

BEITRÄGE

zur

Determination der Elemente des Dreiecks

von

Wilhelm Algenstaedt,
Oberlehrer.

Bogen 4—6.



DOBERAN.

Druck von Herm. Rehse & Co.
1895.

1895. Progr. Nr. 674.

900
1 (1895)

674
a



BEITRÄGE

Bestimmung der Elemente des Systems

1881

1881

1881

1881

1881

1881

1881

1881

1881

1881



1881

1881

1881

1881

1881

1881



$$\begin{aligned}
\alpha = 90^\circ. \quad m_a + m_b &= \rho_a \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \gamma}}{\sin \gamma + \cos \gamma + 1}, \text{ und } m_a + m_b \geq \rho_a, \text{ jenachdem} \\
\sin \gamma &\geq \frac{2}{13} \sqrt{13}, \text{ oder } \gamma \geq 33^\circ 41' 24'' \text{ ist.}^* - \\
\beta = 90^\circ. \quad m_a + m_b &> \frac{3}{2} \rho_a. - \\
\gamma = 90^\circ, \quad m_a + m_b &> \frac{3}{2} \rho_a. - \\
(m_a - m_b) &= \rho_a \cdot \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}. \\
\alpha = \beta. \quad m_a - m_b &= 0. - \\
\alpha = \gamma. \quad (m_a - m_b) &= \rho_a \cdot \pm \frac{\sqrt{1 - 8 \cos^4 \alpha + 7 \cos^2 \alpha} - 1 + \cos 2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha}, \\
(4) \text{ und } m_a - m_b &\geq \rho_a, \text{ jenachdem } \sin \alpha \leq \frac{1}{4} \sqrt{6}, \text{ oder } \alpha \leq 37^\circ 45' 40''. - \\
\beta = \gamma. \quad \text{vergl. oben (2) ff.} - \\
\alpha = 90^\circ. \quad (m_a - m_b) &< \rho_a. - \\
\beta = 90^\circ. \quad (m_a - m_b) &\geq \rho_a, \text{ jenachdem} \\
\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} &\geq \sin \alpha - \cos \alpha + 2^{**} \text{ ist.} \\
\gamma = 90^\circ. \quad (m_a - m_b) &\geq \rho_a, \text{ jenachdem} \\
\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha} &\geq \sin \alpha - \cos \alpha + 1^{***} \text{ ist.} - \\
(m_a \pm m_b) &= \rho_c \cdot \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \pm \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}},
\end{aligned}$$

die Betrachtungen über das gleichschenkelige und rechtwinkelige Dreieck sind denen des letzten Abschnittes analog.**** —

* Anmerk. 1. Das Maximum der Function $m_a + m_b$ für $\rho_a = \text{const.}$ tritt ein für $\lim \gamma = 90^\circ$, mithin $m_a + m_b < \frac{3}{2} \rho_a$; mit abnehmendem γ nimmt die Function ab, ist für $\gamma < 33^\circ 41' 24'' < \rho_a$ und wiederum für $\lim \gamma = 0$ gleich ρ_a . Das Minimum derselben liegt also im Intervall $\gamma = 33^\circ 41' 24''$ bis $\gamma = 0^\circ$. Bemerkenswert erscheint die Beziehung zu 2, (7): in demselben Dreiecke ist die Differenz der Schwerlinien gleich dem Radius des Inkreises, ihre Summe gleich dem Radius des Ankreises. —

** α liegt nahe bei 36° . —

*** Die Gleichung nimmt unter der Substitution $\sin \alpha - \cos \alpha = u$, mithin $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 - u^2}{2}$ leicht lösbare Form an.

**** Anmerk. 2. Insbesondere ist für $\alpha = \beta$ $m_a + m_b = \rho_a \cdot \frac{\sqrt{1 - 2 \cos 3 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}$ und der Factor von $\rho_a = 1$, wenn $\cos^4 \alpha + \frac{2}{9} \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \cos^2 \alpha - \frac{1}{9} = 0$ oder $\cos \alpha = 0,8099295$ ist; mithin $2m_a = m_a + m_b \geq \rho_a$, jenachdem $\alpha \geq 36^\circ 54' 40''$ ist. —

$$4. \quad m_a + m_b \geq s \cdot m_a + m_b = s \cdot \frac{\sqrt{1+2\cos(\beta-\gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1+2\cos(\alpha-\gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

Da s stets endlich ist, die Schwerlinie dagegen verschwinden kann, an sich aber $< s$ ist,* so ist $m_a + m_b$ in den Fällen wo m_a (bez. m_b) unendlich klein wird, also für $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$ und $\lim \gamma = 0$, ein Minimum, und zwar $> \frac{3}{4} s$; andererseits besitzt die Function

ihren grössten Wert für $\alpha = \beta$ und $\lim \gamma = 180^\circ$ (bez. $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$ und $\lim \gamma = 90^\circ$), da dann die Schwerlinien sich der halben Summe der einschliessenden Seiten nähern;* mithin ist

$m_a + m_b < \frac{3}{2} s$. Es genügt also $m_a + m_b$ der doppelten Ungleichung

$$\frac{3}{4} s < m_a + m_b < \frac{3}{2} s. ** -$$

$(m_a - m_b) < s$,* und zwar $< \frac{3}{4} s$. — (vergl. die Betrachtungen für $m_a + m_b \geq s$ und Anmerk.). —

$$5. \quad m_a + m_b > \frac{3}{2} s_a.$$

Es ist

$$(1) \quad m_a \pm m_b = s_a \cdot \frac{\sqrt{1+2\cos(\beta-\gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \pm \sqrt{1+2\cos(\alpha-\gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}},$$

das Minimum tritt ein für $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$ und $\lim \alpha = 0$.

$$(m_a - m_b) \geq s_a. -$$

* Vergl. Haebler 2, (7) und § I, 5, Anmerk. 2. —

** Anmerk. Für $\alpha = \beta$ ist $\frac{3}{2} s > m_a + m_b \geq s \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2}$; denn (1) $m_a + m_b = s \cdot \frac{2 \sqrt{1-2\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$

und der Factor von s ein Minimum, (Maximum) sobald $(1-8\cos^4 \alpha + 7\cos^2 \alpha)(2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1) = (1-\cos^2 \alpha)$

$$(1 + \cos \alpha)(16 \cos^2 \alpha - 7) \cdot \cos \alpha \text{ oder } \cos \alpha_1 = \frac{1}{8}$$

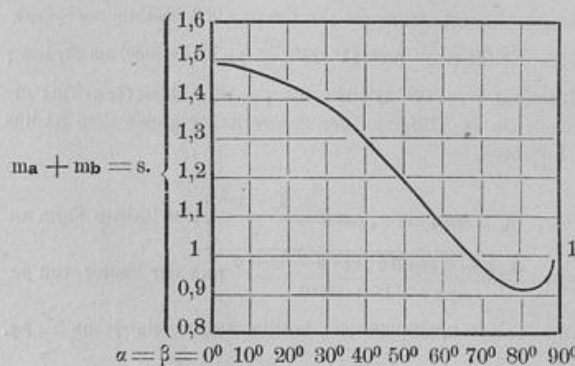
$(\cos \alpha_2 = 1)$, mithin $\alpha_1 = 82^\circ 49' 9''$ ($\alpha_2 = 0$). Für α_1 erreicht $m_a + m_b$ das Minimum $s \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2}$. Schreiben

wir ferner den Factor von s in (1) $\frac{\sqrt{9-8\sin^2 \alpha}}{1+\cos \alpha}$, so

wird derselbe ein Maximum für $\alpha_2 = 0$, nämlich $= \frac{3}{2} s$.

Die Figur giebt den Verlauf der Function im Intervall $\alpha = 0$ bis $\alpha = 90^\circ$; zweimal ist sie $= s$; denn die Gleichung $2\sqrt{1-2\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = 2\sin \alpha + \sin 2\alpha$ liefert als Bedingung dafür, dass der Factor von s in

(1) gleich 1 ist, die Wurzeln $\cos \alpha_1 = \frac{2}{7}$ und $\cos \alpha_2 = 0$, mithin die Winkel $\alpha_1 = 72^\circ 23' 54''$ und $\alpha_2 = 90^\circ$.



$$\alpha = \beta. \quad m_a - m_b = 0. -$$

$$\alpha = \gamma. \quad (m_a - m_b) = s_a \cdot \pm \frac{\sqrt{1 - 8 \cos^4 \alpha + 7 \cos^2 \alpha} - 1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

und der Factor von s_a gleich 1, sobald $\cos \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{7 \pm \sqrt{31}}$ ist; mithin ist

$$(m_b - m_a) \geq s_a, \text{ jenachdem } 72^\circ 35' 28'' \leq \alpha \leq 27^\circ 35' 28'' \text{ ist.} -$$

$$\beta = \gamma. \quad (m_a - m_b) = s_a \cdot \pm \frac{2 \sin \gamma - \sqrt{9 - 8 \sin^2 \gamma}}{2(1 - \cos \gamma)} \text{ und}$$

$$m_b - m_a \geq s_a, \text{ jenachdem angenähert } \gamma \leq 48^\circ \text{ ist.} -$$

$$(m_a \pm m_b) = s_c \cdot \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \pm \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$m_a + m_b \geq s_c. -$$

$$(m_a - m_b) \geq s_c. * -$$

* Anmerk. $m_a + m_b \geq \sqrt{6 F.}$

Es ist

$$(1) m_a + m_b = \sqrt{F.} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}, \text{ und der}$$

Factor von $\sqrt{F}$ ein Minimum, sobald $\alpha = \beta$, und

$$(2) \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha (16 \cos^2 \alpha - 7) - (1 - 8 \cos^4 \alpha + 7 \cos^2 \alpha) (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \text{ oder } \cos \alpha = \frac{1}{10} \sqrt{10} \text{ und}$$

$\alpha = 71^\circ 33' 54''$ ist. — Ist $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$ vorgelegt, so ist

$$(3) m_a + m_b = \sqrt{F.} \frac{\sqrt{9 - 8 \sin^2 \gamma} + 2 \sin \gamma}{\sqrt{2 \sin 2\gamma}}, \text{ und der Factor von } \sqrt{F} \text{ ein Minimum, sobald}$$

$$(4) 44 \sin^4 \gamma - 72 \sin^2 \gamma + 27 = 0, \text{ oder } \sin \gamma = \frac{1}{22} \sqrt{66 (6 - \sqrt{3})} \text{ und } \gamma = 49^\circ 43' 9'' \text{ ist. Alsdann ist}$$

$$\text{der Factor} = 2,57012, \text{ mithin } m_a + m_b \geq \sqrt{F.} 2,57012. -$$

$$(m_a - m_b) = \sqrt{F.} \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}},$$

für $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$ ist $(m_a - m_b) \geq \sqrt{F.}$, jenachdem $(12 \sin^2 \gamma - 2 \sin 2\gamma - 9)^2 \geq 8 \sin 2\gamma (1 + 8 \cos^2 \gamma)$ ist; die

Gleichung ist vom 4. Grade in $\sin^2 \gamma$ und besitzt 2 Wurzeln, nach welchen sich die Ungleichung feststellen lässt. —

1. $r + \rho > \frac{1}{2}a$.*

Für $a = \text{const.}$ kann r unendlich gross, ρ unendlich klein sein; das Minimum tritt also ein für endlich r und verschwindend ρ .**

Allgemein ist

$$(1) \quad r + \rho = a \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

$$\alpha = \begin{cases} \beta \\ \gamma \end{cases} \quad r + \rho = a \cdot \frac{2 \cos \alpha - \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ und } r + \rho > \frac{1}{2}a. -$$

$$\beta = \gamma \quad r + \rho = a \cdot \frac{2 \cos \gamma - \cos 2\gamma}{2 \sin 2\gamma}, \text{ und der Factor von } a \text{ ein Minimum, wenn } \cos \gamma$$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, oder $\gamma = 37^\circ 28' 2''$ ist, mithin ist $r + \rho \geq a \cdot 0,685785$; für veränderlich γ und $a = \text{const.}$ wächst die Function stetig und ist für $\lim \gamma = 0$ (bez. $\lim \gamma = 90^\circ$) unendlich gross; sie muss darum zweimal den Wert a besitzen; die bez. Winkel ergeben sich aus der Gleichung

$$(2) \quad \cos^4 \gamma - \frac{2}{5} \cos^3 \gamma - \frac{4}{5} \cos^2 \gamma + \frac{1}{5} \cos \gamma + \frac{1}{20} = 0; \text{ sie wird erfüllt durch}$$

$$\cos \gamma_1 = 0,959738 \text{ und } \cos \gamma_2 = 0,405402, \text{ und ist}$$

$$r + \rho \geq a, \text{ sobald } 16^\circ 18' 49'' \leq \gamma \leq 66^\circ 5' 1'' \text{ ist. -}$$

$$r - \rho \geq a \cdot 0,270813.$$

Es ist

$$(3) \quad r - \rho = a \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{2 \sin \alpha}, \text{ und der Factor von } a \text{ ein}$$

Minimum, wenn

$$(4) \quad \frac{2 \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot (2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma)}{2 \sin \alpha} = \sin \beta = \sin \gamma, \text{ oder}$$

$$(5) \quad \beta = \gamma \text{ und } \sin^6 \gamma + \sin^4 \gamma - 3 \sin^2 \gamma + \frac{4}{5} = 0, \text{ mithin}$$

$\sin^2 \gamma = 0,643625$ und $\gamma = 53^\circ 20' 48''$ ist. Auch hier erreicht die Function zweimal den Wert a , und zwar für die beiden Winkel, welche aus der Gleichung

$$\cos^4 \gamma - \frac{2}{3} \cos^3 \gamma - \frac{2}{3} \cos^2 \gamma - \frac{1}{3} \cos \gamma + \frac{1}{12} = 0 \text{ gefunden worden. -}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha, \quad r - \rho = a \cdot \frac{2 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ und der Factor von } a \text{ ein Minimum, wenn}$$

* Anmerk. 1. Bedeutet e die Entfernung der Mittelpunkte des In- und Umkreises, so folgt aus der bekannten Gleichung $e^2 = r \cdot (r - 2\rho)$, $\rho = \frac{r^2 - e^2}{2r}$, was für $\lim e = 0$ als Maximum $\rho = \frac{r}{2}$ ergibt. -

** Anmerk. 2. Vergl. Haebler 2, (13)-(18.)

(6) $\cos^3 \alpha - \frac{5}{2} \cos \alpha + 1 = 0$, und $\alpha = 64^\circ 23' 7''$ ist; alsdann ist $r - \rho \geq a \cdot 0,278797$. Für $\lim \gamma = 90^\circ$ ist $r - \rho = \frac{a}{2}$; für abnehmend γ nimmt auch $r - \rho$ ab bis zum Minimum, um von dort an bei weiter abnehmendem γ zu wachsen und für $\lim \gamma = 0^\circ$ unendlich gross zu werden. Darum wird an einer Stelle $r - \rho = a$; der entsprechende Wert von α wird aus der Gleichung

$$\cos^4 \alpha - 2 \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0 \text{ gefunden. —}$$

2. $r + \rho > \frac{1}{2} \cdot h_a$. *

Es ist

$$(1) r + \rho = h_a \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{2 \sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad r + \rho = h_a \cdot \frac{2 \cos \alpha - \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(2) \cos^3 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0, \text{ oder}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ und } \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ ist; mithin ist } r + \rho \geq h_a. \text{ je nachdem}$$

$45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ ist; es liegt also das Minimum von $r + \rho$ im Intervall $\alpha = 45^\circ$ bis $\alpha = 60^\circ$, und wird gefunden aus der Gleichung

$$(3) \cos^4 \alpha - 2 \cos^3 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} = 0; \text{ der allein verwendbaren Wurzel}$$

$\cos \alpha = 0,609191$ entspricht $\alpha = 52^\circ 28' 8''$, und ist alsdann $r + \rho \geq h_a \cdot 0,96326$. —

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho \geq h_a, \text{ je nachdem } \cos \beta \leq \frac{1}{2} \text{ ist. —}$$

$$r - \rho \geq h_a.$$

Es ist

$$(4) r - \rho = h_a \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ ein}$$

Minimum, sobald

$$(5) \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \sin^2 \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \sin \gamma \cdot (2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma) \\ = \sin^2 \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot (2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma),$$

mithin

$$(6) \gamma = \beta \text{ und } \cos^2 \beta - 3 \cos \beta + 1 = 0 \text{ ist; der Wurzel } \cos \beta = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}),$$

oder $\beta = 67^\circ 32' 40''$, entspricht das Minimum $r - \rho \geq h_a \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)$. —

* Anmerk. Vergl. Haebler 2, (14) und § V, 1. —

$\gamma = \beta$. $r - \rho = h_a \cdot \frac{2 \cos^2 \beta - 2 \cos \beta + 1}{2 \sin^2 \beta}$; der Factor von h_a besitzt für $\lim \beta = 90^\circ$ den Wert $\frac{1}{2}$, nimmt ab mit abnehmendem β bis zum Minimum, wächst dann und wird für $\lim \beta = 0^\circ$ unendlich gross; er ist also einmal $= 1$, und zwar für den Winkel, welcher aus der Gleichung

$$(7) \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{1}{4} = 0$$

gefunden wird; es ist $\cos \beta = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$, und

$$r - \rho \geq h_a, \text{ je nachdem } \beta \leq 36^\circ \text{ ist.}^* -$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$. $r - \rho = h_a \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1}{4 \cos \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}$, und der Factor von h_a gleich 1, wenn

$$(8) \cos^3 \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0, \text{ und}$$

$$\cos \alpha_1 = 0,88077, \cos \alpha_2 = 0,181665 \text{ ist; mithin ist}$$

$$r - \rho \geq h_a, \text{ je nachdem } 28^\circ 15' 53'' \geq \alpha \geq 79^\circ 31' 59'' \text{ ist.}$$

Nun wird $r - \rho$ für $\lim \alpha = 0^\circ$ sowohl, wie für $\lim \alpha = 90^\circ$ unendlich gross; sein Minimum liegt also im Intervall $\alpha = 28^\circ 15' 53''$ bis $\alpha = 79^\circ 31' 59''$ und wird gefunden aus der Gleichung

$$(9) \cos^4 \alpha - 2 \cos^3 \alpha + \frac{5}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} = 0 \text{ für die allein verwendbare Wurzel}$$

$$\cos \alpha = 0,54009; \text{ es ist } \alpha = 57^\circ 18' 43'' \text{ und}$$

$$r - \rho \geq h_a \cdot 0,32228. -$$

$$3. \quad r + \rho > \frac{1}{2} w_a. ** -$$

$$r - \rho \geq w_a \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1). -$$

$$4. \quad r + \rho > \frac{1}{2} m_a. *** -$$

* Vergl. § III, 3, (5) und Anmerkung daselbst. -

** Vergl. Haebler 2, (15) und § V, 1. - Im Abschnitt 3 und 4 sind nur die notwendig erscheinenden Ergebnisse angeführt, da ihre Bedingungen und Folgerungen sich vielfach mit denjenigen aus 1 und 2 decken, bzw. ihnen analog sind. -

*** Anmerkung. Für $\alpha = \gamma$ ist $r + \rho = m_a$, sobald $(1) \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \cos^2 \alpha - \frac{7}{12} \cos \alpha + \frac{1}{3} = 0$, oder $\cos \alpha_1$

$$= 0,90407 \text{ und } \cos \alpha_2 = 0,5 \text{ ist. Demnach ist } r + \rho \geq m_a, \text{ je nachdem } 25^\circ 18' 6'' \geq \alpha \geq 60^\circ \text{ ist. - Für}$$

$$\beta = 90^\circ \text{ nimmt (1) die Form an (2) } (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + 3 \cos^2 \alpha; \text{ es ist } \sin \alpha = \frac{3}{13} \sqrt{13} \text{ und}$$

$$r + \rho \geq m_a, \text{ je nachdem } \alpha \geq 56^\circ 18' 36'' \text{ ist. -}$$

$$r - \rho \geq m_a \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{5} - 1).^* -$$

$$5. \quad r + \rho > \rho_a \cdot 0,25.^{**}$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho = \rho_a \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } \rho_a \text{ ein Minimum,}$$

wenn $\beta = \gamma$ und

$$(2) \quad 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \gamma (\sin \gamma - \sin 2\gamma) = (2 \cos \gamma - \cos 2\gamma) \cdot \sin \frac{3}{2} \gamma \text{ ist; die}$$

Gleichung (2) liefert neben imaginären Wurzeln die verwendbare $\sin \frac{\gamma}{2} = 0$; d. h. für

$$\lim \alpha = 180^\circ \text{ nähert sich } r + \rho \text{ seinem Minimum } \frac{1}{4} \rho_a. -$$

* Anmerk. 1. Für $\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$ ist $r - \rho = m_a$, wenn $\cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \cos^2 \alpha + \frac{1}{12} \cos \alpha - \frac{1}{3} = 0$ ist; der einzig reellen Wurzel entspricht α nahe bei $17^\circ 25'$ und ist $r - \rho \geq m_a$, jenachdem $\alpha \leq 17^\circ 25'$. Für $\beta = \gamma$ ist $m_a = h_a$; vergl. darum 2, (4), ff. —

** Anmerk. 2. $\rho < \rho_a$, vergl. Haebler 2, (12); $2\rho \geq \rho_a$; es ist $2\rho = \rho_a$, sobald $2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \cotg \frac{\gamma}{2}$. — Ferner ist $\rho = \rho_a \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$; der Factor v. ρ_a ist symmetrisch in Bezug auf $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$, und besteht für unveränderlich α die symmetrische Nebenbedingung $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$; daher wird für $\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ einen extremen Wert erreichen, und zwar ein Maximum, wenn man berücksichtigt, dass $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ echte Brüche sind. ρ_a ist dann die 4. harmonische Proportionale zu den Entfernungen der Mittelpunkte vom Scheitelpunkte α und ρ , und der Berührungspunkt der beiden Kreise und der Scheitelpunkt α sind die beiden Ähnlichkeitspunkte der Kreise. Ferner ist im gleichschenkeligen Dreieck ($\beta = \gamma$) $2r \geq \rho_a$, sobald $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$ od. $\alpha \leq 76^\circ 20' 43''$ ist, (vergl. § II, 4, (3) und § I, 2, (2) ff.). $\angle \alpha$ ist konstruierbar; denn $\frac{\alpha}{2}$ ist der kleinste Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse r und der kleineren Kathete, welche dem grösseren Abschnitt des stetig getheilten r gleich ist. Ferner ergibt sich für dasselbe Dreieck (1) $a : b : c = \sqrt{5} - 1 : 1 : 1$ und (2) $\rho_b : \rho_a = \sqrt{5} - 1 : 2$, und aus (1) und (2) $\frac{\alpha}{2} : b = \frac{1}{\rho_a} : \frac{1}{\rho_b}$, d. h. halbe Basis und Schenkel verhalten sich zu einander, wie die reciproken Radien ihrer Ankreise. — Eine weitere bemerkenswerte Beziehung ergibt sich für dasselbe Dreieck ausser den in § I, 2. und § II, 4. erörterten aus der oben erwähnten harmonischen Proportion $1 : \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \rho + 2r : 2r$; es ist r

$$= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ oder } r = \rho \frac{\sqrt{5} + 2}{2}, \text{ und } \rho_a = \rho (\sqrt{5} + 2); \text{ der letzte Ausdruck stellt das}$$

Maximum ρ für $\rho_a = \text{const.}$ und $\alpha = 76^\circ 20' 43''$ dar. —

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad r + \rho > \rho_a \cdot 0,5. \quad \text{Unter dieser Voraussetzung ist } \rho_a = h_a \text{ bez. } h_b, \text{ und}$

gelten die Betrachtungen aus 2. Ferner ist

$$r + \rho = \rho_a \cdot \frac{2 \cos \alpha - \cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha}, \text{ und}$$

$$r + \rho \geq \rho_a, \text{ je nachdem } \alpha \leq 60^\circ \text{ ist. —}$$

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho = \rho_a \cdot \frac{2 \cos \gamma - \cos 2\gamma}{2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}, \text{ und}$$

$$r + \rho \geq \rho_a, \text{ je nachdem } \gamma \geq 60^\circ \text{ ist. —}$$

$\alpha = 90^\circ. \quad r + \rho = \rho_a \cdot \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{1 + \sin \gamma + \cos \gamma}, \text{ und der Factor von } \rho_a \text{ ein Maximum,}$

sobald $\sin \gamma = \cos \gamma$ ist; andererseits wird die untere Grenze erreicht für $\lim \gamma = 0^\circ$, bez. $\lim \gamma = 90^\circ$, mithin ist

$$\frac{1}{2} \cdot \rho_a < r + \rho \leq \rho_a \cdot (2 - \sqrt{2}). \quad * \text{ —}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad r + \rho = \rho_a \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ und}$$

$$r + \rho > \frac{1}{2} \cdot \rho_a; \text{ ferner ist } r + \rho \geq \rho_a, \text{ je nachdem } \alpha \leq 60^\circ \text{ ist. —}$$

$$r - \rho > \rho_a \cdot (\sqrt{5} - 2).$$

Es ist

$$(3) \quad r - \rho = \rho_a \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}; \text{ aus den gleichgesetzten ersten}$$

Ableitungen

$$(4) \quad 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \alpha - (2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma)$$

$$\cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \beta$$

$$+ (2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \gamma + (2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma)$$

$$\cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

finden wir als Bedingung dafür, dass der Factor von ρ_a ein Minimum ist

$$(5) \quad \beta = \gamma \text{ und } (1 + \cos \gamma) \cdot (2 \cos^2 \gamma - 1) = \cos \gamma \cdot (1 + 2 \cos^2 \gamma - 2 \cos \gamma).$$

* Anmerk. Dasselbe Ergebniss findet man auch aus einfachen geometrischen Betrachtungen. —

Der allein verwendbaren Wurzel

$$\cos \gamma = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1) \text{ entspricht } \gamma = 36^\circ * \text{ und } r - \rho = \rho_a (\sqrt{5} - 2). -$$

$$\beta = \gamma. \quad r - \rho \geq \rho_a, \text{ jenachdem}$$

$$(6) \quad 2 - \cos \alpha - 2 \cos \beta \geq 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \text{ oder } \cos \beta = \frac{1}{4} \text{ und } \beta \geq 75^\circ 31' 21'' \text{ ist.}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad r - \rho \geq \rho_a, \text{ jenachdem}$$

$$(7) \quad 2 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha \geq 2 \sin^2 \alpha, \text{ oder } \alpha \leq 36^\circ * \text{ ist.} -$$

$\alpha = 90^\circ.$ $r - \rho = \rho_a \cdot \frac{2 - \sin \gamma - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma + \sin \gamma}$ und der Factor von ρ_a ein Minimum für $\sin \gamma = \cos \gamma$; andererseits nähert die Function sich ihrer oberen Grenze für $\lim \gamma = 0$, bez. $\lim \gamma = 90^\circ$, und ist

$$\frac{1}{2} \cdot \rho_a > r - \rho \geq \rho_a \cdot (3\sqrt{2} - 4). -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad r - \rho = \rho_a \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}, \text{ und}$$

$$r - \rho \geq \rho_a, \text{ jenachdem } \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ ist.} -$$

$$6. \quad r + \rho \geq \frac{1}{2} s.$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho = s \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } s \text{ ein Minimum}$$

für endlich r und verschwindend ρ ; (vergl. die Bemerkung in 1.).

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad r + \rho = s \cdot \frac{2 \cos \gamma - \cos 2\gamma}{2 \sin \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}, \text{ und der Factor von } s \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(2) \quad \cos^4 \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} = 0, \text{ oder } \cos \gamma = 0,961858 \text{ ist; mithin ist}$$

$$r + \rho \geq s, \text{ jenachdem } \gamma \leq 15^\circ 52' 32'' \text{ ist.} -$$

$$\alpha = \beta. \quad \text{Es gilt die gleiche Bedingung (2) in } \alpha. -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad r + \rho = s \cdot \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{\sin \gamma + \cos \gamma + 1} \text{ und}$$

$$\frac{1}{2} s < r + \rho \leq s. (2 - \sqrt{2}). ** -$$

* Vergl. 2, (7) und Anmerkung daselbst. -

** Vergl. 5, (2) ff. Im rechtwinkligen Dreieck $\alpha = 90^\circ$ ist also $\rho_a = s$. -

$$r - \rho \geq \frac{1}{9} \sqrt{3} \cdot s.$$

Es ist

$$r - \rho = s \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } s \text{ ein Minimum}$$

für $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.*

$$\alpha = \beta. \quad r - \rho \geq s, \text{ jenachdem } \alpha \leq 13^\circ 50' 59'' \text{ ist, wo } \alpha \text{ aus der Gleichung}$$

$$\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{3}{8} = 0 \text{ gefunden wird.}$$

$$7.** \quad r + \rho > \frac{1}{2} s_a. *$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho = s_a \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad r + \rho = s_a \cdot \frac{2 \cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ ein Minimum, sobald}$$

$$(2) \quad 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = 0, \text{ oder } \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} \text{ ist; } ***$$

mithin ist $r + \rho \geq s_a \cdot 1,37157$. —

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho \geq s_a, \text{ jenachdem}$$

$$(3) \quad \cos^4 \gamma - 2 \cos^3 \gamma + \frac{3}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} \geq 0 \text{ ist. —}$$

$$r - \rho > s_a \cdot \frac{1}{9} \sqrt{15}.$$

Es ist

$$(4) \quad r - \rho = s_a \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}. \text{ Als Bedingung dafür, dass der}$$

Factor von s_a ein Minimum ist, erhalten wir aus den gleichgesetzten ersten Ableitungen

$$(5) \quad \beta = \gamma \text{ und } 2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin 2\gamma + (2 + \cos 2\gamma - 2 \cos \gamma) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ = 2 \sin^2 \gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} - (2 + \cos 2\gamma - 2 \cos \gamma) \cdot \sin \gamma \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

* Vergl. Haebler 2, (18) und (19), und § I, 5, Anmerk. 2. —

** Anmerk. 1. Aus den Bestimmungsgleichungen $\rho = 4r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ und $s_a = 4r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ folgt sofort $\rho = s_a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ und $\rho \geq s_a$, jenachdem $\alpha \geq 90^\circ$ ist. —*** Anmerk. 2. Es ist $s_a = \frac{1}{2} c \operatorname{bez.} \frac{1}{2} b$, vergl. darum 1, (1) ff. —

oder $\cos \gamma = \frac{1}{4}$,* und $\gamma = 75^\circ 31' 21''$. —

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad s_a = \frac{1}{2} c \left(\text{bez. } \frac{1}{2} b \right). \text{ (vergl. 1, und § I, 5. Anmerk. 2). —}$$

$\beta = \gamma$. $r - \rho \geq s_a$, jenachdem $\gamma \leq 49^\circ 49' 12''$ ist, wo γ aus der Gleichung

$$(6) \cos^4 \gamma - 2 \cos^3 \gamma + \cos^2 \gamma + \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} = 0 \text{ gefunden wird. —}$$

$$8. \quad r + \rho \geq \sqrt{F \cdot V^3}$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}, \text{ und der Factor von } \sqrt{F} \text{ ein}$$

Minimum, sobald $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ist. —

$$r - \rho \geq \frac{1}{3} \sqrt{F \cdot V^3}$$

Es ist

$$(2) \quad r - \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{2 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}, \text{ und der Factor von } \sqrt{F} \text{ ein}$$

Minimum für $\alpha = \beta = \gamma$. —

§ VI.

$$1.** \quad r + \rho_a \geq a \cdot 1,43394.$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho_a = a \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \alpha}. \text{ Aus den gleichgesetzten ersten}$$

Ableitungen

$$(2) \quad \cos \alpha \cdot \left(1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \right) - 2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \\ = 2 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

folgt

$$(3) \quad \beta = \gamma \text{ und } \cos^3 \gamma + 2 \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} = 0.$$

Der allein verwendbaren Wurzel $\cos \gamma = 0,4516$ entspricht der Winkel $\gamma = 63^\circ 9' 13''$ und das Minimum des Factors von a . Vergleiche die Anmerkung zu 8, (11). —

* Anmerk. 1. Im gleichschenkligen Dreieck $\beta = \gamma$ und $\cos \gamma = \frac{1}{4}$ ist also die Differenz der Radien des Um- und Inkreises gleich dem Radius des Ankreises ρ_a , und gleichzeitig s_a ein Maximum für $r - \rho = \text{const.}$; vergl. 5, (6).

** Anmerk. 2. Vergl. § II, 4. Anmerk. 2 und § V, 5. Anmerk. 3. —

$$(r - \rho_a) \geq a. *$$

Es ist

$$(4) (r - \rho_a) = a \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \alpha}.$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad (r - \rho_a) = a \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ und}$$

$$r - \rho_a \geq a, \text{ jenachdem } \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (\sqrt{3} - 1) \text{ ist.}^{**} -$$

$\beta = \gamma. \quad (r - \rho_a) = a \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin 2 \gamma},$ und der Factor von a gleich 0 für $\cos \gamma = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1);^*$ da nun für wachsend und abnehmend γ bei constantem a $(r - \rho_a)$ unendlich gross wird, so ist es zweimal gleich a ; die bez. Werte von $\cos \gamma$ erhält man aus

$$(5) \cos^4 \gamma + \frac{2}{5} \cos^3 \gamma - \frac{4}{5} \cos^2 \gamma - \frac{1}{5} \cos \gamma + \frac{1}{20} = 0;^{***} \text{ es ist } \cos \gamma_1 = 0,8056 \text{ und } \cos \gamma_2 = 0,15954, \text{ und}$$

$$(r - \rho_a) \geq a, \text{ jenachdem } 36^\circ 19' 54'' \geq \gamma \geq 80^\circ 49' 11'' \text{ ist.} -$$

$$r + \rho_a > \frac{1}{2} c. ^{****}$$

Es ist

$$(6) r + \rho_a = c \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}, \text{ und der Factor von } c \text{ ein}$$

Minimum für $\beta = \gamma$ und $\lim \alpha = 0$. —

$\alpha = \beta. \quad r + \rho_a = c \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin 2 \alpha},$ und der Factor von c gleich 1, sobald $\sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, oder $\sin \alpha_2 = \frac{1}{10} \sqrt{10}$ ist; mithin ist $r + \rho_a \geq c$, jenachdem $18^\circ 26' 6'' \geq \alpha \geq 45^\circ$ ist. Das Minimum des Factors liegt zwischen diesen Grenzen, und wird sofort gefunden aus der Bedingung

* Anmerk. 1. $r \geq \rho_a$, jenachdem $1 \geq 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ ist. — Für $\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$ ist $r \geq \rho_a$, jenachdem

$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ist. — Für $\beta = \gamma$ ist $r \geq \rho_a$, jenachdem $\cos \gamma \leq \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)$ ist. [vergl. § II, 2, (4):

in diesem Dreieck besteht also die Beziehung $h_a - h_b : r = \rho : \rho_a$]. Für $\alpha = 90^\circ$ ist $\frac{1}{2} \rho_a > r \geq \rho_a$

$(\sqrt{2} - 1); \left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ; r \geq \rho_a$, jenachdem $\sin \alpha \leq \frac{1}{2} \sqrt{2}$, aber $r > \frac{1}{2} \rho_a$.

** Anmerk. 2. $\rho_a - r < \frac{\alpha}{2}$. —

*** Vergl. § V, 1, (2). —

**** Vergl. Haebler 2, (13)

$$(7) \sin^2 2\alpha - (2 - \cos 2\alpha) \cdot \cos 2\alpha = 0 \quad \text{für } \alpha = 30^\circ, \text{ d. h.}$$

$$r + \rho_a \geq c \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

$$\alpha = \gamma. \quad r + \rho_a = c \cdot \frac{1 + 2\sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ und der Factor von } c \text{ ein Minimum für } \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \text{ d. h. } r + \rho_a \geq c \cdot \sqrt{2}.*$$

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho_a = c \cdot \frac{1 + 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma}, \text{ und } r + \rho_a \geq c, \text{ jenachdem}$$

$$(8) \cos^4 \gamma + 2 \cos^3 \gamma + 3 \cos^2 \gamma + \cos \gamma - \frac{3}{4} \geq 0 \text{ ist. —}$$

$$(r - \rho_a) \geq c.$$

Es ist

$$(9) (r - \rho_a) = c \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}.$$

$$\alpha = \beta. \quad (r - \rho_a) = c \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin 2\alpha}, \text{ und der Factor von } c \text{ gleich 1, wenn } \sin \alpha = \frac{1}{10} \sqrt{10(5 \pm 2\sqrt{5})} \text{ ist; mithin ist}$$

$$(r - \rho_a) \geq c, \text{ jenachdem } 13^\circ 16' 57'' \geq \alpha \geq 76^\circ 43' 3'' \text{ ist. —}$$

$$\alpha = \gamma. \quad (r - \rho_a) = c \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ und der Factor von } c \text{ gleich 1, wenn } \sin \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) \text{ ist; mithin ist } r - \rho_a \geq c, \text{ jenachdem } \alpha \leq 21^\circ 28' 15'' \text{ ist.** —}$$

$$\beta = \gamma. \quad (r - \rho_a) = c \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma}, \text{ und } \rho_a - r \geq c, \text{ jenachdem}$$

$$\cos^4 \gamma + 2 \cos^3 \gamma + \cos^2 \gamma - \cos \gamma - \frac{3}{4} \geq 0 \text{ ist. —}$$

$$2. \quad r + \rho_a > \frac{1}{2} h_a.$$

Es ist

$$(1) r + \rho_a = h_a \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}, \text{ und der Factor von } h_a$$

ein Minimum für $\beta = \gamma$ und $\lim \alpha = 0$. —

* Anmerk. 1. Der Verlauf der Function $r + \rho_a$ für $\alpha = \gamma$ und $c = \text{const.}$ im Intervall $\alpha = 90^\circ$ bis $\alpha = 0^\circ$ ist also folgender: von $r + \rho_a = \frac{3}{2} \cdot c$ für $\lim \alpha = 90^\circ$ nimmt der Wert bis zum Minimum $r + \rho_a = c \cdot \sqrt{2}$ für $\alpha = 45^\circ$ ab, nimmt dann für weiter abnehmend α zu und ist für $\lim \alpha = 0^\circ$ unendlich gross. —

** Anmerk. 2. $\rho_a - r < \frac{1}{2} c$, da für $\alpha = \gamma$ $\rho_a = h_b$ ist; vergl. 1. (4) ff. und Anmerk. 2. —

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad r + \rho_a = h_a \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ ein Minimum, sobald}$$

$$\sin^2 2\alpha - (1 + 2 \sin^2 \alpha) \cdot (2 - 3 \sin^2 \alpha) = 0, \text{ oder}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}; \text{ alsdann } r + \rho_a > h_a \cdot \sqrt{2}. -$$

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho_a = h_a \cdot \frac{1 + 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin^2 \gamma}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) \text{ ist; mithin ist } r + \rho_a \geq h_a, \text{ jenachdem } \gamma \leq 72^\circ \text{ ist. -}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad r + \rho_a = h_a \cdot \frac{2 + \sin \gamma + \cos \gamma}{2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ ein Minimum, sobald}$$

$$\sin \gamma = \cos \gamma \text{ ist; mithin ist}$$

$$r + \rho_a \geq h_a (2 + \sqrt{2}). -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad r + \rho_a = h_a \cdot \frac{2 + \sin \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{10} (3 \sqrt{6} - 2) \text{ ist; mithin ist}$$

$$r + \rho_a \geq h_a, \text{ jenachdem } \alpha \geq 32^\circ 20' \text{ ist. -}$$

$$(r - \rho_a) \geq h_a. * -$$

$$r + \rho_a > h_c. * -$$

$$(r - \rho_a) \geq h_c. -$$

Es ist

$$(2) \quad (r - \rho_a) = h_c \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$\alpha = \beta. \quad r - \rho_a \geq h_c, \text{ wenn } \alpha \leq 30^\circ \text{ ist.}$$

$$\alpha = \gamma. \quad (r - \rho_a) = h_c \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}, \text{ und der Factor von } h_c \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(3) \quad \sin^6 \alpha - \frac{3}{4} \sin^4 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{16} = 0, \text{ oder}$$

$$\sin^2 \alpha_1 = 0,177707, \text{ und } \sin^2 \alpha_2 = 0,944615 \text{ ist; mithin ist}$$

$$(r - \rho_a) \geq h_c, \text{ jenachdem } 24^\circ 55' 58'' \leq \alpha \leq 76^\circ 23' 34''^{***} \text{ ist. -}$$

$$\beta = \gamma. \quad (r - \rho_a) = h_c \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot \sin 2\gamma}, \text{ und der Factor von } h_c \text{ gleich 1, wenn}$$

* Anmerk. Vergl. Anmerkung zu § V, 3. Auch hier, sowie in den beiden folgenden Abschnitten sind aus gleichen Erwägungen nur die bemerkenswerteren Ergebnisse mitgeteilt. -

** Vergl. § II, 1, (12). -

$$(4) \cos^3 \gamma - \frac{1}{2} \cos^2 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma + \frac{1}{4} = 0, \text{ bez.}$$

$$(5) \cos^3 \gamma + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{1}{4} = 0, \text{ oder}$$

$$\cos \gamma = 0,160792, \text{ bez. } \cos \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ ist; mithin ist}$$

$$(r - \rho_a) \geq h_c, \text{ jenachdem } 45^\circ \geq \gamma \geq 80^\circ 44' 50''. -$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a - r \geq h_c, \text{ jenachdem } \gamma \geq 45^\circ. -$$

$$\beta = 90^\circ. \quad r - \rho_a \geq h_c, \text{ jenachdem } \sin \alpha \leq \frac{1}{10} \sqrt{10}^* \text{ ist.} -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) \geq h_c, \text{ jenachdem } \alpha_1 \geq A \geq \alpha_2 \text{ ist, wo } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 \text{ den beiden}$$

Wurzeln der Gleichung

$$\sin^4 \alpha - \sin^3 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \sin \alpha - \frac{1}{4} = 0 \text{ entsprechen.}$$

$$3. r + \rho_a > \frac{1}{2} w_a. ** -$$

$$(r - \rho_a) \geq w_a. -$$

$$4. r + \rho_a > \frac{1}{2} m_a.$$

Es ist

$$(1) r + \rho_a = m_a \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}}, \text{ und der Factor von}$$

m_a ein Minimum für $\beta = \gamma$ und $\lim \alpha = 0$.***

$$(r - \rho_a) \geq m_a. **** -$$

* Vergl. 1, (6).

** Vergl. Haebler II, (15) und Anmerk. zu 2, (2) ff.

*** Anmerk. 1. Für $\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$ ist $r + \rho_a = m_a \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - 8 \cos^4 \alpha + 7 \cos^2 \alpha}}$ und der Factor von m_a ein Minimum

für $\cos \alpha = \frac{5}{34} \sqrt{34}$, mithin $r + \rho_a \geq m_a \cdot \frac{2}{9} \sqrt{26}$. — Für $\beta = \gamma$ ist $m_a = h_a$ (vergl. 2, (1) ff.)

**** Anmerk. 2. Für $\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$ ist $(r - \rho_a) \geq m_a$, jenachdem $\pm (1 - \sin^2 \alpha) \geq \sqrt{1 - 8 \cos^4 \alpha + 7 \cos^2 \alpha}$, oder

$\alpha \leq 16^\circ 46' 43''$ ist; $\rho_a - r < m_a$; vergl. § IV, 1, (6). —

$r + \rho_a > m_c$. — Das Minimum findet statt für $\beta = \gamma$ und $\lim \alpha = 0$. —

$$(r - \rho_a) \geq m_c. * —$$

5. $r + \rho_a \geq \rho \cdot (\sqrt{5} + 2).$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho_a = \rho \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}. \quad \text{Aus den gleichgesetzten}$$

ersten Ableitungen erhalten wir als Bedingung dafür, dass der Factor von ρ ein Minimum ist,

$$(2) \quad \beta = \gamma \text{ und } (1 + 2 \cos \gamma + 2 \cos^2 \gamma) \cdot \sin \gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} - \sin 2\gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot (1 + \cos \gamma) \\ = 2 \cos^2 \gamma \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot (1 - \cos \gamma) + \cos \gamma \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot (1 + 2 \cos \gamma + 2 \cos^2 \gamma)$$

und

$$(3) \quad \cos \gamma = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1), \quad \gamma = 72^\circ. —$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad r + \rho_a = \rho \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)}, \text{ und der Factor von } \rho \text{ ein Minimum, wenn}$$

$$(4) \quad 4 \cos^2 \alpha \cdot (1 - \cos \alpha) - (1 + 2 \sin^2 \alpha) \cdot (2 \cos \alpha - 1) = 0, \text{ oder } \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{3}) \text{ und } \alpha = 50^\circ 39' 22'' \text{ ist; alsdann ist}$$

$$r + \rho_a \geq \rho \cdot (3 + \sqrt{3}). —$$

$$(r - \rho_a) \geq \rho.$$

Es ist

$$(5) \quad (r - \rho_a) = \rho \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad (r - \rho_a) = \rho \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)} \text{ und}$$

$$(r - \rho_a) \geq \rho, \text{ jenachdem } 36^\circ \geq \alpha \geq 60^\circ \text{ ist. (vergl. Anmerk. zu § V,$$

1, (4) und § IV, 5, (5).) —

* Anmerk. Für $\alpha = \beta$ ist $m_c = h_c$; für $\alpha = \gamma$ ist $m_c = m_a$; für $\beta = \gamma$ ist $(r - \rho_a) \geq m_c$, jenachdem

$$\gamma \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 42^\circ 29' 21''; \quad r - \rho_a < m_c. —$$

$$\beta = \gamma. \quad (r - \rho_a) = \rho \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \cos \gamma \cdot (1 - \cos \gamma)} \text{ und}$$

$$(r - \rho_a) \geq \rho, \text{ jenachdem } 60^\circ \geq \gamma \geq 75^\circ 31' 21'' * \text{ ist. —}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) = \rho \cdot \pm \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{1 - \sin \gamma - \cos \gamma}, \text{ und der Factor von } \rho \text{ ein Minimum}$$

für $\gamma = 45^\circ$, mithin

$$\rho_a - r \geq \rho (2 + \sqrt{2}). \text{ —}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) = \rho \cdot \pm \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}, \text{ und}$$

$$(r - \rho_a) \geq \rho, \text{ jenachdem } 30^\circ \geq \alpha \geq 60^\circ \text{ ist. —}$$

$$6. \quad r + \rho_a \geq \rho_c.$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho_a = \rho_c \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\alpha = \beta. \quad r + \rho_a = \rho_c \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}, \text{ und der Factor von } \rho_c \text{ gleich 1, wenn}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{4} (\sqrt{13} - 1), \text{ mithin}$$

$$(2) \quad r + \rho_a \geq \rho_c, \text{ jenachdem } \alpha \geq 49^\circ 21' 13''. \text{ —}$$

$$\alpha = \gamma. \quad r + \rho_a > \rho_c; \quad \rho_c = \rho_a. \text{ —}$$

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho_a = \rho_c \cdot \frac{1 + 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin^2 \gamma}, \text{ und}$$

$$(3) \quad r + \rho_a \geq \rho_c, \text{ jenachdem } \cos \gamma \geq \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1), \text{ oder } \gamma \leq 72^\circ \text{ ist. —}$$

$$(r - \rho_a) \geq \rho_c.$$

$$\alpha = \beta. \quad (4) \quad \rho_a - r \geq \rho_c, \text{ jenachdem } \cos \alpha \leq \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) \text{ ist. —}$$

$$\alpha = \gamma. \quad (5) \quad r - \rho_a \geq \rho_c, \text{ jenachdem } \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ ist. —}$$

$$\beta = \gamma. \quad (6) \quad \rho_a - r \geq \rho_c, \text{ jenachdem } \cos \gamma \leq \frac{1}{4} (\sqrt{13} - 1) \text{ ist. Es folgen (4) und}$$

(6) aus (2) und (3) durch Vertauschung von ρ_a und ρ_c . —

* Anmerk. Das Resultat ist auch aus § V, 5, (5) abzuleiten.

$$7. \quad r + \rho_a > \frac{1}{2} s. *$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho_a = s \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}, \quad \text{und der Factor von } s \text{ ein}$$

Minimum für $\beta = \gamma$ und $\lim \alpha = 0^\circ$. —

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad (2) \quad r + \rho_a = s \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}, \quad \text{und der Factor von } s \text{ ein Minimum, wenn}$$

$$(3) \quad 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha) - (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot (\cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha) = 0 \text{ oder}$$

$$(4) \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{7} - 1), \quad \text{und } \alpha = 34^\circ 37' 35'' \text{ ist; mithin ist}$$

$$r + \rho_a \geq s \cdot \frac{1}{9} \cdot \sqrt{6(7\sqrt{7} - 10)}. ** -$$

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho_a = s \cdot \frac{1 + 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}, \quad \text{und der Factor von } s \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(5) \quad \cos^4 \gamma + 2 \cos^3 \gamma + \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} = 0, \quad \text{oder } \cos \gamma = 0,523731 \text{ ist,}$$

und ist $r + \rho_a \geq s$, jenachdem $\gamma \leq 58^\circ 25' 2''$. —

$$\alpha = 90^\circ. \quad (6) \quad r + \rho_a = s \cdot \frac{1 + 2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}, *** \quad \text{und der Factor von } s \text{ ein}$$

Minimum für $\beta = \gamma$, ein Maximum für $\lim \beta = 0^\circ$ (bez. $\lim \gamma = 0^\circ$), mithin

$$\frac{3}{2} s > r + \rho_a \geq s \cdot \sqrt{2}. -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ \quad (7) \quad r + \rho_a = s \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha + 2}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}, \quad \text{und}$$

* Anmerk. 1. $r \geq \frac{2}{9} \sqrt{3} \cdot s$; (vergl. Haebler II, (18)). — Aus den Bedingungen $\rho_a = 4r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ und $s = 4r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ folgt $\rho_a : s = \tan \frac{\alpha}{2}$, mithin $\rho_a \geq s$, jenachdem $\alpha \geq 90^\circ$ ist. —

** Anmerk. 2. Da für $\alpha = \beta$ und $\lim \gamma = 0^\circ$ (bez. $\lim \gamma = 180^\circ$) $r + \rho_a = \frac{3}{2} s$ (bez. $= \infty$) wird, so ist

$r + \rho_a$ zweimal $= s$; die Winkelwerte erhält man aus $\sin^4 \alpha - \sin^3 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{8} = 0$. —

*** Vergl. Haebler I, 1.

$r + \rho_a \geq s$, jenachdem $\alpha \geq 60^\circ$; auch folgt sofort $\frac{3}{2}s > r + \rho_a > \frac{1}{2}s$.

$$(r - \rho_a) \geq s.$$

Es ist

$$(8) (r - \rho_a) = s \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$, wenn $(r - \rho_a) = s \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}$, und der Factor von s gleich 1,

$$(9) \sin^4 \alpha + \sin^3 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{8} = 0 \text{ ist.}$$

$\beta = \gamma$. $(r - \rho_a) = s \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}$, und der Factor von s gleich 1, wenn

$$(10) \cos^4 \gamma + 2 \cos^3 \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} = 0 \text{ ist.}$$

$\alpha = 90^\circ$. $(r - \rho_a) = s \cdot \mp \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{1 + \sin \gamma + \cos \gamma}$, und der Factor von s ein Maximum für $\sin \gamma = \cos \gamma$, mithin

$$(11) \frac{1}{2}s < \rho_a - r \leq s \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ$. $(r - \rho_a) = s \cdot \pm \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$, und

$$\rho_a - r < \frac{1}{2}s.$$

8. $r + \rho_a > \frac{1}{2}s_a$. *

Es ist

$$(1) r + \rho_a = s_a \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$. $r + \rho_a = s_a \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2 \alpha}$, und der Factor von s_a ein Minimum, sobald

$$(2) \sin^2 2 \alpha - \cos 2 \alpha \cdot (1 + 2 \sin^2 \alpha) = 0, \text{ und } \sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ ist; alsdann ist}$$

$$r + \rho_a \geq s_a \cdot \sqrt{3}.$$

$\beta = \gamma$. $r + \rho_a = s_a \cdot \frac{1 + 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot (1 - \cos \gamma)}$, und der Factor von s_a gleich 1, wenn

* Vergl. 7. (1), und § I, 5, Anmerk. 2. —

$$(3) \cos^4 \gamma + \cos^2 \gamma + \frac{3}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} = 0, \text{ oder } \cos \gamma = 0,217089 \text{ ist; mithin}$$

$$r + \rho_a \geq s_a, \text{ jenachdem } \gamma \leq 77^\circ 27' 48''. -$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad r + \rho_a = s_a \cdot \frac{\sin \gamma + \cos \gamma + 2}{\sin \gamma + \cos \gamma - 1}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ ein Minimum,}$$

wenn $\sin \gamma - \cos \gamma = 0$ ist; alsdann ist

$$r + \rho_a \geq s_a \cdot (4 + 3\sqrt{2}). -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (4) \quad r + \rho_a = s_a \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha + 2}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1,}$$

wenn $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$; mithin ist

$$r + \rho_a \geq s_a, \text{ jenachdem } \alpha \geq 24^\circ 17' 43'' \text{ ist; vergl. § II, 1, (13), sowie}$$

unten (9) und (15). -

$$(r - \rho_a) \geq s_a.$$

Es ist

$$(5) \quad (r - \rho_a) = s_a \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}. -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad (r - \rho_a) = s_a \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(6) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \text{ ist; es ist also}$$

$$(r - \rho_a) \geq s_a, \text{ jenachdem } 22^\circ 30' \geq \alpha \geq 67^\circ 30' \text{ ist. -}$$

$$\beta = \gamma. \quad (r - \rho_a) = s_a \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot (1 - \cos \gamma)}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1,}$$

wenn

$$(7) \quad \cos^4 \gamma + \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{3}{8} = 0, \text{ oder } \cos \gamma = 0,557189 \text{ ist; mithin ist}$$

$$\rho_a - r \geq s_a, \text{ jenachdem } \gamma \leq 56^\circ 8' 18'' \text{ ist. -}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) = s_a \cdot \pm \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{1 - \sin \gamma - \cos \gamma}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ ein Minimum}$$

für $\sin \gamma - \cos \gamma = 0$; mithin ist

$$(8) \quad \rho_a - r \geq s_a \cdot (2 + \sqrt{2}). -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) = s_a \cdot \pm \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1,}$$

$$\text{wenn } \sin \alpha = \frac{1}{4} (\sqrt{7} + 1) \text{ ist; mithin}$$

(9) $\rho_a - r \geq s_a$, jenachdem $\alpha \geq 65^\circ 42' 17''$ ist; vergl. § II, 1, (13), sowie oben (4). —

$$r + \rho_a > \frac{3}{2} s_c.$$

Es ist

$$(10) \quad r + \rho_a = s_c \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}} \quad \text{und der Factor von } s_c \text{ ein Minimum für } \alpha = \beta \text{ und } \lim \gamma = 0.$$

$$\alpha = \gamma. \quad s_c = s_a. \quad (\text{vergl. (2)}). \quad -$$

$$\beta = \gamma. \quad r + \rho_a = s_c \cdot \frac{1 + 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma}, \quad \text{und der Factor von } s_c \text{ ein Minimum, wenn}$$

$$(11) \quad \cos^3 \gamma + 2 \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{und } \gamma = 63^\circ 9' 13''^* \text{ ist; mithin ist}$$

$$r + \rho_a \geq s_c \cdot 2,86788. \quad -$$

$$(r - \rho_a) \geq s_c.$$

Es ist

$$(12) \quad (r - \rho_a) = s_c \cdot \pm \frac{1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\alpha = \beta. \quad (r - \rho_a) = s_c \cdot \pm \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)}, \quad \text{und}$$

$(r - \rho_a) \geq s_c$, jenachdem $\alpha_1 \geq A \geq \alpha_2$ ist, wo α_1 und α_2 aus der Gleichung

$$(13) \quad \cos^4 \alpha - \cos^3 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{3}{8} = 0 \text{ gefunden werden.}$$

$$\alpha = \gamma. \quad s_c = s_a. \quad -$$

$$\beta = \gamma. \quad (r - \rho_a) = s_c \cdot \pm \frac{1 - 2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma}, \quad \text{und}$$

$$(r - \rho_a) \geq s_c, \text{ jenachdem } \gamma_1 \geq C \geq \gamma_2 \text{ ist, wo } \gamma_1 \text{ und } \gamma_2 \text{ aus der}$$

Gleichung

$$(14) \quad \cos^4 \gamma - \cos^3 \gamma - \frac{1}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma + \frac{1}{8} = 0 \text{ gefunden werden.}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) = s_c \cdot \pm \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{\sin \gamma - \cos \gamma - 1}, \quad \text{und}$$

* Anmerk. Vergl. I, (13). Im Dreieck $\beta = \gamma$ verhält sich $a : s_c = 2 : 1$; vergl. auch § I, 5, Anmerk. 2.

$$\rho_a - r \geq s_c, \text{ je nachdem } \sin \gamma \geq \frac{1}{2} \text{ ist. —}$$

$$\beta = 90^\circ \quad (15) \quad r - \rho_a \geq s_c, \text{ je nachdem } \sin \alpha \leq \frac{1}{4} (\sqrt{7} - 1) \text{ ist. —}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (r - \rho_a) = s_c \cdot \pm \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}, \text{ und}$$

$$(r - \rho_a) \geq s_c, \text{ je nachdem } 60^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ \text{ ist. —}$$

$$9. \quad r + \rho_a > \sqrt{F} \cdot 1,70012.$$

Es ist

$$(1) \quad r + \rho_a = \sqrt{F} \cdot \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2} \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}. \quad \text{Aus den gleichgesetzten ersten}$$

Ableitungen des Factors von $\sqrt{F}$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ & \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + \left(1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \right. \\ & \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \left. \right) \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ & + \left(1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \right) \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma \end{aligned} \right.$$

erhalten wir als Bedingung dafür, dass derselbe ein Minimum ist

$$(3) \quad \beta = \gamma \text{ und } \cos^3 \gamma + \frac{5}{2} \cos^2 \gamma + \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{1}{4} = 0; \text{ der allein ver-}$$

wendbaren Wurzel $\cos \gamma = 0,22475$ entspricht $\gamma = 77^\circ 0' 43''$ und das Minimum von $r + \rho_a$. —

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha \quad r + \rho_a = \sqrt{F} \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \sqrt{2} \sin 2\alpha}, \text{ und der Factor von } \sqrt{F} \text{ ein Mini-}$
 mum, wenn $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ist; alsdann ist

$$r + \rho_a \geq 2 \cdot \sqrt{F}. \quad -$$

$$(r - \rho_a) \geq \sqrt{F}. \quad -$$

§ VII.

$$1. \quad \rho_a + \rho \geq a.$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho = a \cdot \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad -$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad \rho_a + \rho = a \cdot \frac{\sin \frac{3}{2} \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ und der Factor von } a \text{ gleich } 1, \text{ wenn } \sin \alpha = 1,$$

bez. $= \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ist; mithin ist $\rho_a + \rho \geq a$, jenachdem $90^\circ \geq \alpha \geq 45^\circ$ ist. Das Maximum von $\rho_a + \rho$ liegt also im Intervall $\alpha = 90^\circ$ bis $\alpha = 45^\circ$, und wird gefunden aus der Gleichung

$$(2) \cos^4 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{8} = 0, \text{ und deren Wurzel } \cos^* \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{3} + 1}.$$

Es ist $\alpha = 68^\circ 31' 45''$, und $\rho_a + \rho < a \cdot \sqrt{3(2\sqrt{3} - 3)}$. —

$$\begin{aligned} \beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho &> a^{**}. \\ \alpha = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho &= a \cdot (\sin \gamma + \cos \gamma), \text{ mithin} \\ a \cdot \sqrt{2} &\geq \rho_a + \rho > a. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = a \text{ (also konstant).}$$

$$\rho_a - \rho \geq a.$$

Est ist

$$(3) \rho_a - \rho = a \cdot \frac{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ mithin die Function allein von } \alpha$$

abhängig, und allgemein

$$\rho_a - \rho \geq a, \text{ sobald } \alpha \geq 90^\circ \text{ ist.}$$

$$\rho_a + \rho \geq c.$$

Es ist

$$(4) \rho_a + \rho = c \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \gamma}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho = c \cdot \frac{\sin \frac{3}{2} \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha}, \text{ und der Factor von } c \text{ gleich } 1, \text{ wenn}$$

* Anmerk. 1. Das ausgezeichnete Dreieck $\alpha = \gamma$ und $\cos \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ besitzt ausserdem die bemerkenswerte Eigenschaft, dass in ihm $hb - ha = \rho$, bez. $\rho_a - \rho = ha$ ist, (vergl. § II, 2, (4) und § VII, 2, (2)); ferner ist für $F = \text{const.}$ $\rho_a + \rho$ ein Minimum, (vergl. § VIII, 2, (2)). —

** Anmerk. 2. Der Beweis erfolgt auch leicht geometrisch: da $\rho_a + \rho$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Höhe $\frac{\alpha}{2}$ im gemeinsamen Punkte von $\rho_a + \rho$ ist, so ist $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \rho_a \cdot \rho$; nun ist (§ V, 5, Anm. 3) $\rho_a > \rho$; folglich $a < \rho_a + \rho$, da von gleichen Vierecken das Quadrat das Minimum des Umfanges besitzt. —

$$(5) \cos^3 \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{3}{8} \cos \alpha - \frac{1}{8} = 0, \text{ und } \cos \alpha = 0,562285 \text{ ist; mithin}$$

ist $\rho_a + \rho \geq c$, jenachdem $\alpha \geq 55^\circ 47' 10''$ ist. —

$$\alpha = \gamma. \quad c = a \text{ (vergl. (1).) —}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho = c \cdot 2 \cotg \gamma. —$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = c \cdot (1 + \cotg \gamma), \text{ d. h. } \rho_a + \rho > c. —$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = c \cdot \cotg \gamma. —$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = c \cdot \sin \alpha, \text{ mithin } \rho_a + \rho < c. —$$

$$\rho_a - \rho \geq c.$$

Es ist

$$(6) \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin 2\alpha}, \text{ und der Factor von } c \text{ gleich } 1, \text{ wenn}$$

$$(7) \sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin \alpha - 1 = 0, \text{ und } \sin \alpha = 0,9376 \text{ ist; alsdann ist}$$

$$\rho_a - \rho \geq c, \text{ jenachdem } \alpha \geq 69^\circ 39' 8'' \text{ ist. —}$$

$$\alpha = \gamma. \quad c = a, \text{ (vergl. (3)), mithin } \rho_a - \rho < c. —$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1 + \cos 2\gamma}{\sin \gamma}, \text{ und } \rho_a - \rho \geq c, \text{ jenachdem } \sin \gamma \leq \frac{1}{4} (\sqrt{17} - 1),$$

oder $\gamma \leq 51^\circ 20' 6''$ ist. —

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \operatorname{cosec} \gamma, \text{ mithin } \rho_a - \rho > c. —$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}, \text{ und } \rho_a - \rho \geq c, \text{ jenachdem } \cos \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ ist. —}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho < c, \text{ nämlich } = c(1 - \cos \alpha). —$$

$$2. \quad \rho_a + \rho \geq h_a.$$

Es ist

$$(1) \rho_a + \rho = h_a \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad \rho_a + \rho = h_a \cdot \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}, \text{ und}$$

$$\rho_a + \rho \geq h_a, \text{ jenachdem } \cos \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2}^* \text{ ist. —}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho = h_a \cdot \frac{2 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}, \text{ und } \rho_a + \rho \geq h_a, \text{ jenachdem } \cos \gamma \geq \sqrt{2} - 1 \text{ ist. —}$$

* Anmerk. $\rho_a + \rho > \frac{3}{4} h_a$ für $\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$; das Minimum wird erreicht für $\lim \alpha = 0$. —

$$(5) \cos^3 \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{8} = 0 \text{ und } \cos \alpha = 0,562285 \text{ ist; mithin}$$

ist $\rho_a + \rho \geq c$, jenachdem $\alpha \geq$

$$\alpha = \gamma. \quad c = a \text{ (vergl. (1).)}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho = c \cdot 2 \cot$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = c \cdot (1$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = c \cdot \cot$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = c \cdot \sin$$

$$\rho_a - \rho \geq c.$$

$$(6) \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1}{\sin}$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1}{\sin}$$

$$(7) \sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\rho_a - \rho \geq c$$

$$\alpha = \gamma. \quad c = a, \text{ (vergl. (3))}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1}{\sin}$$

oder $\gamma \geq 51^\circ 20' 6''$ ist. —

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \cot$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho = c \cdot \frac{1}{\sin}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho < c, \text{ n}$$

$$2. \quad \rho_a + \rho \geq h_a.$$

$$(1) \rho_a + \rho = h_a$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad \rho_a + \rho = h_a$$

$$\rho_a + \rho \geq h_a$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho = h_a$$

* Anmerk. $\rho_a + \rho > \frac{3}{4} h_a$ für $\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$



1, wenn

,9376 ist; alsdann ist

$$\sin \gamma \leq \frac{1}{4} (\sqrt{17} - 1),$$

$$\cos \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ ist. —}$$

$$\cos \gamma \geq \sqrt{2} - 1 \text{ ist. —}$$

The Tiffen Company, 2007