

Die Theorie

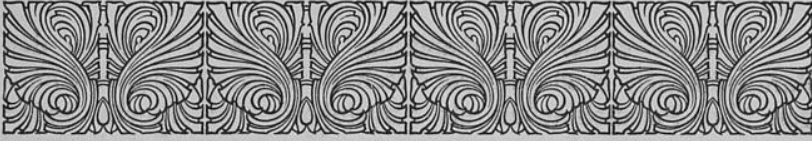
der Parallellflächen einer gegebenen Fläche
mit besonderer Berücksichtigung der Par-
allellflächen von Regelflächen.



Die Theorie

der mathematischen Logik
und der Mengenlehre
von Georg Cantor

1895



Die Theorie der Parallellflächen einer gegebenen Fläche mit besonderer Berücksichtigung der Parallellflächen von Regelflächen.

Die Theorie der Parallellflächen ist aus der Theorie der Parallellkurven entstanden. Bordoni¹ und Reis² dürften sich wohl zuerst mit den Problemen der letzteren beschäftigt haben. Cauchy³ definierte die Parallelkurve als die Enveloppe eines Kreises, der auf der gegebenen Kurve rollt. Catalan⁴, Salmon⁵ und Fiedler⁶ besorgten die weitere Ausbildung der Theorie der Parallelkurven.

Cayley⁷ und S. Roberts⁸ haben im besondern die Parallelkurven der Kegelschnitte behandelt. S. Roberts befaßte sich auch, angeregt durch die zahlreichen, bereits vorhandenen Untersuchungen über Parallelkurven, eingehender mit der Theorie der Parallellflächen, die schon Bordoni, Reis und Bonnet⁹ begonnen hatten. Zunächst veröffentlichte¹⁰ er die allgemeinen Eigenschaften der Parallellflächen von Flächen II. Grades. Analog wie Cauchy definierte er diese als die Enveloppen von Kugeln, die sich auf einer Fläche fortbewegen.

¹ „Distanza di linee e di superficie con normali comuni.“ Pavia 1822.

² „Parallele Kurven und Oberflächen.“ Diss. Göttingen 1825.

³ Compt. rend. XIII. 1841.

⁴ Nouv. Annales de Math. III. 1844.

⁵ Salmon, „Treatise on the higher plane curves“. 1852.

⁶ Grunerts Archiv, Bd. 39. 1862.

⁷ Quarterly Journal XI.

⁸ Quarterly Journal XII.

⁹ Nouv. Annales de Math. XII. 1853.

¹⁰ Proceedings of the London Math. Soc. IV. 1874.

In einer weiteren Abhandlung¹ wendete er sich zu den Parallellflächen abwickelbarer Flächen. Spezielle Untersuchungen über Parallellflächen als Enveloppen von Kugeln finden sich noch in den Dissertationen von Neumann², Schulze³ und A. Ahrendt⁴.

Alle bis jetzt Genannten haben hauptsächlich vom algebraischen Standpunkte aus die Parallellflächen behandelt. Sie untersuchten die numerischen Charaktere und Singularitäten der Parallellflächen einer gegebenen Fläche, die als Fläche von bestimmter Ordnung und bestimmter Klasse angenommen wurde, und gaben die Charakteristiken und Singularitäten der auf Parallellflächen sich entsprechenden Kurven an.

In wesentlich anderer Weise versuchte es Craig⁵, die Probleme der Parallellflächen zu lösen, indem er die Gauss'sche Parameterdarstellung der Flächen und die Fundamentalgrößen I. und II. Ordnung in Anwendung brachte. Er fand eine Reihe von Beziehungen zwischen diesen Größen eines Ellipsoides und dessen Parallellfläche und zeigte, daß einige dieser Beziehungen auch allgemeine Geltung haben. Nach derselben Methode von Craig behandelten Chini⁶ die Parallellflächen konstanter mittlerer Krümmung, A. Mannheim⁷ die Beziehungen und Eigenschaften von speziellen Kurven, die sich auf Parallellflächen entsprechen, Thompson⁸ einige einfache Systeme von Parallellflächen, Pirondini⁹ die Parallellflächen abwickelbarer Flächen.

Von Wasteels¹⁰ erschien eine Arbeit über Normalschnitte zweier Parallellflächen und über den Zusammenhang der Krümmungsradien beider Flächen.

¹ Proceedings of the London Math. Soc. V. 1875.

² „Untersuchungen über die Parallellfläche des Ellipsoides.“ Diss. Halle 1878.

³ „Über die Parallellfläche des ellipt. Paraboloides.“ Diss. Halle 1886.

⁴ „Untersuchungen der Parallellflächen der Flächen II. Grades.“ Diss. Rostock 1888.

⁵ „On the parallel surface to the ellipsoid.“ Crell. Journ. XCIII. und „Note on parall. surf.“ Crell. Jour. XCIV.

⁶ „Sulle superficie a curvatura media costante.“ Giorn. di mat. XXVII.

⁷ „Sur les Surf. Parall.“ Proceedings of the London Math. Soc. XII. 1881.

⁸ „Simple pairs of parallel W-surfaces.“ Americ. Journ. XXIV.

⁹ Annali di Mat. Milano. XIX.

¹⁰ „Sur les surfac. parall.“ Mathesis, Paris (3) VIII. 1908.

Dies ist im wesentlichen die ganze Literatur, die sich bezüglich der Parallellflächen vorfindet. Vorliegende Arbeit soll im ersten Teile eine allgemeine Theorie der Parallellflächen darstellen, in der die bisher bekannten Einzelresultate im Zusammenhang, wie es zum Teil bereits von P. Cataneo¹ geschah, jedoch in etwas veränderter und vielfach vereinfachter Beweisführung wiedergegeben sind. Der zweite Teil wird sich mit der Theorie der Parallellflächen von Regelflächen im allgemeinen und der abwickelbaren Flächen im besonderen befassen. Zum Schlusse sollen noch die im ersten und zweiten Teile gewonnenen Resultate an einigen Beispielen zur Anwendung kommen.

Die Bezeichnungen der einzelnen auf Flächen sich beziehenden Größen sind größtenteils dieselben wie die in Scheffers „Einführung in die Theorie der Flächen“. 1902.

Definition und Darstellung der Parallellflächen und ihre Beziehung zur ursprünglichen Fläche.

Man kann sich die Parallellfläche einer gegebenen Fläche auf verschiedene Art entstanden denken. Sie kann, wie schon erwähnt, erzeugt werden durch das Zentrum einer Kugel von konstantem Halbmesser, die eine gegebene Fläche berührt und sich auf ihr bewegt, oder sie kann als Enveloppe derjenigen Ebenen aufgefaßt werden, die zu den Tangentenebenen der Fläche parallel sind und in einem konstanten, positiven oder negativen Abstände von ihnen liegen. Die Parallellfläche kann auch gebildet werden durch einen Punkt A_1 auf einer Geraden, die sich so bewegt, daß sie stets in einem zweiten Punkte A_2 normal zur Fläche bleibt. Die Punkte A_1 und A_2 sind korrespondierende Punkte, die Linien, die A_1 und A_2 bei der Bewegung der Geraden beschreiben, sind korrespondierende Linien, ihre Richtungen in entsprechenden Punkten korrespondierende Tangenten. Eine Parallellfläche kann man schließlich auch dadurch erhalten, daß man auf der Normalen eines jeden Punktes der ursprünglichen Fläche nach der einen oder anderen

¹ „Nozioni fondamentali sulle superficie paralleli.“ Giorn. di mat. XLIII.

Seite, d. i. nach der positiven oder negativen Richtung der Normalen, von ihrem Fußpunkte aus eine konstante Strecke abträgt. Zwei Flächen, deren korrespondierende Punkte um die Strecke $\pm k$ von der gegebenen Fläche entfernt und im allgemeinen von einander und der Originalfläche sehr verschieden sind, heißen äquidistante Parallellflächen.

Es ist, wie Craig bemerkt, zweckmäßiger, jede der beiden äquidistanten Flächen getrennt für sich zu betrachten, anstatt beide zugleich als Enveloppe einer Kugel aufzufassen, deren Mittelpunkt sich auf der Fläche bewegt.

Um zur Darstellung der Parallellfläche einer beliebigen Fläche zu gelangen, denke man sich diese in Parameterdarstellung gegeben:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \dots (1).$$

Trägt man auf allen Normalen dieser Fläche von dem Fußpunkte P aus die konstante Strecke $P\mathfrak{P}$ nach einer und derselben Seite der Fläche auf, so ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Strecken dargestellt in den laufenden Koordinaten ξ, η, ζ durch:

$$\xi = x(u, v) + X \cdot P\mathfrak{P}, \quad \eta = y(u, v) + Y \cdot P\mathfrak{P}, \quad \zeta = z(u, v) + Z \cdot P\mathfrak{P},$$

worin X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen im Punkte (u, v) bedeuten und Funktionen von u und v sind. Setzt man $k = \pm P\mathfrak{P}$, je nachdem man $P\mathfrak{P}$ gleich oder entgegengesetzt ist der positiven Richtung der Normalen der Fläche (1), dann sind die Ausdrücke für die Koordinaten der Parallellfläche:

$$\xi = x + kX, \quad \eta = y + kY, \quad \zeta = z + kZ \dots (2).$$

Bezeichnet man mit S eine beliebig gegebene Fläche und mit $\mathcal{S}$ eine ihrer Parallellflächen, so gilt stets folgende allgemeine Beziehung:

„Trägt man auf den Normalen einer Fläche eine konstante Strecke k auf, so ist der Ort der Endpunkte eine Fläche, deren Tangentenebenen den Tangentenebenen der Originalfläche in entsprechenden Punkten parallel sind, so daß beide Flächen dasselbe Normalensystem und somit auch dasselbe sphärische Bild haben.“

Denn aus den Formeln für die Richtungskosinus der Normalen der Fläche S:

$$X = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Y = \frac{z_u x_v - z_v x_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Z = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{\sqrt{EG - F^2}} \dots (3)$$

und aus:

$$\Sigma X^2 = 1$$

findet man sofort:

$$\begin{aligned} \Sigma X x_u &= 0 & \Sigma X x_v &= 0 \\ \Sigma X X_u &= 0 & \Sigma X X_v &= 0. \end{aligned}$$

Differenziert man die Gleichungen (2) nach u und v, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_u &= x_u + k X_u, & y_u &= y_u + k Y_u, & z_u &= z_u + k Z_u \\ x_v &= x_v + k X_v, & y_v &= y_v + k Y_v, & z_v &= z_v + k Z_v \end{aligned} \dots (4),$$

somit:

$$\begin{aligned} \Sigma X x_u &= \Sigma X x_u + k \Sigma X X_u = 0 \\ \Sigma X x_v &= \Sigma X x_v + k \Sigma X X_v = 0 \end{aligned} \dots (5).$$

Die Gleichungen (5) sagen aus, daß der Punkt (x, y, z) der neuen Fläche $\mathcal{S}$ dieselbe Normale hat wie der entsprechende Punkt (x, y, z) der Fläche S.

Aus dem Umstande, daß dieselben Normalen der Fläche S auch Normalen der Parallellfläche $\mathcal{S}$ sind, folgt, daß auch S eine Parallellfläche von $\mathcal{S}$ ist. Originalfläche und Parallellfläche und deren entsprechende Punkte sind daher gegenseitig einander zugeordnet.

Berechnung der Fundamentalgrößen, des Linienelementes und der Krümmung der Parallellfläche einer gegebenen Fläche.

Die für die Parallellflächen geltenden Größen sollen wie bisher mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden.

Aus den Gleichungen (4) bekommt man:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \Sigma x_u^2 = \Sigma x_u^2 + 2k \Sigma X_u x_u + k^2 \Sigma X_u^2 \\ \mathcal{F} &= \Sigma x_u x_v = \Sigma x_u x_v + k \Sigma (X_u x_v + X_v x_u) + k^2 \Sigma X_u X_v \\ \mathcal{G} &= \Sigma x_v^2 = \Sigma x_v^2 + 2k \Sigma X_v x_v + k^2 \Sigma X_v^2. \end{aligned}$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned}\Sigma x_u^2 &= E, \quad \Sigma x_u x_v = F, \quad \Sigma x_v^2 = G, \quad \Sigma X_u x_u = -L \\ \Sigma X_u x_v &= \Sigma X_v x_u = -M, \quad \Sigma X_v x_v = -N^* \\ \Sigma X_u^2 &= HL - KE, \quad \Sigma X_u X_v = HM - KF, \quad \Sigma X_v^2 = HN - KG.**\end{aligned}$$

Somit lauten die Elementargrößen 1. Ordnung für die Parallelfächen:

$$\mathfrak{E} = E - 2kL + k^2(HL - KE)$$

oder:

$$\begin{aligned}\text{Analog:} \quad \mathfrak{E} &= (1 - k^2 K) E - k(2 - kH)L \\ \mathfrak{F} &= (1 - k^2 K) F - k(2 - kH)M \\ \mathfrak{G} &= (1 - k^2 K) G - k(2 - kH)N\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{F} \\ \mathfrak{G} \end{aligned}} \right\} \dots (6).$$

Aus $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ läßt sich auch die Größe $\mathfrak{D}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^2 &= \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = (1 - k^2 K)^2 \cdot EG + k^2(2 - kH)^2 LN \\ &\quad - k[(1 - k^2 K)(2 - kH)(EN + GL)] \\ &= [(1 - k^2 K)^2 F^2 - 2k(1 - k^2 K)(2 - kH) \cdot FM + k^2(2 - kH)^2 M^2] \\ &= (1 - k^2 K)^2 \cdot D^2 - k(1 - kK)(2 - kH)(EN - 2FM + GL) \\ &\quad + k^2(2 - kH)^2(LN - M^2).\end{aligned}$$

Führt man noch die Werte für die mittlere und totale Krümmung ein

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{D^2} \text{ und } K = \frac{LN - M^2}{D^2},$$

so kann man kürzer schreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^2 &= D^2[(1 - kK)^2 - k(1 - k^2 H)(2 - kH) \cdot H + k^2(2 - kH)^2 \cdot K] \\ &= D^2[1 - 2kH + k^2 H^2 + 2k^2 K - 2k^3 KH + k^4 K^2] \\ &= D^2(1 - kH + k^2 K)^2.\end{aligned}$$

und:

$$\mathfrak{D} = D(1 - kH + k^2 K) \dots (7),$$

hiebei muß das Vorzeichen so gewählt werden, daß für $k=0$ auch $\mathfrak{D} = D$ wird.

* Scheffers II. p. 106.

** Scheffers II. p. 159.

Aus den Formeln (6) kann man leicht das Quadrat des Linienelementes ($d\hat{s}^2$) der Parallellfläche berechnen. Es ist:

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= \mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2 \\ &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ &\quad - 2k(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) \\ &+ k^2[(HL - KE) du^2 + 2(HM - KF) du dv + (HN - KG) dv^2]. \end{aligned}$$

Benützt man die Formel für den Krümmungsradius R eines allgemeinen Normalschnittes der Stelle (u, v) :

$$\frac{1}{R} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

so hat man:

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= ds^2 - 2k \frac{ds^2}{R} + k^2 H \frac{ds^2}{R} - k^2 G ds^2 \\ &= (1 - k^2 K) ds^2 + k(kH - 2) \frac{ds^2}{R}, \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \text{ und } H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

setzt:

$$d\hat{s}^2 = \left[1 - 2\frac{k}{R} + k^2 \left(\frac{1}{R R_1} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R R_2} \right) \right] ds^2.$$

Das Verhältnis der Quadrate der Linienelemente ist somit ausgedrückt durch:

$$\frac{d\hat{s}^2}{ds^2} = 1 - 2\frac{k}{R} + k^2 \left(\frac{1}{R R_1} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R R_2} \right) \dots (8).$$

Für die Fundamentalgrößen II. Ordnung der Parallellfläche kann man setzen:

$$\mathfrak{L} = -\sum X_u r_u = -\sum X_u (x_u + k X_u) = -\sum X_u x_u - k \sum X_u^2.$$

Die erste Summe rechts ist aber die erste Fundamentalgröße II. Ordnung der Originalfläche, also:

$$-\sum X_u x_u = L.$$

Für ΣX_u^2 findet man:

$$\Sigma X_u^2 = H L - K E. *$$

Somit ist:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= L + k(K E - H L). \\ \text{Analog: } \mathcal{M} &= M + k(K F - H M) \\ \text{„} \quad \mathcal{N} &= N + k(K G - H N). \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Aus den Gleichungen (9) lassen sich jetzt auch die Ausdrücke $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2$ und $\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}$ berechnen und somit auch die mittlere Krümmung $\mathfrak{H}$ und die Hauptkrümmung $\mathfrak{K}$. **

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 &= (L N - M^2) + k [K (E N - 2 F M + G L) - 2 H (L N - M^2)] \\ &\quad + k^2 [K^2 (E G - F^2) - K H (E N - 2 F M + G L) + H^2 (L N - M^2)] \\ &= D [K + k (H K - 2 H K) + k^2 (K^2 - H^2 K + H^2 K)] \\ &= D^2 (1 - k H + k^2 K) \cdot K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L} &= (E N - 2 F M + G L) - k [-4 (M^2 - L N) + 2 K (F^2 - E G) \\ &\quad + H (2 F M - E N - G L)] + k^2 [K (6 F M - 3 E N - 3 G L) \\ &\quad + H (6 M^2 - 6 N L)] + 2 k^3 [K^2 (F^2 - E G) \\ &\quad + H K (E N - 2 F M + G L) + H^2 (M^2 - L N)] \\ &= D^2 [H - k (2 K + H) + 3 k^2 H K - 2 k^3 K^2] \\ &= D^2 (1 - k H + k^2 K) (H - 2 k K). \end{aligned}$$

Aus diesen zwei Ausdrücken und aus Gleichung (7) ergibt sich daher:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{K}{1 - k H + k^2 K} \\ \mathfrak{H} &= \frac{H - 2 k K}{1 - k H + k^2 K} \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Schreibt man $\mathfrak{D}$, $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2$, $\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}$ in der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= D \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) \left(1 - \frac{k}{R_2}\right), \\ \mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 &= D^2 \frac{1}{R_1 R_2} \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) \left(1 - \frac{k}{R_2}\right), \\ \mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L} &= D^2 \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) \left(1 - \frac{k}{R_2}\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2k}{R_1 R_2}\right), \end{aligned}$$

* Scheffers II. p. 158 und 159.

** Scheffers II. p. 119.

so lassen sich die Größen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}$ umformen in:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H} &= \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} - \frac{R_1 + R_2 - 2k}{(R_1 - k)(R_2 - k)} = \frac{1}{R_1 - k} + \frac{1}{R_2 - k} \\ \mathfrak{R} &= \frac{1}{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} = \frac{1}{(R_1 - k)(R_2 - k)} \end{aligned} \right\} \quad (10a).$$

Aus diesen Gleichungen (10a) geht unmittelbar hervor, daß

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 - k$$

$$\mathfrak{R}_2 = R_2 - k$$

ist. Man erhält somit den wichtigen Satz:

„Die Differenz entsprechender Hauptkrümmungsradien der Originalfläche und einer ihrer Parallellflächen ist dem absoluten Betrage nach gleich dem Abstände der beiden Flächen.“

Es fallen also die Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Fläche mit denen aller ihrer Parallellflächen zusammen, oder alle Parallellflächen haben eine gemeinsame Mittelpunktsfläche. Dieses Ergebnis wird sofort klar, wenn man beachtet, daß die gegebene Fläche und die zu ihr parallelen Flächen dasselbe Normalensystem haben und die Länge eines Hauptkrümmungsradius gleich ist der Entfernung des Flächenpunktes von dem Fußpunkte des kürzesten Abstandes einer bestimmten Nachbar-normale.

Aus den Gleichungen (10a) geht noch hervor, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{R}$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, wenn k variabel ist. Wird $k = \pm \infty$, so wird $\mathfrak{H} = 0$ und $\mathfrak{R} = 0$; die unendlich ferne Parallellfläche geht also in die unendlich ferne Ebene über.

Es soll nun versucht werden, die für die Originalfläche geltenden Größen durch die Größen einer ihrer Parallellflächen explizite auszudrücken. Man findet zunächst:

$$\begin{aligned} 1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R} &= 1 + \frac{kH - 2k^2K}{1 - kH + k^2K} + \frac{k^2K}{1 - kH + k^2K} \\ &= \frac{1 - kH + k^2K + kH - 2k^2K + k^2K}{1 - kH + k^2K} \\ &= \frac{1}{1 - kH + k^2K}. \end{aligned}$$

Also ist nach den Gleichungen (10):

$$K = \frac{\mathfrak{R}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}} \dots (11)$$

$$H - 2kK = \frac{\mathfrak{H}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}}$$

und:
$$H = \frac{\mathfrak{H}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}} + \frac{2k\mathfrak{R}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}}.$$

Somit:

$$H = \frac{\mathfrak{H} + 2k\mathfrak{R}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}} \dots (11)$$

Nach (9) ist:

$$L = \mathfrak{L} - k(KE - HL) = \mathfrak{L} - kKE + kHL \dots (a)$$

und:

$$k(KE - HL) = \mathfrak{L} - L \dots (b).$$

Aus der ersten Gleichung (6) bekommt man:

$$E = \mathfrak{E} + k^2(KE - HL) + 2kL$$

oder nach (b):

$$E = \mathfrak{E} + k(\mathfrak{L} - L) + 2kL = \mathfrak{E} + k(\mathfrak{L} + L) \dots (c).$$

Dieser Wert E in (a) eingesetzt gibt:

$$L = \mathfrak{L} + kHL - kK\mathfrak{E} - k^2\mathfrak{L}K - k^2LK,$$

oder:

$$L(1 - kH + k^2K) = \mathfrak{L} - kK\mathfrak{E} - k^2K\mathfrak{L}$$

$$L(1 - kH + k^2K) = \mathfrak{L} - \frac{k\mathfrak{R}\mathfrak{E}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}} - \frac{k^2\mathfrak{L}\mathfrak{R}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}}$$

$$\frac{L}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}} = \mathfrak{L} - \frac{k\mathfrak{R}\mathfrak{E}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}} - \frac{k^2\mathfrak{L}\mathfrak{R}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}}.$$

Somit:

$$L = \mathfrak{L}(1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}) - k^2\mathfrak{L}\mathfrak{R} - k\mathfrak{R}\mathfrak{E}.$$

Nach Reduktion:

$$L = \mathfrak{L} - k(\mathfrak{R}\mathfrak{E} - \mathfrak{H}\mathfrak{L}) \dots (d).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung (d) kann man (c) in der Form schreiben:

$$E = \mathfrak{E} + k \mathfrak{L} + k \mathfrak{L} - k^2 \mathfrak{R} \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{H} \mathfrak{L}$$

oder:

$$E = (1 - k^2 \mathfrak{R}) \mathfrak{E} + k (2 + k \mathfrak{H}) \mathfrak{L} \dots (e).$$

Ganz analog wie (d) und (c) findet man die andern Fundamentalgrößen I. und II. Ordnung, so daß man die Gleichungsgruppe bekommt:

$$\left. \begin{aligned} E &= (1 - k^2 \mathfrak{R}) \mathfrak{E} + k (2 + k \mathfrak{H}) \mathfrak{L} \\ F &= (1 - k^2 \mathfrak{R}) \mathfrak{F} + k (2 + k \mathfrak{H}) \mathfrak{M} \\ G &= (1 - k^2 \mathfrak{R}) \mathfrak{G} + k (2 + k \mathfrak{H}) \mathfrak{N} \\ L &= \mathfrak{L} - k (\mathfrak{R} \mathfrak{E} - \mathfrak{H} \mathfrak{L}) \\ M &= \mathfrak{M} - k (\mathfrak{R} \mathfrak{F} - \mathfrak{H} \mathfrak{M}) \\ N &= \mathfrak{N} - k (\mathfrak{R} \mathfrak{G} - \mathfrak{H} \mathfrak{N}) \end{aligned} \right\} \dots (12).$$

Man sieht, daß die Gleichungen (11) und (12) aus den Gleichungen (10), (6) und (9) dadurch hervorgehen, daß man statt der lateinischen Buchstaben die deutschen setzt und vor k das Vorzeichen ändert, wie es auch sein muß, da nach dem früheren (Seite 9) schon bekannt ist, daß, wenn $\mathfrak{E}$ eine Parallellfläche von S ist, auch S eine Parallellfläche von $\mathfrak{E}$ sein muß.

Entsprechende Kurven auf der gegebenen Fläche und einer ihrer Parallellflächen.

A.

Krümmungskurven.

Bezüglich der Krümmungskurven auf einer Fläche besteht die Gleichung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Sollen den Krümmungskurven auf der Originalfläche wiederum Krümmungslinien auf der Parallellfläche entsprechen, so muß die korrespondierende Determinante:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} dv^2, & (1 - k^2 K) E - k(2 - k H) L, & L + k(K E - H L) \\ -du dv, & (1 - k^2 K) F - k(2 - k H) M, & M + k(K F - H M) \\ du^2, & (1 - k^2 K) G - k(2 - k H) N, & N + k(K G - H N) \end{vmatrix}$$

ebenfalls verschwinden. Δ_1 kann zerlegt werden in:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = (1 - k^2 K) \cdot & \begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} + k K (1 - k^2 K) \cdot \begin{vmatrix} dv^2 & E & E \\ -du dv & F & F \\ du^2 & G & G \end{vmatrix} \\ - (1 - k^2 K) \cdot H \cdot & \begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} - k (2 - k H) \cdot \begin{vmatrix} dv^2 & L & L \\ -du dv & M & M \\ du^2 & N & N \end{vmatrix} \\ + k^2 K (2 - k H) \cdot & \begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} + k^2 H (2 - k H) \cdot \begin{vmatrix} dv^2 & L & L \\ -du dv & M & M \\ du^2 & N & N \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Man sieht daraus, daß Δ_1 wirklich verschwindet, teils weil $\Delta = 0$ genommen wurde, teils weil in drei der vorhergehenden Determinanten zwei gleiche Spalten vorkommen. Das beweist aber, daß den Krümmungslinien der Fläche S stets Krümmungslinien auf der Parallellfläche $\mathcal{S}$ entsprechen.

Man kann diesen Satz noch einfacher dadurch beweisen, daß man die Krümmungslinien der Originalfläche S als die Parameterlinien nimmt. Für diesen Fall ist dann:

$$F = 0 \text{ und } M = 0.$$

Daher auch nach der zweiten Gleichung (6) und (9):

$$\mathfrak{F} = 0 \text{ und } \mathfrak{M} = 0,$$

d. h. die Krümmungslinien auf S und $\mathcal{S}$ sind entsprechende Kurven.

Auch dieser Satz ist geometrisch unmittelbar einleuchtend infolge der Übereinstimmung des Normalensystemes. Bewegt sich nämlich der Fußpunkt P einer Normale n der Fläche S in einer Hauptkrümmungsrichtung zum Fußpunkte P_1 der Nach-

barnormale n_1 , so schneidet sich n im Hauptkrümmungsmittelpunkt mit n_1 .*

Da aber Parallelf lächen ein gemeinsames Normalensystem haben, so wird sich auch auf der Fläche $\mathcal{S}$ der entsprechende Punkt $\mathfrak{P}$ der Normalen n in einer Hauptkrümmungsrichtung zum Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Normalen n_1 bewegen.

Die Hauptkrümmungsrichtung, in welcher sich P nach P_1 und $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{P}_1$ bewegen, oder die Tangenten t und t korrespondierender Krümmungslinien in korrespondierenden Punkten P und $\mathfrak{P}$ sind zueinander parallel. Es läßt sich das zwar sofort erkennen, da t und t in einer Ebene, d. i. in der Ebene n, n_1 liegen und zu n in den Punkten P und $\mathfrak{P}$ normal sind; doch soll auch dieses Resultat durch Berechnung gezeigt werden. Setzt man voraus, daß die Parameterlinien die Krümmungslinien sind, so gilt allgemein für die Richtungskosinus (u) auf S :

$$\cos(u x) = \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \cos(u y) = \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \cos(u z) = \frac{z_u}{\sqrt{E}} \dots (a)$$

und entsprechend auf $\mathcal{S}$:

$$\cos(u \xi) = \frac{\xi_u}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \cos(u \eta) = \frac{\eta_u}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \cos(u \zeta) = \frac{\zeta_u}{\sqrt{\mathcal{E}}} \dots (b)$$

und beachtet man, daß für den Fall der Krümmungskurven als Parameterlinien

$$X_u = -\frac{x_u}{R_1}, Y_u = -\frac{y_u}{R_1}, Z_u = -\frac{z_u}{R_1}^{**}$$

ist, so lauten die Gleichungen (4):

$$\xi_u = x_u \left(1 - \frac{k}{R_1}\right), \eta_u = y_u \left(1 - \frac{k}{R_1}\right), \zeta_u = z_u \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) \dots (c).$$

* Scheffers II. p. 171.

** Scheffers II. p. 356.

Führt man die Gleichungen (c) in (b) ein:

$$\cos(u r) = \frac{x_u}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \left(1 - \frac{k}{R_1}\right), \quad \cos(u \eta) = \frac{y_u}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \left(1 - \frac{k}{R_1}\right),$$

$$\cos(u z) = \frac{z_u}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \left(1 - \frac{k}{R_1}\right),$$

so sieht man, daß

$$\cos(u x) : \cos(u y) : \cos(u z) = \cos(u r) : \cos(u \eta) : \cos(u z)$$

ist, d. h. entsprechende Krümmungslinien auf Parallelfächen haben in entsprechenden Punkten parallele Tangenten und daher auch in entsprechenden Punkten parallele Schmiegungebenen.

Unter derselben Voraussetzung, daß die Parameterlinien die Krümmungslinien sind, erhält man für die Hauptkrümmungen:

$$R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N}, *$$

ferner:

$$D^2 = EG, \quad K = \frac{LN}{EG}, \quad H = \frac{EN - GL}{EG}.$$

Daher geht in der ersten Gleichung (6) der Ausdruck $KE - HL$ über in:

$$\frac{LNE - ENL - GL^2}{EG} = -\frac{L^2}{E} = -\frac{E}{R_1^2}.$$

Ebenso ist:

$$KG - HN = -\frac{G}{R_2^2}.$$

Somit wird dann:

$$\mathfrak{E} = E \left(1 - \frac{2k}{R_1} + \frac{k^2}{R_1^2}\right) = E \left(1 - \frac{k}{R_1}\right)^2$$

$$\mathfrak{G} = G \left(1 - \frac{2k}{R_2} + \frac{k^2}{R_2^2}\right) = G \left(1 - \frac{k}{R_2}\right)^2$$

* Scheffers II. p. 356.

und das Linienelement läßt sich jetzt in einfacher Form schreiben:

$$d\vartheta^2 = \left(1 - \frac{k}{R_1}\right)^2 E du^2 + \left(1 - \frac{k}{R_2}\right)^2 G dv^2.$$

Man sieht, für $k = 0$ wird $d\vartheta^2 = ds^2$.

Ist dS das Flächenelement der Originalfläche, so ist nach gemachter Voraussetzung:

$$dS = \sqrt{EG} \cdot du dv$$

und das entsprechende Element der Parallellfläche:

$$\begin{aligned} d\mathcal{S} &= \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}} \cdot du dv \\ &= \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) \left(1 - \frac{k}{R_2}\right) \sqrt{EG} \cdot du dv. \end{aligned}$$

Das Verhältnis beider Flächenelemente:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{dS} &= \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) \left(1 - \frac{k}{R_2}\right) \\ &= 1 - k \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + k^2 \frac{1}{R_1 R_2} \\ &= 1 - kH + k^2 K. \end{aligned}$$

Oder nach Gleichung (7), resp. (10):

$$\frac{d\mathcal{S}}{dS} = \mathfrak{D}, \text{ resp. } \frac{d\mathcal{S}}{dS} = \frac{K}{\mathfrak{R}}.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dS} = 1 - kH + k^2 K$$

kann man auch finden, in welchem Falle $d\mathcal{S} \geq dS$ ist. Ist P ein reeller, elliptischer Punkt der Fläche S , so ist K stets positiv. H aber ist positiv oder negativ, je nachdem die Hauptkrümmungsmittelpunkte auf der positiven oder negativen Seite der Normalen liegen. Es ist also $d\mathcal{S} > dS$, wenn H entgegengesetztes Vorzeichen wie k hat, oder, falls k und H gleichbe-

zeichnet sind, $d\mathcal{S} > dS$, wenn $k > \frac{H}{R}$ oder $k > R_1 + R_2$ ist. Ist dagegen P ein hyperbolischer Punkt, z. B. $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ und $|R_2| > |R_1|$, so ist $H > 0$, $K < 0$. Liegt dann die Parallelfläche auf der Seite der Originalfläche, auf der auch der von P weiter entfernte Hauptkrümmungsmittelpunkt gelegen ist (so mit $k < 0$), so ist $d\mathcal{S} > dS$, wenn $|k| < \left|\frac{H}{R}\right|$ oder $|k| < |R_1 + R_2|$ ist. Für einen parabolischen Punkt, z. B. $\frac{1}{R_1} = 0$, $R_2 < 0$ ist $H < 0$ und $d\mathcal{S} \leq dS$, je nachdem k gleich oder ungleich bezeichnet ist wie R_2 .

Ist eine Krümmungslinie auf der Fläche S eben, so bildet nach dem Satz von Joachimsthal¹ die Ebene dieser Krümmungslinie längs dieser mit der Fläche einen konstanten Winkel φ und umgekehrt. Infolge des gemeinsamen Normalensystems und nach dem früheren (Seite 14) muß daher auch auf der Fläche $\mathcal{S}$ eine ebene Krümmungslinie vorhanden sein, deren Ebene parallel ist zur Ebene der Krümmungslinie auf S . Besitzt daher die Originalfläche ein System von ebenen Krümmungslinien (z. B. die Rotationsfläche), so muß dasselbe auch der Fall sein bei jeder ihrer Parallelflächen.

Der Abstand h je zweier entsprechender Ebenen des Systems der ebenen Krümmungslinien auf S und $\mathcal{S}$ ist gegeben durch:

$$h = k \cos \varphi.$$

Für das System der ebenen Krümmungslinien ist φ im allgemeinen variabel. Für $\varphi = 90^\circ$ fallen die beiden entsprechenden Ebenen zusammen.

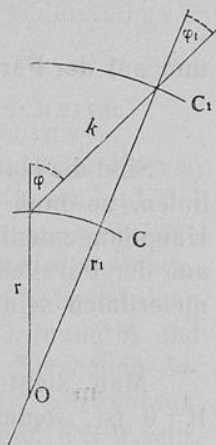
Aus dem Satz von Joachimsthal folgt auch, daß, wenn eine Krümmungskurve eine Gerade ist, jede Ebene durch die Gerade die Fläche unter konstantem Winkel längs dieser Geraden schneidet, d. h. die Fläche muß längs der Geraden dieselbe Tangentenebene haben. Die Normalen in jedem Punkte der Geraden liegen dann in einer Ebene und trägt man auf jeder Normale die gleiche Strecke k auf, so erhält man auf

¹ Journal für reine u. angew. Math. XXX. 1846.

der Parallellfläche ebenfalls eine Gerade, die, weil Krümmungslinien sich stets entsprechen, auch eine Krümmungslinie der Parallellfläche ist.

Enthält somit eine Fläche eine Schar gerader Krümmungskurven, so enthält auch die Parallellfläche eine solche Schar.

Aus dem Satze, daß die Kurve, welche durch den Schnitt einer Kugel mit einer Fläche entsteht, eine Krümmungskurve der Fläche ist, wenn die Kugel unter konstantem Winkel die Fläche schneidet¹, folgt auch, daß einer sphärischen Krümmungslinie oder einem System von sphärischen Krümmungslinien auf S wieder eine sphärische Krümmungslinie, resp. ein System von sphärischen Krümmungslinien auf $\mathcal{S}$ entspricht und die Kugelflächen von zwei korrespondierenden sphärischen Krümmungslinien sind ebenfalls parallel, d. i. konzentrisch. Kennt man den Radius r der Kugel, auf der die sphärische Krümmungslinie der Fläche S liegt und ist längs der Kurve die konstante Neigung φ , so lassen sich die entsprechenden Größen r_1 und φ_1 für die Parallellfläche im Abstände k berechnen.



Es seien C und C_1 die zwei sphärischen Krümmungskurven auf S und $\mathcal{S}$, dann ist:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + k^2 + 2rk \cos \varphi}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{r^2 - k^2 - r_1^2}{2kr_1} = \frac{r \cos \varphi + k}{\sqrt{r^2 + k^2 + 2rk \cos \varphi}}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + k^2 + 2rk \cos \varphi}}$$

¹ Scheffers II. Satz 56 und 60.

B.

..... Entsprechende Haupttangentialkurven.

Die Haupttangentialkurven auf einer Fläche S sind definiert durch:

$$L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 = 0$$

und auf der Parallellfläche durch:

$$\mathfrak{L} du^2 + 2 \mathfrak{M} du dv + \mathfrak{N} dv^2 = 0.$$

Sind die Haupttangentialkurven der Fläche S die Parameterlinien, so muß $L=N=0$ sein. Für den Fall, daß sich die Haupttangentialkurven auf S und $\mathfrak{S}$ entsprechen, müssen auch auf der Parallellfläche $\mathfrak{S}$ die Haupttangentialkurven die Parameterlinien sein, also:

$$\mathfrak{L} = 0 \text{ und } \mathfrak{M} = 0.$$

Man sieht aber aus den Gleichungen (9), daß, wenn $K \neq 0$ ist, weder $\mathfrak{L}$ noch $\mathfrak{N}$ gleich Null sein kann. Es entsprechen also im allgemeinen den Asymptotenlinien der Originalfläche nicht die Asymptotenlinien der Parallellfläche. Dies läßt sich auch leicht aus der Konstruktion der Parallellfläche einsehen. Haupttangentialkurven sind nämlich solche Kurven, deren Schmiegungsebenen zugleich Tangentenebenen der Fläche sind, deren Binormalen also mit den Flächennormalen zusammenfallen. Die Haupttangentialkurve kann dann als Striktionslinie der Normalenfläche, welche von allen Normalen längs der Haupttangentialkurve gebildet wird, aufgefaßt werden und zwar als eine solche Striktionslinie, die alle Erzeugenden senkrecht schneidet.¹

Da eine Fläche mit ∞^1 Geraden nur eine Striktionslinie hat, so kann die der Haupttangentialkurve auf S entsprechende Linie auf $\mathfrak{S}$, welche dieselben Normalen der betrachteten Normalenfläche durchschneidet, nicht mehr als Striktionslinie der Normalenfläche und daher auch nicht als asymptotische Kurve auf $\mathfrak{S}$ aufgefaßt werden. Nur dann, wenn die Asymptotenkurve auf S eben (und keine Gerade einer nicht abwickelbaren Fläche) ist, entspricht ihr eine Asymptotenkurve auf $\mathfrak{S}$, weil in diesem

¹ Scheffers II. p. 226.

Falle die Normalenfläche oder die Fläche der Binormalen der Kurve eine Zylinderfläche darstellt, die unendlich viele Striktionslinien hat und alle der Haupttangentenkurve entsprechenden Linien auf den Parallellflächen Striktionslinien sind, welche die Geraden der Zylinderfläche senkrecht schneiden.

C.

Entsprechende konjugierte Kurvenscharen.

Nimmt man an, es gäbe eine Schar konjugierter Kurven auf S , der eine Schar ebenfalls konjugierter Kurven auf der Parallellfläche $\mathcal{S}$ entspräche, so kann man immer voraussetzen, daß die Parameterlinien (u) und (v) die einander entsprechenden konjugierten Kurvenscharen sind. In diesem Falle ist dann erfordert, daß die zweite Fundamentalgröße II. Ordnung M und $\mathfrak{M}$ für alle Werte von u und v gleich Null ist. Setzt man daher in der zweiten Gleichung (9) $M = \mathfrak{M} = 0$ und setzt voraus, daß K und k von Null verschieden sind, so muß $F = 0$ sein. Ist aber $F = 0$ und $M = 0$, so sieht man aus (6), daß $\mathfrak{F} = 0$ ist. Da nun auch $\mathfrak{M} = 0$ ist, so folgt, daß die entsprechenden konjugierten Parameterlinien die Krümmungslinien sind. Es ist also der Schluß berechtigt, daß, wenn die gegebene Fläche eine von Null verschiedene Krümmung hat, also nicht abwickelbar ist, die einzigen Systeme konjugierter Kurven, die sich auf den Parallellflächen entsprechen, diejenigen sind, welche von den Krümmungslinien gebildet werden.

D.

Entsprechende Orthogonalsysteme von Kurven.

Unter der Voraussetzung, daß wieder die Parameterlinien ein System von Kurven bilden, welche sich auf der Originalfläche und auf der im Abstände k mit ihr parallelen Fläche einander stets rechtwinklig schneiden, muß sowohl $F = 0$ wie auch $\mathfrak{F} = 0$ sein.

Aus der zweiten Gleichung (6):

$$\mathfrak{F} = (1 - k^2 K) F - k(2 - k H) M$$

folgt dann, daß entweder der Faktor M oder $2 - kH$ gleich Null sein muß. Wäre M von Null verschieden, so müßte $H = \frac{2}{k}$, also eine Konstante sein. Dasselbe würde sich auch ergeben aus der zweiten Gleichung (12):

$$F = (1 - k^2 R) \mathfrak{F} + k(2 + k \mathfrak{H}) \mathfrak{M}$$

für $\mathfrak{H}$, wenn man die Fläche $\mathcal{S}$ als gegeben betrachtet und S als eine zu ihr parallele Fläche. Sind aber weder H noch $\mathfrak{H}$ konstant, so muß $M = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ sein. Diese zwei Bedingungen mit den früheren $F = \mathfrak{F} = 0$ liefern wiederum das System der Krümmungslinien als das einzige auf Parallellflächen sich entsprechende Orthogonalsystem von Kurven, vorausgesetzt, daß die Parallellflächen nicht von konstanter mittlerer Krümmung sind.

E.

Entsprechende geodätische Linien.

Ist die Kurve C eine geodätische Linie auf S , so enthält die Schmiegungebene der Kurve C die Normale der Fläche in jedem Punkte der Kurve, oder die Hauptnormale eines jeden Punktes der Kurve fällt mit der Flächennormalen zusammen. Soll nun der Kurve C eine Kurve $\mathcal{C}$ auf der Parallellfläche entsprechen, die auch eine geodätische Linie ist, so muß ebenfalls die Hauptnormale eines jeden Punktes von $\mathcal{C}$ mit der Flächennormalen zusammentreffen. Weil beide Flächen in entsprechenden Punkten dieselbe Normale haben, so kann nur dann einer geodätischen Linie der Originalfläche eine geodätische Kurve auf der Parallellfläche entsprechen, wenn beide Kurven dieselben Hauptnormalen haben und auf den gemeinsamen Hauptnormalen dieselbe konstante Strecke k abschneiden. Betreffs der entsprechenden geodätischen Linien auf Parallellflächen gilt also dasselbe, was für Kurven gilt mit gemeinsamen Hauptnormalen.¹ Nimmt man für die auf die Kurve C bezüglichen Elemente die gebräuchlichen Bezeichnungen $\alpha, \beta, \gamma; l, m, n; \lambda, \mu, \nu; r, \rho, s$, für die entsprechende Kurve $\mathcal{C}$ auf der Parallellfläche dieselben,

¹ Scheffers I. § 10. p. 322.

aber überstrichenen Buchstaben, so gilt zunächst für beide Kurven die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{s}}{ds} &= \frac{a}{\rho} \quad (a = \text{konst.}) \\ \frac{d\bar{s}}{ds} &= \frac{\bar{a}}{\bar{\rho}} \quad (\bar{a} = \text{konst.}) \end{aligned} \right\} \dots a),$$

d. h. das Produkt der Torsionen beider Kurven ist konstant. Ferner bestehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \alpha \bar{\alpha} &= \frac{\rho}{a} \left(1 - \frac{k}{r} \right) \\ \Sigma \lambda \bar{\alpha} &= \frac{k}{a} \end{aligned} \right\} \dots b).$$

Die zweite Gleichung *b)* sagt aus, daß die Binormale der einen Kurve mit der entsprechenden Tangente der andern Kurve einen konstanten Winkel einschließt.

Differenziert man die erste Gleichung *b)*, so bekommt man:

$$\frac{1}{r} \Sigma \lambda \bar{\alpha} + \frac{1}{r} \Sigma a \bar{\lambda} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{a} \frac{d}{ds} \left(\rho - k \frac{\rho}{r} \right),$$

oder, da die linke Seite gleich Null ist:

$$\rho - k \frac{\rho}{r} = \rho \left(1 - \frac{k}{r} \right) = b \quad (b = \text{konst.}),$$

daher:

$$\frac{k}{r} + \frac{b}{\rho} = 1 \dots c).$$

Soll also einer geodätischen Linie *C* auf *S* wieder eine geodätische Linie *℄* auf der Parallelfäche *℄* entsprechen, so muß zwischen Krümmung und Torsion der Kurve *C* eine lineare Beziehung bestehen, die Kurve muß also eine sogenannte Bertrand'sche Kurve sein.

Gleichzeitig lehrt die erste Gleichung *b)*, da ihre rechte Seite konstant ist, daß entsprechende Tangenten beider Kurven einen konstanten Winkel bilden.

Da die Beziehung beider Kurven eine völlig reziproke ist, so gilt auch für die der Kurve C entsprechende geodätische Linie $\mathfrak{C}$ auf der Parallellfläche dieselbe Relation mit denselben absoluten Werten der Konstanten:

$$\frac{b}{\rho} - \frac{k}{r} = 1,$$

d. h. auch die Kurve $\mathfrak{C}$ ist eine Bertrandsche Kurve.

F.

Minimalgeraden auf Parallellflächen.

Zieht man auch den Fall imaginärer Kurven und Flächen in Betracht, so sei zunächst die Voraussetzung gemacht, daß die Originalfläche eine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält, die aber keine Tangentenfläche einer Minimalkurve bilden sollen. Diese Eigenschaft drückt sich in den Fundamentalgrößen I. und II. Ordnung folgendermaßen aus:

$$4(EM - FL) \cdot (FN - GM) - (GL - EN)^2 = 0.^1$$

Multipliziert man diese Gleichung aus und setzt die Größen H und K ein, so geht sie über in:

$$\begin{aligned} & 4(EMFN - F^2NL - GEM^2 + FLGM) - G^2L^2 + 2GLEN - E^2N^2 \\ &= -D^2H^2 - 4F^2NL - 4GEM^2 + 4GLEN + 4F^2M^2 \\ &= -D^2H^2 - 4F^2(NL - M^2) + 4GE(LN - M^2) \\ &= -D^2H^2 - 4K(EG - F^2) \\ &= D^2(4K - H^2) = 0. \end{aligned}$$

Da im betrachteten Falle $D \neq 0$ ist, so bleibt als Bedingung:

$$K = \frac{1}{4} H^2.$$

Diesen Wert K kann man in die früheren Gleichungen (10) einsetzen und erhält:

¹ Scheffers II. p. 114.

$$\mathfrak{R} = \frac{\frac{1}{4} H^2}{1 - k H + \frac{1}{4} k^2 H^2}$$

$$= \frac{H^2}{4 - k H (4 - k H)}.$$

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{H^2 - k H^2 + k \frac{H^4}{4}}{\left(1 - k H + k^2 \frac{H^2}{4}\right)^2} = \frac{H^2 \left(1 - k H + \frac{k^2}{4} H^2\right)}{\left(1 - k H + \frac{k^2}{4} H^2\right)^2},$$

also ist:

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{H^2}{1 - k H + \frac{k^2}{4} H^2}.$$

Aus beiden Gleichungen für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}^2$ folgt:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{4} \mathfrak{H}^2,$$

d. h. auf einer Fläche, welche parallel einer gegebenen Fläche ist, die eine Schar von ∞^1 Minimalgeraden besitzt, aber keine Tangentenfläche einer Minimalkurve ist, liegt ebenfalls eine solche Schar von Minimalgeraden.

Die Flächen, auf denen überall

$$D = \sqrt{EG - F^2} = 0$$

ist, besitzen auch ∞^1 Minimalgeraden, bilden aber die Tangentenfläche einer Minimalkurve.¹ Aus der Gleichung (7) geht dann hervor, daß dann auch die Parallellfläche einer solchen Fläche eine Tangentenfläche einer Minimalkurve ist, da für $D = 0$ auch

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} = 0$$

wird.

¹ Scheffers II. p. 29.

G.

Andere spezielle Kurven, die sich auf Parallelf lächen entsprechen.

Es sei noch in Kürze einiger Kurven auf Parallelf lächen Erwähnung getan, die Mannheim¹ näher untersuchte, der zu einer Reihe von interessanten Beziehungen kam, von denen die wichtigsten hier aufgezählt werden sollen.

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \dots \mathcal{S}_n$ seien Parallelf lächen zur Fläche S und auf ihnen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots \mathcal{C}_n$ Kurven, die der Linie C auf S entsprechen. Legt man durch entsprechende Tangenten aller dieser Kurven Ebenen, die aus den Parallelf lächen Kurven ausschneiden, welche in den korrespondierenden Berührungspunkten der Tangenten von einem Kreise überoskuliert werden, so durchschneiden die Radien dieser Kreise, die von den korrespondierenden Punkten ausgehen, eine und dieselbe Gerade g . Steht eine von diesen Schnittebenen normal zu ihrer Fläche, so sind auch alle übrigen Schnitte auf den Parallelf lächen Normalebenen ihrer Flächen. Dieser letztere Satz wurde schon von Ribaucour aufgefunden und Gournier² hat daraus den Schluß gezogen, daß die Tangenten an den Normalschnitten, welche durch Kreise überoskuliert werden, sich auf den Parallelf lächen entsprechen. Mannheim folgert für diese charakteristischen Schnitte weiter, daß die Radien dieser Kreise auf einem Paraboloid liegen, welches die erwähnte Gerade g enthält. Ferner schließt er daraus, daß für solche Schnitte die Mittelpunkte der geodätischen Krümmung auf einer Geraden enthalten sind, daß ferner die geodätischen Kontingenzwinkel in den korrespondierenden Punkten einander gleich sind.

Dann wendet sich Mannheim zu einer andern Gattung von Kurven auf Parallelf lächen, nämlich zu den Kurven mit konstanter Normalkrümmung. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß die Normalschnitte, welche längs derselben, d. h. eine solche Kurve berührend, geführt werden, gleiche Krümmungsradien haben. Faßt man eine solche Kurve C auf S als

¹ Sur les Surfaces Paralleles, Proceedings Lond. Math. Soc. 1881, XII. p. 177.

² Compt. rend. 1875.

Leitlinie der Normalenfläche auf, welche von den Normalen längs dieser Kurve gebildet wird, so entstehen korrespondierende Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \dots \mathfrak{C}_n$ auf den Parallellflächen.

Sind P und $\mathfrak{P}_1$ entsprechende Punkte auf den korrespondierenden Linien C und $\mathfrak{C}_1$ und zieht man auf $\mathfrak{C}_1$ eine Kurve konstanter Normalkrümmung, die die Kurve $\mathfrak{C}_1$ im Punkte $\mathfrak{P}_1$ berührt und bestimmt schließlich zu dieser Kurve das geodätische Krümmungszentrum, so findet man, daß der Ort dieser Krümmungszentren für alle Parallellflächen auf einer Geraden enthalten ist und daß die geodätischen Kontingenzwinkel in entsprechenden Punkten einander gleich sind.

Als dritte Gattung von Kurven auf Parallellflächen betrachtet Mannheim jene, welche auf S eine Kurve C im Punkte P berührt und das eine System von Krümmungslinien unter gleichem Winkel schneidet.

Es gibt dann auf den Parallellflächen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \dots \mathfrak{C}_n$ wieder solche Kurven, welche die entsprechenden Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \dots \mathfrak{C}_n$ in den entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n$ berühren und die eine Schar der Krümmungslinien unter demselben Winkel schneiden. Für diese Kurven gelten dann ähnliche Sätze wie früher, so z. B. liegen wieder die Mittelpunkte der geodätischen Krümmung in den entsprechenden Punkten dieser Kurven auf einer Geraden.

Parallellflächen bestimmter Arten von Flächen.

Macht man betreffs der Krümmung K und der mittleren Krümmung H der Originalfläche gewisse Voraussetzungen, wodurch bestimmte Flächenklassen charakterisiert werden, so gelangt man zu wichtigen Sätzen über Original- und Parallellflächen. Weitere Eigenschaften ergeben sich aus gewissen einfachen Beziehungen, die zwischen den Größen H und $\mathfrak{H}$, K und $\mathfrak{K}$ gemacht werden.

A.

Die gegebene Fläche S sei von bestimmter, konstanter, positiver, von Null verschiedener Krümmung K und von beliebiger mittleren Krümmung H .

Konstruiert man zu dieser Fläche S zwei Parallellflächen S_0 und S_1 im Abstände $\pm k$, so erhält man nach Gleichung (10):

$$\mathfrak{S} = \frac{H \mp 2kK}{1 \mp kH + k^2K}.$$

Für den Fall, daß $k = \pm \sqrt{\frac{1}{K}}$ ist, wird:

$$\mathfrak{S} = \frac{H \mp 2\sqrt{K}}{2 \mp \frac{H}{\sqrt{K}}} = \mp \sqrt{K}.$$

Zu jeder Fläche S von konstanter positiver Krümmung K gibt es also stets im Abstände $k = \pm \sqrt{\frac{1}{K}}$ zwei Parallellflächen S_0 und S_1 von konstanter mittlerer Krümmung $\mp \sqrt{K}$.

Die Fläche konstanter Krümmung $K=1$ hat demnach im Abstände ± 1 Parallellflächen von konstanter mittlerer Krümmung ∓ 1 .

Bezeichnet man jetzt die konstante positive Krümmung der Fläche S , der sogenannten Mittelfläche von S_0 und S_1 , mit H^2 , so haben die Flächen S_0 und S_1 , die sich im Abstände $\pm \frac{1}{H}$ von der Fläche S befinden, die konstante mittlere Krümmung

$$H_0 = -H \text{ und } H_1 = H.$$

Betrachtet man S_1 als Originalfläche und S_0 als die Parallellfläche im Abstände $k = \frac{2}{H}$, so findet man aus den Gleichungen (6):

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= (1 - k^2 H) E, \\ \mathfrak{F} &= (1 - k^2 H) F, \\ \mathfrak{G} &= (1 - k^2 H) G.\end{aligned}$$

Es besteht also die Proportion:

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{F} : \mathfrak{G} = E : F : G.$$

Die Flächen S_0 und S_1 sind also konform aufeinander abbildbar. Daher entspricht einem Isothermennetz auf S_1 wieder ein solches auf S_0 . In diesem Falle, der früher bei der Untersuchung über entsprechende Orthogonalkurven auf Parallelflächen ausgeschlossen wurde, trifft es zu, daß außer den Krümmungslinien jeder Schar von Orthogonalkurven der einen Fläche Orthogonalinien auf der anderen Fläche entsprechen.

Ferner läßt sich für die eben betrachteten Parallellflächen mit konstanter, entgegengesetzt gleicher, mittlerer Krümmung zeigen, daß den Haupttangentialkurven auf der einen Fläche eine Schar konjugierter Linien auf der andern parallelen Fläche entsprechen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß den Asymptotenlinien eine Schar konjugierter Linien entspricht, ist die, daß zwischen den Fundamentalgrößen die Beziehung:

$$\mathfrak{L} N + \mathfrak{N} L - 2 \mathfrak{M} M = 0$$

besteht.¹ Für den eben betrachteten Fall ist nach (9), Seite 12:

$$\mathfrak{L} = L + \frac{2}{H} (EK - LH),$$

oder:

$$\mathfrak{L} = 2 \frac{EK}{H} - L,$$

$$\mathfrak{M} = 2 \frac{FK}{H} - M,$$

$$\mathfrak{N} = 2 \frac{GK}{H} - N.$$

Führt man diese Werte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in die Bedingungsgleichung ein, so sieht man, daß sie erfüllt wird:

$$2 \frac{K}{H} (EN - 2FM + GL) - 2(NL - M^2)$$

oder:

$$2KD^2 - 2KD^2 = 0.$$

Sind P_0 und P_1 zwei entsprechende Punkte auf den Flächen S_0 und S_1 , R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, M_1 und M_2

¹ Bianchi-Lukat p. 293.

die Hauptkrümmungsmittelpunkte der als Originalfläche angenommenen Fläche S_1 , so findet man, daß das Doppelverhältnis der vier Punkte M_1, M_2, P_1, P_0 , die auf einer Normalen liegen, gleich -1 ist.

Es ist nämlich:

$$(M_1 M_2 P_1 P_0) = \frac{M_1 P_1}{P_1 M_2} : \frac{M_1 P_0}{P_0 M_2} = \frac{-R_1}{R_2} : \frac{-R_1 + \frac{2}{H}}{-\frac{2}{H} + R_2} = \frac{-R_1 \left(R_2 - \frac{2}{H} \right)}{R_2 \left(\frac{2}{H} - R_1 \right)}.$$

Für $\frac{2}{H}$ kann man setzen: $\frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Daher ist:

$$(M_1 M_2 P_1 P_0) = \frac{-R_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_1^2 R_2}{2R_1 R_2^2 - R_1 R_2 (R_1 + R_2)} = \frac{-R_1 R_2^2 + R_1^2 R_2}{-R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2} = -1.$$

P_0 ist also der vierte harmonische Punkt.

Diese zuletzt betrachtete Eigenschaft der zwei Flächen S_0 und S_1 brachte Thompson¹ auf den Gedanken, jene Fläche zu suchen, für welche P_0 unter den Punkten M_1, M_2 und P_1 der vierte anharmonische Punkt ist. Er fand auf ganz einfache Weise, daß in diesem Falle zwischen den reziproken Werten der Hauptkrümmungsradien der Originalfläche eine allgemeine lineare Relation: $\frac{a}{R_1} + \frac{b}{R_2} = c$ bestehen muß. Dann ist die konstante Strecke $P_1 P_0 = \frac{a+b}{c}$ und für die Parallellfläche in dieser Entfernung gilt die Beziehung $\frac{a}{R_1} + \frac{b}{R_2} = -c$.

B.

Gegeben sei eine Fläche S , für welche das Verhältnis $\frac{H}{K}$ eine Konstante ist. Für die mittlere Krümmung $\mathfrak{H}$ einer Parallellfläche besteht dann nach (10) die Formel:

¹ American Journal XXIV. p. 308.

$$\mathfrak{S} = \frac{H - 2kK}{1 - kH + k^2K},$$

oder:

$$\mathfrak{S} = \frac{\frac{H}{K} - 2k}{\frac{1}{K} - k\frac{H}{K} + k^2}.$$

Für jene Parallelfäche $\mathfrak{S}$, für welche k den Wert $\frac{H}{2K}$ hat, ist $\mathfrak{S} = 0$, also $\mathfrak{S}$ eine Minimalfläche. Man kann daraus schließen, daß jede Minimalfläche parallel zu einer Fläche ist, für die das Verhältnis $\frac{H}{K} = \text{konst.}$ ist und sich im Abstände $\frac{H}{2K}$ von dieser Fläche befindet. Dies gilt nur dann, wenn:

$$\frac{1}{K} - k\frac{H}{K} + k^2 \neq 0,$$

also:

$$\frac{1}{K} - \frac{H}{2K} \cdot \frac{H}{K} + \frac{H^2}{4K^2} \neq 0,$$

oder:

$$H^2 \neq 4K$$

ist.

Die Gleichung $H^2 = 4K$ ist aber (nach Seite 26) die Bedingung dafür, daß die Fläche eine Schar von Minimalgeraden enthält. Mit Ausschluß der imaginären Flächen gilt also der frühere Schluß allgemein. Ebenso kann man auch beweisen, daß bei allen Parallelfächen von Minimalflächen das Verhältnis $\frac{\mathfrak{S}}{K} = \text{konst.}$ ist.

Denn setzt man in den Gleichungen (10) $H = 0$, so folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{-2kK}{1 + k^2K},$$

$$K = \frac{K}{1 + k^2K},$$

also:

$$\frac{\mathfrak{S}}{K} = -2k = \text{konst.}$$

C.

Die Originalfläche S sei eine Weingartensche Fläche, für welche bezüglich H und K die Relation besteht:

$$aK - bH + 1 = 0.$$

Die Parallellfläche zu dieser Fläche S im Abstände $k = b$ hat die Krümmung:

$$\mathfrak{R} = \frac{K}{1 - bH + b^2K^2} = \frac{K}{-aK + b^2K} = \frac{1}{b^2 - a}.$$

Ist $b^2 \neq a$, so hat die Parallellfläche eine konstante Krümmung $\mathfrak{R}$. Da auch stets die Umkehrung gilt, kann man sagen, alle Flächen, welche parallel sind einer Fläche von konstanter Krümmung K , sind Weingartensche Flächen. Das ersieht man auch sofort aus Gleichung (11) für K :

$$K = \frac{\mathfrak{R}}{1 + k\mathfrak{H} + k^2\mathfrak{R}}.$$

Ist $K = \text{konst.}$, so besteht für die Parallellfläche die Beziehung:

$$K + kK \cdot \mathfrak{H} + (Kk^2 - 1)\mathfrak{R} = 0,$$

oder:

$$a_1\mathfrak{R} - b_1\mathfrak{H} + 1 = 0.$$

Ist aber $b^2 = a$, besteht also zwischen den Größen H und K der Fläche S die Relation:

$$b^2K - bH + 1 = 0 \dots (a),$$

so ist S eine Röhrenfläche. Sie ist die Umhüllende einer Schar von ∞^1 kongruenten Kugeln und wird in ∞^1 Kreisen von den Kugeln berührt. Aus dieser Entstehungsweise ergibt sich, daß eine Parallellfläche von S in eine Linie ausartet, welche von den Mittelpunkten der ∞^1 Kugeln gebildet wird. Man sieht auch nach Gleichung (7):

$$\mathfrak{D} = D(1 - kH + k^2K),$$

und aus (a), daß $\mathfrak{D}$ gleich Null ist, wenn b für k gesetzt wird.

Ebenso erhellt aus der Entstehungsweise, daß alle anderen Parallellflächen von Röhrenflächen wiederum Röhrenflächen sind.

Mit Hilfe der Gleichungen (11) findet man dasselbe:

$$b^2 K - b H + 1 = \frac{b^2 \mathfrak{K}}{1 + k \mathfrak{H} + k^2 \mathfrak{K}} - \frac{b \mathfrak{H} + 2 b k \mathfrak{K}}{1 + k \mathfrak{H} + k^2 \mathfrak{K}} + 1 = 0,$$

oder:

$$(b - k)^2 \mathfrak{K} - (b - k) \mathfrak{H} + 1 = 0 \dots (b).$$

Vergleicht man (b) mit (a), so erkennt man, daß (b) ebenfalls eine Röhrenfläche darstellt.

Setzt man in der Gleichung (a) voraus, daß K eine Konstante ist, so muß auch H eine von Null verschiedene Konstante sein. Auch für die Parallellflächen ist dann nach den Gleichungen (10) $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ konstant und zwar wird für $K=0$ auch $\mathfrak{K}=0$. Für den besonderen Fall, daß $K=0$ und $H=0$ ist, muß auch nach denselben Gleichungen (10) $\mathfrak{K}=0$ und $\mathfrak{H}=0$ sein. Alle diese Spezialfälle ergeben sich in geometrischer Betrachtung als selbstverständlich. Denn die Flächen, deren beide Krümmungen konstant sind oder für welche H konstant und $K=0$ oder $K=H=0$ ist, sind die Kugelflächen, die geraden Kreiszylinder und die Ebenen. Ihnen entsprechen infolge der Übereinstimmung des Normalensystems konzentrische Kugeln, gerade koaxiale Kreiszylinder oder parallele Ebenen.

D.

Thompson¹ untersuchte noch vier Flächen von Parallellflächen, für die zwischen den Krümmungen der Originalfläche und Parallellfläche folgende einfache Relationen bestehen:

$$\mathfrak{K} = \pm K, \quad \mathfrak{H} = \pm H.$$

1. Fall: $\mathfrak{K} = K.$

Aus Gleichung (10) folgt dann:

$$\mathfrak{K} (k K - H) = 0.$$

Für $\mathfrak{K}=0$ erhält man nach (10) $K=0$; diese Beziehung gilt für abwickelbare Flächen. Für nicht abwickelbare ist:

$$k K - H = 0 \text{ oder } k = \frac{H}{K},$$

¹ American Journal XXIV.

es muß also das Verhältnis $\frac{H}{K}$ oder die Summe der Hauptkrümmungsradien $R_1 + R_2$ konstant sein.

Setzt man in die Gleichung (10) diesen konstanten Wert für k ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{S} = \frac{H - 2 \frac{H}{K} \cdot K}{1 - \frac{H}{K} H + \frac{H^2}{K^2} \cdot K} = -H.$$

Ist demnach die Summe der Hauptkrümmungsradien $R_1 + R_2$ der Originalfläche S stets konstant, so hat die Parallellfläche $\mathfrak{S}$ in der Entfernung $R_1 + R_2$ dieselbe, aber entgegengesetzt bezeichnete mittlere Krümmung der Originalfläche; daher ist auch

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}} = -\frac{H}{K} = -(R_1 + R_2) = \text{konst.}$$

Für die Mittelfläche S' dieser beiden Flächen S und $\mathfrak{S}$ ist die Distanz von S gleich $\frac{1}{2} \frac{H}{K}$, daher die mittlere Krümmung von S' :

$$H' = \frac{H - \frac{H}{K} K}{1 - \frac{H}{2K} H + \frac{H^2}{4K^2} K} = 0.$$

Somit liefert dieser erste Fall den Satz:

„Konstruiert man an den beiden Seiten einer Minimalfläche (z. B. eines Katenoides) zwei äquidistante Parallellflächen, so haben diese gleiche Hauptkrümmungen und absolut gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete mittlere Krümmungen und der absolute Wert des Verhältnisses aus der mittleren Krümmung und Hauptkrümmung ist gleich der Distanz der beiden äquidistanten Flächen.“

2. Fall: $\mathfrak{R} = -K.$

Setzt man in der Gleichung (10) für $\mathfrak{R}$ den Wert $-K$, so gibt dies:

$$K(2 - kH + k^2K) = 0.$$

Ist K von Null verschieden, so ist:

$$k^2 K - k H + 2 = 0,$$

oder:

$$K = \frac{k H - 2}{k^2}$$

und

$$\mathfrak{R} = \frac{2 - k H}{k^2}.$$

Die Mittelfläche S' hat die Hauptkrümmung:

$$K' = \frac{K}{1 - \frac{k}{2} H + \frac{k^2}{4} K} = \frac{4 K}{4 - 2 k H + k^2 K}.$$

Da aber $k H - 2 = k^2 K$ und $4 - 2 k H = -2 k^2 K$ ist, so ist auch:

$$K' = \frac{4 K}{-2 k^2 K + k^2 K} = -\frac{4}{k^2} = \text{konst.}$$

Bildet man also zu einer Fläche mit der konstanten, negativen Hauptkrümmung $-\frac{4}{k^2}$ im Abstände $\pm \frac{k}{2}$ zwei Parallellflächen, so haben diese gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete Hauptkrümmungen.

3. Fall: $\mathfrak{S} = H$.

Nach Gleichung (10) erhält man für diesen Fall:

$$H(1 - k H + k^2 K) = H - 2 k K,$$

oder:

$$k^2 K H = k(H^2 - 2 K).$$

Daher ist für $k \neq 0$:

$$k = \frac{H}{K} - \frac{2}{H} = \frac{R_1 + R_2^2}{R_1^2 + R_2}.$$

Für die Mittelfläche ist das Verhältnis:

$$\frac{H'}{K'} = \frac{H - kK}{K} = \frac{H}{K} - k,$$

oder:

$$\frac{H'}{K'} = \frac{2}{H}.$$

Da ferner nach (10) $H = \frac{H' + kK'}{1 + \frac{k}{2}H' + \frac{k^2}{4}K'}$ ist,

so ist:

$$\frac{H'}{K'} = 2 \frac{1 + \frac{k}{2}H' + \frac{k^2}{4}K'}{H' + kK'},$$

oder:

$$H'^2 - 2K' - \frac{1}{2}k^2K'^2 = 0,$$

somit:

$$\frac{k^2}{2} = \frac{H'^2 - 2K'}{K'^2} = R_1'^2 + R_2'^2.$$

Der Fall 3 enthält also den Satz: „Errichtet man über eine Fläche, für welche die Summe der Quadrate der beiden Hauptkrümmungsradien den konstanten Wert $\frac{k^2}{2}$ hat, zwei Parallellflächen im Abstände $\pm \frac{k}{2}$, so haben sie gleiche mittlere Krümmung.“

4. Fall: $\mathfrak{H} = -H.$

Dies gibt nach (10):

$$-H(1 - kH + k^2K) = H - 2kK,$$

oder:

$$(kK - H)(kH - 2) = 0.$$

Setzt man den ersten Faktor gleich Null, so liefert das den Fall 1; $kH - 2 = 0$ oder $k = \frac{2}{H}$ wurde früher unter A behandelt.

Zum Schlusse des ersten Theiles sei noch erwähnt, daß man die Theorien der Parallellflächen insoferne zu erweitern suchte, als man solche Flächen als Parallellflächen bezeichnete, welche in entsprechenden Punkten parallele, aber nicht dieselben Normalen haben. Die bisher betrachteten Parallellflächen wären demnach nur ein spezieller Fall der eben definierten Parallellflächen.

Enneper¹ hat die Differenzialgleichungen für solche Parallellflächen aufgestellt und deren Fundamentalgrößen durch die der Originalfläche ausgedrückt. Chini² hat dann weiter gezeigt, daß in vielen Fällen derartige Parallellflächen dieselben Eigenschaften aufweisen wie die eben betrachteten.

¹ „Über eine Erweiterung des Begriffes der Parallellfläche.“ Gött. Nachr. 1870.

² „Sopra una Classe di Superficie.“ Giorn. di Mat. XXVII.



