

Gelehrtschule des Johanneums.



Zur Theorie des Segelns.

Von

Rudolf Banning Dr.

Hamburg 1904.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdruckern.

1904. Progr. Nr. 849.



gha
27 (1904)

849. b.





Zur Theorie des Regens

von

H. G. G. G.

1874



§ 1.

Riemen und Ruder.

Auch der Segler kann Riemen und Ruder nicht entbehren; es sei daher gestattet, einige Bemerkungen hierüber der Behandlung des Hauptgegenstandes voranzuschicken.

Daß der Riemen wie ein Hebel wirkt, leuchtet sofort ein; nicht so leicht aber beantwortet sich die spezielle Frage nach dem Drehpunkt desselben. Die Gaffel, die man auf den ersten Blick dafür halten möchte, kann es nicht sein, weil das Schiff ja alsdann stillstehen würde. Auch unsere zweite Vermutung, das in das Wasser eintauchende Ende könnte es sein, wird durch die dort sichtbar werdende Wirbelbewegung widerlegt. Wo liegt denn nun der Drehpunkt?

Wäre der Schiffswiderstand unendlich groß, etwa infolge einer Berührung des Grundes, so würde der Drehpunkt in der Gaffel liegen. Wäre umgekehrt der Riemenwiderstand durch Anstemmen gegen einen Stein unendlich groß, so würde der Drehpunkt an der Berührungsstelle liegen. Diese beiden Grenzfälle lassen den Schluß zu, daß allgemein der Drehpunkt die Entfernung der Gaffel von dem Schwerpunkt des Riemenblattes im umgekehrten Verhältnis der beiden Widerstände teilt. Der Widerstand p_1 des Riemenblattes, der erst durch den Druck p der Hand unter Benutzung der Gaffel als Drehpunkt erzeugt wird, ergibt sich aus dem Hebelgesetz:

$$p x = p_1 (a - x),$$

worin x und $a - x$ die Hebelarme bedeuten. Diese Gleichung zeigt, wie sehr eine Vergrößerung von x , wie sie durch Anbringen der Gaffel weit außenbords gewonnen werden kann, die Größe von p_1 günstig beeinflusst.

Wenden wir uns nun in zweiter Linie zum Ruder, so ist klar, daß jede Benutzung desselben außer der beabsichtigten Drehung eine sehr bedeutende Hemmung bewirkt. Der Umstand, daß die letztere fortwährend mit dem Winkel, um den das Ruder gedreht wird, wächst, während die drehende Wirkung, wie gleich gezeigt werden soll, schon ziemlich früh ihren größten Wert erreicht, begründet die alte Steuerregel, man soll nur wenig und langsam Ruder geben. Nach Euler ist die Druckkraft des Wassers gegen das um α° gedrehte Ruder $P \sin^2 \alpha$, der Arm dieser Kraft $l \cos \alpha$, wenn man unter l die Entfernung des Ruderschwerpunktes vom Schiffsschwerpunkt, der als Drehpunkt angenommen wird, also etwa die halbe Schiffslänge versteht und dabei die halbe Ruderlänge vernachlässigt, somit das Moment

$$P \sin^2 \alpha l \cos \alpha.$$

Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum für

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}, \quad \alpha = 54^\circ 44'.$$

Berücksichtigt man aber noch, daß das Wasser in seiner Bewegung nicht der Kielrichtung, sondern den horizontalen Schiffslinien folgt, so gewinnt man als günstigsten Drehungswinkel ca. 30° .

§ 2.

Die Gesetze des Winddruckes.

Aus rein theoretischen Betrachtungen hat man die Formel $P \cos^3 \alpha$ gefunden, worin α den Winkel zwischen Flächennormale und Windrichtung und P den Druck für $\alpha = 0$ bedeuten. Dreht man nämlich die Fläche aus der Anfangslage $\alpha = 0$ um den Winkel α , so trifft nur noch eine im Verhältnis $1 : \cos \alpha$ verringerte Wassermenge die Fläche, und da gleichzeitig die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Fläche $v \cos \alpha$ wird und der Druck mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst, so scheint obige Formel hinreichend begründet. Und doch stimmt sie mit den Beobachtungen gar nicht. Man sah sich daher veranlaßt, die folgende Formelreihe aufzustellen:

$$P \cos^2 \alpha, \quad P \cos^2 (\alpha + 31^\circ), \quad P \cos^{1,618} \alpha, \quad P \cos \alpha, \quad P \cdot \frac{4 + \pi}{4 + \pi \cos \alpha} \cdot \cos \alpha.$$

Die dritte findet sich bei Lippert,¹⁾ und zwar ist der Exponent eine Wurzel der Gleichung $1 + \frac{1}{x} = x$.

Eine besondere Beachtung verdient noch die letzte, von Lord Rayleigh²⁾ herrührende. Dieser Forscher gibt in der Einleitung seiner Abhandlung, die oben angedeutete Zerlegung der Geschwindigkeit vornehmend, für den Druck auf die Flächeneinheit $c \rho \cdot v^2 \cos^2 \alpha$, worin ρ die Dichtigkeit bedeutet. Bedenkt man aber, daß nicht mehr n , wie bei $\alpha = 0$, sondern nur noch $n \cos \alpha$ Flüssigkeitsstrahlen die Flächeneinheit treffen, so müßte ρ ersetzt werden durch $\rho_a = \rho_0 \cos \alpha$. Aus demselben Grunde könnte man veranlaßt werden, auch in seiner Schlußformel, die durch die Helmholtz-Kirchhoffsche hydrodynamische Theorie gewonnen wird, dieselbe Änderung vorzunehmen, und würde dadurch gewinnen

$$P \cdot \frac{4 + \pi}{4 + \pi \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha.$$

Diese Formel würde einerseits mit den Beobachtungen von Hutton, Vince, Beaufoy,³⁾ andererseits auch mit der Lippertschen Formel gut übereinstimmen. Da nun die letztere den großen Vorzug der Einfachheit besitzt, so soll sie den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden.

§ 3.

Der Segelflug des Vogels.⁴⁾

Daß der Wind in einer Richtung, die mit seiner eigenen einen Winkel $< 90^\circ$ einschließt, eine Wirkung auszuüben vermag, erscheint selbstverständlich; weniger einleuchtend ist dies aber für Winkel $> 90^\circ$. Der Mensch wendet, um dies zu erreichen, passend gestellte Flächen an, die eine zu diesen senkrechte Kraft liefern, und geeignete Widerstände, die den nicht gewünschten Teil jener Kraft vernichten. Bei dem Drachen liegt der Widerstand in der Festigkeit des Fadens; wodurch aber der ohne Flügelschlag dahinsegelnde Vogel die Komponente,

¹⁾ Lippert, „Natürliche Fliegensysteme“, S. 90.

²⁾ Phil. Mag., 1876.

³⁾ S. Lippert l. c., S. 91.

⁴⁾ S. Ahlborn, „Zur Mechanik des Vogelfluges“, Abh. des naturw. Vereins zu Hamburg. XIV.

die ihn in der Windrichtung fortreiben möchte, überwindet, ist nicht so leicht einzusehen, und möge durch verwandte Erscheinungen erläutert werden. Wenn ein Schlittschuhläufer seine Körperachse um den Winkel α neigend in kreisähnlicher Bahn dahingleitet, so wird die Schwerkraft, die ihn zu Boden zu ziehen sucht, hieran verhindert durch die infolge der Krümmung der Bahn auftretende Zentrifugalkraft, und zu seiner Sicherheit ist nur erforderlich, daß die Resultierende jener beiden Kräfte in seine Körperachse fällt, daß

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{r \cdot g}.$$

Der Mond, dem Zwiespalt seiner eigenen Geschwindigkeit, die ihn in gerader Linie in den Weltenraum fortreibt, und der Anziehungskraft der Erde, die ihn zu uns herniederzwingt, ausgesetzt, löst diesen Konflikt, indem er die Erde umkreist und dabei fortwährend zur Erde fällt, ohne sich ihr aber selbst in Jahrtausenden merklich zu nähern, indem er die Anziehungskraft überwindet durch die Zentrifugalkraft.

Ebenso überwindet auch der segelnde Vogel den schädlichen Teil des Winddruckes durch die Zentrifugalkraft seiner gekrümmten Bahn. Sollte es daher ihm nicht auch möglich sein, in Viertelkreisen gegen den Wind aufzukreuzen, statt in Spirallinien emporzusteigen und dann auf der schiefen Ebene herunterzuschweben?

§ 4.

Die günstigste Segelstellung.¹⁾

Bei einem guten Segelboot kann man, die Abtrift vernachlässigend, die Kursrichtung gleich der Kielrichtung setzen. Nehmen wir ferner die Segelfläche als eben und das Boot nicht geneigt an, so wird nach den Betrachtungen des § 2 der Druck auf das ruhende Segel mit dem Inhalt F durch die Formel

$$P = \frac{\gamma}{g} \cdot F v^2 \cdot \cos^{1,618} \alpha$$

bestimmt, worin γ das spezifische Gewicht der Luft und g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeuten. Ist aber das Segel selbst in Bewegung, so entsteht hierdurch ein zweiter Wind, dessen Richtung und Stärke jener Bewegung entgegengesetzt gleich ist, und durch Verbindung beider der an Bord wahrgenommene sogenannte scheinbare Wind. Nun ist klar, daß der auf das Segel ausgeübte Druck nicht von dem wahren, sondern dem scheinbaren Wind bestimmt wird; es ist daher unsere erste Aufgabe, Richtung und Stärke des letzteren zu bestimmen. Sind a , b , v die Geschwindigkeiten des wahren Windes, des Bootes und des scheinbaren Windes, α und β die Winkel der betrachteten Winde mit der vom Heck zum Bug laufenden Kiellinie, so ergeben sich zwischen diesen Größen nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten folgende Beziehungen:

$$v^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \alpha, \quad v : a = \sin \alpha : \sin \beta, \quad a : b = \sin \beta : \sin (\beta - \alpha).$$

Für $\alpha = 0$, d. h. bei einer Fahrt genau vor dem Winde ist $v = a - b$, für $\alpha = 180$ dagegen gleich $a + b$, und gleich a , wenn $\sin \alpha = \sin \beta$.

¹⁾ Vergl. die verwandte Arbeit von Edm. Gerlach: Zur Theorie des Segelns, Programm der Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin. 1888.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $\cos \alpha = \frac{b}{2a}$ ist. Für $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ wird $\alpha = 80^\circ 25'$.

Je nachdem also $\alpha \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 80^\circ 25'$, ist $a \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} v$.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen können wir uns zu unserer Hauptaufgabe wenden. Nennen wir den Winkel, den die Segelnormale mit der Richtung des scheinbaren Windes bildet, x und setzen zur Abkürzung den Exponenten von $\cos x$ gleich m , so wird die in die Richtung des Kieles fallende, also vorwärts treibende Komponente des Winddruckes

$$1) \quad P = \frac{\gamma}{g} F \cdot v^2 \cos^m x \cos(\beta - x).$$

Suchen wir nun diejenige Segelstellung, für welche die Kraft P und daher auch die Fahrt einen möglichst großen Wert annimmt, so müssen wir die erste Ableitung von

$$f(x) = \cos^m x \cos(\beta - x)$$

gleich Null setzen und gewinnen dadurch die wichtige Beziehung

$$2) \quad m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\beta - x).$$

Es möge noch bemerkt werden, daß diese Formel für alle im § 2 angegebenen Winddruckgesetze gilt, wenn man für m den entsprechenden Wert einsetzt. Für $m = 1$ wird $x = \beta/2$, d. h. das Segel halbiert den von Wind und Kiel halbierten Winkel; wird er größer angenommen, so wird x entsprechend kleiner.

§ 5.

Das Kreuzen.

Weht der wahre Wind von einem Punkte A nach einem Punkte B und will man umgekehrt im Segelboot von B nach A gelangen, so kann man dies auf jedem der unendlich vielen gleichschenkligen Dreiecke, die über der Basis AB errichtet werden können. Es handelt sich nun darum, dasjenige zu bestimmen, auf dem man am schnellsten zum Ziele gelangt.

Bedeutet t die zum Aufkreuzen erforderliche Zeit, s den Gesamtweg, d die Länge von AB , so ist

$$t = \frac{s}{c}$$

und da $s = \frac{d}{\cos \alpha}$, so wird

$$t = \frac{d}{c \cos \alpha}.$$

Nun verhalten sich nach einer allgemein angenommenen Annahme die Quadrate der Geschwindigkeiten wie die Widerstände, diese aber bei gleichmäßiger Bewegung wie die

treibenden Kräfte, folglich verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Kräften, d. h. $c : c_0 = \sqrt{K} : \sqrt{K_0}$, daher wird

$$t = \frac{-d \cdot \sqrt{K_0}}{c_0 \cdot \sqrt{K \cdot \cos \alpha}} = \frac{C}{v \cos^{\frac{m}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} (\beta - x) \cdot \cos \alpha}$$

Damit die Zeit ein Minimum werde, muß der Nenner

$$f(\beta) = v \cos^{\frac{m}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} (\beta - x) \cos \alpha$$

unter der Bedingung $m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x)$ zu einem Maximum gemacht werden. Benutzt man noch die Beziehung

$$v = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta},$$

und setzt $\alpha = \beta - \delta$, indem man δ aus der Gleichung

$$a : b = \sin \beta : \sin (\beta - \alpha) = \sin \beta : \sin \delta$$

bestimmt, so wird

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos^{\frac{m}{2}} x \cdot \cos^{\frac{1}{2}} (\beta - x) \cdot \frac{1}{\sin \beta} \\ &= \frac{a}{2} \sin (2\beta - 2\delta) \cos^{\frac{m}{2}} x \cdot \cos^{\frac{1}{2}} (\beta - x) \cdot \frac{1}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

Die gleich Null gesetzte Ableitung liefert unter Berücksichtigung von Gleichung 2)

$$3) \quad 4 \cotg (2\beta - 2\delta) - \operatorname{tg} (\beta - x) - 2 \cotg \beta = 0.$$

Nehmen wir zunächst $m = 1$, also $x = \beta/2$ und $\delta = 8^\circ$, so wird für $\beta = 140^\circ$ $f'(\beta) = +0,05$, für $\beta = 141^\circ$ dagegen gleich $-0,07$, das gesuchte Maximum liegt also zwischen diesen beiden Werten. Für $\beta = 141^\circ$ wird $\alpha = 133^\circ$, der wahre Wind trifft also das Schiff unter 47° von vorn. Wählen wir dagegen $m = 1,618$, so wird für β gleich 136° und 135° $f'(\beta)$ gleich $-0,1$ und $+0,08$, das gesuchte Maximum liegt also bei $\beta = 135^\circ 30'$. Dadurch wird $\alpha = 127^\circ 30'$, der wahre Wind trifft also jetzt das Schiff unter $52^\circ 30'$ von vorn.

§ 6.

Der günstigste Kurs.

Für die vorwärts treibende Komponente des Winddrucks haben wir den Ausdruck

$$P = \frac{\gamma}{g} F (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) \cos^m x \cos (\beta - x)$$

gefunden. Bei der Untersuchung des günstigsten Kurses muß daher die erste Ableitung von

$$f(\beta) = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) \cos^m x \cos (\beta - x)$$

gebildet und gleich Null gesetzt werden. Man erhält

$$f'(\beta) = v^2 \cos^m x \cos (\beta - x) \left[\frac{2ab \sin \alpha}{v^2} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} - m \operatorname{tg} x \frac{dx}{d\beta} - \operatorname{tg} (\beta - x) \left(1 - \frac{dx}{d\beta} \right) \right] = 0$$

und hieraus

$$\frac{2ab \sin \alpha}{v^2} \frac{d\alpha}{d\beta} - \operatorname{tg}(\beta - x) = 0.$$

Den Wert von $\frac{d\alpha}{d\beta}$ kann man aus $v \sin \beta - a \sin \alpha = 0$ herleiten, und zwar erhält man

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{v^2 \cos \beta}{a v \cos \alpha - a b \sin \alpha \sin \beta}$$

also speziell $\frac{d\alpha}{d\beta}_{\beta=0} = \frac{a-b}{a}.$

Durch Einsetzen gewinnen wir

$$4) \quad \frac{2b \sin \alpha \cos \beta}{v \cos \alpha - b \sin \alpha \sin \beta} - \operatorname{tg}(\beta - x) = 0.$$

Diese Gleichung wird offenbar erfüllt durch $\alpha = \beta = 0$. Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, ist von

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= v^2 \cos^m x \cos(\beta - x) \left[\frac{2b \sin \alpha \cos \beta}{v \cos \alpha - b \sin \alpha \sin \beta} - \operatorname{tg}(\beta - x) \right] \\ &= v^2 \cos^m x \cos(\beta - x) \cdot \varphi \end{aligned}$$

noch einmal die Ableitung zu bilden. Dieselbe wird

$$f''(\beta) = v^2 \cos^m x \cdot \cos(\beta - x) \varphi^2 + v^2 \cos^m x \cdot \sin(\beta - x) \cdot \varphi'.$$

Für $\beta = 0$ verschwindet φ und von φ' das Glied, welches im Zähler $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ enthält; es wird also

$$f''(\beta)_{\beta=0} = v^2 \left[\frac{2b \cos \alpha \cos \beta}{v \cos \alpha - b \sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} - \frac{1}{\cos^2(\beta - x)} \left(1 - \frac{dx}{d\beta} \right) \right]_{\beta=0}$$

$$= v^2 \left[\frac{2b}{v} \cdot \frac{a-b}{a} - \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \right]$$

$$5) \quad = (a-b)^2 \cdot \left[\frac{2b}{a} - \frac{m}{m+1} \right].$$

Der für $\frac{dx}{d\beta}$ eingesetzte Wert ist noch zu begründen. Aus

$$m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\beta - x)$$

folgt

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{\cos^2 x}{m \cos^2(\beta - x) + \cos^2 x}, \text{ mithin}$$

$$\frac{dx}{d\beta}_{\beta=0} = \frac{1}{m+1}.$$

Aus der Gleichung 5) gewinnen wir nun folgendes Resultat: je nachdem der Wert der Klammer positiv, negativ oder null ist, liegt ein Minimum, Maximum oder keines von beiden vor.

Von der Aufsuchung einer zweiten Wurzel der Gleichung 4 soll hauptsächlich deswegen Abstand genommen werden, weil noch ein anderer wichtiger Faktor, wie im § 9 gezeigt werden wird, den günstigsten Kurs stark beeinflusst. Nur für $m = 1$ möge noch folgendes hinzugefügt werden. Aus

$$\frac{2b \sin \alpha \cos \beta}{v \cos \alpha - b \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg} \beta/2$$

erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{v}{b} \cotg \alpha = 2 \cotg \beta/2 \cdot \cos^2 \beta/2.$$

Ferner ist

$$\frac{v}{b} \cdot \cotg \alpha = \frac{v}{a} \cdot \frac{a}{b} \cotg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{a}{b},$$

daher

$$4a) \quad \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot \cos \alpha = 4 \cos^4 \beta/2 \\ \frac{a}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}. \end{cases}$$

Nimmt man $\frac{a}{b} = 3$, so hat der Ausdruck $\frac{a}{b} \cdot \cos \alpha - 4 \cos^4 \beta/2$ für $\beta = 64$ resp. 65 die Werte $-0,0062$ und $+0,0061$, folglich liegt für $m = 1$ ein Nullwert bei $\beta = 64^\circ 30'$.

Daß dies ein Maximum sein muß, ist klar.

Der Gleichung 4 möge zum Schluß noch eine andere Form gegeben werden. Setzt man $v = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta}$, so erhält man genau wie oben

$$2 \cotg \alpha \frac{d\alpha}{d\beta} - \operatorname{tg} (\beta - \alpha) - 2 \cotg \beta = 0.$$

Aus $a:b = \sin \beta : \sin (\beta - \alpha)$ folgt

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{a \cos (\beta - \alpha) - b \cos \beta}{a \cos (\beta - \alpha)},$$

daher wird

$$4b) \quad 2 \cotg \alpha \cdot \frac{a \cos (\beta - \alpha) - b \cos \beta}{a \cos (\beta - \alpha)} - \operatorname{tg} (\beta - \alpha) - 2 \cotg \beta = 0.$$

Auf die Ähnlichkeit dieser Formel mit der Formel 3, der man die Gestalt

$$4 \cotg 2\alpha \frac{d\alpha}{d\beta} - \operatorname{tg} (\beta - \alpha) - 2 \cotg \beta = 0$$

hätte geben können, möge noch hingewiesen werden.

§ 7.

Die günstigste Segelstellung bei mehreren Segelflächen.

Hat der scheinbare Wind eine solche Richtung, daß jedes Segel einen Teil des vorhergehenden abdeckt, so wird die günstigste Segelstellung, das letzte Segel ausgenommen, eine

andere. Wenn F , die Fläche eines Segels, gerade den Raum zwischen zwei Masten ausfüllt, so wird der vom Winde getroffene Teil

$$F' = F \cdot \frac{\sin \beta}{\cos x},$$

der Druck daher

$$P = \frac{\gamma}{g} \cdot F v^2 \sin \beta \cos^{m-1} x \cdot \cos (\beta - x).$$

Daher erhält man jetzt zur Bestimmung von x die Gleichung

$$6) \quad (m-1) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x).$$

Für $m=1$ folgt hieraus $x=\beta$, d. h. das Segel muß so lange unter 90° zur Kielrichtung gestellt bleiben, bis es vollständig frei kommt. Dies tritt ein, wenn $\beta=45^\circ$ wird. Wird $\beta > 45^\circ$, so muß das Segel so weit angeholt werden, daß es gerade noch ganz vom Winde getroffen wird; dann ist andauernd

$$\sin \beta = \cos x, \text{ also}$$

$$\beta + x = 90^\circ.$$

Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man einerseits das wirklich vorhandene Segel unter der Annahme, daß es bei jeder Stellung ganz vom Winde getroffen würde, aus der Stellung $x=\beta$ bis zur Stellung $x=\beta/2$ heranholt, und andererseits ein gedachtes Segel von der Größe

$$F'' = F \cdot \operatorname{tg} \beta$$

unter Berücksichtigung der tatsächlichen Windverhältnisse ebenso bewegt; alsdann nimmt die Wirkung des ersten Segels fortwährend zu, die des zweiten dagegen fortwährend ab. In der Wirklichkeit haben wir nun beim Anholen unseres Segels, so lange das ganze Segel vom Winde getroffen wird, Fall eins vor Augen, von dem Augenblicke ab, wo dies nicht mehr stattfindet, Fall zwei.

Die Stellung aller Segel wird schließlich dieselbe, wenn gleichzeitig

$$\beta + x = 90$$

$$x = \beta/2$$

d. h. wenn

$$\beta = 60^\circ.$$

Dieselbe Betrachtung für die übrigen Werte von m führt zu folgenden Resultaten.

Die Gleichung 6) gilt so lange, bis das ganze Segel frei kommt, d. h. bis

$$\sin \beta = \cos x.$$

Zur Bestimmung dieses Grenzwertes β_1 hat man also die beiden Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} (m-1) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x), \\ \sin \beta = \cos x. \end{array} \right.$$

Nach einigen Rechnungen findet man

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \sqrt{2(m-1)+1}.$$

Das alte Gesetz tritt dagegen wieder in Kraft, wenn gleichzeitig

$$\begin{cases} m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x), \\ \sin \beta = \cos x. \end{cases}$$

Man gewinnt ebenso

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \sqrt{2m+1}.$$

Die folgende Tabelle bedarf wohl keiner Erklärung.

m	2	1,618	1
β_1	60°	$55^\circ 15'$	45°
β_2	$65^\circ 57'$	$64^\circ 6'$	60°

Unter ihrer Benutzung gewinnen wir das interessante Resultat:

- 1) $\beta < \beta_1$: $(m-1) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x)$
- 2) $\beta_1 < \beta < \beta_2$: $\beta + x = 90^\circ$
- 3) $\beta_2 < \beta$: $m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x)$,

d. h. für die links stehenden Werte von β gelten die rechts stehenden Gleichungen zur Bestimmung von x .

§ 8.

Der günstigste Kurs bei mehreren Segelflächen.

Je nach dem Werte von β haben wir als Ausgangspunkt zu wählen:

- 1) $P = \frac{\gamma}{g} F [v^2 \cos^m x \cos (\beta - x) + n v^2 \sin \beta \cos^{m-1} y \cos (\beta - y)]$
- 2) $P = \frac{\gamma}{g} F [v^2 \cos^m x \cos (\beta - x) + n v^2 \sin^m \beta \sin 2\beta]$
- 3) $P = \frac{\gamma}{g} F [v^2 \cos^m x \cos (\beta - x) + n v^2 \cos^m x \cos (\beta - x)],$

und zwar sind x und y durch die Gleichungen

$$m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\beta - x), \quad (m-1) \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} (\beta - y)$$

bestimmt. Es gilt nämlich die erste der drei Gleichungen für $\beta < \beta_1$, die zweite für das Intervall $\beta_1 < \beta < \beta_2$ und die dritte für $\beta > \beta_2$.

Untersuchen wir zunächst den Ausdruck $f(\beta)$ in der Nähe von $\beta = 0$. Es wird

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= v^2 \cos^m x \cos(\beta - x) \left[\frac{2b \sin \alpha \cos \beta}{v \cos \alpha - b \sin \alpha \sin \beta} - \operatorname{tg}(\beta - x) \right] \\ &+ n v^2 \sin \beta \cos^{m-1} y \cos(\beta - y) \left[\frac{2b \sin \alpha \cos \beta}{v \cos \alpha - b \sin \alpha \sin \beta} - \operatorname{tg}(\beta - y) \right] \\ &+ n v^2 \cos \beta \cos^{m-1} y \cos(\beta - y). \end{aligned}$$

Hier wird, abweichend von § 6,

$$f''(\beta)_{\beta=0} = n(a-b)^2;$$

es liegt also kein Maximum oder Minimum vor. Wegen des großen Einflusses des Faktors $\sin \beta$ ist es vielleicht nicht ganz ohne Interesse, das Maximum von

$$f_1(\beta) = \sin \beta \cos^{m-1} y \cos(\beta - y)$$

zu bestimmen.

Aus

$$f'_1(\beta) = \cos^{m-1} y \cos(\beta - y) [\cos \beta - \sin \beta \operatorname{tg}(\beta - y)]$$

folgt als eine Bedingung für das Maximum

$$\cotg \beta = \operatorname{tg}(\beta - y)$$

oder

$$\begin{cases} 90^\circ - \beta = \beta - y \\ (m-1) \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\beta - y). \end{cases}$$

Nach einigen Rechnungen ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{m+1}{m-1}}.$$

Für $m=2$ wird $\beta=60^\circ$, für $m=1,618$ dagegen gleich $64^\circ 13'$. Vergleichen wir dies mit den oben aufgestellten Grenzen, so erkennen wir, daß im ersten Intervall für konstantes v , daher a fortiori für wachsendes v ein Maximum sich nicht befindet.

Stellen wir für das zweite Intervall dieselbe Betrachtung an, so haben wir das Maximum von

$$\sin^m \beta \cdot \sin 2\beta$$

aus der Gleichung

$$m \cotg \beta + 2 \cotg 2\beta = 0,$$

zu bestimmen, woraus

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1+m}$$

und folgende Tabelle sich ergibt

m	2	1,618	1
β	60°	$58^\circ 17'$	$54^\circ 44'$

Berücksichtigen wir aber noch das Anwachsen der Geschwindigkeit, so erhalten wir die Bedingung

$$2 \cotg \alpha \frac{d\alpha}{d\beta} + (m-1) \cotg \beta - \tg \beta = 0.$$

Der spezielle Fall $\alpha = \beta - \delta$, $\delta = 10$, $m = 1$ liefert

$$2 = \tg \beta \cdot \tg (\beta - \delta),$$

erfüllt durch

$$\beta = 59^\circ 30',$$

woraus geschlossen werden kann, daß durch den Einfluß von v das Maximum an die obere Grenze gerückt wird. Daraus ergibt sich das Endresultat, daß in den beiden ersten Intervallen ein Maximum nicht vorhanden ist, daß das Maximum bei mehreren Segelflächen also genau an derselben Stelle liegt wie bei einer einzigen.

§ 9.

Die Form des Segels und noch einmal der günstigste Kurs.

Wenn auch die Frage nach der besten Form des Segels, d. h. die Frage: welche krumme Fläche veranlaßt die stärkste Druckbildung, nicht beantwortet werden kann, so führen doch Praxis¹⁾ und Theorie²⁾ wenigstens zur Erkenntnis des günstigsten Umrisses. Beide zeigen, daß der Druck eines quadratischen Segels ganz bedeutend zunimmt, wenn man bei gleichbleibendem Inhalt die Vorderkante wachsen, die Unterkante abnehmen läßt, daß also der Druck eines Segels hauptsächlich von der Länge der Vorderkante abhängt. Unverkennbar ist in der letzten Zeit das Bestreben schon darauf gerichtet, die Segelform dieser Tatsache anzupassen.

In der erwähnten Abhandlung von Altmann interessiert uns hier aber noch ein zweiter Punkt, zu dessen Verständnis folgende Stellen derselben entnommen werden mögen.

1) Bewegt sich eine Platte in einer unendlich langen, sie allseits umschließenden Röhre mit der Geschwindigkeit v , so wird die Länge x der entstehenden verdichteten Luftsäule durch die Gleichung

$$p_a \left[\left(1 + \frac{v}{x-v} \right)^k - 1 \right] = \frac{\gamma}{g} v x$$

bestimmt, während die Länge y der auf der Rückseite entstehenden verdünnten Luftsäule sich aus der entsprechenden Gleichung

$$p_a \left[1 - \left(1 - \frac{v}{y+v} \right)^k \right] = \frac{\gamma}{g} \cdot y v$$

ergibt. Der dadurch erzeugte Überdruck wird berechnet aus der Gleichung

$$P = \frac{\gamma}{g} v x + \frac{\gamma}{g} v y$$

und ist z. B. für $v = 1$ gleich 87 kg.

¹⁾ Ahlborn: Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes, Abh. d. naturw. Vereins zu Hamburg, Bd. XVII.

²⁾ Altmann: Luftwiderstandsgesetze bewegter ebener Platten. Zeitschrift für Luftschiffahrt 1900.

2) Bewegt sich eine Platte in ihrer eigenen Ebene senkrecht zu einem Luftstrom von der Geschwindigkeit v mit der Geschwindigkeit $\mathcal{V} = \infty$, so erleidet sie auf ihrer ganzen Fläche denselben Druck wie in der Röhre.

3) Bewegt sich die betrachtete Platte nur mit einer Geschwindigkeit $\mathcal{V} > 332$ m, so erleidet den Maximaldruck nur noch ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis die Vorderkante ist und dessen Schenkel mit der Seitenkante einen Winkel α bildet, für den

$$\sin \alpha = \frac{332}{\mathcal{V}}.$$

4) Bewegt sich dieselbe Platte mit einer Geschwindigkeit $\mathcal{V} < 332$, so erleidet zwar kein Teil mehr den Maximaldruck, jedoch wächst der Druck mit wachsendem $\mathcal{V}$, ist im besonderen immer größer als bei $\mathcal{V} = 0$.

Diese letzte Tatsache ist es nun, die uns bei der Theorie des Segelns noch interessiert. Bilden Kurs und Wind bei einer Fahrtgeschwindigkeit $\mathcal{V}$ den Winkel β , so entspricht die Anzahl der durchschnittenen frischen Luftschichten der Geschwindigkeit

$$\mathcal{V} \sin \beta.$$

Der erzeugte Druck wird daher bei demselben $\mathcal{V}$ für $\beta = 90^\circ$ am größten sein. Daraus erklärt es sich, daß die Praxis als günstigsten Kurs $\beta = 90$, die Theorie aber einen viel kleineren Wert ergibt. Es erklärt sich ferner hieraus, warum ein Klüver mit steiler Vorderkante besser zieht als ein anderer mit schräger: bei dem ersten werden die Luftschichten, welche die oberen Teile des Vorderrandes treffen, durch die von den unteren Teilen abströmenden Luftmassen weniger gestört als bei dem zweiten. Aus demselben Ideenkreise erklärt sich ferner, warum man aus der Mitte des Ballons mit günstigem Erfolg einen oder mehrere Kreise herausschneiden kann: man verhindert dadurch die Bildung eines Luftstauhügels, eines stationären Zustandes, der ein Minimum von Druck zur Folge haben würde, und zwingt die Luft, wie aus einem Trichter in Spirallinien abzufließen. Auch das plötzliche Einfallen einer Bö entspricht dem Einschnitten des Segels in eine neue, ungestörte Luftschicht und ruft dadurch oft einen zu starken Druck hervor, den man entweder durch eigenhändige Änderung der Segelstellung oder dadurch, daß die Schot gegen elastische, also nachgebende Gegenstände wie Gummi oder Spiralfedern drückend selbsttätig dasselbe bewirkt, auf das richtige Maß zurückzuführen gezwungen ist.

2) Bewegt sich eine Platte in ihrer eig-
der Geschwindigkeit v mit der Geschwindigkeit
denselben Druck wie in der Röhre.

3) Bewegt sich die betrachtete Platte
erleidet den Maximaldruck nur noch ein gleich
kante ist und dessen Schenkel mit der Seiten

$$\sin \alpha =$$

4) Bewegt sich dieselbe Platte mit einer
Teil mehr den Maximaldruck, jedoch wächst
immer größer als bei $v = 0$.

Diese letzte Tatsache ist es nun, die un-
Bilden Kurs und Wind bei einer Fahrtgeschwin-
der durchschnittenen frischen Luftschichten d

$$v$$

Der erzeugte Druck wird daher bei den
erklärt es sich, daß die Praxis als günstiger
kleineren Wert ergibt. Es erklärt sich f
Vorderkante besser zieht als ein anderer m
schichten, welche die oberen Teile des Vorder
abströmenden Luftmassen weniger gestört als
erklärt sich ferner, warum man aus der Mit
mehrere Kreise herauschneiden kann: man
hügels, eines stationären Zustandes, der ein
und zwingt die Luft, wie aus einem Trichter
Einfallen einer Bö entspricht dem Einschnei
schicht und ruft dadurch oft einen zu starken
händige Änderung der Segelstellung oder
nachgebende Gegenstände wie Gummi oder Sp
auf das richtige Maß zurückzuführen gezwun

ftstrom von
nzen Fläche

332 m, so
die Vorder-

zwar kein
besonderen

interessiert.
die Anzahl

in. Daraus
einen viel
mit steiler
die Luft-
teren Teilen
Ideenkreise
einen oder
es Luftstau-
ben würde,
as plötzliche
störte Luft-
durch eigen-
tische, also
be bewirkt,

