

In den folgenden Zeilen will ich für einige einfache planimetrische, trigonometrische und stereometrische Sätze Beweise geben, die nur sehr wenig oder noch gar nicht bekannt zu sein scheinen. Zu dem Zwecke habe ich soviele neuere und ältere Lehrbücher durchgesehen, als in den wenigen Wochen, die mir zur Anfertigung dieser Arbeit zur Verfügung standen, sich ermöglichen liefs; das Verzeichnis derselben befindet sich alphabetisch geordnet auf den letzten Seiten. Natürlich kann ich auf Grund dieses Materials nicht mit Sicherheit behaupten, daß die vorgetragenen Beweise wirklich neu sind; hätte ich aber noch so viele Bücher benutzt, so würde ich doch nie die Behauptung aufstellen können, daß die Beweise noch nie veröffentlicht worden sind. So habe ich bis kurz vor der Ablieferung dieser Arbeit zur Druckerei geglaubt, daß der in § 2 gebrachte Beweis neu sei, während ich ihn schliesslich noch in dem Lehrbuche von Schindler und zum Teil auch in dem von Worpitzky fand. Sollte ich auch mit den Beweisen im stereometrischen Teile, speziell in § 11, nichts Neues bringen, so muß ich mich mit dem Gedanken zufrieden geben, daß selbst solchem ausgezeichneten Kenner der mathematischen Litteratur wie Schotten es passieren konnte, daß er einen Beweis für neu hielt, der in einem ganz bekannten Lehrbuche schon früher mitgeteilt worden war. Im zweiten Teile seines vortrefflichen Werkes: Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts (Leipzig, 1893, Teubner) sagt er auf Seite 352: „Ich bemerke übrigens ausdrücklich, daß es mir ganz wunderbar erscheint, daß kein Lehrbuch für die Gleichheit der Scheitelwinkel einen andern Beweis zu erbringen weifs, als mit Hilfe der Nebenwinkel. Und doch ist, wenn man unsere Winkeldefinition zu Grunde legt, kein einfacherer, natürlicherer Beweis denkbar als der folgende. Man lasse die eine Gerade sich um ihren Scheitelpunkt drehen. Sowie sie dann mit der andern noch einen zweiten Punkt gemeinsam hat, fällt sie mit dieser völlig zusammen. Die beiden Scheitelwinkel erfordern also dieselbe Drehung — resp. entstehen durch dieselbe Drehung —, so daß sie nach unserer Erklärung eo ipso auch als gleich erkannt werden. Soweit ich mich erinnere, habe ich diesen höchst einfachen, anschaulich evidenten Beweis für die Gleichheit der Scheitelwinkel nirgends gefunden.“ In dem Lehrbuche von Gallenkamp aber, das bei gedrängter Kürze einen äußerst reichen Inhalt besitzt, findet sich zunächst (§ 8) die auch von Schotten empfohlene Erklärung des Winkels als das Maß der Drehung, welche erforderlich ist, um von der einen Linie zur anderen zu gelangen, und dann ist (§ 11), bevor noch die Nebenwinkel erklärt werden, der Satz angegeben: „Scheitelwinkel sind gleich, denn sie sind das Maß derselben Drehung.“

Wenn ich demnach auch nicht mit völliger Sicherheit behaupten kann, daß die Beweise neu sind, so finden sich jedenfalls dieselben äußerst selten in Lehrbüchern; daher glaube ich, daß dieselben in Kollegenkreisen Interesse erwecken werden.

Eine andere Frage ist es, ob die gegebenen Beweise ebenso gut oder besser als die üblichen sind. Natürlich kann ich ein unparteiisches Urteil darüber nicht fällen; um ein solches zu hören, erlaube ich mir eben, die Beweise einem größeren Kreise bekannt zu geben. Sollte der eine oder andere Beweis als brauchbar für den Unterricht befunden werden, so ist der Zweck der Arbeit erreicht. Aus diesem Grunde gebe ich auch die folgenden Beweise in voller Breite und Ausführlichkeit, so daß sie direkt in dieser Form den Schülern mitgeteilt werden können.

I. Abschnitt. Die Inkongruenz der Dreiecke.

§ 1. Lehrsatz. Bleibt in einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete ungeändert und wächst die andere, so wächst auch deren Gegenwinkel und die Hypotenuse. (Figur 1.)

Voraussetzung: $CD > CA$.

Behauptung: $BD > BA$; $\angle CBD > CBA$.

Beweis: $\angle BAD > R$ als Nebenwinkel eines spitzen Winkels.
 $BD > BA$. Dem größeren Winkel eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber.

$\angle CBD > CBA$. Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

Umkehrung. Bleibt in einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete ungeändert und wächst die Hypotenuse, so wächst auch die andere Kathete und deren Gegenwinkel.

Umkehrung. Bleibt in einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete ungeändert und wächst der anliegende spitze Winkel, so wachsen auch die beiden anderen Seiten.

Beide Umkehrungen sind direkte Folgerungen aus dem ersten Lehrsatz.

§ 2. Lehrsatz. Bleibt in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse ungeändert und wächst eine Kathete, so wächst auch deren Gegenwinkel und die andere Kathete nimmt ab. (Figur 2.)

Voraussetzung: 1) $DE = AB$; 2) $CE > CB$.

Behauptung: $CD < CA$; $\angle CDE > CAB$.

Beweis: Man verbinde A mit E, so ist:

$AB < AE$ nach Vorauss. 2 und § 1

also $DE < AE$ nach Vorauss. 1

$CD < CA$ nach § 1 Umkehrung

und alsdann $\angle CDE > CAB$ als Außenwinkel des Dreiecks ADE.

Umkehrung. Bleibt in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse ungeändert und wächst ein spitzer Winkel, so wächst die Gegenkathete und die anliegende Kathete nimmt ab.

Ist eine direkte Folgerung aus dem Lehrsatz.

§ 3. Folgerungen. Wächst in einem Kreise eine Sehne, so wächst der kleinere der beiden zugehörigen Bogen und ihr Mittelpunktsabstand nimmt ab. (Figur 3.)

Beweis. Der Mittelpunktsabstand, der Radius zu einem Endpunkte der Sehne und die Hälfte dieser begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck, auf das § 2 angewendet werden kann. Ferner ist Bogen $CJ > AH$, weil der Centriwinkel durch den zugehörigen Bogen gemessen wird; folglich Bogen $CD > AB$.

1. Umkehrung. Wächst in einem Kreise der Abstand einer Sehne vom Mittelpunkte, so nimmt die Sehne und der kleinere zugehörige Bogen ab. Beweis ebenso.

2. Umkehrung. Wächst im Kreise ein Bogen, ohne den Halbkreis zu überschreiten, so wächst die zugehörige Sehne und ihr Mittelpunktsabstand nimmt ab. Beweis durch § 2. Umkehrung.

Den vorstehenden Sätzen und Beweisen möchte ich einige Bemerkungen hinzufügen. Die Wortfassung derselben weicht von der in fast allen Lehrbüchern gebräuchlichen wesentlich ab; so müßte § 2 in der gewöhnlichen Fassung lauten: Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen und ist eine Kathete des einen Dreiecks größer als eine des andern etc. Ich halte die von mir gewählte Fassung, die ich bei ähnlichen Sätzen nur bei Baltzer, Gallenkamp und A. Gauss gefunden habe, deshalb für geeigneter, als in der neueren Geometrie mehr und mehr das Bestreben sich geltend macht, die Figuren nicht wie bei Euklid als starre Gebilde zu betrachten, sondern als bewegliche, veränderliche Gestalten; gerade dadurch wird auch im Unterrichte das Interesse an dem Gegenstande erhöht, daß den Figuren gewissermaßen Leben und Beweglichkeit eingebläht wird und wenn die Schüler sehen, wie aus einer Figur sich anders gestaltete entwickeln, wie spezielle Fälle als Grenzen allgemeinerer aufgefaßt werden können, wie dies bei Besprechung der Tangenten wohl allgemein schon üblich ist.

Was die Sätze selbst anbetrifft, so findet sich § 2 verhältnismäßig selten in den Lehrbüchern, während § 1 fast überall vorhanden ist, allerdings in anderer Form und meist mit Weglassung der Winkeleigenschaft; dagegen werden fast in allen Büchern die beiden Inkongruenzsätze des Euklid (Buch 1, Satz 24, 25) gegeben nämlich: „Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, aber nicht in dem von diesen eingeschlossenen Winkel, so ist die dritte Seite in demjenigen Dreiecke größer als im anderen, welches den größeren eingeschlossenen Winkel hat“ und die Umkehrung dieses Satzes.

Sowohl der Wortlaut als erst recht die Beweise dieser Sätze sind für Tertianer nach meiner Erfahrung stets eine Quelle des Entsetzens, nur wenige werden in das Verständnis der Beweise eindringen, und bringt man in den höheren Klassen wieder einmal die Sprache auf diese Sätze, so ist bei den meisten Schülern die Erinnerung daran verloren gegangen oder so verblaßt, daß sie von neuem entwickelt werden müssen. Die Lehrsätze sind eben schon der Schwerfälligkeit des Ausdrucks wegen auch bei Lehrern nicht beliebt; die Sätze, bei denen sie Verwendung finden, sind zu zählen, weil andere Beweismittel wenn irgend angängig bevorzugt werden.

Aus diesen Gründen lasse ich die erwähnten Sätze seit mehreren Jahren schon ganz aus dem Unterrichte in den mittleren Klassen weg; auf dieser Stufe sind sie nur bei äußerst wenigen, nebensächlichen Übungssätzen, die man ohne Schaden weglassen kann, wirklich notwendig; in den oberen Klassen ersetzt sie der Kosinussatz.

Dagegen halte ich die Einführung des § 2 in den Unterricht der Tertia für zweckmässig. In den mir bekannten Lehrbüchern, die diesen Satz bringen, wie Dronke, Féaux-Busch, Focke-Krass, Schwering-Krimphoff wird er durch An- oder Aufeinanderlegen der Dreiecke mit der Hypotenuse und Benutzung der Grössenbeziehung von Teilwinkeln des Rechten bewiesen; einige wie v. Hallerstein und Reidt-Schotten geben ihn ohne Beweis. Dobriner benutzt ungefähr dieselbe Figur wie ich, beweist den Satz aber auf indirektem Wege. Zudem klingt der Satz bei ihm höchst eigentümlich. Er nennt die Gesamtheit aller Strecken zwischen einem festen Punkte und den Punkten einer Geraden einen ebenen Kegel; die einzelnen Strecken heissen seine Kanten, das Lot die Hauptkante; derjenige Kegel heisst der grössere, der die grössere Hauptkante hat; die feste Gerade heisst die Leitlinie, das Stück zwischen dem Fusspunkte der Hauptkante und dem Endpunkte einer Kante heisst der zur Kante gehörige Abschnitt. Dann heisst der Satz: Der grössere von zwei Kegeln hat bei gleicher Kante den kleineren Abschnitt. Diese ganze Bezeichnungsart ist gewiss recht originell, aber warum tant de bruit pour une omelette? Wie man sieht, fehlt auch bei Dobriner die von mir ausgesprochene Winkелеigenschaft. Worpitzky giebt die Seiteneigenschaft genau wie ich; für die Winkелеigenschaft aber braucht er eine ganz andere Figur. Wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, findet sich bei Schindler der Beweis, wie ich ihn gegeben habe; bei ihm lautet der Satz: Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen haben, so entspricht der Ungleichheit des einen Katheten-Paares dieselbe Ungleichheit ihrer Gegenwinkel, jedoch die umgekehrte Ungleichheit des anderen Katheten-Paares und ihrer Gegenwinkel. Ich kann nicht umhin, meine Wortfassung für kürzer und deutlicher zu halten.

Sowohl der Text des Satzes als der Gang des Beweises schliesst sich in der von mir gewählten Weise eng an den vorangehenden Satz an, und ich glaube daher bei mehrjähriger Benutzung desselben im Unterrichte bemerkt zu haben, dass der Beweis desselben den Schülern nicht sonderlich schwer wird. Vor allen Dingen prägt sich der Satz selbst den Schülern leicht ein, weil er sofort Benutzung bei der Kreislehre findet, wie ich § 3 gezeigt habe; ferner wird er bei der Determination von Konstruktionsaufgaben mehrfach herangezogen; es leuchtet ferner auf den ersten Blick ein, dass die Sätze der §§ 1 und 2 bei der Erklärung der trigonometrischen Funktionen und der Besprechung des Verlaufs derselben von grösster Wichtigkeit sind.

Hierbei möchte ich noch erwähnen, dass die gewöhnlichen Beweise des Satzes vom Mittelpunktsabstande ungleicher Sehnen auch zu denen gehören, von denen die Schüler sagen: sie gefallen uns nicht. Je grösser die Zahl der Ungleichheiten in einem Beweise und der Wechsel zwischen Winkel- und Seiteneigenschaften, um so schwerer wird dem Anfänger das Verständnis werden; daran gerade leidet der am meisten vorkommende Beweis, wie er sich beispielsweise bei Martus und Spieker findet. Andere wie Legendre, Mehler, Rouché-de Comberousse beweisen zunächst mit Hilfe des Inkongruenzsatzes, für dessen Wegfall ich eintrete, dass zum grösseren Bogen die grössere Sehne gehört, während Henrici-Treutlein dieselbe Eigenschaft mit Hilfe des Satzes beweist, dass ein Punkt ausserhalb des Mittellots der Verbindungslinie zweier Punkte dem Punkte auf seiner Seite näher liegt als dem andern. Dass alle diese Methoden den Schülern nicht recht zusagen, ist bekannt; einige wie Holzmüller, Kries, Struve, Weide-

mann beweisen daher den Sehnensatz erst nach dem Pythagoras. „Um in der Kreislehre langathmige Erörterungen über die Abstände der Sehnen vom Kreismittelpunkte zu ersparen“, wie Holzmüller selbst sagt, schaltet er den pythagoreischen Lehrsatz nach den Vierecksätzen und vor die Kreissätze ein. Es macht aber der Beweis des Sehnensatzes unter Zuhilfenahme von Flächensätzen sehr den Eindruck, den Jacobi als Schiefen mit Kanonen auf Sperlinge bezeichnete, und das gerade möchte Holzmüller, wie er in dem Begleitworte zu seinem Lehrbuche sagt, gern vermeiden.

Was übrigens den Beweis des Pythagoras anbetrifft, so stimme ich völlig mit Holzmüller darin überein, daß der gewöhnliche Beweis durchaus nicht der anschaulichste und einfachste ist und seinem Beweise entschieden der Vorzug zu geben ist. Ich möchte mir gestatten hier den Beweis einzuschalten, den ich den Schülern gebe und der sich in mehreren Lehrbüchern wie Mink-Arndt, Lazzeri-Bassani, Ströhl findet und der nur einer Figur statt zweier bei Holzmüller bedarf. Ich gebe zunächst die Aufgabe: die Summe zweier Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln. Die gegebenen Quadrate seien BCDE und DFGH (Fig. 4); man trage die kleinere Quadratseite von C bis A ab und erhält AB als Seite des gesuchten Quadrats; die Schüler können die Figur BEHGFC in Kartongpapier herstellen und sehen, daß zwei Schnitte AB und AG genügen, um die Verwandlung zu bewerkstelligen. Darauf erst gehe ich auf den Lehrsatz selbst ein, dessen Beweis sich folgendermaßen an die Figur anknüpft: Man trage das Quadrat über der kleineren Kathete b neben dem Quadrate über der größeren a an, verlängere DE über E um b bis J und verbinde J mit B und G, und G mit A, so ist:

$$\triangle ABC \cong GAF \cong GJH \cong JBE$$

wegen der Gleichheit der Katheten. Hieraus folgt:

- 1) $ABJG = BEHGFC = a^2 + b^2$,
- 2) $ABJG$ ist ein Rhombus,
- 3) $\angle BJE + \angle EJG = 90^\circ$,

also ist $ABJG$ das Quadrat über c, d. h.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

„Des Eukleides stelzbeiniger, ja, hinterlistiger Beweis“ des pythagoreischen Lehrsatzes ist dem auf direkte Anschauung gerichteten Geiste Schopenhauer's höchst zuwider; er giebt (die Welt als Wille und Vorstellung, herausgeg. von Grisebach, pag. 118, Leipzig, Reclam) die bekannte, triviale Figur, die für ein gleichschenkliges Dreieck ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes lehrt. „Auch bei ungleichen Katheten muß es sich zu einer solchen anschaulichen Überzeugung bringen lassen“, fügt er hinzu, ohne eine derartige Figur angeben zu können; ich glaube die hier benutzte Figur würde, was Evidenz anbetrifft, die Ansprüche des grüblerischen Frankfurters befriedigt haben.

Nach dieser Abschweifung komme ich zu dem § 3 gegebenen Beweise zurück, der alle Schwierigkeiten vermeidet und beide Behauptungen, für den Bogen und den Mittelpunktsabstand, gleichzeitig erledigt. Zum Schlusse dieser Bemerkungen möchte ich demnach den Wunsch aussprechen, die gewöhnlichen Inkongruenzsätze als wesentliche Bestandteile des Unterrichtsganges fallen zu lassen; daß sie auch in der Stereometrie bei Ableitung der Eigenschaften des Neigungswinkels einer Geraden gegen eine Ebene,

bei welcher Gelegenheit Kambly-Roeder und Nagel sie überhaupt erst beweisen, sehr wohl entbehrlich sind, werde ich im dritten Abschnitte zeigen.

Dagegen erachte ich es für zweckmäßig, die in den §§ 1 und 2 gegebenen Sätze als wesentliche Sätze in den Unterricht aufzunehmen. Neu kommt für die meisten eigentlich nur § 2 hinzu; eine Mehrbelastung der Schüler tritt dadurch nicht ein, da der Beweis sich eng an § 1 anschließt und zudem der Wegfall der üblichen Beweise für § 3 wesentlich erleichternd wirkt.

II. Abschnitt. Die Hauptformeln zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke und die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

§ 4. Fällt man in einem beliebigen Dreiecke (Figur 5) von einer Ecke das Lot auf die Gegenseite, so ergibt sich aus den beiden rechtwinkligen Teildreiecken, wenn die beiden Grundwinkel spitz sind:

$$1) \quad h = a \sin \beta; \quad h = b \sin \alpha$$

$$2) \quad p = a \cos \beta; \quad q = b \cos \alpha.$$

Ist dagegen ein Grundwinkel z. B. α stumpf (Fig. 5a) und bezeichnet man seinen Nebenwinkel mit α' , so bleiben in diesen Formeln die ersten Gleichungen ungeändert, dagegen gehen die zweiten über in:

$$h = b \sin \alpha'$$

$$q = b \cos \alpha'$$

also vermöge der bekannten Beziehung:

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos \alpha' = -\cos \alpha$$

in

$$h = b \sin \alpha$$

$$q = -b \cos \alpha.$$

Daraus erkennt man, daß 1) für alle Dreiecke giltig ist, daß dagegen für einen stumpfen Winkel α die zweite Gleichung sich verwandelt in:

$$2a) \quad p = a \cos \beta; \quad q = -b \cos \alpha.$$

§ 5. Durch Gleichsetzung der rechten Seiten von 1) und Division durch $\sin \alpha \sin \beta$ erhält man:

$$3) \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Größenbeziehung zwischen zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln ist natürlich unabhängig davon, welche Ecke man mit A resp. B oder C bezeichnet hat. Setzt man in der Figur an Stelle von A, B, C resp. B, C, A und dann C, A, B, so muß man natürlich um die alsdann gültige Gleichung 3) zu erhalten die griechischen und kleinen lateinischen Buchstaben in derselben Reihenfolge

wie die großen verschieben. Zu jeder Gleichung, die man für ein beliebiges Dreieck abgeleitet hat, gehören demnach noch zwei andere, die dann von selbst richtig sind und die durch solche Verschiebung der Buchstaben, die man eine cyklische nennt, entstehen. Die auf diese Weise aus 3) folgenden Gleichungen lauten:

$$3a) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der in 3) und 3a) auftretenden Brüche mit d , so können die Gleichungen in folgende fortlaufende Gleichung zusammengefaßt werden:

$$4) \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = d.$$

Diese Gleichungen heißen der Sinussatz.

§ 6. Durch Addition der Gleichungen 2) oder Subtraktion der Gleichungen 2a) ergibt sich:

$$5) \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Da für spitze und stumpfe Winkel dieselbe Gleichung sich ergibt, so ist auch 5) für alle Dreiecke gültig; nach der Bemerkung in § 5 über die Verschiebung der Buchstaben bestehen demnach auch noch die Gleichungen:

$$5a) \quad \begin{aligned} a &= b \cos \gamma + c \cos \beta, \\ b &= c \cos \alpha + a \cos \gamma. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 5) und 5a) heißen der Projektionssatz.

§ 7. Multipliziert man jede Gleichung des Projektionssatzes mit ihrer linken Seite und subtrahiert alsdann eine Gleichung von der Summe der beiden anderen, so folgt:

$$6) \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$$

und die beiden entsprechenden; diese Gleichung heißt der Kosinussatz.

Mit Hilfe des Sinus- und Kosinussatzes lassen sich die vier Hauptaufgaben, d. h. die Aufgaben, die aus den Kongruenzsätzen hervorgehen, lösen.

§ 8. Ersetzt man in 5) die Seiten vermöge 4) durch d , so erhält man:

$$d \sin \gamma = d \sin \alpha \cos \beta + d \cos \alpha \sin \beta;$$

dividiert man durch d und berücksichtigt die Gleichung:

$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta),$$

so folgt:

$$7) \quad \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Diese Gleichung ist zunächst nur gültig, sobald jeder der drei vorkommenden Winkel zwischen 0° und 180° liegt.

§ 9. Multipliziert man 5) mit $\cos \alpha$, subtrahiert b und berücksichtigt die letzte Gleichung 5a), so folgt:

$$-a \cos \gamma = a \cos \alpha \cos \beta + b (\cos^2 \alpha - 1);$$

dividiert man durch a und benutzt die Gleichung:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \frac{b}{a} \sin^2 \alpha.$$

Nun ist:

$$-\cos \gamma = \cos (\alpha + \beta)$$

und nach 4)

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

also:

$$8) \quad \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

§ 10. Setzt man in 7):

$$\alpha = 180^\circ - \alpha',$$

so ergibt sich:

$$\sin [180^\circ - (\alpha' - \beta)] = \sin (180^\circ - \alpha') \cos \beta + \cos (180^\circ - \alpha') \sin \beta,$$

oder nach Weglassung des Strichs:

$$9) \quad \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

und ebenso aus 8):

$$10) \quad \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Für alle in 8)–10) vorkommenden Winkel gilt dieselbe Beschränkung wie in 7). Diese vier Gleichungen heißen die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

Die in den §§ 4–10 gegebenen Entwicklungen sind in ihren Einzelheiten, ausgenommen vielleicht § 9, völlig bekannt, aber die hier gegebene Zusammenfassung und gleichzeitige Ableitung von trigonometrischen und goniometrischen Formeln habe ich nirgends gefunden. Und doch scheint mir die Ableitung eine sehr natürliche und einfache zu sein; mit einer einzigen resp. zwei Figuren lassen sich ohne nennenswerte Rechnung der Sinus- und Kosinussatz, also die Grundformeln der Trigonometrie, und die Additionstheoreme, und zwar sofort für Winkel bis 180° , ableiten; deshalb möchte ich mich gegen die künstliche Trennung von trigonometrischen und goniometrischen Formeln aussprechen, wie die Lehrpläne von 1892 verlangen. Wie ich hier gezeigt zu haben glaube, ist es ohne erhebliche Mehrbelastung der Schüler möglich, sogleich mit den trigonometrischen auch die goniometrischen Grundformeln abzuleiten und auch einzuprägen. Wie weit man in der Entwicklung spezieller trigonometrischer resp. goniometrischer Relationen beim Anfangsunterrichte geht, wird dem einzelnen Lehrer zu überlassen sein; jedenfalls halte ich es für zweckmäßig, wenn beim Eintritte in die Obersekunda die Grundlagen der Goniometrie und Trigonometrie gelegt sind, so daß sich darauf als sicherem Fundamente der weitere Unterricht aufbauen kann.

Wie aus den Entwicklungen ersichtlich ist, setze ich die Werte der Funktionen stumpfer Winkel und die Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ für ebensolche Winkel als bekannt

voraus. Über die zweckmäßigste Art der Erweiterung der Definitionen von spitzen Winkeln auf beliebige sind die Ansichten momentan geteilt; im wesentlichen sind es drei verschiedene Wege, die eingeschlagen werden. Die älteren Lehrbücher wie Crelle, Grunert, van Swinden und ebenso die überwiegende Mehrzahl der neueren Bücher verfolgen einen beweglichen Schenkel im Kreise, dessen Radius von den neueren Autoren als Mafseinheit gewählt wird; man gelangt so auf einfache Weise zu den Werten der Funktionen beliebiger Winkel. Andere, wie Hub. Müller und Schwering, wählen den für spitzwinklige Dreiecke bewiesenen Sinus- und Kosinussatz als Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung, während eine dritte Gruppe, zu der Bohnert und Bork-Crantz-Haentzschel gehören, goniometrische Sätze als allgemeingiltig wählen.

Schlägt man den zweiten Weg ein, so kann man denselben nicht zur Erklärung der Funktionen überstumpfer und negativer Winkel benutzen; deshalb geht Hub. Müller zu diesem Zwecke zum dritten Wege über und wählt nun die Additionstheoreme zum weiteren Ausgangspunkte. Die Mangelhaftigkeit des zweiten Weges leuchtet hieraus ein. Der dritte Weg ist entschieden besser; vom rein wissenschaftlichen Standpunkte ist es jedenfalls am strengsten, die Additionstheoreme zu Grunde zu legen; wichtiger aber als der wissenschaftliche ist für den Anfangsunterricht der pädagogische Standpunkt und der scheint mir für den ersten Weg den Ausschlag zu geben.

Bei dem letzten Wege müssen zunächst die Additionstheoreme für spitze Winkel abgeleitet werden und aus diesen Formeln durch Fortsetzung die Werte der Funktionen beliebiger Winkel gewonnen werden. Aber ich glaube, daß die Additionstheoreme wegen der vielen darin auftretenden Funktionen und Winkel auf den Lernenden als Definitionsgleichungen verwirrend wirken; deshalb sind vom pädagogischen Standpunkte aus die Additionstheoreme als Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung der Funktionen zu verwerfen.

Bork-Crantz-Haentzschel wählt nun nicht die allgemeinen Additionstheoreme, sondern die Formeln für die doppelten Winkel als Definitionsgleichungen; diesem Wege haftet aber derselbe Mangel wie dem von Schwering beschrifteten an: es ist nicht möglich, auf diese Weise zu den Werten der Funktionen negativer Winkel zu gelangen, ohne eine neue Annahme zu machen.

In der wissenschaftlichen Beilage zum Jahresbericht des Kölnischen Gymnasiums zu Berlin Ostern 1900 hat Haentzschel die Periodizität als solche neue Annahme gewählt; auf meine hierauf zielende Bemerkung in Jahrgang 6 der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgeg. von Schwalbe und Pietzker (Berlin 1900, Salle), hat darauf Haentzschel in seiner Entgegnung in derselben Zeitschrift aus seinen Definitionsgleichungen die Newton'schen Reihen abgeleitet, um daraus die Funktionen negativer Winkel zu gewinnen. Abgesehen davon, daß dieser Weg pädagogisch wohl ganz unmöglich wäre, muß nun die Annahme gemacht werden, daß die für positive Werte des Arguments abgeleiteten Reihen allgemein giltig sind, oder es müßte den Schülern gezeigt werden können, daß eine Potenzreihe in ihrem ganzen Konvergenzbereiche nur eine einzige Funktion darstellt. Wie wichtig aber gerade schon für den Anfangsunterricht die negativen Winkel sind, habe ich in meiner oben erwähnten Notiz näher auseinandergesetzt.

Meiner Ansicht nach bleibt daher der erste und älteste Weg der pädagogisch einzig richtige.

Was nun die einzelnen Entwicklungen in den vorangehenden Paragraphen anbetrifft, so dürfte zunächst die Breite der Besprechung der cyklischen Verschiebung auffallen; es ist dies absichtlich in Hinblick darauf geschehen, daß außer in vielen anderen, auch in so vorzüglich gearbeiteten Büchern wie Rausenberger, Schlömilch, Wheeler nach Ableitung der Formel $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ durch Benutzung einer zweiten Höhe die Gleichung $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ abgeleitet wird. Ich halte es, so unbedeutend an sich die Sache ist, für nötig, den Schülern zu sagen, daß die erste Gleichung ohne weiteres die anderen enthält. Die meisten Schüler werden dabei stutzen, weil sie zu sehr dazu neigen, den Buchstaben eben nur als solchen und nicht in seiner Bedeutung aufzufassen; hiervon muß man sie aber soviel als möglich abbringen. Je mehr die Rechnung sich der Geometrie bemächtigt, um so mehr muß man jede Gelegenheit benutzen, die Schüler auf die Bedeutung der Buchstaben aufmerksam zu machen, sonst artet das Rechnen in öden, gedankenlosen Schlendrian aus. Faßt man die Gleichung in Worte, so erhält man den Satz: Eine beliebige Dreiecksseite verhält sich zum Sinus des Gegenwinkels wie eine beliebige zweite Seite zum entsprechenden Sinus; daraus leuchtet die Richtigkeit der beiden anderen Gleichungen sofort ein.

Häufig wird der Sinussatz mit Hilfe des Umkreises abgeleitet, wodurch sofort die geometrische Bedeutung der drei Brüche klar wird. Ich bevorzuge den oben eingeschlagenen Weg, weil es dadurch ermöglicht wird, die Hauptsätze der Trigonometrie — die Relationen nur zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks — aus einer Quelle abzuleiten; es ist selbstverständlich, daß ich später die geometrische Bedeutung von d den Schülern erkläre, aber gewissermaßen als eine Eigenschaft von sekundärer Wichtigkeit.

Die höchst einfache Ableitung des Kosinus- aus dem Projektionssatze habe ich nur bei Crelle, Menten, Spitz und vielleicht noch vier bis fünf anderen Autoren gefunden; die übrigen Hauptformeln lassen sich unter Benutzung goniometrischer Relationen aus diesen Sätzen rechnerisch ableiten. Allerdings gebe ich zunächst den Schülern sowohl für den Tangentensatz und die Cagnoli'schen (Mollweide'schen) Formeln, als auch für den Halbwinkelsatz die geometrischen Ableitungen und erst nachher die goniometrischen. Dadurch bin ich aber der Notwendigkeit überhoben, die Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß die Formeln unabhängig von den Eigentümlichkeiten der speziellen Figur allgemeine Geltung haben; so lernen die Schüler den Nutzen der goniometrischen Formeln erkennen und werden denselben deshalb auch Interesse entgegenbringen.

Die von mir gegebene Ableitung der Additionstheoreme weicht von der üblichen erheblich ab; fast überall wird durch Neben- resp. Aufeinanderlegen der beiden Winkel der Beweis erbracht; einige, wie Fischer, Servus, Ulrich, benutzen den Satz des Ptolemäus; die hier gegebene Ableitung ist sehr alt; sie rührt schon von Cagnoli her, von neueren Autoren schlagen diesen Weg nur Conradt, Gusserow-Levy, Hub. Müller und Scholfield ein und doch hat derselbe, abgesehen davon, daß man keiner besonderen Figur bedarf, den großen Vorzug, daß die Gültigkeit der Sätze nicht erst auf stumpfe Winkel ausgedehnt zu werden braucht, sondern daß die gewonnenen Formeln für alle beim Dreiecke möglichen Fälle sofort brauchbar sind. In Einzelheiten, besonders in der Ableitung der Kosinusformeln, weichen die genannten Autoren von der hier be-

folgten Methode ab. Conradt und ähnlich Gusserow-Levy und Scholfield setzen in den Sinusformeln, deren zweite zudem durch eine besondere Figur hergeleitet wird, an Stelle des einen Winkels seinen Komplementwinkel; bei den so erhaltenen Kosinusformeln muß aber auf stumpfe Winkel zunächst verzichtet werden. Hub. Müller leitet vermöge der Beziehung zwischen Sinus und Kosinus desselben Winkels zunächst $\cos^2(\alpha + \beta)$ ab und muß dann auf ziemlich umständliche Weise zeigen, daß das Vorzeichen stimmt, wenn man vom Quadrate der Funktion zu dieser selbst übergeht; die Differenzformeln werden dann algebraisch abgeleitet.

Wie schon erwähnt wurde, ist es von Wichtigkeit, daß die Formeln sofort für alle Dreieckswinkel Geltung haben, um eben den Schülern nicht gleich mit umständlichen und ermüdenden Verallgemeinerungen kommen zu müssen. Will man die Formeln verallgemeinern, so ist dies hier sehr leicht zu bewerkstelligen. Man erkennt sofort, daß die Formeln für negative Winkel, deren absoluter Wert kleiner als 180° ist, richtig bleiben, dadurch beherrscht man die 4 Quadranten vom minuszweiten bis zum pluszweiten und es wird nun vermöge der Periodicität der Funktionen die Allgemeingiltigkeit nicht schwer zu beweisen sein.

III. Ebenen und gerade Linien im Raume.

§ 11. Winkel im Raume mit parallelen Schenkeln sind gleich, wenn die Schenkelpaare beide gleich oder beide entgegengesetzt gerichtet sind.

Beweis. (Fig. 6.) Durch jedes der beiden Parallelenpaare $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ lege man eine Ebene und lege durch einen beliebigen Punkt S ihrer Schnittlinie eine dritte Ebene, die die Parallelen in BC und B'C' schneidet, so ist:

$$\frac{B'S}{BS} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'S}{AS} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'S}{CS}$$

nach dem Verhältnissatze. Aus dem ersten und letzten Bruche folgt, daß auch $\frac{B'C'}{BC}$ den übrigen Brüchen gleich ist, folglich ist:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC,$$

also

$$\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle BAC.$$

Bemerkung. Für entgegengesetzt gerichtete Schenkel wähle man S zwischen A und A'; der Beweis ist derselbe.

§ 12. Steht eine von zwei Parallelen auf einer Ebene senkrecht, so ist auch die andere ein Lot auf die Ebene.

Voraussetzung (Fig. 7) $AF \perp MN$; $AF \parallel BG$.

Behauptung $BG \perp MN$.

Man ziehe in MN durch G eine beliebige Linie GD und durch F die Parallele FC, so ist $\sphericalangle AFC = R$ (nach Voraussetzung 1), also $\sphericalangle BGD = R$ (nach Voraussetzung 2 und § 11). Da BG somit auf einer beliebigen Linie von MN senkrecht steht, steht BG auf MN senkrecht.

§ 13. Lote auf derselben Ebene sind parallel.

Beweis aus § 12 indirekt.

§ 14. Unter allen Winkeln, die eine Gerade mit einer Ebene bildet, ist der Neigungswinkel der kleinste.

Beweis. (Fig. 8.) Durch den Fußpunkt F der Geraden ziehe man in MN die beliebige Linie $\mathfrak{P}$ und falle von einem Punkte A der schrägen Linie das Lot AB auf die Ebene und das Lot AC auf $\mathfrak{P}$, so ist $AC > AB$, folglich $\angle AFB < AFC$ (nach § 2).

§ 15. Fällt man von einem Punkte auf eine Ebene und eine beliebige Gerade der Ebene Lote, so steht die Verbindungslinie der Fußpunkte beider Lote auf der Geraden senkrecht.

Voraussetzung (Fig. 8) $AB \perp MN$; $AC \perp \mathfrak{P}$

Behauptung $BC \perp \mathfrak{P}$.

Man errichte $CD \perp MN$, so ist $CD \parallel AB$ (§ 13), also liegen CD, CA, CB in einer Ebene. Nun ist $\mathfrak{P} \perp AC$ (Voraussetzung 2), $\mathfrak{P} \perp CD$ (nach Konstruktion), folglich $\mathfrak{P} \perp CB$.

Zusatz 1. Durch eine auf einer Ebene schiefstehende Gerade läßt sich nur eine zur ersten senkrechte Ebene legen.

Beweis. Man lege außer der senkrechten Ebene FAB eine Ebene durch AF und $\mathfrak{P}$, so ist nach dem eben bewiesenen Satze $\angle ACB$ deren Neigungswinkel und dieser liegt in einem rechtwinkligen Dreiecke, ist also spitz.

Zusatz 2. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Folgt aus Zusatz 1.

§ 16. Zwei gerade Linien einer Ebene, die durch den Fußpunkt einer zur Ebene schrägen Geraden gehen und mit deren Projektion gleiche Winkel bilden, bilden auch mit der schrägen Geraden gleiche Winkel.

Beweis. (Fig. 8.) Ist $\angle BFC' = BFC$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke FBC' und FBC kongruent, also $FC' = FC$, folglich $FAC' \cong FAC$ und somit $\angle AFC' = AFC$.

§ 17. Parallele Linien bilden mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel.

Beweis. (Fig. 9.) Man ziehe durch den Fußpunkt F in MN eine beliebige Gerade FC und lege durch FC und den anderen Fußpunkt G eine Ebene, die PQ in $GD \parallel FC$ schneidet, so ist $\angle AFC = BGD$ nach § 11; d. h. jedem beliebigen Winkel am Fußpunkte F entspricht ein gleich großer an G und umgekehrt; folglich müssen auch die kleinsten Winkel gleich sein; demnach sind nach § 14 die Neigungswinkel gleich.

Spezielle Fälle. 1. Parallele Gerade bilden mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

2. Eine Gerade schneidet parallele Ebenen unter gleichen Neigungswinkeln.

3. Steht eine Linie auf einer von mehreren parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auf allen senkrecht.

Die in diesem Abschnitte bewiesenen Sätze stellen, wie man leicht sieht, kein lückenlos zusammengehöriges Ganzes wie die im trigonometrischen Teile gegebenen dar;

zwischen den einzelnen Paragraphen sind verschiedene Sätze einzuschalten, deren üblicher Beweis durch die hier gegebenen Sätze nicht geändert wird.

Was die einzelnen Sätze anbetrifft, so wird § 11 von mehreren Autoren als selbstverständlich resp. durch Parallelverschiebung als evident angenommen, wie von Lazzeri-Bassani, Lieber-von Lühmann (Anhang zu § 24), Ströhl; einige erwähnen den Satz überhaupt nicht, wie Baltzer, Dobriner, Féaux-Luke; sonst wird er dadurch bewiesen, daß die Winkel in die Grundflächen eines dreiseitigen Prismas gebracht werden. Die meisten beweisen zunächst, und zwar mit etwas gekünstelten Figuren, die §§ 13 und 12 und daraus den Satz, daß zwei Gerade, die einer dritten Geraden parallel sind, selbst parallel sind. Verhältnismäßig wenige, wie de Galdeano, Heis-Eschweiler, Kommerell-Hauck, Koppe, beweisen diesen letzten Satz ohne Benutzung der beiden anderen; dadurch wird dann der Beweis von § 11 kürzer. Ich glaube, daß der hier gegebene Beweis insofern sehr bequem ist, als er keine stereometrischen Vorkenntnisse erfordert, zudem auch für den Fall entgegengesetzt gerichteter Schenkel anwendbar bleibt und jede Künstelei vermeidet. Ausser den selbstverständlich nötigen Ebenen $\mathbb{P}\mathbb{P}'$ und $\mathbb{Q}\mathbb{Q}'$ wird nur eine ganz beliebige Ebene quer hindurchgelegt, während bei dem gewöhnlichen Verfahren auf den Schenkelpaaren gleiche Strecken abgetragen werden. Was hat aber ein Satz über Winkelgleichheit mit gleichen Strecken zu thun? Ich wenigstens habe eine gewisse Abneigung gegen solche Beweise und suche immer und meist mit Erfolg, wie auch § 14 zeigt, nach einem anderen Wege.

Obgleich ich mein Verfahren für natürlicher halte, so kann ich doch verstehen, wenn das Beweisverfahren mit Hilfe kongruenter Figuren von manchen Lehrern vorgezogen werden sollte; zwar kann ich aus meiner Erfahrung sagen, daß der Beweis mit ähnlichen Figuren den Schülern keine nennenswerten Schwierigkeiten verursacht und daß er zugleich eine nützliche Erinnerung an den selten gebrauchten dritten Ähnlichkeitssatz ist. Sollte aber aus irgend einem Grunde der Beweis mit kongruenten Figuren bevorzugt werden, so halte ich folgenden Weg für zweckmäßiger, der gewissermaßen eine Umkehrung des üblichen ist und den ich nur bei Chauvenet gefunden habe. Statt eine beliebige Ebene, wie in § 11, wähle man diejenige Ebene, die der Verbindungslinie der Scheitelpunkte parallel ist. Dadurch entstehen in den Ebenen $\mathbb{P}\mathbb{P}'$ und $\mathbb{Q}\mathbb{Q}'$ Parallelogramme wegen der Parallelität je zweier Seiten; daraus folgt dann, daß in der Hilfebene ebenfalls ein Parallelogramm entstanden ist wegen der Gleichheit und Parallelität eines Seitenpaares und hieraus dann die Kongruenz der Dreiecke. Zuvor muß demnach bewiesen sein, daß, wenn drei Ebenen sich schneiden, ihre Schnittlinien durch einen Punkt gehen oder parallel sind.

Die Sätze §§ 12 und 13 sind nun ganz einfache Folgerungen; zu dem in § 12 angewendeten Schlusse möchte ich eine ähnliche Bemerkung machen, wie ich sie im vorigen Abschnitte über die Herleitung des Sinussatzes machte. Bei Heis-Eschweiler und Kommerell-Hauck werden in der Grundebene zwei beliebige Gerade gezogen, um alsdann buchstäblich korrekt den bekannten Hauptsatz der Stereometrie anwenden zu können. Ich halte dies für eine Nachgiebigkeit gegen die Denkfaulheit der Schüler. Bei der Durchnahme des Hauptsatzes verfehle ich niemals, die Schüler zum Schlusse darauf aufmerksam zu machen, daß man auf zwei Weisen zeigen kann, daß eine Linie auf einer Ebene senkrecht steht: entweder dadurch, daß sie auf zwei bestimmten, mit

den übrigen Linien in Zusammenhang stehenden Linien (§ 15) oder dafs sie auf einer beliebigen Linie (§ 12) der Ebene senkrecht steht.

Der Beweis, dafs der Neigungswinkel ein Minimum ist, wird fast überall mit Hilfe des von mir verpönten Inkongruenzsatzes geführt; Hub. Müller und Rumpfen-Blind bedienen sich derselben Figur wie ich, erschweren aber den einfachen Beweis durch Hineinziehen verschiedener trigonometrischer Funktionen; nur Grunert und Noack geben den obigen Beweis. Abgesehen davon, dafs ich jenen Inkongruenzsatz möglichst meide, liefert der hier gegebene Beweis sofort einen einfachen direkten Beweis dafür, dafs die Schnittlinie zweier senkrechter Ebenen selbst zur Grundebene senkrecht steht.

Nirgends habe ich die Benutzung des Satzes vom Neigungswinkel gefunden, die ich § 17 gegeben habe; während es doch pädagogisch wichtig ist, die gefundenen Lehrsätze weiter zu verwerten, steht die erwähnte Eigenschaft des Neigungswinkels völlig verlassen da; schon aus diesem Grunde halte ich den von mir gegebenen Beweis für nützlich. Aber auch deshalb ist er meines Erachtens zweckmäfsig, weil den Schülern auf ganz andere als die gewohnte Weise die Gleichheit zweier Gröfsen klar gemacht wird. Schliesslich hat er den Vorteil, eine ganze Reihe von Einzelsätzen zusammen zu fassen, die sonst mühselig nach einander bewiesen werden müssen.

Verzeichnis der benutzten Bücher.

- Adam, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Neu-Ruppin 1876, Held.
 Arendt, Trigonométrie rectiligne, Berlin 1876, Herbig.
 Arndt, Hauptsätze der Geometrie, Berlin 1900, Oehmigke.
 Augschun, Grundzüge der Geometrie, Berlin 1892, Mittler.
 Baer, *Éléments de géométrie plane*, Berlin 1887, Reimer.
 Baltzer, Elemente der Mathematik, Leipzig 1883, Hirzel.
 Behl, Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode, Hildesheim 1886, Lax.
 Bockhorn, Die Elementar-Mathematik; 1. Teil, Planimetrie, Köln 1883, E. Mayer.
 Bohnert, Ebene und sphärische Trigonometrie, Leipzig 1900, Göschen.
 Bonnevie, Kortfattet Laerebog i Plantrigonometrien, Kristiania 1872, Malling.
 Bonnevie og Sørensen, Laerebog i Plangeometri, Kristiania 1885, Malling.
 Bork, Mathematische Hauptsätze für Gymnasien; 1. Teil, Leipzig 1899, Dürr.
 Bork, Crantz, Haentzschel, Mathematischer Leitfaden für Realschulen, Leipzig 1897/98, Dürr.
 Bosse und Müller, Stereometrie für höhere Schulen, Berlin 1897, Parey.
 Boymann, Lehrbuch der Mathematik; 2. Teil Trigonometrie und Stereometrie, herausgegeben von Vering, Düsseldorf 1892, Schwann.
 Brockmann, Lehrbuch der elementaren Geometrie, Leipzig 1875/77, Teubner.
 Burckhardt, Lehrbuch der Stereometrie, Leipzig 1886, Gressner & Schramm.
 Bussler, Elemente der Mathematik, Dresden u. Berlin 1897, Ehlermann.
 Cagnoli, *Trigonometria piana e sferica*, Paris 1786, Didot.
 Chauvenet, *Treatise on elementary geometry*, Philadelphia 1879, Lippincott & Co.
 Colas, *Cours de géométrie élémentaire*, Paris 1885, Garnier Frères.

- Conradt, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Leipzig 1889, Teubner.
Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie und Trigonometrie, Berlin 1826/27, Reimer.
Dobriner, Leitfaden der Geometrie, Leipzig 1898, Voigtländer.
Dronke, Elemente der ebenen Geometrie, M.-Gladbach 1864, Riffarth.
Euklid, Elemente übersetzt von Lorenz, herausgegeben von Dippe, Halle a. S. 1840, Waisenhaus.
Falcke, Leitfaden der Geometrie, bearbeitet von Röhrs, Berlin 1897, Rentel.
Féaux, Lehrbuch der elementaren Planimetrie, besorgt von Busch, Paderborn 1894, Schöningh.
Féaux, Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie, besorgt von Luke, Paderborn 1884, Schöningh.
Fenkner, Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1896/97, Salle.
Ed. Fischer, Grundriss der Elementar-Mathematik, Berlin 1891, Duncker.
Focke und Krass, Lehrbuch der Geometrie, Münster (Westf.) 1894, Coppenrath.
Francoeur, Cours complet de Mathématiques pures, Paris 1809, Bernard & Didot.
Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik, Liegnitz 1887/89, Krumbhaar.
Frischauf, Elemente der Geometrie, Leipzig 1877, Teubner.
Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene, Berlin 1864, Adolf & Co.
de Galdeano, Geometría elemental, Toledo 1888, Hermanos.
Gallenkamp, Elemente der Mathematik, Iserlohn 1879/86, Baedeker.
Gallien, Lehrbuch der Mathematik, Berlin 1886, Weidmann.
A. Gaußs, Hauptsätze der Elementar-Mathematik, Bunzlau 1885, Kreuschmer.
Gille, Lehrbuch der Geometrie, Halle a. S. 1895, Waisenhaus.
Girndt, Raumlehre für Baugewerkschulen, Leipzig 1897, Teubner.
Glinzer, Lehrbuch der Trigonometrie für Baugewerkschulen, Hamburg 1886, Nestler & Melle.
Grunert, Lehrbuch der Mathematik, Brandenburg 1835, Wiesike.
Gusserow und Levy, Abriss der Trigonometrie, Berlin 1891, Seydel.
Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik, Berlin 1867, Nauck.
Hartl, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Wien 1890, Hölder.
Heger, Planimetrie, Breslau 1890, Trewendt.
Heilermann und Diekmann, Grundlehren der Trigonometrie und Stereometrie, Essen 1889/90, Baedeker.
Heinze, Genetische Stereometrie bearbeitet von Lucke, Leipzig 1886, Teubner.
Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie, Köln 1867, Du Mont-Schauberg.
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie, Leipzig 1883/97, Teubner.
Hercher, Lehrbuch der Geometrie, Leipzig 1893, Jacobsen.
Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Halle a. S. 1884/85, Schmidt.
Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik, Leipzig 1894, Teubner.
Holzmüller, Elemente der Stereometrie, Leipzig 1899, Göschen.
Hülsen und Coler, Niedere Mathematik, Berlin 1892, Mittler.
Joachimsthal, Cours de géométrie élémentaire, Berlin 1852, Starcke.
Junghans, Lehrbuch der elementaren Geometrie, Berlin 1879, Weidmann.

- Kambly-Roeder, Planimetrie mit trigonometrischem und stereometrischem Anhang, Breslau 1896, Hirt.
- Kimber, Mathematical course for the university of London, London 1876, Longmans, Green & Co.
- Kommerell-Hauck, Lehrbuch der Stereometrie, Tübingen 1893, Laupp.
- Koppe, Anfangsgründe der reinen Mathematik; 3. Teil: Stereometrie, 4. Teil: Trigonometrie, Essen 1860/79, Baedeker.
- Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik, Jena 1826, Frommann.
- Kühl, Grundriss der Geometrie; 2. Teil: Stereometrie, Hamburg 1887, Nestler & Melle.
- Lackemann, Elemente der Geometrie. 2. Teil. Trigonometrie und Stereometrie, Breslau 1884, Hirt.
- Lazzeri e Bassani, Elementi die Geometria, Livorno 1898, Giusti.
- Legendre, Elemente der Geometrie, übersetzt von Crelle, Berlin 1837, Rücker.
- Leonhardt, Grundzüge der Trigonometrie und Stereometrie, Halle a. S. 1893, Strien.
- Lieber und von Lüthmann, Leitfaden der Elementar-Mathematik, Berlin 1889/92, Simion.
- Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie, Leipzig 1890, Brandstetter.
- Mandoj-Albanese, Corso di geometria elementare, Turin 1856, Paravia & Co.
- Martus, Raumlehre für höhere Schulen, Bielefeld 1890/92, Velhagen & Klasing.
- Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik, Berlin 1894, Reimer.
- Menten, Tratado di trigonometria plana y esférica, Quito 1871/73.
- Mink, Lehrbuch der Geometrie, 1. Teil: Planimetrie, herausgegeben von Arndt, Berlin 1890, Wiegandt & Schotte.
- Heinr. Müller, Elementar-Planimetrie, Berlin 1891, Springer.
- Heinr. Müller, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, Berlin 1899, Moeser.
- Hubert Müller, Elemente der Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie, Metz 1888/89, Scriba.
- Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie, Ulm 1838/39, Wohler.
- Netzhammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Paderborn 1889, Schöningh.
- Noack, Leitfaden der Elementar-Mathematik, Berlin 1890, Springer.
- de Paranaguá, Elementos de Geometria, Rio de Janeiro 1846, Laemmert.
- Pereira, Elementos de Geometria, Lissabon 1854, Evangelista.
- Pullar, Geometry for Kindergarten Students, London 1896, Swan, Sonnenschein & Co.
- Rausenberger, Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, Leipzig 1887, Teubner.
- Reidt, Elemente der Mathematik, Berlin 1877/80, Grote.
- Reidt, Planimetrie, herausgegeben von Schotten, Berlin 1895, Grote.
- Robertson, Elements of navigation, London 1754, Nourse.
- Roldos y Pons, Elementos de trigonometría plana y esférica, Montevideo 1872, Siglo.
- Rouché et de Comberousse, Leçons de Géométrie, Paris 1896, Gauthiers-Villars.
- Rumpfen und Blind, Lehrbuch der Geometrie, Köln u. Leipzig 1888/93, Ahn.

- Sadebeck, Elemente der ebenen Geometrie, Breslau 1872, Aderholz.
Schindler, Elemente der Planimetrie, Berlin 1883, Springer.
Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Mafses, Leipzig 1874, Teubner.
Scholfield, Elements of geometry and trigonometry, New-York 1845, Collins Brother & Co.
Scholim, Lehrbuch der Geometrie, Kreuzburg O.-Schl. 1890, Thielmann.
E. Schultz, Leitfaden der Planimetrie, Essen 1895, Baedeker.
Schwering, Stereometrie und Trigonometrie, Freiburg i. B. 1900, Herder.
Schwering und Krimphoff, Ebene Geometrie, Freiburg i. B. 1900, Herder.
Sellentin, Grundrifs der Geometrie; 1. Teil Planimetrie, Köln 1893, Du Mont-Schauberg.
Servus, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Berlin 1897, Friedberg & Mode.
Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Potsdam 1890, Stein.
Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie und Trigonometrie, Leipzig und Heidelberg 1874/75, Winter.
Ströhl, Elementi di Geometria, Wien 1886, Hölder.
Struve, Elemente der Mathematik, Berlin 1878/82, Parey.
Suchsland, Goniometrie und ebene Trigonometrie, Stolp i. Pom. 1881, Schrader.
van Swinden, Elemente der Geometrie, übersetzt von F. Jacobi, Jena 1834, Frommann.
Ulrich, Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1899, Aug. Schultze.
Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie, Cassel 1876, Fischer.
Walter, Schultrigonometrie, Halle a. S. 1891, Waisenhaus.
Warren, Elements of plane trigonometry, London 1885, Longmans, Green & Co.
Wehner, Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen, Leipzig 1892, Teubner.
Weidemann, Lehrbuch der Planimetrie, Berlin 1888, Deubner.
Wheeler, Elements of plane and spherical trigonometry, Boston 1879, Ginn & Heath.
Wiegand, Lehrbuch der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie, Halle a. S. 1885/91, Schmidt.
Willock, Elementary geometry, London 1875, Longmans, Green & Co.
Worpitzky, Elemente der Mathematik, Berlin 1872/78, Weidmann.
Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie, Landshut 1881, Krüll.
Zwicky, Grundrifs der Planimetrie und Stereometrie, Bern 1893, Schmid, Francke & Co.

Druck von W. Pormetter in Berlin.