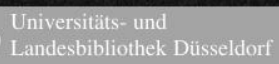
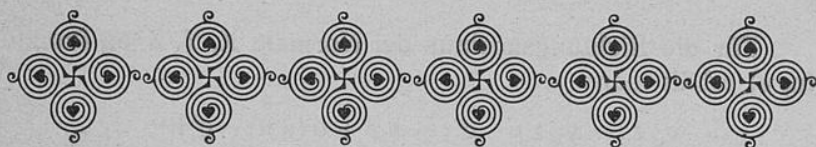


Die Theorie

der Parallellflächen einer gegebenen Fläche.







II. Teil.

Die Parallelf lächen von Regelf lächen.

A.

Parallelf lächen nicht abwickelbarer Regelf lächen.

Die Gleichungen einer Regelf läche lauten:

$$x = \varphi(v) + u f(u); y = \chi(v) + u g(v); z = \psi(v) + u h(v) \dots (1).$$

Hierin sind:

$$x = \varphi(v); y = \chi(v); z = \psi(v) \dots (2)$$

die Gleichungen der Leitkurve, die eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden sein soll. f, g, h seien die Richtungskosinus der Erzeugenden, die durch den Punkt (v) der Leitkurve geht und als Erzeugende (u) bezeichnet sein soll. Man kann dann behaupten, daß die Parameterlinien (v) orthogonale Trajektorien der Geraden (u) sind. Es besteht nämlich zwischen den Richtungskosinus der Tangente der Leitkurve (α, β, γ) im Punkte (v) und der durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden die Beziehung:

$$\sum \alpha f = 0.$$

Ferner ist:

$$\sum f^2 = 1, \sum f f' = 0,$$

$$x_v = \alpha + u f', y_v = \beta + u g', z_v = \gamma + u h'.$$

Daher:

$$\sum x_v f = \sum \alpha f + u \sum f f' = 0.$$

Die Parameterlinien bilden also ein Orthogonalsystem.

Für die Richtungskosinus der Normale X, Y, Z im Punkte (u, v) erhält man:

$$X = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{D} = \frac{g\gamma - h\beta + u(g'h' - g'h)}{D} \dots (3).$$

Analoges gilt für Y und Z .

Somit hat man schon für die Parallellfläche der Regelfläche im Abstände k :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi + u f + k \cdot \frac{g\gamma - h\beta + u(g'h' - g'h)}{D} \\ y &= \chi + u g + k \cdot \frac{h\alpha - f\gamma + u(hf' - h'f)}{D} \\ z &= \psi + u h + k \cdot \frac{f\beta - g\alpha + u(fg' - f'g)}{D} \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Die Parallellfläche (4) läßt sich auch ausdrücken durch Größen, welche sich auf die Leitlinie (2) allein beziehen.

Die Erzeugende (v) liegt in der Normalebene des Punktes (v) der Leitkurve; ω sei der Winkel, den sie mit der positiven Hauptnormale der Leitkurve bildet, und sei gemessen im Sinne der Drehung von der positiven Hauptnormale zur positiven Binormale der Leitkurve. Dann ist:*

$$\begin{aligned} f &= l \cos \omega + \lambda \sin \omega; \quad g = m \cos \omega + \mu \sin \omega; \\ h &= n \cos \omega + v \sin \omega \dots (5). \end{aligned}$$

ω ist wie f, g, h eine Funktion von v . Die Regelfläche ist somit gegeben, sobald die Leitkurve und ω als Funktion von v bekannt sind.

Aus (5) folgt:

$$f' = \frac{1}{r} \cos \omega \cdot \alpha - \left(\omega' + \frac{1}{\rho} \right) (\sin l - \cos \lambda), \text{ wobei } \frac{1}{r} \text{ und } \frac{1}{\rho} \text{ die}$$

Krümmung und Torsion bedeuten.

* Scheffers I. p. 300.

Setzt man:

$$\frac{1}{r} \cos \omega = p, \quad \omega' + \frac{1}{\rho} = q,$$

so wird:

$$f' = -p \alpha - q (\sin \omega \cdot l - \cos \omega \cdot \lambda) \dots (6).$$

Analog für g' und h' .

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich auch:

$$x_{uu} = 0, \quad y_{uu} = 0, \quad z_{uu} = 0, \quad x_{uv} = f', \quad y_{uv} = g', \quad z_{uv} = h'.$$

$$x_{vv} = \frac{1}{r} l + u f'', \quad y_{vv} = \frac{1}{r} m + u g'', \quad z_{vv} = \frac{1}{r} n + u h''.$$

Die Berechnung der Fundamentalgrößen liefert dann die Werte:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (1 - p u)^2 + q^2 u^2$$

$$L = 0, \quad M = \frac{q}{\sqrt{(1 - p u)^2 + q^2 u^2}} = \frac{q}{\sqrt{G}}$$

$$N = -\sqrt{\frac{1}{r^2} - p^2} \cdot \sqrt{G} + \frac{u}{\sqrt{G}} \left[q_v - u (p q_v - p_v q) \right] \dots (7).$$

Für die Krümmung erhält man:

$$K = -\frac{q^2}{[(1 - p u)^2 + q^2 u^2]^2} = -\frac{q^2}{G^2},$$

$$H = \frac{N}{G}.$$

Aus (3), (5) und (6) erhält man auch die Richtungskosinus der Normale X, Y, Z ausgedrückt durch die Elemente der Leitkurve:

$$X = \frac{q u \alpha + (1 - p u) (\sin \omega \cdot l - \cos \omega \cdot \lambda)}{\sqrt{G}}.$$

Ähnlich für Y und Z .

Die Gleichungen der Parallellfläche (4) gehen dann über in:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi + u f + \frac{k}{\sqrt{G}} \cdot \left[q u \alpha + (1 - p u) (\sin \omega \cdot l - \cos \omega \cdot \lambda) \right] \\ y &= \chi + u g + \frac{k}{\sqrt{G}} \cdot \left[q u \beta + (1 - p u) (\sin \omega \cdot m - \cos \omega \cdot \mu) \right] \\ z &= \psi + u h + \frac{k}{\sqrt{G}} \cdot \left[q u \gamma + (1 - p u) (\sin \omega \cdot n - \cos \omega \cdot \nu) \right] \end{aligned} \right\} (4_a).$$

Die Fundamentalgrößen dieser Parallellfläche (4_a), ausgedrückt durch die Elemente der Leitkurve (2), findet man am schnellsten durch die im ersten Teile dieser Abhandlung* aufgestellten Gleichungen (6) und (9). Demnach ist:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= 1 + \left(\frac{k q}{G} \right)^2, \quad \mathfrak{F} = -k \left(2 - k \frac{N}{G} \right) \frac{q}{\sqrt{G}} \\ \mathfrak{G} &= \left(1 + k^2 \frac{q^2}{G^2} \right) G - k \left(2 - k \frac{N}{G} \right) N. \\ \mathfrak{L} &= -k \left(\frac{q}{G} \right)^2, \quad \mathfrak{M} = \frac{q}{\sqrt{G}} \left(1 - k \frac{N}{G} \right) \\ \mathfrak{N} &= N + \frac{k}{G} (q^2 - N^2). \end{aligned} \right\} \dots (8).$$

Ebenso findet man:

$$\mathfrak{H} = \frac{N G + 2 k q^2}{G^2 - 2 k N G - k^2 q^2}, \quad \mathfrak{R} = - \frac{q^2}{G^2 - k N G - k^2 q^2}$$

Für G und N ist in diesen Gleichungen der Wert aus (7) einzusetzen.

Von besonderem Interesse ist es, jene Kurven auf der Parallellfläche der Regelfläche aufzusuchen, welche den Erzeugenden der Originalfläche entsprechen. Daher sollen auch zuerst diese Kurven diskutiert werden.

Die Tangentenebenen für alle Punkte auf einer Erzeugenden einer nicht abwickelbaren Regelfläche sind verschieden;

* Jahresbericht Hall 1911—1912, p. 10 und 12.

die Normalfläche längs dieser Erzeugenden kann also keine Ebene sein. Die Gleichung dieser Normalfläche findet man aus den Gleichungen (3), woraus ersichtlich ist, daß die Richtungskosinus einer Normale im Punkte (x, y, z) proportional sind den Größen $a + u a_1, b + u b_1, c + u c_1$. Die Normale im Punkte (x, y, z) , durch welche die Erzeugende (u) geht, ist dann dargestellt in der Form:

$$\frac{\xi - x}{a + u a_1} = \frac{\eta - y}{b + u b_1} = \frac{\zeta - z}{c + u c_1} = w \dots (a).$$

Für alle Punkte derselben Erzeugenden ist u variabel, v konstant. Um daher den Ort der Normalen längs der Erzeugenden zu finden, muß man aus (a) u eliminieren. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} \xi - x &= w a + u a_1 \text{ oder } \xi - \varphi = u f + a w + a_1 w u \\ \text{ferner: } \eta - \chi &= u g + b w + b_1 w u \\ \zeta - \psi &= u h + c w + c_1 w u \end{aligned} \right\} \dots (b).$$

Löst man (b) nach $u, w, w u$ auf, so ist:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f & a & a_1 \\ g & b & b_1 \\ h & c & c_1 \end{vmatrix} \cdot u &= \begin{vmatrix} \xi - \varphi & a & a_1 \\ \eta - \chi & b & b_1 \\ \zeta - \psi & c & c_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} f & a & a_1 \\ g & b & b_1 \\ h & c & c_1 \end{vmatrix} \cdot w = - \begin{vmatrix} \xi - \varphi & f & a_1 \\ \eta - \chi & g & b_1 \\ \zeta - \psi & h & c_1 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} f & a & a_1 \\ g & b & b_1 \\ h & c & c_1 \end{vmatrix} \cdot w u &= \begin{vmatrix} \xi - \varphi & f & a \\ \eta - \chi & g & b \\ \zeta - \psi & h & c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Multipliziert man die beiden ersten Gleichungen miteinander und die letzte mit:

$$\begin{vmatrix} f & a & a_1 \\ g & b & b_1 \\ h & c & c_1 \end{vmatrix},$$

so bekommt man:

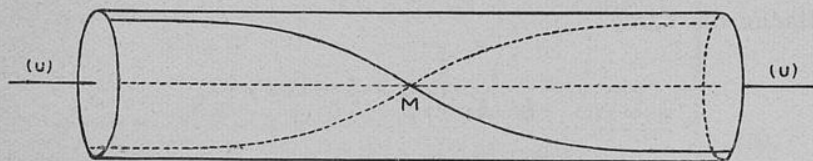
$$\begin{vmatrix} \xi - \varphi & a & a_1 \\ \eta - \chi & b & b_1 \\ \zeta - \psi & c & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi - \varphi & f & a_1 \\ \eta - \chi & g & b_1 \\ \zeta - \psi & h & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi - \varphi & f & a \\ \eta - \chi & g & b \\ \zeta - \psi & h & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f & a & a_1 \\ g & b & b_1 \\ h & c & c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist eine Gleichung II. Grades in $\xi - \varphi$, $\eta - \chi$, $\zeta - \psi$ und stellt eine Fläche dar, welche außer den ∞^1 Normalen noch eine Gerade, die betrachtete Erzeugende, enthält. Die Fläche hat demnach als Fläche II. Grades ∞^2 Geraden. Da alle Normalen auf der Erzeugenden (u) senkrecht stehen, also einer Ebene parallel sind, so ist die Normalenfläche ein hyperbolisches Paraboloid. Ihr Scheitel ist jener Punkt auf (u), in dem die Erzeugende von der unendlich nahen Erzeugenden den kürzesten Abstand hat. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Erzeugenden.

Die der Geraden der Regelfläche entsprechende Kurve auf der Parallellfläche ergibt sich als Schnitt eines hyperbolischen Paraboloides und eines Kreiszylinders, dessen Achse die Erzeugende der Regelfläche bildet und dessen Radius gleich k, d. i. gleich dem Abstände der Parallellfläche von der Regelfläche ist. Der totale Schnitt des hyperbolischen Paraboloides mit dem Kreiszylinder gibt die der Erzeugenden entsprechende Kurven auf zwei äquidistanten Parallellflächen. Dieser totale Schnitt zweier Flächen II. Ordnung ist eine Kurve IV. Ordnung, welche, wie sich leicht vorstellen läßt, in zwei Ästen zerfällt, welche denselben unendlich fernen Punkt gemein haben. Durchläuft ein Punkt P vom Mittelpunkt M aus die Erzeugende bis $+\infty$, so dreht sich die Tangentenebene von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Geht der Punkt von M bis $-\infty$, so ändert die Tangentenebene den Drehungssinn und der Winkel zwischen den Tangentenebenen von P und M wächst von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$.^{*} Dasselbe gilt von den Normalen der Erzeugenden. Durchläuft demnach ein Punkt die ganze Gerade nach einer Richtung, so beschreibt die entsprechende Normale einen gestreckten Winkel und die Punkte auf der Normale, die um $\pm k$ von der Erzeugenden entfernt sind, beschreiben die der Erzeugenden entsprechenden Kurven auf den äquidistanten Parallellflächen. Ihre Projektion auf die Tangentenebene in M liefert einen Wendepunkt im Mittelpunkt M der Erzeugenden. Die zwei Geraden, die sich als Schnitt der Berührungsebene in M mit dem Kreiszylinder ergeben,

^{*} Scheffers II., p. 222 ff.

bilden die Asymptoten der beiden Kurvenzweige, für welche man daher folgende Gestalt erhält:



Da die Tangentenebene sich stets um die Erzeugende dreht, wenn der Berührungspunkt auf dieser sich bewegt, und da ferner die Tangentenebenen von Parallellflächen in den entsprechenden Punkten zueinander parallel sind, so folgt, daß auf Parallellflächen von Regelflächen den Erzeugenden solche Kurven entsprechen, in deren Punkten die Tangentenebene sich stets um dieselbe Richtung dreht, wenn der Berührungspunkt auf einer dieser Kurven fortschreitet. Alle Tangentenebenen der Parallellfläche in den Punkten der Kurve IV. Grades, die den Tangentenebenen einer Erzeugenden der Regelfläche entsprechen, umhüllen, wie sich aus dem Gesagten leicht schließen läßt, einen Kreiszylinder, dessen Achse die Erzeugende selbst ist und der auch aus der Normalenfläche die Kurve IV. Grades herauschneidet. Somit ergibt sich folgender Satz:

„Durchläuft ein Punkt die einer Erzeugenden einer Regelfläche entsprechende Kurve auf zwei äquidistanten Parallellflächen, so durchläuft der entsprechende Punkt auf der Regelfläche zweimal, in positiver und negativer Richtung, die der Kurve entsprechende Erzeugende; dabei dreht sich die Tangentenebene auf den äquidistanten Parallellflächen um einen Kreiszylinder mit der Erzeugenden als Achse, während die Tangentenebene auf der Erzeugenden der Regelfläche sich um einen vollen Winkel um diese Gerade dreht.“

Was die Parameterlinien (v) anbelangt, also die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden, so entsprechen ihnen auf der Parallellfläche im allgemeinen nicht orthogonale Trajektorien der Parameterlinien (u) dieser Parallellfläche. Denn nach (8) wird $\mathfrak{F}$ nur dann gleich Null, wenn $q - k \frac{N}{G} \neq 0$ oder $q = 0$ ist.

Die Gleichungen der Parameterlinien (v) der Parallellfläche können aus (4_a) erhalten werden, indem man für u eine Konstante c setzt. Der Leitkurve (q) entspricht auf der Parallellfläche die Linie:

$$\begin{aligned}x &= \varphi + \frac{1}{\sqrt{G}} (\sin \omega \cdot l - \cos \omega \cdot \lambda) \\y &= \chi + \frac{1}{\sqrt{G}} (\sin \omega \cdot m - \cos \omega \cdot \mu) \\z &= \psi + \frac{1}{\sqrt{G}} (\sin \omega \cdot n - \cos \omega \cdot \nu).\end{aligned}$$

Die Striktionslinie ist der Ort der Zentralpunkte aller Erzeugenden der Regelfläche. Auf einer Erzeugenden erreicht bekanntlich die Krümmung K , absolut genommen, ein Maximum im Zentralpunkt. Dies tritt ein, wenn der Nenner des Ausdrucks:

$$K = \frac{q^2}{(1 - pu)^2 + q^2 u^2},$$

nach u differenziert, gleich Null wird, also für den Wert:

$$u_0 = \frac{p}{p^2 + q^2} \dots (a),$$

so daß für den Mittelpunkt der Erzeugenden die Krümmung den Wert

$$K_0 = - \left(\frac{p^2 + q^2}{q} \right)^2 \dots (b)$$

hat. Die Richtungskosinus der Normale im Mittelpunkt der Erzeugenden (u) sind daher:

$$X_0 = \frac{p \alpha + q (\sin \omega \cdot l - \cos \omega \cdot \lambda)}{\sqrt{p^2 + q^2}} \dots (c).$$

Analoges für Y_0 und Z_0 .

Daher entspricht der Striktionslinie auf der Parallellfläche die Kurve:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi + \frac{k f}{p^2 + q^2} + k \frac{p \alpha + q (\sin \omega \cdot l - \cos \omega \cdot \lambda)}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ y &= \chi + \frac{k g}{p^2 + q^2} + k \frac{p \beta + q (\sin \omega \cdot m - \cos \omega \cdot \mu)}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ z &= \psi + \frac{k h}{p^2 + q^2} + k \frac{p \gamma + q (\sin \omega \cdot n - \cos \omega \cdot \nu)}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{aligned} \right\} \dots (d).$$

Aus den Gleichungen (c) findet man auch den Winkel ϑ zwischen den Normalen einer Erzeugenden (u) im Punkte (u, v) und im Punkte (u_0 , v):

$$\cos \vartheta = \Sigma X X_0 = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{(1 - p u)^2 + q^2 u^2}}$$

oder nach (a) und (b):

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - K_0 (u - u_0)^2}}$$

und daher:

$$\operatorname{tg} \vartheta = (u - u_0) \cdot \sqrt{-K_0} \dots (e).$$

Aus dieser Formel (e) berechnet sich auch der Winkel, welchen die Normale im Punkte $\mathfrak{P} = (u, v)$ der Parallellfläche mit der Normale desjenigen Punktes $\mathfrak{P}_0$ einschließt, der mit $\mathfrak{P}$ auf derselben Parameterlinie (u) liegt und dem Zentralpunkt der zugehörigen Erzeugenden entspricht. Es läßt sich auch zeigen, daß die Normale im Punkte $\mathfrak{P}_0$ mit der Hauptnormale der durch $\mathfrak{P}_0$ gehenden Kurve (u) zusammenfällt. Nimmt man nämlich die Erzeugende zur Z-Achse und zur Achse eines Zylinders mit dem Radius k, den Zentralpunkt der Erzeugenden zum Koordinatenanfangspunkt und die Normale des Zentralpunktes zur X-Achse, so erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes der Flächennormale in einem beliebigen Punkte

der betrachteten Erzeugenden mit dem Kreiszylinder nach den Gleichungen:

$$x = k \cos \vartheta, \quad y = k \sin \vartheta, \quad z = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{-K_0}} \dots (f).$$

Daraus findet man:

$$x^2 + y^2 = k^2, \quad y = z x \cdot \sqrt{-K_0} = c \cdot x z \dots (g).$$

Die Gleichungen (f) stellen die Kurve der Parallelfäche dar, welche der Erzeugenden der Regelfläche entspricht. Die Gleichungen (g) sagen aus, daß diese Kurve der Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid ist, welches von den Normalen längs der Erzeugenden gebildet wird. Für die Normalebene und Schmiegungebene dieser Kurve findet man die Gleichungen in ξ, η, ζ :

$$y(\xi - x) - x(\eta - y) - \frac{k^2}{x^2 \sqrt{-K_0}} (\zeta - z) = 0,$$

$$3y(\xi - x) + 2x\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{2}\right)(\eta - y) + x^2 \sqrt{-K_0} (\zeta - z) = 0.$$

Für den Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Kurve, der dem Zentralpunkte entspricht, also für $\vartheta = 0$ oder $x = k, y = z = 0$, laufen die Gleichungen der Normalebene und der Schmiegungebene:

$$k\eta - \frac{1}{\sqrt{-K_0}} \zeta = 0, \quad k\zeta - \frac{1}{\sqrt{-K_0}} \eta = 0 \dots (h).$$

Beide Ebenen schneiden sich in der Hauptnormale, somit ist nach (h) für den Punkt $\vartheta = 0$ die Hauptnormale die X-Achse, welche die Normale der Erzeugenden im Zentralpunkt und daher auch Flächennormale des entsprechenden Punktes $\mathfrak{P}_0$ auf der Parallelfäche ist. Es gilt also der Satz:

„Auf der Parallelfäche einer Regelfläche fällt die Flächennormale im Punkte $\mathfrak{P}_0$, der dem Zentralpunkt P_0 einer Erzeugenden (u) entspricht, mit der Hauptnormale der dieser Erzeugenden entsprechenden Kurve zusammen.“

Dies gilt für alle Punkte der Parallellfläche, welche den Punkten der Striktionslinie entsprechen, also für die Kurve (d).

B.

Parallellflächen abwickelbarer Regelflächen.

Für die abwickelbare Regelfläche, die stets Tangentenfläche einer Raumkurve C ist, gilt die Darstellung:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(v) + u \varphi'(v) = \varphi + u \alpha \\ y &= \chi(v) + u \chi'(v) = \chi + u \beta \\ z &= \psi(v) + u \psi'(v) = \psi + u \gamma \end{aligned} \right\} \dots (9).$$

Hierin sind α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente der Raumkurve $x = \varphi(v)$, $y = \chi(v)$, $z = \psi(v)$. Die abwickelbaren Regelflächen sind dadurch ausgezeichnet, daß die Tangentenebene in einem Punkte einer Erzeugenden (u) zugleich Tangentenebene aller Punkte der Erzeugenden (u) ist.

Die Fundamentalgrößen der Fläche (9) sind:

$$E = \Sigma \alpha^2 = 1, F = \Sigma \alpha \left(\alpha + u \frac{1}{r} \right) = 1, G = \Sigma \left(\alpha + u \frac{1}{r} \right)^2 = 1 + \frac{u^2}{r^2}$$

$$D^2 = E G - F^2 = \frac{u^2}{r^2}, D = \pm \frac{u}{r}.$$

Für die Richtungskosinus der Normale im Punkte (u, v) findet man:

$$X = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{D} = \frac{\beta \left(\gamma + u \frac{n}{r} \right) - \left(\beta + u \frac{m}{r} \right) \gamma}{D}.$$

Analog für Y und Z.

Nimmt man, wie immer $D > 0$, so ist:

$$X = \beta n - m \gamma = \lambda, Y = \gamma l - n \alpha = \mu, Z = \alpha m - l \beta = \nu.$$

Die Richtungskosinus im Punkte (u, v) sind daher gleich den Richtungskosinus der Binormale der Raumkurve C für jenen Punkt, in welchem die durch (u, v) hindurchgehende Erzeugende die Raumkurve C berührt.

Ferner ist:

$$L = \sum X x_u x_u = 0, \quad M = \sum X x_u x_v = \sum \lambda \frac{1}{r} = 0,$$

$$N = \sum X x_v x_v = \sum \lambda \left[\frac{1}{r} + u \cdot \frac{r \left(\frac{1}{r} \lambda - \frac{1}{r} \alpha \right) - r' l}{r^2} \right] = \frac{u}{r \rho}.$$

$$K = \frac{L N - M^2}{D^2} = 0, \quad H = \frac{E N - 2 F M + G L}{D^2} = \frac{u}{r \rho} : \frac{u^2}{r^2} = \frac{r}{u \rho}.$$

Die Gleichung der Parallellfläche in der Entfernung k ist gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi + u \alpha + k \lambda \\ y &= \chi + u \beta + k \mu \\ z &= \psi + u \gamma + k \nu \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Die Fundamentalgleichungen dieser Fläche (10) lassen sich aus den allgemeinen Formeln des ersten Teiles* ableiten:

$$\mathfrak{E} = (1 - k^2 K) E - k (2 - k H) L = 1$$

$$\mathfrak{F} = (1 - k^2 K) F - k (2 - k H) M = 1$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= (1 - k^2 K) G - k (2 - k H) N = 1 + \frac{u^2}{r^2} - k \left(2 - k \frac{r}{u \rho} \right) \frac{u}{r \rho} \\ &= 1 + \left(\frac{u}{r} - \frac{k}{\rho} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{L} = L + k (E K - L H) = 0$$

$$\mathfrak{M} = M + k (F K - M H) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= N + k (G K - N H) = \frac{u}{r \rho} - k \frac{u}{r \rho} \cdot \frac{r}{u \rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{u}{r} - \frac{k}{\rho} \right) \\ &= \frac{1}{r \rho^2} (u \rho - k r). \end{aligned}$$

Für die Krümmungen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ auf der Parallellfläche (10) ergeben sich die Werte:

$$\mathfrak{H} = \frac{H - 2 k K}{1 - k H + k^2 K} = \frac{r}{u \rho - k r}, \quad \mathfrak{K} = \frac{K}{1 - k H + k^2 K} = 0.$$

Aus der letzten Beziehung $\mathfrak{K} = 0$ folgt, daß alle Parallellflächen einer abwickelbaren Regelfläche immer auch abwickel-

* Jahresbericht Hall i. T. 1911—1912, p. 10 und 12.

bar sind. Ferner kann man zeigen, daß den Geraden der gegebenen abwickelbaren Regelfläche die Erzeugenden auf der Parallellfläche entsprechen. Denn da alle Punkte auf einer Erzeugenden einer Abwicklungsfläche dieselbe Tangentenebene haben, so ist die Normalenfläche längs einer Erzeugenden nicht mehr ein hyperbolisches Paraboloid, sondern sie degeneriert in eine Doppelebene. Trägt man dann auf allen Normalen der Erzeugenden gleiche Strecken k ab, so liegen die Endpunkte auf einer Geraden, die eine Erzeugende der abwickelbaren Parallellfläche ist und außerdem parallel ist zur Erzeugenden auf der gegebenen Fläche. Somit haben auch entsprechende Geraden gleiche Richtungskosinus.

Andere wichtige Beziehungen für Parallellflächen von Abwicklungsflächen ergeben sich aus der Betrachtung der Haupttangentialkurven und Krümmungskurven der Originalfläche.

Bei abwickelbaren Regelflächen fallen die beiden Scharen der Haupttangentialkurven in die Schar der Erzeugenden zusammen, da ihre Gleichung:

$$L \, d u^2 + 2 M \, d u \, d v + N \, d v^2 = 0 \text{ sich auf } d v^2 = 0 \text{ reduziert.}$$

Da sich die Erzeugenden der parallelen Abwicklungsflächen stets entsprechen, so bilden nach dem im ersten Teile (Seite 22) gefundenen Resultate über Haupttangentialkurven die abwickelbaren Regelflächen den Fall, daß sich auf ihren Parallellflächen die Haupttangentialkurven entsprechen.

Bei abwickelbaren Regelflächen wird die eine Schar der Krümmungslinien durch die Erzeugenden (u) gebildet.* Die andere Schar sind die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden, d. i. die Schar der ∞^1 Filarevolventen der Gratlinie der Abwicklungsfläche. Da sich nun die Krümmungslinien auf Parallellflächen immer entsprechen (I. Teil, Seite 16), so entsprechen sich in diesem Falle die Filarevolventen der Gratlinien auf den Parallellflächen.

Eine Reihe anderer wichtiger Sätze über Parallellflächen von Abwicklungsflächen hat Pirondini** aufgefunden, welche im folgenden kurz behandelt werden sollen.

* Scheffers II., p. 135.

** Annali di Matem. Serie II, Bd. 19, p. 247.

Es sei $x = \varphi(v)$, $y = \chi(v)$, $z = \psi(v)$ die Gratlinie C der Tangentenfläche S . Ihr entspricht auf der Parallellfläche $\mathcal{S}$ im Abstände k die Kurve $\mathcal{C}$:

$$x = \varphi + k\lambda, \quad y = \chi + k\mu, \quad z = \psi + k\nu.$$

Faßt man diese Kurve $\mathcal{C}$ als Leitlinie der Erzeugenden der Fläche $\mathcal{S}$ auf, so findet man die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Erzeugenden (u) der Parallellfläche $\mathcal{S}$ durch:

$$x = \varphi + k\lambda + u\alpha, \quad y = \chi + k\mu + u\beta, \quad z = \psi + k\nu + u\gamma,$$

wobei u der Abstand ist auf der Erzeugenden (u) von $\mathcal{C}$ aus gerechnet. Aus den letzten Gleichungen ergibt sich:

$$x_v = \alpha - k \frac{1}{\rho} + u \frac{1}{r} \text{ u. s. w.}$$

Da entsprechende Erzeugende auf Parallellflächen gleiche Richtungskosinus haben, so erhält man für die Richtungskosinus der Tangenten der Gratlinie $\mathcal{C}_1$ auf der Parallellfläche $\mathcal{S}$:

$$x_v = \alpha, \quad y_v = \beta, \quad z_v = \gamma.$$

Daher ist:

$$-k \frac{1}{\rho} + u \frac{1}{r} = 0$$

oder:

$$u = \frac{k r}{\rho}.$$

$k \frac{r}{\rho}$ ist dann die Strecke zwischen entsprechenden Punkten der Leitlinie $\mathcal{C}$ und der Gratlinie $\mathcal{C}_1$ auf $\mathcal{S}$ und die Kurve $\mathcal{C}_1$ ist dargestellt durch:

$$x_1 = \varphi + k \left(\lambda + \frac{r}{\rho} \alpha \right) \dots (a).$$

Analog für y_1 und z_1 .

Die Kurve C , deren Tangentenfläche S ist, ist zugleich geodätische Linie ihrer rektifizierenden Fläche S_1 , die ebenfalls eine Abwicklungsfläche ist. Auf dieser Fläche S_1 sei C_1 eine geodätische Parallele zu C im Abstände k . Die Punkte, in

welchen eine rektifizierende Gerade g die Kurven C und C_1 schneidet, seien A und A_1 . Dann besteht die Gleichung:

$$A A_1 = \frac{k}{\sin \omega},$$

wo ω der Winkel ist, welchen die Gerade g mit der Tangente in A oder A_1 bildet. Sind die Koordinaten des Punktes A (x, y, z), so sind die des Punktes A_1 ausgedrückt durch:

$$x_1 = x + \frac{k}{\sin \omega} \cos (g x)$$

oder:

$$x_1 = \varphi + \frac{k}{\sin \omega} \cos (g x) \text{ u. s. w.}$$

Für die Richtungskosinus der rektifizierenden Geraden gilt bekanntlich:

$$\cos (g x) = \frac{r \alpha + \rho \lambda}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}, \quad \cos (g y) = \frac{r \beta + \rho \mu}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}, \quad \cos (g z) = \frac{r \gamma + \rho \nu}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}.$$

Ist t die Tangente, b die Binormale von C , so ist:

$$\left. \begin{aligned} \cos (g t) &= \cos \omega = \sum \alpha \frac{r \alpha + \rho \lambda}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} \\ \cos (g b) &= \sin \omega = \sum \lambda \frac{r \alpha + \rho \lambda}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} \end{aligned} \right\} \dots (b).$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\rho}{r}.$$

Die Koordinaten des Punktes A_1 sind daher:

$$x_1 = \varphi + k \left(\lambda + \frac{r}{\rho} \alpha \right) \text{ u. s. w. } \dots (c).$$

Die Gleichungen (c) gelten für jeden Punkt A_1 , in dem eine beliebige Gerade g der Kurve C die geodätische Parallele C_1 schneidet; sie sind daher die Gleichungen der Kurve C_1 .

Vergleicht man (c) mit (a), so sieht man, daß die Kurven $\mathcal{C}_1$ und C_1 zusammenfallen. Aus dieser Ableitung ergeben sich folgende Sätze:

Konstruiert man eine Reihe von Parallellflächen $\mathcal{S}$ zu einer Tangentenfläche S , so gilt:

1. Die Gratlinien der Parallellflächen sind alle auf einer und derselben Abwicklungsfläche S_1 , welche die rektifizierende Fläche jener Kurve ist, deren Tangentenfläche S ist.

2. Die Gratlinien dieser Parallellflächen $\mathcal{S}$ bilden auf S_1 eine Reihe von geodätischen Parallelen.

3. Die geodätische Distanz zwischen zwei geodätischen Parallelen ist gleich dem Abstände zweier entsprechender Parallellflächen $\mathcal{S}$.

Die Untersuchung über Parallellflächen von noch spezielleren Tangentenflächen führte Pirondini zu folgenden Schlüssen:

1. Die Gratlinien der Parallellflächen zur Tangentenfläche einer Schraubenlinie sind ebenfalls Schraubenlinien, die auf demselben Zylinder liegen.

2. Die Parallellflächen einer abwickelbaren Regelfläche, deren Gratlinie eine geodätische Linie eines Kegels ist, sind solche Abwicklungsflächen, deren Gratlinien wiederum geodätische Linien sind, und zwar geodätische Linien desselben Kegels, auf dem die Gratlinie der Originalfläche liegt.

3. Konstruiert man zu einem gegebenen Kegel K eine Reihe von Parallellflächen, so sind:

a) Die Gratlinien aller dieser Parallellflächen auf einem zweiten Kegel K_1 , dessen Scheitel mit dem des gegebenen Kegels zusammenfällt.

b) Die Gratlinien aller Parallellflächen zur Kegelfläche K bilden auf K_1 geodätische Parallelen.

III. Teil.

Beispiele über Parallellflächen von Regelflächen.

A.

Die Parallellfläche des hyperbolischen Paraboloides.

Die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloides in rechtwinkligen Koordinaten lautet:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \dots (1).$$

Die Gleichung der Tangentenebene im Punkte (x, y, z) :

$$\frac{x}{a^2} (\xi - x) - \frac{y}{b^2} (\eta - y) + (z - \zeta) = 0.$$

Der Abstand des Koordinatenursprunges von dieser Tangentenebene ist gleich:

$$\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + 1}} \text{ oder: } \frac{z}{W}.$$

Die Richtungskosinus der Normale:

$$X = \frac{x}{a^2 W}, \quad Y = -\frac{y}{b^2 W}, \quad Z = -\frac{1}{W}.$$

Man hat daher für die Gleichung der Parallellfläche:

$$\xi = x \left(1 + \frac{k}{a^2 W} \right), \quad \eta = y \left(1 - \frac{k}{b^2 W} \right), \quad \zeta = z - \frac{k}{W} \dots (2).$$

Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides in Parameterform lautet:

$$x = a \cdot \frac{u+v}{2}, \quad y = b \cdot \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{uv}{2} \dots (3).$$

Nimmt man u konstant und eliminiert man v , so bekommt man:

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad \frac{2z}{u} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \dots (4).$$

Die Elimination von u für $v = \text{konst.}$ gibt:

$$v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \quad \frac{2z}{v} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \dots (5).$$

Die Elimination von u und v in (4) und (5) gibt die gewöhnliche Form:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Zugleich sieht man aus (4) und (5), daß die beiden Geraden-scharen des Paraboloides die Parameterlinien (u) und (v) sind.

Die Fundamentalgrößen der Fläche (3) sind:

$$E = \Sigma x_u^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + v^2)$$

$$F = \Sigma x_u x_v = \frac{1}{4} (a^2 - b^2 + u v)$$

$$G = \Sigma x_v^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + u^2)$$

$$D^2 = E G - F^2 = \frac{1}{16} \left\{ (2ab)^2 + [a(u-v)]^2 + [b(u+v)]^2 \right\}.$$

$$L = \Sigma X x_{uu} = 0$$

$$M = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{v}{2} & \frac{u}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2D} \left(\frac{ab}{4} + \frac{ab}{4} \right) = -\frac{ab}{4D}.$$

$$N = \Sigma X x_{vv} = 0.$$

Die Richtungskosinus der Normale in einem Punkte der Fläche:

$$X = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{D} = -\frac{b(u+v)}{4D}$$

$$Y = \frac{z_u x_v - z_v x_u}{D} = -\frac{a(u-v)}{4D}$$

$$Z = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{D} = -\frac{ab}{2D}$$

Daher die Gleichung der Parallellfläche:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(u+v) + \frac{kb}{4D}(u+v) = \frac{1}{2}(u+v) \left(a + \frac{kb}{2D} \right) \\ y &= \frac{b}{2}(u-v) - \frac{ka}{4D}(u-v) = \frac{1}{2}(u-v) \left(b - \frac{ka}{2D} \right) \\ z &= \frac{uv}{2} - \frac{kab}{2D} = \frac{1}{2} \left(uv - \frac{kab}{D} \right) \end{aligned} \right\} \dots (6).$$

Für die Krümmung des Paraboloides findet man:

$$H = \frac{-2FM}{D^2} = \frac{2ab(a^2 - b^2 + uv)}{16D^3}$$

$$K = \frac{-M^2}{D^2} = -\left(\frac{ab}{4D^2} \right)^2$$

Die Fundamentalgrößen I. und II. Ordnung und die Krümmung der Parallellfläche (6) findet man aus den allgemeinen Formeln (I. Teil, Gleichung 6, 9, 10):

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4} \left(1 + k^2 \frac{a^2 b^2}{16D^4} \right) (a^2 + b^2 + v^2)$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k^2 a^2 b^2}{16D^4} \right) (a^2 - b^2 + uv) + \frac{kab}{2D}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{k^2 a^2 b^2}{16D^4} \right) (a^2 + b^2 + u^2).$$

$$\mathfrak{L} = -\frac{k a^2 b^2}{32 D^4} (a^2 + b^2 + v^2)$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{a b}{4 D} + k \left[\frac{a^2 b^2}{32 D^2} (a^2 - b^2 + u v) \right]$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{k a^2 b^2}{32 D^4} (a^2 + b^2 + u^2).$$

$$\mathfrak{S} = \frac{2 a b (a^2 - b^2 + u v) D + 2 k a^2 b^2}{16 D^4 - 2 k a b (a^2 - b^2 + u v) D - k^2 a^2 b^2}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{a^2 b^2}{16 D^4 - 2 k a b (a^2 - b^2 + u v) D - k^2 a^2 b^2}$$

Zur besseren Kenntnis der Parallellfläche des hyperbolischen Paraboloides gelangt man durch die Untersuchung der den Hauptschnitten entsprechenden Kurven auf der Parallellfläche.

Der Schnitt der Fläche (1) mit der XZ -Ebene muß, wie geometrisch klar ist, die Parallelkurve der entsprechenden Hauptschnittparabel des Paraboloides, deren Gleichung $x^2 = 2 a^2 z$ ist, enthalten. Nach (2) ist die Gleichung dieser Parallelkurve:

$$\mathfrak{x} = x \left(1 + \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^4}} \right), \quad \mathfrak{z} = z - \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^4}} \dots (7).$$

Wählt man die Normale, respektive das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{x^2 + a^4}$ so, daß für $k > 0$ die Parallelkurve die Gleichung hat:

$$\mathfrak{x} = x \left(1 - \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^4}} \right), \quad \mathfrak{z} = z + \frac{k a^2}{\sqrt{x^2 + a^4}},$$

so erhält man für: 1. $x = 0, \quad z = 0$

$$\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{z} = k$$

$$2. \quad x = \pm \sqrt{k^2 - a^4}, \quad z = \frac{k^2 - a^4}{2 a^2}$$

$$\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{z} = \frac{k^2 + a^4}{2 a^2}.$$

Der Fall 2. bestimmt einen Doppelpunkt, indem in ihm zwei Normalen zusammenkommen (siehe Figur Seite 27). Er wird aber nur reell, wenn $k > a^2$ ist, was auch im folgenden vorausgesetzt sein soll. Für $k = a^2$ fällt der Punkt mit den unter 1. bestimmten Punkt zusammen.

Ferner ist:

$$\xi = x \left(1 - \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^4}} \right) < 0,$$

wenn für $x > 0$, $k > \sqrt{a^4 + x^2}$, also $x^2 < k^2 - a^4$ ist. Vom Punkte ($\xi = 0$, $\eta = k$) bis zum Doppelpunkte liegt daher der dem positiven x entsprechende Teil der Kurve auf der negativen Seite der X -Achse.

Das Minimum erhält man aus:

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - \frac{k a^4}{\sqrt{(x^2 + a^4)^3}} = 0,$$

also für $x^2 = \sqrt[3]{k^2 a^8 - a^4}$ und somit für $z = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{k^2 a^2 - a^2} \right)$.

Die zugehörigen Werte von ξ und η sind:

$$\xi = -a^2 \left(\sqrt[3]{\frac{k^2}{a^4} - 1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(3 \sqrt[3]{k^2 a^2 - a^2} \right).$$

Dieses Minimum kann nach der Größe von k innerhalb oder außerhalb der Parabel liegen.

Um den Verlauf der Kurve (7) besser kennen zu lernen, bestimme man den Krümmungsmittelpunkt r der Parabel $z = \frac{x^2}{2a^2}$ und vergleiche mit ihm die Größe k . Es ist:

$$z' = \frac{x}{a^2}, \quad z'' = \frac{1}{a^2}.$$

Die Koordinaten (m, n) des Krümmungsmittelpunktes sind:

$$m = x - x \left(1 + \frac{x^2}{a^4} \right) = -\frac{x^3}{a^4}$$

$$n = \frac{x^2}{2a^2} + a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^4} \right) = \frac{3x^2}{2a^2} + a^2$$

und daher:

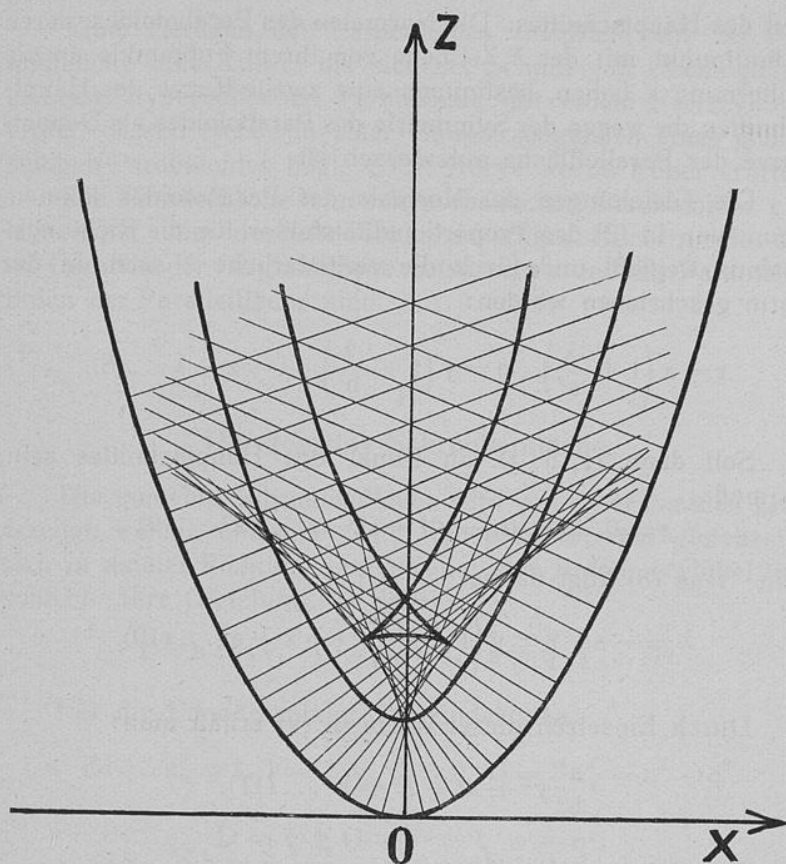
$$r = a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(a^4 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6}.$$

Für $x=0$ ist $r=a$. Der Krümmungsradius wächst mit wachsendem x . Die Evolute der Parabel ist eine semikubische Kurve, die sogenannte Neilsche Parabel. Solange nun $r < k$ ist, befindet sich der auf einer Normale liegende Punkt der Parallelkurve (von der Parabel aus gerechnet) jenseits des Schnittpunktes mit der nächsten Normale. Weil r anfangs langsam wächst, so muß, da k stets konstant bleibt, die Parallelkurve gewissermaßen rückläufig werden und wird ihre konkave Seite der Z -Achse zuwenden. Für $r=k$ fällt die Parallelkurve mit der Evolute zusammen. Wenn aber $r > k$ wird, liegt auf jeder Normale der Kurvenpunkt näher an der Parabel als das Krümmungszentrum; die Parallelkurve verläuft also mit der Parabel nach derselben Seite und bekommt eine ihr ähnliche Gestalt und durchschneidet im Doppelpunkt die Z -Achse und wendet vor dem Durchschnitt mit der Z -Achse die konvexe Seite nach dem Durchschnitt die konkave Seite der Z -Achse zu. Die Kurve muß also für $r=k$ einen Rückkehrpunkt haben. Für $r=k$ bekommt man:

$$k a^4 = \sqrt{(a^4 + x^2)^3}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{a^8 k^2 - a^4}.$$

Dieser Rückkehrpunkt ist also das früher berechnete Minimum. Die Parallelkurve muß daher ungefähr folgenden Verlauf haben:



In der Figur ist die Evolute der Parabel, dann die Parallelkurve für $k > a^2$ und eine Parallelkurve für $k < a^2$ eingezeichnet.

Der Schnitt des hyperbolischen Paraboloides mit der YZ -Ebene liefert ebenfalls die Parallelkurve der Hauptschnittparabel. Ihre Gleichung ist:

$$\eta = y \left(1 + \frac{k}{\sqrt{y^2 + b^4}} \right), \quad \zeta = z + \frac{k b^2}{\sqrt{y^2 + b^4}}.$$

Diese Kurve hat keine besonderen Eigentümlichkeiten, wie es sich geometrisch leicht einsehen läßt; sie ist im allgemeinen der Parabel ziemlich ähnlich. Diese Parabel ist aber nur ein

Teil des Hauptschnittes. Die Normalen des Paraboloides, deren Schnittpunkt mit der YZ -Ebene von ihrem Fußpunkte an die Entfernung k haben, bestimmen eine zweite Kurve des Hauptschnittes, die wegen der Symmetrie des Paraboloides als Doppelkurve der Parallellfläche aufzufassen ist.

Die Gleichungen der Normale des Paraboloides können, wenn man in (2) den Proportionalitätsfaktor für die Richtungskosinus wegläßt und für k die veränderliche λ setzt, in der Form geschrieben werden:

$$\xi = x \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right), \quad \eta = y \left(1 - \frac{\lambda}{b^2} \right), \quad \zeta = z - \lambda \dots (8).$$

Soll dann (ξ, η, ζ) ein Punkt des Hauptschnittes sein, so muß:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2 \dots (9)$$

sein. Aus (8) folgt dann:

$$\lambda = -a^2, \quad \eta = y \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right), \quad \zeta = z + a^2 \dots (10).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (9) erhält man:

$$\frac{a^4}{b^4} y^2 + x^2 + a^4 = k^2 \dots (11).$$

Aus (10) und (11) folgt:

$$y = \frac{b^2 \eta}{a^2 + b^2}, \quad z = \zeta - a^2, \quad x^2 = -\frac{\eta^2 a^4}{(a^2 + b^2)^2} + k^2 - a^4.$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides (1) gibt:

$$-\frac{\eta^2 a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{k^2 - a^4}{a^2} - \frac{b^2 \eta^2}{(a^2 + b^2)^2} = 2(\zeta - a^2)$$

oder:

$$\eta^2 = (a^2 + b^2) \left(\frac{a^4 - k^2}{a^2} - 2\zeta \right).$$

Das ist die Gleichung einer Parabel.

Einer Geraden des Paraboloides entspricht auf der Parallellfläche eine Kurve, die sich als Schnitt von einem gleichseitigen, hyperbolischen Paraboloid mit einem Kreiszylinder ergibt, dessen Achse in einer Hauptzeugenden eines gleichseitigen Paraboloides liegt. Diese Kurve wurde früher erörtert.

Die Parallellfläche eines hyperbolischen Paraboloides enthält somit eine doppelte Schar derartiger Kurven, die den ∞^2 Geraden der Originalfläche entsprechen und die Parameterlinien der Parallellfläche sind.

B.

Die gemeine Schraubenfläche.

Die gemeine Schraubenfläche wird von einer geraden Linie erzeugt, welche um eine feste Achse rotiert und gleichzeitig sich in axialer Richtung proportional dem Rotationswinkel verschiebt. Ihre Gleichung ist daher:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = q \cdot v \dots (1).$$

Für die Fundamentalgrößen findet man:

$$E = \sum x_u^2 = 1, \quad F = \sum x_u x_v = 0, \quad G = \sum x_v^2 = u^2 + q^2.$$

$$D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + q^2}.$$

$$L = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0, \quad N = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

$$M = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = -\frac{q}{\sqrt{u^2 + q^2}}.$$

$$\text{Außerdem ist } H = 0, \quad K = -\frac{q^2}{(u^2 + q^2)^2}.$$

Da L und N verschwinden, so sind die Parameterlinien die Haupttangentialkurven, die, weil auch $F = 0$ ist, aufeinander

senkrecht stehen. Die Achse der Schraubenfläche ist Striktionslinie der Erzeugenden und orthogonale Trajektorie derselben.

Die Richtungskosinus der Normale in einem Punkte der Fläche sind:

$$X = \frac{q \cdot \sin v}{\sqrt{u^2 + q^2}}, \quad Y = -\frac{q \cdot \cos v}{\sqrt{u^2 + q^2}}, \quad Z = \frac{u}{\sqrt{u^2 + q^2}}.$$

Die Gleichung der Parallellfläche daher:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + k X = u \cos v + k \cdot \frac{\sin v \cdot q}{\sqrt{u^2 + q^2}} \\ \eta &= y + k Y = u \sin v - k \cdot \frac{\cos v \cdot q}{\sqrt{u^2 + q^2}} \\ \zeta &= z + k Z = q \cdot v + k \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + q^2}} \end{aligned} \right\} \dots (2).$$

Ihre Fundamentalgrößen sind (nach den Formeln (6) und (9) des ersten Teiles):

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= 1 + \left(\frac{k q}{u^2 + q^2} \right)^2, \quad \mathfrak{F} = -\frac{2 k q}{\sqrt{u^2 + q^2}}, \quad \mathfrak{G} = 1 + \frac{k^2 q^2}{u^2 + q^2} \\ \mathfrak{L} &= -\frac{k q^2}{(u^2 + q^2)^2}, \quad \mathfrak{M} = -\frac{q}{\sqrt{u^2 + q^2}}, \quad \mathfrak{N} = -\frac{k q^2}{u^2 + q^2} \\ \mathfrak{H} &= \frac{2 k q^2}{(u^2 + q^2)^2 - k^2 q^2}, \quad \mathfrak{R} = -\frac{q^2}{(u^2 + q^2)^2 - k^2 q^2}. \end{aligned}$$

Aus den zwei letzten Ausdrücken für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{R}$ folgt, daß $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}} = -2k$ also konstant ist, was ja für alle Parallellflächen von Regelflächen nachgewiesen wurde.

Den Parameterlinien (u) entsprechen Kurven, die schon früher diskutiert und als Schnitt von hyperbolischen Paraboloiden und Kreiszyklindern erkannt wurden. In diesem Falle

ergibt sich das auch sehr einfach für die der X-Achse entsprechende Kurve. Für die Punkte der Fläche (1), die auf der X-Achse liegen, ist $v = 0$. Aus (2) erhält man dann:

$$\begin{aligned} x &= u, \quad y = -\frac{kq}{\sqrt{u^2 + q^2}} = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + q^2}} \\ z &= \frac{ku}{\sqrt{u^2 + q^2}} = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + q^2}} \\ \left. \begin{aligned} \frac{y}{z} &= -\frac{q}{x} \quad \text{oder} \quad xy = -q \cdot z \\ y^2 + z^2 &= k^2 \end{aligned} \right\} \dots (3). \end{aligned}$$

Die der X-Achse korrespondierende Kurve ist also der Schnitt dieser beiden Flächen (3), die ein hyperbolisches Paraboloid mit den Haupterzeugenden als Koordinatenachsen und einen Zylinder mit der X-Achse als Achse darstellen.

Die Gleichung der Parameterlinie ($v, u = c$), auf der Parallellfläche lautet nach (2):

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cdot \cos v + \frac{kq}{\sqrt{c^2 + q^2}} \cdot \sin v, \quad y = c \cdot \sin v - \frac{kq}{\sqrt{c^2 + q^2}} \cdot \cos v \\ z &= \frac{kc}{\sqrt{c^2 + q^2}} + qv \end{aligned} \right\} (4).$$

Diese Gleichungen stellen eine gemeine Schraubenlinie dar, die der Punkt $\mathfrak{P} \equiv \left(x = c, \quad y = -\frac{kq}{\sqrt{c^2 + q^2}}, \quad z = \frac{kc}{\sqrt{c^2 + q^2}} \right)$ bei einer stetigen Schraubung um die Z-Achse ausführt.* Dieser Punkt ist aber der dem Punkte $P \equiv (x = c, \quad y = 0, \quad z = 0)$ entsprechende Punkt.

Den Parameterlinien (v), d. i. den Schraubenlinien der Originalfläche, entsprechen also auf der Parallellfläche eben-

* Scheffers I., p. 157.

falls Schraubenlinien mit derselben Achse und Höhe des Schraubenganges.

Der Achse der Schraubung oder der Striktionslinie, für welche $u = 0$ ist, entspricht die Kurve:

$$x = k \cdot \sin v, \quad y = -k \cdot \cos v, \quad z = q v \dots (5).$$

Diese Schraubenlinie (4) liegt auf dem Zylinder:

$$x^2 + y^2 = k^2 \dots (5).$$

Es kann auch noch Punkte der Parallellfläche geben, welche innerhalb dieses Zylinders liegen. Denn die Schraubenlinien (v),

die durch die Punkte $\left(x = u, \quad y = -\frac{k q}{\sqrt{u^2 + q^2}}, \quad z = \frac{k u}{\sqrt{u^2 + q^2}} \right)$

beschrieben werden, liegen auf Zylindern, welche zwar mit dem Zylinder (5) dieselbe Achse haben, deren Radien aber

$$\sqrt{u^2 + \frac{q^2 k}{u^2 + q^2}}$$

betragen. Ist:

$$u^2 + \frac{k^2 q^2}{u^2 + q^2} < k^2$$

oder:

$$u^2 < k^2 - q^2,$$

so sind alle jene Linien (v) der Parallellfläche, für welche $u^2 < k^2 - q^2$ ist, innerhalb und für welche $k^2 < u^2 + q^2$ ist, außerhalb des Zylinders (5).

Die Berechnung des Winkels ω , den eine (u) Linie der Parallellfläche mit der (v) Linie, welche der Achse der Schraubenfläche entspricht, bildet, gibt nach der Formel $\cos w = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G} \mathfrak{G}}}$

für den Wert $u = 0$:

$$\cos \omega = \frac{2 k}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2\right] \cdot (1 + k^2)}} = \frac{2 k q}{\sqrt{(q^2 + k^2) (1 + k^2)}} = \text{konst.}$$

C.

Die abwickelbare Schraubenfläche.

Soll eine Schraubenfläche abwickelbar sein, so muß die Erzeugende eine Gerade sein und eine feste Schraubenlinie als Gratlinie der Fläche beständig berühren.

Die Gleichung dieser Gratlinie sei:

$$x_0 = p \cos \vartheta \cdot \cos v, \quad y_0 = p \cos \vartheta \cdot \sin v, \quad z_0 = p \sin \vartheta \cdot v \dots (1).$$

Die Richtungskosinus der Tangenten sind:

$$-\cos \vartheta \cdot \sin v, \quad \cos \vartheta \cdot \cos v, \quad \sin \vartheta.$$

Daher lautet die Gleichung der abwickelbaren Schraubenfläche:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \vartheta (p \cos v - u \sin v) \\ y &= \cos \vartheta (p \sin v + u \cos v) \\ z &= \sin \vartheta (p v + u) \end{aligned} \right\} \dots (2).$$

Daraus bekommt man zur Berechnung der Fundamentalgrößen:

$$\begin{aligned} x_u &= -\cos \vartheta \sin v & x_v &= -\cos \vartheta (p \sin v + u \cos v) \\ y_u &= \cos \vartheta \cos v & y_v &= \cos \vartheta (p \cos v + u \sin v) \\ z_u &= \sin \vartheta & z_v &= p \sin \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{uu} &= 0 & x_{uv} &= -\cos \vartheta \cos v & x_{vv} &= -\cos \vartheta (p \cos v - u \sin v) \\ y_{uu} &= 0 & y_{uv} &= -\cos \vartheta \sin v & y_{vv} &= -\cos \vartheta (p \sin v + u \cos v) \\ z_{uu} &= 0 & z_{uv} &= 0 & z_{vv} &= 0. \end{aligned}$$

Daher:

$$E = 1, \quad F = p, \quad G = p^2 + u^2 \cos^2 \vartheta, \quad D = u \cos \vartheta.$$

Die Richtungskosinus der Flächennormale:

$$\sin \vartheta \sin v, \quad -\sin \vartheta \cos v, \quad \cos \vartheta.$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = u \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Die Krümmung der Fläche ist:

$$K = \frac{LN - M^2}{D^2} = 0, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{D^2} = \frac{\text{tg } \vartheta}{u}.$$

Die Gleichungen der Parallellfläche der abwickelbaren Schraubenfläche lauten:

$$\left. \begin{aligned} x &= (p \cos v - u \sin v) \cos \vartheta + k \sin \vartheta \sin v \\ y &= (p \sin v + u \cos v) \cos \vartheta - k \sin \vartheta \cos v \\ z &= (p v + u) \sin \vartheta + k \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots (3).$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} x &= p \cos \vartheta \cos v + (k \sin \vartheta - u \cos \vartheta) \sin v \\ y &= p \cos \vartheta \sin v - (k \sin \vartheta - u \cos \vartheta) \cos v \\ z &= p \sin \vartheta \cdot v + (k \cos \vartheta + u \sin \vartheta) \end{aligned} \right\}$$

Die Fundamentalgrößen der Parallellfläche:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= 1, \quad \mathfrak{F} = p, \quad \mathfrak{G} = p^2 + (k \sin \vartheta - u \cos \vartheta)^2 \\ \mathfrak{L} &= 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = \sin \vartheta (u \cos \vartheta - k \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Die Krümmung:

$$\mathfrak{K} = 0, \quad \mathfrak{H} = \frac{\sin \vartheta}{u \cos \vartheta - k \sin \vartheta}.$$

Den Geraden (u) der abwickelbaren Fläche entsprechen, wie schon erwähnt, parallele Geraden auf der Parallellfläche. Einer (v) Linie, für die $u = c$ ist, entspricht die Kurve:

$$\left. \begin{aligned} x &= p \cos \vartheta \cos v + (k \sin \vartheta - c \cos \vartheta) \sin v \\ y &= p \cos \vartheta \sin v - (k \sin \vartheta - c \cos \vartheta) \cos v \\ z &= p \sin \vartheta \cdot v + (k \cos \vartheta + c \sin \vartheta) \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Die Gleichungen (4) stellen eine Schraubenlinie dar, die der Punkt ($u = c, v = 0$), d. i. der Punkt:

$$(p \cos \vartheta, -k \sin \vartheta + c \cos \vartheta, k \cos \vartheta + c \sin \vartheta)$$

bei einer stetigen Schraubung um die Z-Achse beschreibt.

Für $c = 0$ bekommt man:

$$\begin{aligned} x &= p \cos \vartheta \cos v + k \sin \vartheta \sin v \\ y &= p \cos \vartheta \sin v - k \sin \vartheta \cos v \\ z &= p \sin \vartheta \cdot v + k \cos \vartheta. \end{aligned}$$

* Jahresbericht Hall 1912, p. 10 ff.

Dies ist die entsprechende Kurve der Gratlinie der Schraubenfläche. Sie liegt auf dem Zylinder mit dem Radius:

$$\sqrt{p^2 \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Nach einem früher erwähnten Satze von Pirondini liegen die Gratlinien aller Parallellflächen einer abwickelbaren Schraubenfläche als Schraubenlinien auf einem gemeinsamen Zylinder, auf dem auch die Gratlinie der Parallellfläche liegt. Um die Schraubenlinie, die Gratlinie der Parallellfläche im Abstände k ist, zu finden, muß man in (4)

$$c = k \operatorname{tg} \vartheta$$

setzen und erhält dann:

$$\left. \begin{aligned} x &= p \cos \vartheta \cdot \cos v \\ y &= p \cos \vartheta \cdot \sin v \\ z &= \frac{k}{\cos \vartheta} + p \sin \vartheta \cdot v \end{aligned} \right\} \dots (5).$$

Dies ist die einzige Schraubenlinie der Parallellfläche, welche auf dem Zylinder der Originalschraubenlinie oder der Gratlinie der abwickelbaren Schraubenfläche liegt. Sie ist daher die Gratlinie der Parallellfläche.

Um den Abstand der beiden Gratlinien zu berechnen, die zwei geodätische Parallelen auf demselben Zylinder sind, bezeichne man mit A und A_1 die Punkte, in welchen eine Erzeugende g des Zylinders die zwei geodätischen Parallelen trifft, mit ω den Winkel, unter welchem sie diese schneidet und mit k die geodätische Distanz der beiden Punkte A und A_1 ; dann gilt:

$$A A_1 = \frac{k}{\sin \omega}.$$

Die Erzeugende g hat die Richtung der Z -Achse. Ist t die Tangente im Punkte A , so ist:

$$\cos(tz) = \cos(tg) = \frac{dz_0}{ds_0} = \sin \vartheta,$$

oder weil $\angle \hat{t}g + \omega$:

$$\cos \omega = \sin \vartheta, \text{ d. h. } |\omega| = 90 - \vartheta.$$

Daher ist:
$$A A_1 = \frac{k}{\cos \vartheta}.$$

Die letzte Gleichung beweist aber, daß die normale Entfernung der beiden Gratlinien gleich k ist, also gleich der Entfernung der beiden Parallellflächen.

Das Flächenelement der abwickelbaren Schraubenfläche ist $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv = u \cos \vartheta \cdot du dv$ und die Fläche, welche von den Erzeugenden $v=0$, $v=v$ und den Schraubenlinien $u=0$, $u=u$ begrenzt wird, ist gegeben durch:

$$S = \int_0^v \int_0^u u \cos \vartheta du dv = \frac{1}{2} v u^2 \cos \vartheta.$$

Die Radien der beiden Zylinder, auf denen die Schraubenlinie $u=0$ und $u=u$ liegen, sind:

$$r_0 = p \cos \vartheta, \quad r = \sqrt{p^2 + u^2} \cdot \cos \vartheta.$$

Die Größe der entsprechenden Fläche auf der Parallellfläche ist dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_0^v \int_0^u (u \cos \vartheta - k \sin \vartheta) du dv \\ &= \frac{1}{2} u v (u \cos \vartheta - 2 k \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Dieses Flächenstück liegt auf zwei koaxialen Zylindern mit den Radien:

$$r_0 = \sqrt{p^2 \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta}, \quad r = \sqrt{p^2 \cos^2 \vartheta + (k \sin \vartheta - u \cos \vartheta)^2}.$$

Die Fläche zwischen zwei Erzeugenden und zwei beliebigen koaxialen Zylindern ist auf der Originalfläche:

$$S - S_1 = \frac{v}{2} (u^2 - u_1^2) \cos \vartheta$$

und auf der Parallellfläche:

$$\mathcal{S} - \mathcal{S}_1 = \frac{1}{2} v [(u^2 - u_1^2) \cos \vartheta - 2 k (u - u_1) \sin \vartheta].$$

