

Die
Dauer der Dämmerung
auf der
Erdoberfläche,

berechnet von

JOSEPH GALLENMÜLLER.

K. Gymnasialprofessor.

PROGRAMM

des

K. humanistischen Gymnasiums Aschaffenburg

für das

Schuljahr 1899/1900.

Aschaffenburg.

Druck der Schippner'schen Druckerei (Rud. Kolbe).

1900.



gas
1

#T008649372



10/10/10

PROGRAM

Die meisten unserer Kalender enthalten ausser anderen astronomischen Angaben auch die Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne; daraus kann sich jeder mühelos die Dauer des Tages berechnen, da man ja darunter die Zeit versteht, welche vom Aufgange der Sonne bis zu ihrem Untergange verfliesst.

Der Tag beginnt nicht plötzlich mit dem Aufgange der Sonne und ebenso wenig endet er plötzlich mit ihrem Untergange, sodass von einem Sonnenuntergange bis zum nächstfolgenden Aufgange vollständige Finsternis herrscht. Geraume Zeit vor ihrem Aufgange und ebenso nach ihrem Untergange ist die ganze Umgebung des Beobachters schon resp. noch beleuchtet, wenn auch die Beleuchtung weniger intensiv ist, als wenn die Sonne über dem Horizonte des Beobachters steht.

Dieses Licht von geringerer Intensität als das Tageslicht nennt man das Dämmerlicht, die Dämmerung, und man spricht deshalb von der Morgendämmerung und Abenddämmerung.

Aus eigener Erfahrung weiss wohl jeder, dass die Sonne, auch wenn sie für seinen Standort schon untergegangen ist, doch die über seinem Horizonte gelegenen Punkte noch um so länger bescheint, je höher diese über dem Horizonte liegen. Daraus wird zu schliessen sein, dass die Sonne für die höheren Schichten der Atmosphäre später untergeht als für den Beobachter auf der Oberfläche der Erde.

Diese von der Sonne beschienenen oberen Schichten der Atmosphäre reflektieren das von der Sonne erhaltene Licht auch nach der Oberfläche der Erde, wodurch eben für den Erdenbewohner die Dämmerung entsteht. Der Beobachter erhält also vor Aufgang und ebenso nach Untergang der Sonne zwar nicht

mehr direktes, wohl aber reflektiertes Sonnenlicht in allmählich zunehmender resp. abnehmender Menge.

Nach den Beobachtungen hört die Sonne auf, Teile des über dem Horizonte des Beobachters befindlichen Abschnitts der Atmosphäre zu beleuchten, wenn sie sich etwa 18 Grad unter dem Horizonte befindet. Der Augenblick, in welchem sich die Sonne in dieser Tiefe unter dem Horizonte befindet, ist daher für den Beobachter der Anfang resp. das Ende der astronomischen Dämmerung.

Verschieden von dieser ist die bürgerliche Dämmerung, während welcher gewöhnliche Druckschrift vor Aufgang resp. nach Untergang der Sonne ohne Anstrengung der Augen gelesen werden kann; sie beginnt resp. endet, wenn die Sonne etwa 7 Grad unter dem Horizonte des Beobachters steht.

Wie aus dem Dargelegten ersichtlich sein dürfte, werden die Beleuchtungsverhältnisse der Erde durch die Kalenderangaben über die Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne keineswegs genügend dargestellt, da keine Angaben über die Dauer der Dämmerung gemacht werden.

Da ich nirgends solche Angaben auffinden kann, so erachte ich es als keine ganz überflüssige Arbeit, wenn ich im Nachfolgenden die Dämmerungsverhältnisse auf der Oberfläche der Erde etwas näher darlege und damit die Kenntnis der Beleuchtungsverhältnisse der Erde durch die Sonne weiteren Kreisen zugänglich mache.

A.

Um die Dauer der Dämmerung zu finden, betrachte man das sphärische Dreieck Pol*) — Zenith — Mittelpunkt der Sonne; bezeichnet man mit t_1 den Stundenwinkel der Sonne beim Untergange, mit τ die Dauer der Dämmerung und die Zenithdistanz der Sonne beim Ende der Dämmerung mit $90^\circ + c$, so ist in dem genannten Dreiecke die Seite Pol — Sonnenmittelpunkt $= 90^\circ - \delta$, die Seite Pol — Zenith $= 90^\circ - \varphi$ und die 3. Seite $= 90^\circ + c$, sowie der Winkel am Pol $= t_1 + \tau = t_2$; aus diesem Dreiecke ist dann:

$$\begin{aligned} \cos (90^\circ + c) &= \cos (90^\circ - \varphi) \cos (90^\circ - \delta) \\ &+ \sin (90^\circ - \varphi) \sin (90^\circ - \delta) \cos t_2. \end{aligned}$$

*) Pol = Nordpol des Himmelsgewölbes.

Nach einigen leicht ersichtlichen Transformationen ergibt sich hieraus:

$$\cos(90^\circ + c) = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t_2$$

und hieraus:

$$\sin \frac{1}{2} t_2 = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) + (\varphi - \delta)] \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) - (\varphi - \delta)]}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

In dieser Gleichung bedeutet φ die geographische Breite des Beobachters, δ die Deklination der Sonne und je nachdem die Dauer der astronomischen oder der bürgerlichen Dämmerung zu berechnen ist, hat man $c = 18^\circ$ oder $c = 7^\circ$ zu setzen.

Hat man mit Hilfe dieser Gleichung $t_2 = t_1 + \tau$ berechnet, so ist noch für die gerade geltende Deklination der Sonne und die geographische Breite des in Betracht kommenden Erdortes die Zeit des Sonnenunterganges zu berechnen; es ist dann die Dauer der Dämmerung gegeben durch:

$$t_2 - t_1 = \tau.$$

Auf diesem Wege wurde die Dauer der bürgerlichen und der astronomischen Dämmerung berechnet und die Resultate in der unten folgenden Tabelle I für die dort angegebenen Sonnen-deklinationen und geographischen Breiten zusammengestellt.

B.

Um die Dämmerungserscheinungen vollständig beurteilen zu können, sind noch die beiden Fragen zu beantworten: unter welchen Bedingungen erreicht die Dämmerungsdauer a) ihren grössten, b) ihren kleinsten Wert?

a.

Die Dämmerungsdauer hat offenbar dann ihren grössten Wert, wenn die Dämmerung selbst die ganze Nacht hindurch andauert.

Soll das Ende der Abenddämmerung schon der Anfang der Morgendämmerung sein, so muss $t_2 = 12^h = 180^\circ$, also $\frac{1}{2} t_2 = 90^\circ$ betragen; dann wird aber $\sin \frac{1}{2} t_2 = 1$ werden und die in A zur

Berechnung der Dämmerungsdauer aufgestellte Gleichung geht dann in die folgende über:

$$1 = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) + (\varphi - \delta)] \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) - (\varphi - \delta)]}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \delta &= \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) + (\varphi - \delta)] \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) - (\varphi - \delta)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos (\varphi - \delta) - \cos (90^\circ + c)] \text{ oder} \\ 2 \cos \varphi \cos \delta - \cos (\varphi - \delta) &= -\cos (90^\circ + c) \text{ und hieraus:} \\ \cos (\varphi + \delta) &= \cos [180^\circ - (90^\circ + c)] = \cos (90^\circ - c), \text{ somit} \\ \varphi + \delta &= 90^\circ - c. \end{aligned}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so dauert die Dämmerung die ganze Nacht hindurch, man hat eine sogenannte helle Nacht.

Am 21. Juni erreicht die Deklination der Sonne ihren Maximalwert $+23^\circ 27'$; an diesem einzigen Tage wird in der nördlichen Erdhälfte die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch andauern für alle Orte, deren geographische Breite nach obiger Gleichung beträgt:

$$\varphi = 90^\circ - c - \delta = 90^\circ - 18^\circ - 23^\circ 27' = 48^\circ 33'.$$

Dies ist nahezu die geographische Breite von Strassburg; hieraus folgt, dass auf der nördlichen Erdhälfte nur jene Orte helle Nächte haben können, deren geographische Breite grösser als $48^\circ 33'$ ist, dass dagegen für alle Orte zwischen dem Aequator und dem Parallel von $48^\circ 33'$ diese Erscheinung nicht möglich ist.

Aus der obigen Gleichung folgt noch weiter, dass die Zahl der hellen Nächte um so grösser wird, je grösser die geographische Breite eines Ortes ist, da dann auch Deklinationen der Sonne, die weniger als $23^\circ 27'$ betragen, der aufgestellten Gleichung genügen.

Alles hierher Gehörige ist in Tabelle II eingetragen.

b.

Aus dem Dreiecke Pol—Zenith—Sonnenmittelpunkt hat man, wenn der Winkel am Mittelpunkte der Sonne mit p bezeichnet wird:

$$\sin t : \sin p = \sin (90^\circ - h) : \sin (90^\circ - \varphi) \text{ oder}$$

$$1. \sin t \cos \varphi = \sin p \cos h.$$

Es ist ferner nach dem Satze über fünf aufeinanderfolgende Stücke des Dreiecks:

$$\sin(90^\circ - h) \cos p = \sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) - \cos(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos t \text{ oder}$$

$$2. \cos h \cos p = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t.$$

Endlich nach dem Kosinussatze für die Seiten:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t,$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \delta) \cos p$$

oder

$$3. \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$4. \sin \varphi = \sin h \sin \delta + \cos h \cos \delta \cos p.$$

Da die Dämmerung beginnt, wenn die Sonne eben untergeht und in diesem Augenblicke für den Sonnenmittelpunkt $h = 0$ ist, so gehen für diesen Moment die vier obigen Gleichungen, wenn man in ihnen den Grössen t und p den Index 1 gibt, über in die folgenden:

$$1^*. \sin t_1 \cos \varphi = \sin p_1$$

$$2^*. \cos p_1 = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t_1$$

$$3^*. 0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_1$$

$$4^*. \sin \varphi = \cos \delta \cos p_1.$$

Die Abenddämmerung endigt, wenn der Mittelpunkt der Sonne c° (18° für die astronomische, 7° für die bürgerliche Dämmerung) unter dem Horizonte steht, wenn also $h = -c^\circ$ ist; die vier ursprünglichen Formeln nehmen dann folgende Gestalt an, wenn man die Grössen t und p mit dem Index 2 versieht:

$$1^{**}. \sin t_2 \cos \varphi = \sin p_2 \cos c$$

$$2^{**}. \cos c \cos p_2 = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t_2$$

$$3^{**}. - \sin c = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_2$$

$$4^{**}. \sin \varphi = -\sin c \sin \delta + \cos c \cos \delta \cos p_2.$$

t_2 ist der Stundenwinkel beim Ende, t_1 der für den Beginn der Abenddämmerung; die Dauer der Dämmerung ist also gegeben durch $t_2 - t_1$.

Um nun zu entscheiden, ob $t_2 - t_1$ ein Minimum wird, sind die beiden ersten Differentialquotienten dieser Grösse zu bilden, wobei zu beachten ist, dass für einen bestimmten Beobachtungsort die Grössen δ , t_2 , t_1 , p_2 und p_1 die Variabeln, dagegen φ und c konstant sind.

Durch Differentiation der Gleichung 3** erhält man:
 $0 = \sin \varphi \cos \delta \, d\delta - \cos \varphi \cos t_2 \sin \delta \, d\delta - \cos \varphi \cos \delta \sin t_2 \, dt_2$
 und hieraus:

$$\frac{dt_2}{d\delta} = \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t_2}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_2}.$$

Nun ist nach 2**:

$$\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t_2 = \cos c \cos p_2;$$

$$\text{aus 1** ist: } \sin t_2 = -\frac{\sin p_2 \cos c}{\cos \varphi}, \text{ somit wird}$$

$$\frac{dt_2}{d\delta} = \frac{\cos c \cos p_2}{\cos \varphi \cos \delta \cdot \frac{\sin p_2 \cos c}{\cos \varphi}} = \frac{\cotg p_2}{\cos \delta} \dots \dots \dots \text{ I}$$

Durch Differentiation der Gleichung 3* ergibt sich:

$$\frac{dt_1}{d\delta} = \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t_1}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_1};$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf 2* und 1*:

$$\frac{dt_1}{d\delta} = \frac{\cos p_1}{\cos \varphi \cos \delta \cdot \frac{\sin p_1}{\cos \delta}} = \frac{\cotg p_1}{\cos \delta} \dots \dots \dots \text{ II.}$$

Aus I und II aber wird:

$$\frac{d(t_2 - t_1)}{d\delta} = \frac{\cotg p_2 - \cotg p_1}{\cos \delta} \dots \dots \dots \text{ III.}$$

Der erste Differentialquotient für die Dämmerungsdauer wird also zu Null, wenn $p_2 = p_1$ ist, das heisst wenn in dem Dreieck Pol—Zenith—Sonnenmittelpunkt die Winkel am Sonnenmittelpunkte beim Beginn und Ende der Dämmerung einander gleich sind.

Durch Differentiation der Gleichung III wird ferner:

$$\frac{d^2(t_2 - t_1)}{d\delta^2} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \left[\frac{\cos \delta}{\sin^2 p_1} \cdot \frac{dp_1}{d\delta} - \frac{\cos \delta}{\sin^2 p_2} \cdot \frac{dp_2}{d\delta} + (\cotg p_2 - \cotg p_1) \sin \delta \right].$$

Um die Werte $\frac{dp_1}{d\delta}$ und $\frac{dp_2}{d\delta}$ zu gewinnen, differentiire man die Gleichungen 4* und 4**; es ergibt sich:

$$\frac{dp_1}{d\delta} = -\frac{\cos p_1 \sin \delta}{\sin p_1 \cos \delta} = -\cotg p_1 \operatorname{tg} \delta$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_2}{d\delta} &= -\frac{\sin c \cos \delta}{\cos c \cos \delta \sin p_2} - \frac{\cos c \cos p_2 \sin \delta}{\cos c \cos \delta \sin p_2} \\ &= -\frac{\operatorname{tg} c}{\sin p_2} - \cotg p_2 \operatorname{tg} \delta. \end{aligned}$$

Diese Werte nun in den Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten der Dämmerungsdauer gesetzt, gibt:

$$\frac{d^2(t_2 - t_1)}{d\delta^2} = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos \delta \sin^3 p_2} - \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin^2 p_1} \right) \cotg p_1 - \left(1 + \frac{1}{\sin^2 p_2} \right) \cotg p_2 \right].$$

Für $p_2 = p_1$ wird somit:

$$\frac{d^2(t_2 - t_1)}{d\delta^2} = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos \delta \sin^3 p_2} \dots \dots \dots \text{IV.}$$

Da $\operatorname{tg} c$, $\cos \delta$ und $\sin^3 p_2$ unter allen Umständen positive Grössen sind (das negative Vorzeichen von c ist in den Gleichungen 1** — 4** schon berücksichtigt), wird also der zweite Differentialquotient der Dämmerungsdauer eine positive Grösse, die Dämmerungsdauer selbst also ein Minimum, wenn $p_2 = p_1$ ist.

Um nun die Deklination der Sonne zu finden, bei welcher für einen Ort von der geographischen Breite φ das Minimum der Dämmerungsdauer eintritt, bestimme man aus 4* den Wert für $\cos p_1$ und aus 4** den für $\cos p_2$; es findet sich:

$$\cos p_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta} \quad \cos p_2 = \frac{\sin \varphi + \sin c \sin \delta}{\cos c \cos \delta}.$$

Da für das Minimum $p_1 = p_2$, also auch $\cos p_1 = \cos p_2$ ist, so hat man die Gleichung:

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi + \sin c \sin \delta}{\cos c} \text{ und hieraus:}$$

$$\sin \delta = - \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots \dots \dots \text{V.}$$

Ist δ bestimmt, so kann auch die Zeit, zu welcher das Minimum der Dämmerungsdauer eintritt, als bekannt angesehen werden.

Es erübrigt noch, einen Ausdruck aufzustellen, mit Hilfe dessen die Dauer der kürzesten Dämmerung berechnet werden kann.

Es ist aus:

$$1^{**}: \sin t_2 = \frac{\sin p_2 \cos c}{\cos \varphi}$$

$$2^{**}: \cos t_2 = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \cos c \cos p_2}{\sin \delta \cos \varphi}$$

$$1^*: \sin t_1 = \frac{\sin p_1}{\cos \varphi}$$

$$2^*: \cos t_1 = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \cos p_1}{\sin \delta \cos \varphi}$$

Mit diesen Werten erhält man in Rücksicht darauf, dass $p_2 = p_1$ ist:

$$\cos(t_2 - t_1) = [\cos^2 \delta \sin^2 \varphi - \cos c \cos \delta \sin \varphi \cos p_1 - \cos \delta \sin \varphi \cos p_1 + \cos c \cos^2 p_1] : \sin^2 \delta \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 p_1 \cos c}{\cos^2 \varphi}.$$

Nach 4* ist $\cos p_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$, also

$$\sin^2 p_1 = \frac{\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \delta}.$$

Werden diese Werte in der Gleichung für $\cos(t_2 - t_1)$ substituiert, so wird nach einfacher Rechnung:

$$\cos(t_2 - t_1) = \frac{\cos c - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

und hieraus endlich findet sich:

$$\sin \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \varphi} \dots \dots \dots \text{VI.}$$

Tabelle III enthält die nach Gleichung VI berechnete Dauer der kürzesten Dämmerung unter Angabe des Datums, an welchem sie für die dort angegebenen geographischen Breiten eintritt.

Tabelle I. Dauer der Dämmerung.

a = astronomisch; b = bürgerlich.

1. $\delta = -23^\circ 27'$ (21. Dezember).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 19	0 31	35°	1 35	0 38	70°	5 12	2 38
5	1 19	0 31	40	1 43	0 41	75	4 46	
10	1 19	0 31	45	1 53	0 46	80	3 55	
15	1 20	0 32	50	2 6	0 52	84	1 41	
20	1 23	0 33	55	2 26	1 2			
25	1 26	0 34	60	2 57	1 19			
30	1 30	0 36	65	4 3	2 2			

Für $\varphi = 84^\circ 33'$ steht die Sonne bei ihrer oberen Kulmination 18° unter dem Horizonte; für diese und alle höheren Breiten gibt

es an diesem Tage keine astronomische Dämmerung mehr, es ist stets Nacht.

Für $\varphi = 73^{\circ} 33'$ befindet sich die Sonne bei der oberen Kulmination gerade 7° unter dem Horizonte; die bürgerliche Dämmerung dauert hier also $0^h 0^m$. In noch höheren Breiten kann von einer bürgerlichen Dämmerung nicht mehr die Rede sein, da in allen die Sonne bei der oberen Kulmination um mehr als 7° unter dem Horizonte steht.

2. $\delta = -15^{\circ} 38'$ (6. Februar und 5. November).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 15	0 29	35°	1 30	0 36	70°	4 0	1 47
5	1 15	0 29	40	1 37	0 38	75	6 45	3 45
10	1 15	0 29	45	1 45	0 42	80	7 0	2 4
15	1 17	0 30	50	1 56	0 47	85	7 56	
20	1 19	0 31	55	2 12	0 53	90	12 0	
25	1 22	0 32	60	2 32	1 2			
30	1 25	0 34	65	3 4	1 18			

Für $\varphi = 87^{\circ} 38'$ beträgt die Dauer der astronomischen Dämmerung genau 12 Stunden; da für diese Breite an den beiden oben genannten Tagen die Sonne bei der unteren Kulmination gerade 18° unter dem Horizonte steht; in noch höheren Breiten fließen Morgen- und Abenddämmerung teilweise in einander.

Für $\varphi = 81^{\circ} 22'$ steht die Sonne bei ihrer oberen Kulmination 7 Grade unter dem Horizonte; eine bürgerliche Dämmerung gibt es also in dieser und noch höheren Breiten an den genannten Tagen nicht mehr.

3. $\delta = -7^{\circ} 49'$ (1. März und 13. Oktober).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 13	0 28	35°	1 28	0 34	70°	3 38	1 25
5	1 13	0 28	40	1 34	0 37	75	4 59	1 55
10	1 14	0 29	45	1 42	0 40	80		3 8
15	1 15	0 29	50	1 53	0 44	85		5 24
20	1 17	0 30	55	2 7	0 49	90		
25	1 20	0 31	60	2 26	0 57			
30	1 23	0 33	65	2 54	1 8			

Für $\varphi = 79^{\circ} 49'$ dauert die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch, für noch höhere Breiten fließen die Morgen- und Abenddämmerung mehr und mehr in einander.

Für $\varphi = 89^{\circ} 11'$ steht die Sonne bei der oberen Kulmination wieder 7° unter dem Horizonte, also gibt es in dieser Breite keine bürgerliche Dämmerung mehr:

4. $\delta = 0^{\circ} 0'$ (21. März und 23. September).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 12	0 28	35°	1 29	0 34	70°	4 18	1 24
5	1 12	0 28	40	1 35	0 37	75		1 52
10	1 13	0 28	45	1 44	0 40	80		2 58
15	1 15	0 29	50	1 52	0 44	85		
20	1 17	0 30	55	2 10	0 49	90		
25	1 20	0 31	60	2 33	0 56			
30	1 24	0 32	65	3 8	1 7			

Für $\varphi = 72^{\circ}$ dauert die astronomische Dämmerung genau 6 Stunden; da an diesen beiden Tagen die Sonne um 6 Uhr morgens auf- und um 0 Uhr abends untergeht, ist somit das Ende der Abenddämmerung zugleich der Anfang der folgenden Morgendämmerung. Für alle nördlicher gelegenen Punkte fließen die beiden Dämmerungen in einander.

Für $\varphi = 83^{\circ}$ und ebenso für alle nördlicher gelegenen Orte dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch; es wird also nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche gar nicht Nacht.

5. $\delta = +7^{\circ} 49'$ (10. April und 3. September).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m			h m
0°	1 13	0 28	35°	1 32	0 35	70°		1 41
5	1 13	0 28	40	1 40	0 38	75		3 1
10	1 14	0 29	45	1 50	0 41	80		
15	1 16	0 29	50	2 4	0 46	85		
20	1 18	0 30	55	2 26	0 52	90		
25	1 22	0 31	60	3 3	1 1			
30	1 26	0 33	65		1 15			

Für $\varphi = 64^{\circ} 11'$ und alle höheren Breiten dauert die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch, abgesehen von jenen Orten, für welche nunmehr die Sonne stets über dem Horizonte bleibt.

Für $\varphi = 75^{\circ} 11'$ dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch und ebenso für alle Orte von höheren Breiten, insoweit für sie die Sonne noch untergeht.

6. $\delta = +15^{\circ} 38'$ (3. Mai und 10. August).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m			
0°	1 15	0 29	35°	1 39	0 37			
5	1 16	0 29	40	1 49	0 40			
10	1 17	0 30	45	2 4	0 44			
15	1 19	0 30	50	2 28	0 50			
20	1 22	0 31	55	3 20	0 59			
25	1 25	0 33	60		1 14			
30	1 31	0 35	65		1 49			

Für $\varphi = 56^{\circ} 22'$ dauert die astronomische Dämmerung die ganze Nacht, ebenso für Orte von höherer Breite mit Sonnenuntergang resp. -Aufgang.

Für $\varphi = 67^{\circ} 22'$ dauert die bürgerliche Abenddämmerung bis Mitternacht, zu welchem Zeitpunkte die bürgerliche Morgendämmerung beginnt. Für Orte von höherer Breite fließen diese Dämmerungen teilweise in einander, insofern für sie noch ein Sonnenuntergang resp. -Aufgang eintritt.

7. $\delta = +23^{\circ} 27'$ (21. Juni).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m			
0°	1 19	0 31	35°	1 52	0 40			
5	1 20	0 31	40	2 9	0 45			
10	1 21	0 31	45	1 39	0 51			
15	1 24	0 32	50		1 1			
20	1 28	0 33	55		1 20			
25	1 33	0 35	60					
30	1 41	0 37	65					

Für $\varphi = 48^{\circ} 33'$ dauert am 21. Juni die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch, ebenso für Orte in höheren Breiten, wenn für sie an diesem Tage die Sonne noch untergeht.

Für $\varphi = 59^{\circ} 33'$ dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch und ebenso für höhere Breiten, insofern die Sonne für sie noch untergeht.

Um angeben zu können, zu welcher Tageszeit die Dämmerung jeweils eintritt und endet, ist es nötig, die Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne zu kennen.

In der folgenden Tabelle I^a sollen nun für die in Tafel I benutzten Deklinationen die Zeiten des Auf- und Unterganges der Sonne an allen dort gebrauchten geographischen Breiten mitgeteilt werden.

Tabelle I^a.

Wahre Zeiten des wahren Auf- und Unterganges der Sonne.

1. $\delta = -23^{\circ} 27'$ (21. Dezember).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m			
0°	6 0	6 0	35°	7 11	4 49			
5	6 9	5 51	40°	7 25	4 35			
10	6 18	5 42	45°	7 43	4 17			
15	6 27	5 33	50°	8 5	3 55			
20	6 36	5 24	55°	8 33	3 27			
25	6 47	5 13	60°	9 15	2 45			
30	6 58	5 2	65°	10 34	1 26			

Für alle Orte, deren geographische Breite $\varphi = 66^{\circ} 33'$ beträgt, kommt der Sonnenmittelpunkt bei der oberen Kulmination für einen Augenblick in den Horizont des Beobachters, um aber sofort wieder unter den Horizont hinabzusinken; es kann also hier von einem Auf- und Untergange der Sonne nicht mehr die Rede

sein. Für Orte von höheren Breiten kommt die Sonne an diesem Tage nicht über den Horizont des Beobachters.

2. $\delta = -15^\circ 38'$ (6. Februar und 5. November).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	6 0	6 0	35°	6 45	5 15	70°	9 21	2 39
5	6 0	5 54	40°	6 54	5 6			
10	6 11	5 49	45°	7 5	4 55			
15	6 17	5 43	50°	7 18	4 42			
20	6 23	5 37	55°	7 34	4 26			
25	6 30	5 30	60°	7 56	4 4			
30	6 37	5 23	65°	8 27	3 33			

Für Orte zwischen $\varphi = 74^\circ 22'$ und $\varphi = 90^\circ$ kommt die Sonne nicht über den Horizont.

3. $\delta = -7^\circ 49'$ (1. März und 13. Oktober).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	6 0	6 0	35°	6 22	5 38	70°	7 29	4 31
5	6 3	5 57	40°	6 26	5 34	75°	8 3	3 57
10	6 6	5 54	45°	6 32	5 28	80°	9 25	2 35
15	6 8	5 52	50°	6 38	5 22			
20	6 11	5 49	55°	6 45	5 15			
25	6 15	5 45	60°	6 55	5 5			
30	6 18	5 42	65°	7 8	4 52			

Für Orte zwischen $\varphi = 82^\circ 11'$ und $\varphi = 90^\circ$ kommt die Sonne nicht über den Horizont.

4. $\delta = 0^\circ 0'$ (21. März und 23. September).

Die Sonne geht für alle Breiten um 6 Uhr morgens auf und um 6 Uhr abends unter.

Am Pole selbst bewegt sich dieselbe an diesen beiden Tagen in 24 Stunden sichtbar in der Nähe des Horizontes.

5. $\delta = + 7^{\circ} 49'$ (10. April und 3. September).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	6 0	6 0	35°	5 38	6 22	70°	4 31	7 29
5	5 57	6 3	40°	5 34	6 26	75°	3 57	8 3
10	5 54	6 6	45°	5 28	6 32	80°	2 35	9 25
15	5 52	6 8	50°	5 22	6 38			
20	5 49	6 11	55°	5 15	6 45			
25	5 45	6 15	60°	5 5	6 55			
30	5 42	6 18	65°	4 52	7 8			

Für Orte zwischen $\varphi = 82^{\circ} 11'$ und $\varphi = 90^{\circ}$ ist die Sonne stets über dem Horizonte.

6. $\delta = + 15^{\circ} 38'$ (3. Mai und 10. August).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	6 0	6 0	35°	5 15	6 45	70°	2 39	9 21
5	5 54	6 6	40°	5 6	6 54			
10	5 49	6 11	45°	4 55	7 5			
15	5 43	6 17	50°	4 42	7 18			
20	5 37	6 23	55°	4 26	7 34			
25	5 30	6 30	60°	4 4	7 56			
30	5 23	6 37	65°	3 33	8 27			

Für $\varphi = 74^{\circ} 22'$ und alle höheren Breiten ist die Sonne an diesen beiden Tagen je 24 Stunden über dem Horizonte.

7. $\delta = + 23^{\circ} 27'$ (21. Juni).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m			
0°	6 0	6 0	35°	4 49	7 11			
5	5 51	6 9	40°	4 35	7 25			
10	5 42	6 18	45°	4 17	7 43			
15	5 33	6 27	50°	3 55	8 5			
20	5 24	6 36	55°	3 27	8 33			
25	5 13	6 47	60°	2 45	9 15			
30	5 2	6 58	65°	1 26	10 34			

Für $\varphi = 66^{\circ} 33'$ bis $\varphi = 90^{\circ}$ steht die Sonne volle 24 Stunden, also den ganzen 21. Juni über dem Horizonte.

Zur bequemern Uebersicht der Beleuchtung der nördlichen Polarregion durch direktes Sonnenlicht sei hier noch Folgendes hervorgehoben:

Die Sonne ist ununterbrochen über dem Horizonte für:

$\varphi = 90^{\circ}$; vom 21. März bis 23. September, also 186 Tage,

85 ; „ 2. April „ 10. September, „ 161 „ ,

80 ; „ 16. April „ 27. August, „ 134 „ ,

75 ; „ 1. Mai „ 12. August, „ 104 „ ,

70 ; „ 21. Mai „ 24. Juli, „ 64 „ ,

66 33' am 21. Juni, „ 1 Tag.

Die Sonne ist ununterbrochen unter dem Horizonte für:

$\varphi = 90^{\circ}$; vom 23. September bis 21. März, also 179 Tage,

85 ; „ 6. Oktober „ 8. März, „ 154 „ ,

80 ; „ 19. Oktober „ 23. Februar, „ 128 „ ,

75 ; „ 4. November „ 8. Februar, „ 97 „ ,

70 ; „ 22. November „ 21. Januar, „ 61 „ ,

66 33'; am 21. Dezember, „ 1 Tag.

Tabelle II.

Längste Dauer der Dämmerung.

a.

Die astronomische Dämmerung dauert die ganze Nacht hindurch für

φ	
48° 33'	Die ganze Nacht vom 21. auf den 22. Juni,
50°	vom 1. Juni bis 12. Juli,
55	„ 10. Mai „ 5. August,
60	„ 22. April „ 22. August,
65	„ 8. April „ 5. September,
70	„ 26. März bis 20. Mai u. v. 25. Juli bis 18. Sept.
75	„ 13. März „ 30. April „ „ 13. Aug. „ 1. Okt.
80	„ 28. Febr. „ 15. April „ „ 28. Aug. „ 14. Okt.
85	„ 14. Febr. „ 2. April „ „ 11. Sept. „ 28. Okt.
90	„ 29. Januar „ 20. März „ „ 24. Sept. „ 14. Nov.

b.

Die bürgerliche Dämmerung dauert die ganze Nacht hindurch für

φ	
59° 33'	Die ganze Nacht vom 21. Juni auf den 22. Juni,
60°	vom 10. Juni bis 2. Juli,
65	„ 12. Mai „ 1. August,
70	„ 25. April „ 19. Mai u. v. 24. Juli bis 17. August
75	„ 10. April „ 30. April „ „ 14. Aug. „ 3. Sept.,
80	„ 27. März „ 14. April „ „ 28. Aug. „ 15. Sept.,
85	„ 16. März „ 2. April „ „ 10. Sept. „ 28. Sept.,
90	„ 3. März „ 20. März „ „ 24. Sept. „ 11. Okt.

Tabelle III.

a.

Kürzeste astronomische Dämmerung.

φ	Dauer			Eintritt derselben	
	h	m	s		
0°	1	12	0	am 21. März	und am 23. September,
5	1	12	4	„ 19. „	„ „ 25. „
10	1	13	7	„ 17. „	„ „ 27. „
15	1	14	33	„ 15. „	„ „ 29. „
20	1	16	40	„ 13. „	„ „ 1. Oktober,
25	1	19	31	„ 11. „	„ „ 3. „
30	1	23	14	„ 9. „	„ „ 5. „
35	1	28	4	„ 7. „	„ „ 7. „
40	1	34	16	„ 6. „	„ „ 8. „
45	1	42	15	„ 4. „	„ „ 10. „
50	1	52	41	„ 3. „	„ „ 11. „
55	2	6	37	„ 2. „	„ „ 13. „
60	2	25	52	„ 28. Februar	„ „ 14. „
65	2	53	48	„ 27. „	„ „ 15. „
70	3	37	45	„ 27. „	„ „ 16. „
75	4	57	29	„ 26. „	„ „ 16. „
80	8	34	11	„ 25. „	„ „ 17. „
81	12	0	0	„ 25. „	„ „ 17. „

b.

Kürzeste bürgerliche Dämmerung.

φ	Dauer			Eintritt derselben				
	h	m	s					
0°	0	28	0	am 21. März und am 23. September,				
5	0	28	8	„	20.	„	„	24. „
10	0	28	24	„	19.	„	„	25. „
15	0	28	56	„	18.	„	„	25. „
20	0	29	44	„	18.	„	„	26. „
25	0	30	14	„	17.	„	„	27. „
30	0	32	20	„	16.	„	„	28. „
35	0	34	12	„	16.	„	„	28. „
40	0	36	34	„	15.	„	„	29. „
45	0	39	37	„	14.	„	„	30. „
50	0	43	36	„	14.	„	„	30. „
55	0	48	52	„	13.	„	„	1. Oktober,
60	0	56	5	„	13.	„	„	1. „
65	1	6	27	„	13.	„	„	1. „
70	1	22	16	„	12.	„	„	2. „
75	1	49	8	„	12.	„	„	2. „
80	2	44	40	„	12.	„	„	2. „
85	5	15	2	„	12.	„	„	2. „

Soll die Dämmerungsdauer für eine in den Tabellen nicht benützte Deklination oder für eine nicht angegebene geographische Breite oder endlich für eine in den Tabellen nicht enthaltene Deklination und geographische Breite berechnet werden, so kann dies aus den Tabellen durch einfache Interpolation geschehen, wenn man annimmt, dass die Dämmerungsdauer proportional der Aenderung der Deklination und der geographischen Breite sich ändert. Natürlich erhält man auf diese Weise nur genäherte Resultate, mit denen man für die vorliegende Aufgabe um so mehr sich zufrieden geben kann, als auch die Angaben über die Dämmerungsdauer nur genäherte sind; es wurden nämlich bei ihrer Berechnung überall unter 30 Sekunden im Resultate vernachlässigt, dagegen 30 und mehr Sekunden für eine volle Minute angesetzt.

Durch die bürgerliche Dämmerung wird der Tag verlängert und zwar um den doppelten Betrag der in Tabelle I angegebenen Dauer dieser Dämmerung; dass diese Verlängerung hohe Beträge erreichen kann, ist aus Tabelle I und II wohl ersichtlich; ebenso wird auch durch die Rechnung bestätigt, dass diese Tagesverlängerung in den Tropengegenden von geringem Belange ist.

Die gegebenen Tabellen gestatten, sich über die Beleuchtungsverhältnisse irgend eines Ortes ein klares Bild zu verschaffen; es sei dies Beispiels halber für Orte in 70° nördlicher Breite näher dargethan.

Obwohl die Sonne vom 1. bis 21. Januar nicht über den Horizont kommt, ist es dennoch nicht ständig Nacht.

Am 1. Januar beträgt vor und nach dem wahren Mittag die astronomische Dämmerung je 5 Stunden 8 Minuten und die bürgerliche je 2 Stunden 35 Minuten, so dass also 5 Stunden 10 Minuten, wenigstens nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, vollständig Tag ist, obwohl die Sonne unter dem Horizonte sich befindet.

Beide Dämmerungen nehmen langsam ab und betragen am 21. Januar und zwar die astronomische 4 Stunden 40 Minuten, die bürgerliche 2 Stunden 15 Minuten je vor und nach dem wahren Mittag, so dass an diesem Datum, an welchem der Sonnenmittelpunkt bei der oberen Kulmination für einen Augenblick im Horizonte erscheint, die kurze Tagesdauer um 4 Stunden 30 Minuten verlängert wird.

Vom 22. Januar ab geht die Sonne täglich auf und unter bis zum 20. Mai; hiebei beträgt die Tagesdauer am 6. Februar 5 Stunden 18 Minuten, durch die bürgerliche Dämmerung um 3 Stunden 34 Minuten verlängert, während die astronomische Morgen- und Abenddämmerung je 4 Stunden dauert; am 1. März beträgt die Tagesdauer 9 Stunden 2 Minuten, durch die bürgerliche Dämmerung um 2 Stunden 50 Minuten vergrößert.

Am 25. April dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch; es ist also an diesem Tage in 70° Breite 24 Stunden Tag, und so bleibt es durch die Wirkung der bürgerlichen Dämmerung bis inclusive 20. Mai, obwohl während dieser ganzen Zeit die Sonne jeden Tag auf- und untergeht. Die sogenannten hellen Nächte haben schon am 26. März begonnen.

Vom 21. Mai bis 24. Juli ist die Sonne ununterbrochen über dem Horizonte; es ist ständig Tag, von einer Dämmerung kann nicht die Rede sein.

Vom 25. Juli bis 22. November geht die Sonne wieder auf und unter, und damit stellt sich auch die Dämmerung wieder ein. Da die bürgerliche Dämmerung bis zum 17. August die ganze Nacht hindurch andauert, so ist trotz Auf- und Untergang der Sonne vom 25. Juli bis 17. August immer ununterbrochen Tag; die hellen Nächte dagegen dauern fort bis zum 18. September.

Am 23. September beträgt die Tagesdauer 12 Stunden; sie wird durch die bürgerliche Dämmerung um 2 Stunden 48 Minuten verlängert, während die astronomische Dämmerung vor Auf- und nach Untergang der Sonne noch je 4 Stunden 18 Minuten dauert.

Von da an nimmt die Dauer des Tages immer mehr ab, die der bürgerlichen Dämmerung wieder zu, bis endlich am 22. November der Sonnenmittelpunkt bei der oberen Kulmination gerade noch im Horizonte erscheint. Die bürgerliche Dämmerung beträgt an diesem Tage 2 Stunden 15 Minuten, die astronomische dagegen 4 Stunden 40 Minuten.

Vom 23. November anfangen erscheint die Sonne nicht mehr über dem Horizonte, dagegen wächst die bürgerliche Dämmerung bis zum 21. Dezember auf eine Dauer von 2 Stunden 38 Minuten an, wodurch also an diesem Datum doch 5 Stunden 16 Minuten Tag ist.

Vom 21. Dezember an nimmt die bürgerliche und die astronomische Dämmerung langsam ab, um am 1. Januar die oben angegebenen Werte wieder zu erreichen.

Um den Anfang der Morgendämmerung zu finden, hat man die in den Tabellen angegebene Dauer der Dämmerung von der dem Kalender entnommenen Zeit des Sonnenaufganges zu subtrahieren und um das Ende der Abenddämmerung zu erhalten, hat man die Dämmerungsdauer zur Zeit des Sonnenunterganges zu addieren.

Die Tabellen I und II^a enthalten auch die Dauer der Dämmerung und des wahren Sonnentages für die südliche Erdhälfte, wenn man die Reihenfolge der gebrauchten Sonnendeklationen gerade umkehrt; für den 21. Dezember gelten also die für $\delta = +23^{\circ} 27'$ angegebenen Zeiten, für den 6. Februar und 5. November jene für $\delta = +15^{\circ} 38'$, für den 1. März und 13. Oktober die für $\delta = +7^{\circ} 49'$ u. s. f.

Die Sonne ist ununterbrochen über dem Horizonte für:

$\varphi = -90^{\circ}$ vom 23. September bis 21. März,
85° „ 4. Oktober „ 8. März,
80° „ 19. Oktober „ 23. Februar,
75° „ 4. November „ 8. Februar,
70° „ 22. November „ 21. Januar,
— 66° 33' vom 20. auf den 21. Dezember.

Die Sonne ist stets unter dem Horizonte für:

$\varphi = -90^{\circ}$ vom 21. März bis 23. September,
85° „ 2. April „ 10. September,
80° „ 16. April „ 27. August,
75° „ 1. Mai „ 12. August,
70° „ 21. Mai „ 24. Juli,
— 66° 33' vom 20. auf den 21. Juni.

Tabelle II^a. Längste Dauer der Dämmerung.

a.

Die astronomische Dämmerung dauert die ganze Nacht hindurch für:

φ	
— 48° 33'	Die ganze Nacht vom 20. auf den 21. Dezember,
50	vom 3. Dezember bis 6. Januar,
55	„ 10. November „ 1. Februar,
60	„ 25. Oktober „ 17. „
65	„ 11. „ „ 3. März,
70	„ 29. Sept. bis 23. Nov. u. v. 22. Januar bis 15. März,
75	„ 15. „ „ 3. „ „ 9. Febr. „ 28. „
80	„ 2. „ „ 18. Okt. „ „ 24. „ „ 10. April,
85	„ 20. Aug. „ 5. „ „ 7. März „ 25. „
90	„ 12. „ „ 23. „ „ 21. „ „ 12. Mai.

b.

Die bürgerliche Dämmerung dauert die ganze Nacht hindurch für:

φ	
— 59° 33'	Vom 20. auf den 21. Dezember,
60	„ 12. Dezember bis 1. Januar,
65	„ 13. November „ 29. „
70	„ 28. Okt. bis 21. Nov. u. v. 22. Jan. bis 14. Febr.,
75	„ 14. „ „ 3. „ „ 9. Febr. „ 28. „
80	„ 1. „ „ 18. Okt. „ „ 24. „ „ 13. März,
85	„ 18. Sept. „ 3. „ „ 9. März „ 25. „
90	„ 4. „ „ 21. Sept. „ „ 22. „ „ 7. April.

Mit Hilfe dieser Angaben dürfte es nicht allzuschwer fallen, eine richtige Vorstellung über die Beleuchtungsverhältnisse der südlichen Erdhälfte zu gewinnen.