Hyperbel, indem wir die Tangente in dem Punkt an diese ziehen, in welchem sie von CA zum zweiten

*) Dies läßt sich für unsern Zweck am leichtesten zeigen, wenn man auf AC auch noch oben $2a_o$ bis B' abträgt. Dann ist $AB' = AB''$, $R_o B = R_o B' = R_o B''$, also $R_o A \perp B' B''$.

**) Auch der Abstand AR'_o läßt sich leicht trigonometrisch berechnen:

$$AR'_o = b \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{b_o^2}{e}.$$

Male geschnitten wird. Der dem Punkte R_e entsprechende Punkt R_h liegt dann auf der Halbierungslinie von γ und auf der Verlängerung von $R_e A$, und es ergibt sich aus $\triangle CH_h A$:

$$24) \quad CA : CH_h = e : a_h,$$

b. h. $H_h R_h$ ist eine Leitlinie der Hyperbel.

Aus 23) und 24) folgt

$$H_e C : CH_h = a_e : a_h = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

Wird daher $CB \parallel AB$, b. h. ist $\beta = 0$, $\gamma = 180^\circ - \alpha$, so wird $H_e C = CH_h$. Aus

$$CA : CH_e = \sin \frac{1}{2} \gamma : \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \text{ u. } CA : CH_h = \cos \frac{1}{2} \gamma : \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

folgt dann, daß $CA = CH_e$ und $CA = CH_h$ ist.

Aus der Ellipse und der Hyperbel entsteht je eine Kurve, deren Punkte von einem festen Punkt A und einer festen Geraden $R_e R'_e$ resp. $R_h R'_h$ gleiche Entfernung haben — eine Parabel.

Die Parabel.

Figur 5. Da $CT_1 \propto H_1 CA$ halbiert, da ferner $CA = CH_1$ und $CH_1 \parallel AT_1$ ist, so ist $T_1 ACH_1$ ein Rhombus, und ebenso $AT_2 H_2 C$ und $T_1 ACH_1 \cong AT_2 H_2 C$.

Ihre Diagonalen haben die Länge:

$$CT_1 = 2b \cos \frac{1}{2} \alpha \text{ und } CT_2 = 2b \sin \frac{1}{2} \alpha. \text{ Also ist:}$$

$$AR'_1 = 2b \sin^2 \frac{1}{2} \alpha, \quad AR'_2 = 2b \cos^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

welche Werte sich auch ergeben, wenn man in den für die Ellipse resp. Hyperbel geltenden Ausdrücken (vergl. Anm. 2 S. 11) $\beta = 0$ setzt. Bezeichnen wir AR'_1 mit p_1 , AR'_2 mit p_2 , so ist:

$$p_1 = 2b \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = b(1 - \cos \alpha), \quad p_2 = b(1 + \cos \alpha).$$

Rechnet man hierin wieder diejenige Richtung der x-Achse, die nach der Leitlinie gerichtet ist, als die positive, so lautet die Polargleichung der Parabel:

$$25) \quad b = \frac{p}{1 + \cos \varphi},$$

ein Resultat, das sich wie früher auch durch Projektion von CT_2 und AT_2 auf AC ergeben würde.

Es sei nun E der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und EA die positive Richtung der x-Achse. Da

$$T_1 D = AR'_2 = p_2 \text{ und } T_2 D = AR'_1 = p_1$$

ist, und $T_1 D$ durch E halbiert wird, so ergeben sich aus der Figur die Transformationsgleichungen:

$$26) \quad x = \frac{1}{2} p_2, \quad y^2 = p_1 p_2.$$

Eliminiert man daraus p_2 , so findet man als Scheitelfgleichung der Parabel:

$$27) \quad y^2 = 2 p x.$$

$$\text{Weiter ist: } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{y}{T_1 D} = \frac{y}{p_2} = \frac{p_1}{y} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Die Gleichung der Tangente heißt daher:

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{p}{y}$$

oder mit Berücksichtigung von 27)

$$28) \quad \eta y = p (\xi + x).$$

CT_1 und CT_2 lassen sich auch aus dem rechtwinkligen Dreieck $T_1 CT_2$ berechnen, in dem

$$T_1 T_2 = 2b = p_1 + p_2 \text{ ist. Nämlich}$$

$$CT_1 = \sqrt{p_2 (p_1 + p_2)}, \quad CT_2 = \sqrt{p_1 (p_1 + p_2)},$$

woraus sich weiter ergibt:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{y}{CT_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + p_2}}, \quad \cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{p_2}{p_1 + p_2}}, \text{ oder}$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + 2x}} = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + y^2}}, \quad \cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{2x}{p_1 + 2x}} = \frac{y}{\sqrt{p_1^2 + y^2}}.$$

Leicht ergeben sich nun die Längen der Subtangente und Subnormale, wie sich überhaupt die Eigenschaften der Tangente, die im Unterricht zuerst mitgeteilt werden, aus der Figur anschaulich ablesen lassen.

Bezeichnen $x'y'$, $x''y''$ die Koordinaten zweier Punkte auf der Parabel, so ist die Gleichung ihrer Verbindungsgeraden:

$$\eta - y' = \frac{2p}{y' + y''} (\xi - x').$$

Soll dieselbe der durch den Punkt x, y gehenden Tangente parallel sein, so ist:

$$\frac{2p}{y' + y''} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{p}{y}, \text{ also}$$

$$y = \frac{1}{2} (y' + y''),$$

d. h. der durch C gehende Durchmesser halbiert die zu der Tangente parallelen Sehnen der Parabel, ein Resultat, das sich auch durch Betrachtung der entsprechenden Sätze über die Ellipse oder die Hyperbel ergibt.*)

*) So findet man aus 20) S. 10 für den Konjugationswinkel ω zweier konjugierten Durchmesser einer Ellipse $\operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \gamma$, woraus für $\beta = 0$, $\gamma = 180^\circ - \alpha$ folgt: $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, wodurch sich zeigt, daß der Parabeldurchmesser CH_2 dem Ellipsendurchmesser CO entspricht.

Wir nehmen die Tangente und den Durchmesser durch C als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems (u, v) , so ist für den Punkt x', y' der Parabel:

$$x' = x + u + v \cos \frac{1}{2} \alpha = x + u + v \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}$$

$$y' = y + v \sin \frac{1}{2} \alpha = y + v \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}$$

Wir setzen diese Werte in die Parabelgleichung 27) ein, so erhalten wir:

$$v^2 \cdot \frac{p^2}{p^2 + y^2} = v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 2 p u.$$

Nun war $p = 2b \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, also ergibt sich:

$$30) \quad v^2 = 4 b u,$$

wo b noch durch den ihm gleichen Abstand des Punktes C von der Zeitlinie ersetzt werden kann.

Aufgaben.

Wir erwähnen noch einige Aufgaben, die sich an das vorige leicht anschließen lassen.

1. Der geometrische Ort der Mittelpunkte jedes der Berührungskreise eines Dreiecks ist zu bestimmen, dessen Grundlinie $c = 2e$ und Seitensumme $a + b = 2a_0$ gegeben sind.*)

Die Spitze des Dreiecks muß auf der in Fig. 1 gezeichneten Ellipse liegen. Die Mittelpunkte der den Seiten AC und BC anbeschriebenen Kreise M_b und M_a liegen — der Abstand der auf der Grundlinie befindlichen Berührungspunkte ist $a + b$ — auf den Geraden $x = \pm a_0$. Sind ξ und η die Koordinaten des Mittelpunkts des $\triangle ABC$ einbeschriebenen Kreises, so ist

$$\xi = \frac{1}{2} (a - b) = a_n, \quad \eta = \rho = \frac{F}{s} = \frac{b_0 b_h}{a_0 + e}.$$

Also ist nach I)

$$\xi = \frac{e x}{a_0} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{e y}{a_0 + e}.$$

Setzt man die hieraus für x und y berechneten Werte in die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ein, so ergibt sich für den gesuchten Ort eine Ellipse mit den Halbachsen e und $\frac{e b_0}{a_0 + e}$. Auch der Mittelpunkt des der Seite

*) Vergl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte I. Bd. S. 345. 6. Aufl.

AB anbeschriebenen Kreises liegt auf einer Ellipse. Ihre Halbachsen sind e und $\frac{e b_e}{a_e - e}$.

Umgekehrt ergibt sich hieraus der Satz: „Beschreibt man um die Punkte einer Ellipse mit ihren Abständen von einer Achse Kreise und legt von den Endpunkten der Achse die Tangenten an die letzteren, so schneiden die Tangenten sich auf einer Ellipse.“

2. Der geometrische Ort derselben Kreise wie bei 1. ist zu bestimmen für ein Dreieck, von dem c und $a - b$ gegeben ist.

Die Kurven, auf denen M_a und M_b liegen, sind Hyperbeln; und es findet ein dem unter 1) ausgesprochenen analoger Satz statt.

3. Von einem Punkt einer Parabel ist der Brennstrahl und der Durchmesser gezogen und der Kreis konstruiert, der diese Geraden und die Hauptachse berührt. Welches ist der geom. Ort der Mittelpunkte der auf diese Weise gezeichneten Kreise?

Eine Parabel; denn nach Fig. 5 findet man $\xi = x + \frac{p}{2}$, $\eta = \frac{1}{2} y$, aus welchen Gleichungen die für x und y gefundenen Werte in die für den Punkt (x, y) geltende Parabelgleichung einzusetzen sind.

4. Aus der Grundlinie eines Dreiecks und dem Produkt der Tangenten der halben Winkel an der Grundlinie den Ort der Dreiecksspitze zu finden. (Vergl. Salmon-Fiedler a. a. O.)

Bildet man entsprechend II) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$, so erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{a_e - e}{a_e + e}$, woraus sich nach der Aufgabe ein konstantes a_e ergibt.

5. Die entsprechende Aufgabe, wenn $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha : \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$ gegeben ist.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha : \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{e + a_h}{e - a_h}.$$

Der Ort ist eine Hyperbel.

T_i

AB anbeschriebenen Kreises liegt auf einer Ellipse. Ihre Halbachsen sind e und $\frac{e b_a}{a_a - e}$.

Umgekehrt ergibt sich hieraus der Satz: „Beschreibt man um die Punkte einer Ellipse mit ihren Abständen von einer Achse Kreise und legt von den Endpunkten der Achse die Tangenten an die letzteren, so schneiden die Tangenten sich auf einer Ellipse.“

2. Der geometrische Ort derselben Kreise wie bei 1. ist zu bestimmen für ein Dreieck, von dem c und $a - b$ gegeben ist.

Die Kurven, auf denen M_a und M_b liegen, sind Hyperbeln; und es findet ein dem unter 1) ausgesprochenen analoger Satz statt.

3. Von einem Punkt einer Parabel ist der Brennpunkt und der Durchmesser gezogen und der Kreis konstruiert, der diese Geraden und die Hauptachse berührt. Welches ist der geom. Ort der Mittelpunkte der auf diese Weise gezeichneten Kreise?

Eine Parabel; denn nach Fig. 5 findet man $\xi = x + \frac{p}{2}$, $\eta = \frac{1}{2} y$, aus welchen Gleichungen die für x und y gefundenen Werte in die für den Punkt (x, y) geltende Parabelgleichung einzusetzen sind.

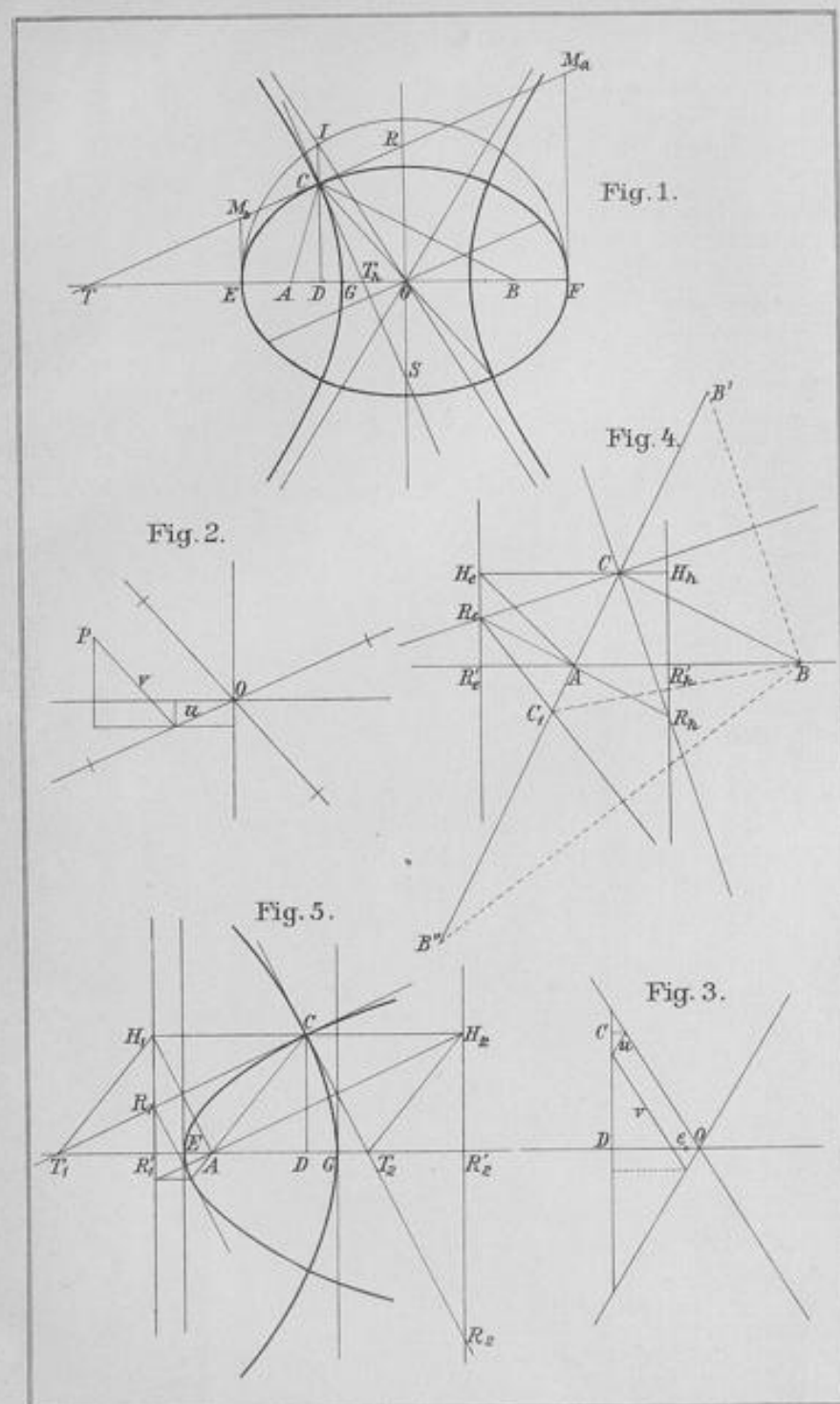
4. Aus der Grundlinie eines Dreiecks und dem Produkt der Tangenten der halben Winkel an der Grundlinie den Ort der Dreiecksspitze zu finden. (Vergl. Salmon-Hedler a. a. O.)

Bildet man entsprechend II) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$, so erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{a_a - e}{a_a + e}$, woraus sich nach der Aufgabe ein konstantes a_a ergibt.

5. Die entsprechende Aufgabe, wenn $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha : \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$ gegeben ist.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha : \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{e + a_a}{e - a_a}.$$

Der Ort ist eine Hyperbel.



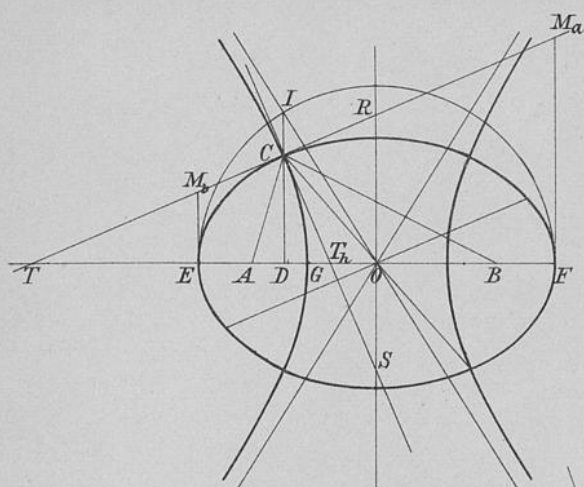


Fig. 1.

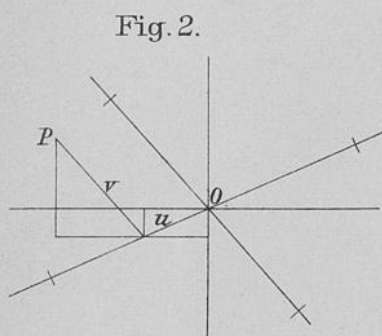


Fig. 2.

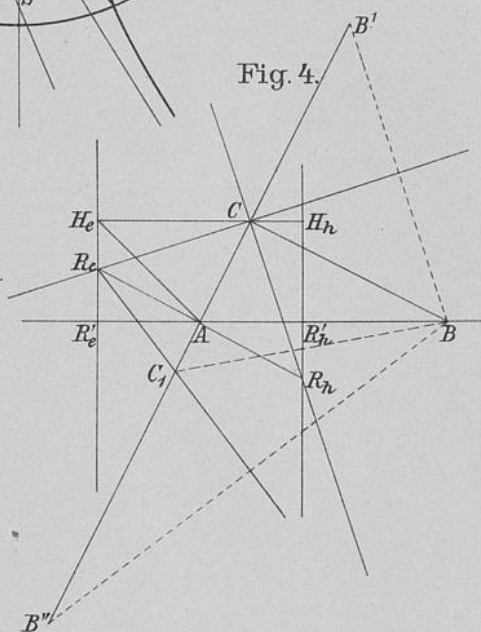


Fig. 4.

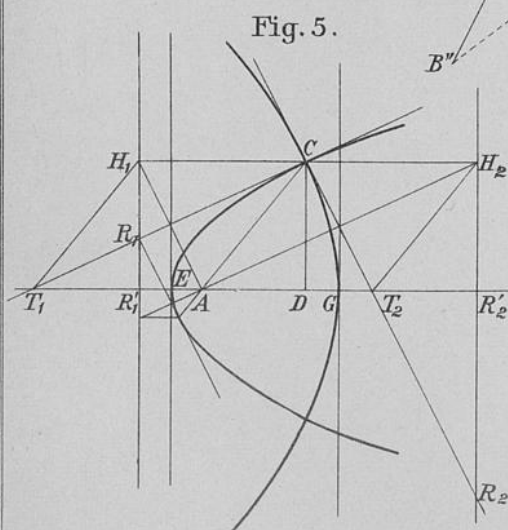


Fig. 5.

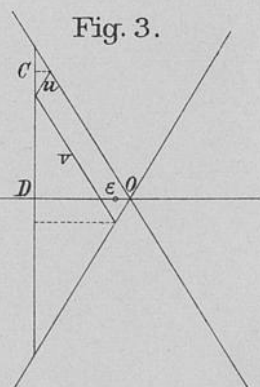


Fig. 3.

Wir m
eines schiefw
der Parabel:

Wir fe

Nun m
30)
wo b noch
linie ersetzt

Wir e
anschließen I

1. Der
Dreiecks ist
 $a + b = 2a$

Die e
liegen. Die
 M_b und M_a
Berührungsp
die Koordina

Also ist nach

Setzt
punktsgleichu
Ellipse mit

*) Ber

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale



er durch C als Achsen
für den Punkt x', y'

$$\frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}$$

+ y^2 .
7) ein, so erhalten wir:

u.

ntes C von der Zeit

an das vorige leicht

r Berührungskreise eines
2e und Seitensumme

1 gezeichneten Ellipse
anbeschriebenen Kreise
Grundlinie befindlichen
 $= \pm a_e$. Sind z und η
schriebenen Kreises, so ist
 $b_e b_h$
 $a_e + e$.

a Werte in die Mittel-
den gesuchten Ort eine
Mittelpunkt des der Seite

6. Aufl.

Als unbedingtes Kriterium liegt auf einer Linie, dass

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Man sieht, dass die Bedingung, dass $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, nur dann erfüllt ist, wenn a und c denselben Wert haben, und b und d denselben Wert haben.

2. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein ganzer Zahl, wenn b ein Teiler von a ist.

Die Bedingung, dass $\frac{a}{b}$ ein ganzer Zahl ist, ist äquivalent mit der Bedingung, dass a ein Vielfaches von b ist.

3. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

4. Ein Bruch $\frac{a}{b}$ kann dann und nur dann als $\frac{c}{d}$ geschrieben werden, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist.

5. Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist.

6. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

7. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

8. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

9. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

10. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

11. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

12. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

13. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

14. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

15. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

16. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

17. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

18. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

19. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

20. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist dann und nur dann ein Bruch, wenn a und b teilerfremd sind, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ nicht weiter gekürzt werden kann.