

BEITRÄGE

zur

Determination der Elemente des Dreiecks

von

Wilhelm Algenstaedt,
Gymnasiallehrer.

I. Teil.



DOBERAN.

Druck von Herm. Rehse & Co.

1894.

1894. Progr. Nr. 650.

9d0
1 C 1894)



6506



BEITRÄGE

Determination der Elemente des Dreiecks

Wilhelm Algensteden

1. Auflage



DORRAN

1894



In der nachfolgenden Arbeit habe ich mich auf ein Gebiet begeben, welches im geometrischen Pensum des Gymnasiums einen bescheidenen Platz inne hat, und diesen aus praktischen Gründen auch behalten wird, — auf das Gebiet der Determination der Elemente geradliniger Figuren. Eine erschöpfende Behandlung jeder im Unterricht gestellten Aufgabe nach dieser Richtung hin verbietet sich von selber; aber auch eine mässige Inanspruchnahme der karg bemessenen Zeit hierfür dürfte angesichts des zu bewältigenden Stoffes nur auf Kosten des Gesamtpensums statt haben können. Trotzdem ist es notwendig, dass der Lehrende der Bedingungen der Lösbarkeit sich bewusst ist, und bei passend erscheinender Gelegenheit, in besonders dankbaren Fällen, dem Schüler die vollständige Discussion der Aufgabe vermittelt. Ohne Zweifel ist namentlich für die numerische Auflösung des Dreiecks die apriorische Bestimmung der Möglichkeit derselben von Wert. Erscheint es auch nicht unangebracht, den Schüler zuweilen in imaginären Ergebnissen sich festrennen zu lassen, um dann desto überzeugender die Notwendigkeit der Determination darzuthun, so würde auch hier ein Zuviel vom Uebel sein und den Lernenden misstrauisch gegen die Wissenschaft machen; ist es doch schon an sich empfehlenswert, wenn möglich, jedes Problem so zu fassen, dass ein rundes Facit herauskommt.

Die Untersuchungen von Reidt,^{*)} Lange,^{**)} Haebler^{***)} und anderen weisen neue Wege in die recht spröde Materie der Determination. Besonders Haebler hat neben Aufstellung allgemeiner Gesichtspunkte für die Determination geometrischer und algebraischer Aufgaben im Abschnitt II, 2 eine erschöpfende Behandlung des wechselseitigen Schwankungsbereiches zweier Bestandteile eines Dreiecks gegeben. Für vorliegende Arbeit sind dadurch eine Reihe von früheren Untersuchungen für erneute Mitteilung wertlos geworden; trotzdem verdanke ich der letztgenannten Arbeit, sowie den dankbarst entgegengenommenen brieflichen Mitteilungen des Verfassers willkommene Anregung.

Ich habe im Folgenden versucht, die additiven Kombinationen zweier gleichartige Elemente des Dreiecks auf ihr Quantitätsverhältniss zu eben diesen Elementen zu untersuchen. Unter Elementen des Dreiecks ABC sollen die Seiten (a, b, c), die Höhen (h_a, h_b, h_c), die Winkelhalbierenden (w_a, w_b, w_c), die Schwerlinien (m_a, m_b, m_c), die Radien des Um- und Inkreises (r, ρ), die Radien der Ankreise (ρ_a, ρ_b, ρ_c), die Symbole des Umfanges ($s, s_a = s - a, s_b = s - b, s_c = s - c$), die Fläche (F) verstanden sein. Es sei hier gleich bemerkt, dass die zur Vergleichung herangezogenen Elemente der ersten 4 Kategorien wegen häufig eintretender Indifferenz oder Identität so wenig bemerkenswerte Ergebnisse boten,

^{*)} Jahresbericht, Hamm 1873.

^{**)} Archiv der Math. und Phys. 1885.

^{***)} Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule, Grimma 1887—1888.

dass ich auf die Mitteilung derselben verzichten konnte. Die Arbeit beschränkt sich daher auf die Heranziehung der letzten Kategorien zur Vergleichung, sowie auf die Beziehungen ihrer additiven Kombinationen zu allen Elementen.

Was den Gang der angestellten Untersuchungen betrifft, so ist die zur Vergleichung herangezogene Grösse durchweg als konstant angesehen worden. Nach Aufstellung der allgemeinen Bestimmungsgleichung

$$(1) f = c. \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

— wo für alle in Berücksichtigung kommenden Werte der Variablen f und φ endlich, stetig, eindeutig, reell, und für $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ die Nebenbedingung $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, mithin $\alpha < 180^\circ - \gamma$ vorausgesetzt sein sollen — wurde $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ auf extreme Werte — sobald einfachere Methoden*) nicht zulässig waren — mittelst Differentialrechnung untersucht. Bedeutend erleichtert wurden die umfangreichen Rechnungen oft dadurch, dass aus der Aufgabe ohne Weiteres erkenntlich war, dass in dem betrachteten Gebiet nur ein Maximum oder ein Minimum bestehen konnte. Die Vorzeichenbestimmung der vollständigen Aenderung der Function in der Umgebung der aufgefundenen singulären Punkte durfte daher meist vernachlässigt werden.

In Berücksichtigung der Bedingungsgleichung $\beta = 180 - \alpha - \gamma$ oder $\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ist im allgemeinen β als abhändige Variable in φ angesehen worden. Für extreme Werte bestehen dann die Gleichungen

$$(2) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = 0, \text{ oder,}$$

da β als Function von α und γ in φ enthalten ist,

$$(3) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0 \text{ und } (4) \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} = 0;$$

die partielle Differentiation der Bedingungsgleichung $\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ liefert

$$(5) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0 \text{ und } (6) \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} = 0;$$

eliminiert man $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ aus (3) und (5), und $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}$ aus (4) und (6), so folgt

$$(7) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0, \text{ und } (8) \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = 0;$$

aus (7) und (8) und aus $\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ergeben sich dann α , β und γ^{**} . —

*) Wenn $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ symmetrisch war, wurden die Betrachtungen von Haebler a. a. O. I, 1 verwertet; zuweilen ergab die Schellbach'sche Methode sofort das gewünschte Resultat; in § VII und VIII gestattete die Form der Bestimmungsgleichung $f = c. \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ sehr oft direct die Aufstellung der extremen Werte.

**) Es empfahl sich, zwecks Raumersparniss den Gang der Einzelunternehmungen durch Angabe der entscheidenden Beziehungen nur anzudeuten. Auch ist (in § II, 4 und a. a. O. O.) von der oben gegebenen Theorie zu Gunsten der Rechnung dahin abgewichen worden, dass die Variablen in φ zunächst alle als unabhängig angesehen wurden, und darauf erst die Bedingungsgleichung $\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ berücksichtigt wurde, was unter gewissen Vorsichtsmassregeln gestattet ist. — Sollte endlich unter den zahlreichen und oft ermüdenden Rechnungen ein Irrtum mit untergelaufen sein, so bitte ich meinen Kritiker, mir die dem ausübenden Schulmanne und gleichzeitigen Autor zukommenden mildernden Umstände zubilligen zu wollen. —

Wenn für $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ extreme Werte nicht vorhanden waren, — was dann durch das Zeichen $\geq$ ausgedrückt ist, — ist die Untersuchung auf das gleichschenkelige, und, wo es lohnend erschien, auch auf das rechtwinkelige Dreieck ausgedehnt worden, d. h. zu der Bedingungsgleichung $\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ trat eine zweite $\chi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; durch Elimination der abhängigen Variablen ist dann jedesmal $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ dergestalt umgewandelt worden, dass nur eine unabhängige Variable darin enthalten war.

Um endlich den Verlauf der Function f im vorgeschriebenen Gebiet übersichtlicher zu machen, ist durchweg die Bedingungsgleichung für $f \geq c$ aufgestellt und gelöst worden. Die Anmerkungen zu § I, 3 und 5, § IV, 4, § VI, 1 und andere geben Aufschluss über den Gang dieser Untersuchungen und deren Ergebnisse. —

§ I.

$$1. \ a + b \geq r \ (2r, 3r), \text{ je nachdem } \sin \alpha + \sin \beta \geq \frac{1}{2} \left(1, \frac{3}{2}\right);$$

* aber $a + b < 4r$. Es ist

$$a + b = 2r (\sin \alpha + \sin \beta) \text{ und der Factor von } 2r < 2. —$$

$$a - b \geq r, \text{ je nachdem } \sin \alpha - \sin \beta \geq \frac{1}{2}; \text{ aber}$$

$$a - b < 2r, \text{ da } \sin \alpha - \sin \beta < 1 \text{ ist. —}$$

$$2. \ * \ a + b > \rho. \text{ Denn}$$

$$(1) \ a + b = \rho \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + 2 \cotg \frac{\gamma}{2} \right), \quad \text{und}$$

der Factor von ρ ein Minimum für

$$(2) \ \alpha = \beta \text{ und } \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1), \text{ mithin}$$

$$\text{für } \gamma = 76^\circ 20' 43''; \quad \text{alsdann erreicht}$$

für $\rho = \text{const.}$ $a + b$ seine untere Grenze und ist

$$(3) \ a + b \geq \rho \cdot \sqrt{2(5\sqrt{5} + 11)}. —$$

$$** \ (a - b) \geq \rho. \quad \text{Denn}$$

$$(4) \ (a - b) = \rho \cdot \pm \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}. —$$

*) Vergl. Haebler, Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule zu Grimma. 1887—1888, II, 2, (22) u. (23).

** Anmerk. Es soll hier, wie im folgenden, die Klammer die Deutung haben, dass der absolute Wert der Klammergrösse in Rechnung zu ziehen ist. Ebenso sollen die Doppelvorzeichen die Bedingungen für $a - b$ und $b - a$ angeben.

$$\alpha = \beta. \quad a - b = 0. \quad -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (a - b) \geq \rho, \text{ sobald } 49^\circ 28' 54'' \geq \left. \begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \right\} \geq 68^\circ 2' 57'' \text{ ist.}$$

Denn der Factor von ρ in (4) ist gleich 1, wenn

$$(5) \quad \operatorname{tg}^3 \gamma \mp 2 \operatorname{tg}^2 \gamma - 2 \operatorname{tg} \gamma \pm 2 = 0 \quad \text{und}$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \gamma = 1,17009, \text{ bez. } = 2,48120 \text{ ist.}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (a - b) \geq \rho, \text{ jenachdem}$$

$$(7) \quad 1 - \sin \beta \geq \sin \frac{\beta}{2}, \quad \left(\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \right), \text{ und}$$

$$(8) \quad \sin \beta \leq \frac{4}{5} \text{ ist.} \quad - \quad \text{Für } \beta = 90^\circ \text{ ist}$$

in (7) und (8) an Stelle von β α zu setzen. —

$$\gamma = 90^\circ. \quad (a - b) \geq \rho, \text{ jenachdem}$$

$$(9) \quad \frac{3}{5} \geq \sin \alpha \geq \frac{4}{5} \text{ ist.} \quad -$$

$$3. \quad a + b \geq \rho_a$$

$$\text{Es ist} \quad (1) \quad a + b = \rho_a \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). \quad -$$

$$\alpha = \beta. \quad a + b = \rho_a \cdot 2 \operatorname{cosec} \alpha, \text{ mithin } a + b > 2 \cdot \rho_a. \quad -$$

$$\alpha = \gamma. \quad a + b = \rho_a \cdot \frac{3 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \cotg \frac{\alpha}{2}}, \text{ mithin } a + b > \rho_a. \quad -$$

$$\beta = \gamma. \quad a + b = \rho_a \cdot \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}, \text{ und}$$

$$a + b \geq \rho_a, \text{ jenachdem } \gamma \geq 34^\circ 33' 44'' \text{ ist; der Factor von } \rho_a \text{ ist gleich 1, sobald}$$

$$(2) \quad \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + 1 = 0 \text{ ist.} \quad -$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad a + b = \rho_a \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right); \text{ es ergibt sich sofort die doppelte Ungleichheit}$$

$$\rho_a < a + b < 2 \cdot \rho_a. \quad -$$

$$\beta = 90^\circ. \quad a + b = \rho_a \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + 1 \right), \text{ mithin}$$

$$a + b > 2 \cdot \rho_a. \quad -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad a + b = \rho_a \cdot \frac{\cotg^2 \frac{\beta}{2} + 2 \cotg \frac{\beta}{2} - 1}{\cotg^2 \frac{\beta}{2} - \cotg \frac{\beta}{2}}, \text{ und } a + b > \rho_a. * -$$

$$(a - b) \geq \rho_a. \quad \text{Es ist}$$

$$(3) (a - b) = \rho_a \cdot \pm \tg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(1 - \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \frac{\beta}{2}\right). -$$

$$\alpha = \beta. \quad a - b = 0. -$$

$$\alpha = \gamma. \quad (a - b) = \rho_a \cdot \pm \left(\tg \frac{\alpha}{2} - \cotg \alpha\right), \text{ und der Factor von } \rho_a \text{ gleich 1, sobald}$$

$$(4) 3 \tg^2 \frac{\alpha}{2} \mp 2 \tg \frac{\alpha}{2} - 1 = 0, \text{ mithin } \tg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ist. -}$$

Aus (4) folgt, dass $a - b < \rho_a$, und $b - a \geq \rho_a$ ist, jenachdem

$$\tg \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{3} \text{ oder } \alpha \leq 36^\circ 52' 12'' \text{ ist. Im Uebrigen vergleiche 2. Anmerk.}$$

$$\beta = \gamma. \quad (a - b) = \rho_a \cdot \pm \tg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(1 - \tg \gamma \cdot \tg \frac{\gamma}{2}\right), \text{ u. der Factor von } \rho_a = 1, \text{ jenachdem}$$

$$(5) 3 \tg^3 \frac{\gamma}{2} \mp \tg^2 \frac{\gamma}{2} - \tg \frac{\gamma}{2} \pm 1 = 0 \text{ ist. Da f\"ur } \lim \alpha = 0 \text{ und } \lim \alpha = 180^\circ$$

$(a - b)$ unendlich gr\"osser, bez. unendlich kleiner ρ_a ist, so liefern die Gleichungen (5)

2 Werte f\"ur $\tg \frac{\gamma}{2}$, f\"ur welche der Factor von ρ_a gleich 1 ist. -

$$\alpha = 90^\circ. \quad (a - b) = \rho_a \cdot \pm \frac{2 \tg^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \tg \frac{\gamma}{2}}; \text{ mithin}$$

$$a - b < \rho_a. -$$

$$\beta = 90^\circ. \quad (a - b) = \rho_a \cdot \frac{+2}{\cotg^2 \frac{\gamma}{2} - \cotg \frac{\gamma}{2}}; \text{ mithin ist}$$

$$b - a \geq \rho_a, \text{ jenachdem } \cotg \frac{\gamma}{2} \leq 2 \text{ oder } \gamma \geq 53^\circ 7' 48'' \text{ ist. -}$$

*) Um allgemein festzustellen, in welchem Schwankungsbereich der Winkel α und β der Factor von ρ_a in der Gleichung $a + b = \rho_a \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2} \right)$ gleich 1 sein kann, beachte man, dass α und β gleichzeitig ihre gr\"ossten Werte f\"ur $\lim \gamma = 0$ erreichen. Setzen wir dann $\alpha = 90 + 2x$, $\beta = 90 - 2x$, wo $x < 45^\circ$, so nimmt der Factor von ρ_a die Form an

$\cotg (45 - x) + \tg (45 - x)$ und ist = 1. Es ergibt sich $x = 18^\circ 26' 5''$ und die doppelte Ungleichheit

$$\begin{aligned} 126^\circ 52' 11'' &> \alpha > 90^\circ \\ 53^\circ 7' 49'' &> \beta > 0^\circ \end{aligned}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (a - b) = \rho_a \cdot \pm \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right), \text{ und}$$

$$b - a \geq \rho_a, \text{ je nachdem } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{4} (\sqrt{17} - 3) \text{ oder } \alpha \leq 31^\circ 22' 2'' \text{ ist.}$$

$$a + b \geq \rho_c. \quad \text{Es ist}$$

$$a + b = \rho_c \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). -$$

$$(a - b) \geq \rho_c. \quad \text{Es ist}$$

$$(a - b) = \rho_c \cdot \pm \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). * -$$

$a \pm b \geq \rho_c$ gestatten analoge Betrachtungen, wie die Vergleichung von $a \pm b$ und ρ_a .

$$4. \quad a + b > s. ** - \quad a + b < 2s. -$$

$$(a - b) < s. -$$

$$5. \quad a + b > s_a. ** -$$

$$a + b > 2s_c. -$$

$$(a - b) \geq s_a. \quad \text{Es ist}$$

$$(1) \quad (a - b) = s_a \cdot \pm \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} - 1 \right). -$$

$$\alpha = \beta. \quad a - b = 0. -$$

$$\alpha = \gamma. \quad a - b = s_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha - 1 \right), \text{ und}$$

$$a - b \geq s_a, \text{ je nachdem } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2}, \text{ oder } \alpha \geq 70^\circ 31' 42'' \text{ ist.} -$$

$$\beta = \gamma. \quad a - b = s_a \cdot \left(\cotg \beta \cdot \cotg \frac{\beta}{2} - 1 \right), \text{ und}$$

$$a - b \geq s_a, \text{ je nachdem } \cotg \frac{\beta}{2} \geq \sqrt{5}, \text{ oder } \beta \leq 48^\circ 11' 23'' \text{ ist.} -$$

* Anmerk. 1. Auch hier lässt sich, wie oben, der Schwankungsbereich von α und β für die Bedingung, dass der Factor von ρ_c gleich 1 sei, angeben; wir erhalten wie oben, $\operatorname{tg} x = \sqrt{5} - 2$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$ und $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$, wo $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ + x$ und $\frac{\beta}{2} = 45^\circ - x$ gesetzt ist. -

** Vergl. Haebler, a. a. O. II, 2. - Anmerk. 2. Aus der Definition von s_a (s_c) folgt: für $\alpha = \beta$ ist $s_a = \frac{c}{2}$ ($s_c = a - \frac{c}{2}$) für $\alpha = \gamma$: $s_a = \frac{b}{2}$ ($s_c = \frac{b}{2}$) d. h. $s_a = s_c$, für $\beta = \gamma$ ist $s_a = c - \frac{a}{2}$ ($s_c = \frac{a}{2}$)

$$\alpha = 90^\circ. \quad a - b = s_a \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} - 1 \right), \text{ und}$$

$$a - b \geq s_a, \text{ sobald } \cotg \frac{\beta}{2} \geq 2 \text{ ist. ---}$$

$$\beta = 90^\circ. \quad b - a = s_a \cdot \left(1 - \tg \frac{\alpha}{2} \right), \text{ mithin}$$

$$b - a < s_a. \text{ ---}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad a - b = s_a \cdot \frac{\tg^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tg \frac{\alpha}{2} - 1}{1 - \tg \frac{\alpha}{2}}, \text{ und}$$

$$(2) \quad a - b \geq s_a, \text{ je nachdem } \tg \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2} (\sqrt{17} - 3) \text{ oder}$$

$$\alpha \geq 58^\circ 37' 58'' \text{ ist. ---}$$

Aus (1) ergibt sich, dass $b - a < s_a$ ist; die Ungleichheit folgt aber schon aus der Definition von s_a . * ---

$$a + b > 2 s_c. ** \text{ ---}$$

$$(a - b) \geq s_c. \quad \text{Es ist}$$

$$(3) \quad (a - b) = s_c \cdot \left(\pm \tg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} - \cotg \frac{\alpha}{2} \right) \right). *** \text{ ---}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{2F} ****$$

* Anmerk. 1. Der Factor von s_a in (1) ist allgemein = 1, wenn $\tg \frac{\alpha}{2} = 2 \tg \frac{\beta}{2}$. Der Schwankungsbereich von α und β wird bestimmt (vergl. Anmerk. ad 3) durch die Ungleichung

$$\tg \frac{\alpha}{2} \geq \sqrt{2}, \tg \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ --- Vergl. auch § VIII, 9. (4) Anmerk. ---}$$

** Vergl. 4, Anmerk. 2. ---

*** Anmerk. 2. Allgemein ist der Factor von s_c in (2) = 1, wenn $\cotg \frac{\beta}{2} = \cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2}$, oder nach einiger

$$\text{Reduktion } \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left[\cotg \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\cotg^2 \frac{\beta}{2} - 8} \right]; \text{ hieraus folgt } \cotg \frac{\beta}{2} \geq 2\sqrt{2}, \text{ oder } \beta \geq 38^\circ 56' 32'';$$

$$\text{für das Minimum von } \cotg \frac{\beta}{2} = 2\sqrt{2} \text{ folgt sofort } \cotg \frac{\alpha}{2} = \cotg \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}, \text{ d. h. } b : a = 2 : 3. \text{ ---}$$

**** Anmerk. 3. Vergl. Haebler a. a. O. II, 2. --- $a + b \geq 2\sqrt{2F}$. ---

(1) $(a + b)^2 = F \cdot \frac{2}{\sin \gamma} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + 2 \right)$; die Differentialrechnung liefert aus den gleichgesetzten ersten partiellen Ableitungen:

$$(2) \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} - \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin^2 \beta} = -\cotg \gamma \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + 2 \right) \text{ als Bedingung dafür, dass der}$$

Factor von F ein Minimum ist:

(3) $\alpha = \beta$ und $\cotg \gamma = 0$, mithin $\gamma = 90^\circ$; dann ist

$$(4) \quad (a + b)^2 = 8 \cdot F. \text{ ---}$$

§ II.

1. $h_a + h_b \geq r$, aber $\leq r \cdot \frac{16}{9} \sqrt{3}$. Es ist

$$(1) h_a + h_b = r \cdot 2 \sin \gamma \cdot (\sin \alpha + \sin \beta). —$$

Aus den gleichgesetzten ersten partiellen Ableitungen

$$(2) \sin \gamma \cdot \cos \alpha = \sin \gamma \cdot \cos \beta = (\sin \alpha + \sin \beta) \cdot \cos \gamma \text{ finden wir als Bedingung dafür, dass der Factor von } r \text{ ein Maximum ist}$$

$$(3) \alpha = \beta \text{ und } \cos \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3}. —$$

$$\alpha = \beta. \quad h_a + h_b = r \cdot 4 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha$$

und der Factor von $r = 1$, sobald

$$(4) \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{8} = 0, \text{ oder } \cos \alpha_1 = 0,93041 \text{ und } \cos \alpha_2 = 0,12705 \text{ ist;}$$

es ist also $h_a + h_b$, oder $2 h_a \geq r$, sobald $82^\circ 42' 3'' \leq \alpha \leq 21^\circ 30' 8''$ ist.* —

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad h_a + h_b = r \cdot 2 \sin^2 \gamma \cdot (1 + 2 \cos \gamma), \quad \text{und}$$

der Factor von r ein Maximum, sobald

$$(5) (1 + 2 \cos \gamma) \cdot \cos \gamma - \sin^2 \gamma = 0, \text{ und}$$

$$(6) \cos \gamma = \frac{1}{6} (\sqrt{13} - 1), \text{ mithin } \gamma = 64^\circ 15' 43'' \text{ ist; als dann ist}$$

$$(7) h_a + h_b \leq r \cdot \frac{35 + 13 \sqrt{13}}{27}. —$$

Es ist ferner $h_a + h_b = r$, sobald

$$(8) \cos^3 \gamma + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma - \cos \gamma - \frac{1}{4} = 0, \text{ und}$$

$\cos \gamma = 0,9068$ ist; alsdann ist

$$h_a + h_b \geq r, \text{ jenachdem } \gamma \geq 24^\circ 56' \text{ ist. —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad h_a + h_b \geq r, \text{ aber } \leq r \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3}. \quad \text{Es ist}$$

$$(9) h_a + h_b = r \cdot 2 \sin \gamma \cdot (1 + \cos \gamma), \text{ u. der Factor von } r \text{ ein Maximum, wenn}$$

$$(10) 2 \cos^2 \gamma + \cos \gamma - 1 = 0, \text{ oder } \cos \gamma = \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

* Anmerk. In gleicher Weise ergibt sich für $\alpha = \beta$ aus der Bedingung $\cos^3 \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0$, dass $h_a \geq r$ ist,

jenachdem $74^\circ 21' 40'' \leq \alpha \leq 33^\circ 6' 53''$ ist. —

Aus (9) folgt ferner, dass die Function $h_a + h_b$ im Intervall $\gamma = 0^\circ$ bis $\gamma = 90^\circ$ die Werte von 0 bis $r \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3}$ und wieder abwärts bis $2r$ durchläuft; an einer Stelle ist dann $h_a + h_b = r$, und wird der bezügliche Wert $\gamma = 14^\circ 43' 29''$ aus der Gleichung

$$(11) \sin^4 \gamma - \sin \gamma + \frac{1}{4} = 0 \text{ gefunden.}^* -$$

$\gamma = 90^\circ$. Es ist $h_a = b$ und $h_b = a$, und gelten die Betrachtungen von § I, 1. —
 $(h_a - h_b) \geq r$, aber $< 2r$. Es ist

(12) $(h_a - h_b) = r \cdot \pm 2 \sin \gamma (\sin \beta - \sin \alpha)$ und der Factor von r ein Maximum für $\lim \alpha = 0$ und $\lim \beta = \gamma = 90^\circ$. —

$$\alpha = \beta. \quad h_a - h_b = 0. -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (h_a - h_b) = r \cdot \pm 2 \sin \gamma \cdot (\sin 2\gamma - \sin \gamma), \text{ und}$$

$$(h_a - h_b) \geq r, \text{ sobald } \gamma \geq 76^\circ 23' 34'' \text{ ist.} -$$

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (h_a - h_b) = r \cdot 2 \sin \gamma \cdot (1 - \cos \gamma),$ und der Factor von $r = 1$, sobald $\sin^4 \gamma - \sin \gamma + \frac{1}{4} = 0$ ist; die Gleichung wird erfüllt für $\sin \gamma = 0,89678$, und ist

$$(h_a - h_b) \geq r, \text{ jenachdem } \gamma \geq 63^\circ 44' 19'' \text{ ist.} -$$

$\gamma = 90^\circ. \quad (h_a - h_b) = r \cdot \pm 2 (\cos \alpha - \sin \alpha),$ und der Factor von $r = 1$, sobald $\sin \alpha = \frac{1}{4} (\sqrt{7} \mp 1)$ ist; alsdann ist

$$(13) (h_a - h_b) \geq r, \text{ jenachdem } 24^\circ 17' 43'' \leq \alpha \leq 65^\circ 42' 17'' \text{ ist.}$$

Im übrigen gelten auch hier die Betrachtungen von § I, 1; vergl. § VI, 8, (4) u. (9). —

2. $h_a + h_b > 4\rho$. Es ist

$$(1) h_a + h_b = \rho \cdot \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}, \quad \text{und}$$

der Factor von ρ ein Minimum für $\alpha = \beta$ u. $\lim \gamma = 0$. — Für $\alpha = \beta$ nimmt (1) die Form an

(2) $h_a + h_b = \rho \cdot 4 (1 + \cos \alpha)$ und ist der Factor von ρ ein Maximum für $\lim \alpha = 0$; es genügt dann ρ der doppelten Ungleichung $4\rho < h_a + h_b < 8\rho$. —

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad h_a + h_b = \rho \cdot \frac{2 \cos^2 \gamma + 3 \cos \gamma + 1}{\cos \gamma},$ und der Factor von ρ ein Minimum, sobald $\cos \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ist; es folgt sofort

$$h_a + h_b \geq \rho \cdot (3 + 2\sqrt{2}). -$$

* Vergl. unten (12) ff; (11) besitzt zwei reelle Wurzeln, welche die Bedingung für $(h_a \pm h_b) = r$ liefern.

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad h_a + h_b = \rho \cdot \frac{2 \cos^3 \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}; \text{ es n\u00e4hert sich } h_a + h_b \text{ f\u00fcr } \lim \gamma = 0 \text{ seinem}$$

Minimum $4 \cdot \rho$ (vergl. (1)). —

$$\gamma = 90^\circ. \quad h_a + h_b = \rho \cdot \frac{2(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}; \text{ der Factor von } \rho \text{ ist ein Minimum f\u00fcr}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \text{ mithin } h_a + h_b \geq \rho \cdot 2(2 + \sqrt{2}). —$$

$$(h_a - h_b) \geq \rho.$$

Es ist

$$(3) (h_a - h_b) = \rho \cdot \pm \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cdot (\sin \beta - \sin \alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}. —$$

$$\alpha = \beta. \quad h_a - h_b = 0. —$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (4) (h_a - h_b) = \rho \cdot \frac{(1 + \cos \gamma) \cdot (1 - 2 \cos \gamma)}{\cos \gamma}, \text{ und der Factor von } \rho \text{ gleich 1,}$$

wenn $\cos \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ ist; mithin ist

$$(h_a - h_b) \geq \rho, \text{ sobald } \gamma \geq 68^\circ 31' 45'' \text{ ist. —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (h_a - h_b) = \rho \cdot \frac{2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } \rho \text{ gleich 1, sobald}$$

$$(4) \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - 1 = 0, \text{ und } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} - 1 \text{ ist; mithin ist}$$

$$(h_a - h_b) \geq \rho, \text{ jenachdem } \gamma \geq 45^\circ \text{ ist. —}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (\text{vergl. } \S \text{ I, 2, (9)}). * —$$

$$3. \quad h_a + h_b \geq \rho_a. —$$

Es ist

$$(1) h_a + h_b = \rho_a \cdot \sin \gamma \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). —$$

$$\alpha = \beta. \quad h_a + h_b = \rho_a \cdot 4 \cos \alpha; \quad \text{mithin } h_a + h_b < 4 \cdot \rho_a, \text{ und}$$

$$h_a + h_b \geq \rho_a, \text{ jenachdem } \cos \alpha \geq \frac{1}{4} \text{ ist. —}$$

* Anmerk. F\u00fcr $\gamma = 90^\circ$ ist der Factor von ρ in (3) = 1, sobald $\cotg \left(45 - \frac{\beta}{2} \right) - \cotg \frac{\beta}{2} = 1$ ist. Es folgt

$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, mithin $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$; hieraus ergibt sich unter Ber\u00fccksichtigung, dass $c = 5 \cdot \rho$, mithin $4F = 2h_a \cdot h_b = 2\rho(h_a + h_b + 5\rho)$ ist, $h_a + h_b = 7\rho$; gleichzeitig ist $h_a - h_b = \rho$; also ist $h_a = b = 4\rho$ und $h_b = a = 3\rho$, und folgt endlich $a : b : c = 3 : 4 : 5$. —

$$\alpha = \gamma. \quad h_a + h_b = \rho_a \cdot \frac{3 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} + 1}, \text{ und } h_a + h_b > \rho_a, \text{ da der Factor von}$$

$\rho_a > 1$ ist und erst für $\lim \alpha = 90^\circ$ sich der Einheit nähert. —

$$\beta = \gamma. \quad h_a + h_b = \rho_a \cdot \frac{2 \tg^4 \frac{\gamma}{2} - 6 \tg^2 \frac{\alpha}{2}}{\tg^4 \frac{\gamma}{2} - 1}, \text{ und ist}$$

$$(2) \quad h_a + h_b \geq \rho_a, \text{ sobald } \tg \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{2} - 1, \text{ oder } \gamma \geq 45^\circ \text{ ist.}^* \text{ —}$$

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad \text{Es gelten die Beziehungen in (2). —}$

$\gamma = 90^\circ. \quad (\text{vergl. § I, 3, (2)}). \text{ —}$

$$(h_a - h_b) \geq \rho_a. \text{ —}$$

Es ist

$$(3) \quad (h_a - h_b) = \rho_a \cdot \pm 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \left(\cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \frac{\beta}{2} - 1 \right). \text{ —}$$

$$\alpha = \beta. \quad h_a - h_b = 0. \text{ —}$$

$\alpha = \gamma. \quad (h_a - h_b) = \rho_a \cdot \pm (2 \cos \alpha - 1), \text{ und}$
 $(h_a - h_b) > \rho_a, \text{ da der Factor von } \rho_a \text{ sich der Einheit für } \lim \alpha = 0^\circ,$
 bez. $\lim \alpha = 90^\circ$ nähert. —

$$\beta = \gamma. \quad (h_a - h_b) = \rho_a \cdot \pm \frac{2 \cos^2 \gamma - 3 \cos \gamma + 1}{\cos \gamma}, \text{ und}$$

$$h_a - h_b \geq \rho_a, \text{ jenachdem } \cos \gamma \leq \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}), \text{ oder } \gamma \geq 72^\circ 58' 7'' \text{ ist;}$$

vergl. § VIII, 2, (2a). —

$$\alpha = 90^\circ. \quad (h_a - h_b) = \rho_a \cdot \pm 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\tg \frac{\beta}{2} - 1 \right), \text{ und}$$

$(h_a - h_b) < \rho_a, \text{ da der Factor von } \rho_a \text{ stets ein echter Bruch ist, und}$
 erst für $\lim \beta = 0$ der Einheit gleich wird, —

$$\beta = 90^\circ. \quad (h_a - h_b) = \rho_a \cdot \pm (1 - \sin \alpha) \left(\cotg \frac{\alpha}{2} - 1 \right), \text{ und der Factor von } \rho_a$$

gleich 1, wenn (4) $\tg^3 \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} \tg^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ist; die Gleichung wird befriedigt für
 $\alpha = 34^\circ 0' 48'', \text{ und ist}$

$$h_a - h_b \geq \rho_b, \text{ jenachdem } \alpha \leq 34^\circ 0' 48'' \text{ ist. —}$$

* Anmerk. Aus 3, (2) und 2 (4) folgt die bekannte Beziehung $s_a : s = \rho : \rho_a$. —

$$\gamma = 90^\circ. \quad (h_a - h_b) = \rho_a \cdot \pm \frac{1 - 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ und}$$

$$h_a - h_b \geq \rho_a, \text{ je nachdem } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{4} (\sqrt{17} - 3) \text{ ist; (vergl. § I, 3). —}$$

$$h_a + h_b \geq \rho_c, \text{ aber } < 4\rho_c.$$

Es ist

(5) $h_a + h_b = \rho_c \cdot (1 + \cos \gamma) \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)$ und der Factor von ρ_c ein Maximum, sobald $\alpha = \beta$ und $\lim \gamma = 0$ ist.*

$$(6) (h_a - h_b) = \rho_c \cdot \pm \sin \gamma \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right). \quad (h_a - h_b) < 2\rho_c. —$$

$$4. \quad h_a + h_b < s \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^5}.$$

Es ist

(1) $h_a + h_b = s \cdot \sin \gamma \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)$; aus den gleichgesetzten ersten partiellen Ableitungen

$$(2) \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right) = \cos \gamma \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)$$

erhalten wir als Bedingung dafür, dass der Factor von s ein Maximum ist

$$(3) \alpha = \beta \text{ und } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}, \text{ mithin}$$

** $\gamma = 76^\circ 20' 43''$; alsdann ist $h_a + h_b = s \cdot 1,201132$ das Maximum von $h_a + h_b$ für $s = \text{const.}$ —

$$\alpha = \beta. \quad h_a + h_b = s \cdot \frac{2 \sin \gamma}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } s \text{ gleich } 1, \text{ wenn}$$

$$(4) \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} - \frac{17}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{8} = 0; \text{ die zwei allein*** verwendbaren Wurzeln } +1,521891 \text{ und } -0,31296 \text{ entsprechen den Winkeln } \gamma_1 = 113^\circ 23' 2'' \text{ und } \gamma_2 = 43^\circ$$

$8' 42''$; mithin ist $2h_a = h_a + h_b \geq s$, je nachdem $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ ist. —

* Anmerk. 1. Für $\alpha = \beta$ ist $h_a + h_b = \rho_c$, sobald $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, oder sobald $a : b : c = 2 : 2 : 3$ besteht. — Für $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$

ist $3\rho_c > h_a + h_b > \rho_c$. Für $\frac{\alpha}{\beta} = 90^\circ$ ist $h_a + h_b > \rho_c$, für $\gamma = 90^\circ$ tritt Gleichheit ein, sobald $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2}$ ist. —

** Anmerk. 2. vergl. § I, 2, (2); im Dreieck $\alpha = \beta$ und $\gamma = 76^\circ 20' 43''$ erreicht $a + b$ für $\rho = \text{const.}$ sein Minimum und $h_a + h_b$ für $s = \text{const.}$ sein Maximum; ferner ist $r = 2 \cdot \rho_a$ (vergl. § VI, 1. Anmerk. 2). —

*** Anmerk. 3. Die dritte Wurzel aus (4) liefert $\gamma_3 = 23^\circ 27' 54''$; derselbe ist unbrauchbar, da $1 + \sin \frac{\gamma}{2}$ im allgemeinen > 1 ist. —

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma$. (5) $h_a + h_b = s \cdot \sin \gamma \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cotg \gamma \right)$; der Factor von s ist ein Maximum, sobald

$$(6) \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} + 6 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 3 = 0, \text{ oder } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2 \sqrt{3} - 3}, \text{ mithin}$$

$\gamma = 49^\circ 47' 22''$ ist; es ist also

$$h_a + h_b < s \cdot \sqrt{3} (2 \sqrt{3} - 3).$$

$h_a + h_b = s$, sobald $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$.

Es ist also

$$h_a + h_b \geq s, \text{ jenachdem } 90^\circ \geq \gamma \geq 45^\circ \text{ ist.}^* -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ \quad (7) \quad h_a + h_b = s \cdot \frac{2 \sin \gamma}{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}};$$

der Factor von s ist ein Maximum, wenn

$$(8) \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ oder } \gamma = 66^\circ 38' 6'' \text{ ist.}$$

Es ist also $h_a + h_b < s \cdot 1,1078$. Ferner ist

$$h_a + h_b \geq s, \text{ jenachdem } 90^\circ \geq \gamma \geq 45^\circ \text{ ist. (vergl. (6) ff.)} -$$

$\gamma = 90^\circ$. $h_a + h_b > s$ (vergl. § I, 4). —

$(h_a - h_b) < s$,** weil h_a , bez. $h_b < s$. —

5. $h_a + h_b \geq s_a$.

Es ist

$$(1) \quad h_a + h_b = s_a \cdot (1 + \cos \gamma) \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\alpha = \beta. *** \quad h_a + h_b = s_a \cdot \frac{2 (1 - \cos 2\alpha)}{\sin \alpha} \quad \text{und}$$

$$h_a + h_b \geq s_a, \text{ jenachdem } \sin \alpha \geq \frac{1}{4} \text{ ist; aber}$$

$h_a + h_b < 4 \cdot s_a$; die Function nähert sich ihrem Maximum für $\cos \alpha = 0$. —

$\alpha = \gamma$. Als Bedingung dafür, dass der Factor von s_a in (1) gleich 1 ist, finden wir

$$(2) \quad \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} + 6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 = 0; \text{ der allein verwendbaren Wurzel}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{2 (\sqrt{5} - 1)} \right] \text{ entspricht } \alpha = 19^\circ 5' 12'',$$

und ist $h_a + h_b \geq s_a$, jenachdem $\alpha \geq 19^\circ 5' 12''$ ist. —

* Anmerk. 1. Das Resultat ergibt sich auch aus einfachen geometrischen Betrachtungen. —

** Anmerk. 2. Vergl. Haebler II, 2, 5). —

*** Vergl. § I, 5, Anmerk. 2. —

$\beta = \gamma$. Der Factor von s_a nimmt die Form an

$$\frac{\cotg \frac{\beta}{2} \cdot \left(3 \cotg^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right)}{1 + \cotg^2 \frac{\beta}{2}} \text{ und ist } > 1, \text{ da } \cotg \frac{\beta}{2} \text{ im allgemeinen } > 1 \text{ ist;}$$

mithin ist $h_a + h_b > s_a$. —

$$\alpha = 90^\circ. \quad h_a + h_b = s_a (1 + \cos \gamma) \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + 1 \right), \text{ und}$$

$$h_a + h_b > 4 \cdot s_a. —$$

$$\beta = 90^\circ. \quad h_a + h_b = s_a \cdot \frac{4}{\left(1 + \tg^2 \frac{\gamma}{2} \right) \left(1 + \tg \frac{\gamma}{2} \right)}, \text{ und}$$

$$s_a < h_a + h_b < 4 \cdot s_a. —$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad h_a + h_b = s_a \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\alpha}{2} \right), \text{ und}$$

$$h_a + h_b > s_a \quad (\text{vergl. § I, 5}). —$$

$$(h_a - h_b) \geq s_a.$$

Es ist

$$(3) (h_a - h_b) = s_a \cdot \pm \sin \gamma \cdot \left(1 - \tg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \right). —$$

$$\alpha = \beta. \quad h_a - h_b = 0. —$$

$$\alpha = \gamma. \quad (h_a - h_b) = s_a \cdot \pm \frac{2 \tg \frac{\gamma}{2} - 6 \tg^2 \frac{\gamma}{2}}{1 - \tg^4 \frac{\gamma}{2}}, \text{ und}$$

der Factor von s_a gleich 1, sobald

$$(4) \tg^4 \frac{\gamma}{2} \mp 6 \tg^3 \frac{\gamma}{2} \pm 2 \tg \frac{\gamma}{2} - 1 = 0, \text{ und}$$

$$\tg \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} [\sqrt{22 + 10\sqrt{5}} - 3 - \sqrt{5}] \text{ ist; alsdann ist}$$

$$h_b - h_a \geq s_a, \text{ jenachdem } \gamma \geq 70^\circ 54' 50'' \text{ ist. —}$$

$$\beta = \gamma. \quad (h_a - h_b) = s_a \cdot \pm \frac{\cotg \frac{\gamma}{2} \left(3 - \cotg^2 \frac{\gamma}{2} \right)}{1 + \cotg^2 \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1,}$$

wenn (5) $\cotg^3 \frac{\gamma}{2} \pm \cotg^2 \frac{\gamma}{2} - 3 \cotg \frac{\gamma}{2} \pm 1 = 0$; der allein verwendbaren Wurzel

$$\cotg \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} + 1 \text{ entspricht } \gamma = 45^\circ \text{ und ist}$$

$$h_b - h_a \leq s_a, \text{ jenachdem } \gamma \leq 45^\circ \text{ ist. —}$$

$\alpha = 90^\circ$. $(h_a - h_b) = s_a \cdot \pm \frac{4 \cotg \frac{\gamma}{2}}{\left(\cotg^2 \frac{\gamma}{2} + 1\right) \left(1 - \cotg \frac{\gamma}{2}\right)}$; die Bedingung, unter welcher Gleichheit eintritt, ist die gleiche, wie in (5) ff. —

$\beta = 90^\circ$. $(h_a - h_b) = s_a \cdot \pm \frac{4 \tg^2 \frac{\gamma}{2}}{\left(\tg^2 \frac{\gamma}{2} + 1\right) \left(1 + \tg \frac{\gamma}{2}\right)}$, und ist

$h_a - h_b < s_a$. —
 $\gamma = 90^\circ$. (vergl. § 1, 5. (2).) —

$h_a + h_b \geq s_c$. Es ist

$$(6) \quad h_a + h_b = s_c \cdot \sin \gamma \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} + 1\right). —$$

$\alpha = \beta$. $h_a + h_b = s_c \cdot \sin 2\alpha \cdot \left(\cotg^2 \frac{\alpha}{2} + 1\right)$, und der Factor von s_c gleich 1, wenn

$$(7) \quad \cotg^3 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} = 0, \text{ u. die allein verwendbare Wurzel}$$

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = 1,22909 \text{ ist; mithin ist}$$

$$h_a + h_b \geq s_c, \text{ sobald } \alpha \leq 78^\circ 15' 52'' \text{ ist. —}$$

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma$. $h_a + h_b = s_c \cdot \sin \gamma \cdot \left(\tg \gamma \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} + 1\right)$, und der Factor von s_c gleich 1, wenn

(8) $\tg^4 \frac{\gamma}{2} - 2 \tg^3 \frac{\gamma}{2} + 6 \tg \frac{\gamma}{2} - 1 = 0$ ist u. s. f. s_a ist = s_c . (vergl. also 5, (2) und § I, 5, Anm. 2). —

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ$. $h_a + h_b = s_c \cdot \sin \gamma \cdot \left(\cotg \left(45 - \frac{\gamma}{2}\right) + 1\right)$, und der Factor von s_c gleich 1, wenn

$$(9) \quad \cotg^3 \frac{\gamma}{2} - 5 \cotg^2 \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} - 1 = 0 \text{ und } \gamma = 23^\circ 22' \text{ ist. —}$$

$\gamma = 90^\circ$. (vergl. § I, 5.). —

$$(h_a - h_b) \geq s_c, \text{ jenachdem } \pm (1 - \cos \gamma) \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} - \cotg \frac{\alpha}{2}\right) \geq 1 \text{ ist. —}$$

§ III.

1. $w_a + w_b \geq r$, aber $< r \cdot 3,12732$. Es ist

$$(1) w_a + w_b = r \cdot 2 \sin \gamma \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right)$$

Aus den gleichgesetzten ersten Ableitungen erhalten wir als Bedingung dafür, dass der Factor von r ein Maximum ist.

$$(2) \alpha = \beta, \text{ und } (3) \cos^3 \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{6} \cos \alpha - \frac{1}{3} = 0.$$

Der allein reellen Wurzel $\cos \alpha = 0,623526$ entspricht $\alpha = 51^\circ 25' 33''$ und ist alsdann $w_a + w_b < r \cdot 3,12732$. —

Aus der Gleichung

$$w_a + w_b = r \cdot \frac{4 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}{3 \sin \frac{3}{2} \alpha} \quad (\alpha = \beta \text{ vorausgesetzt}) \text{ ergibt sich}$$

$$w_a + w_b \geq r, \text{ jenachdem angenähert } 84^\circ \geq \alpha \geq 7^\circ \text{ ist.}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad w_a + w_b \geq r, \text{ jenachdem}$$

$$2 \sin \gamma \cdot \left(\frac{\sin 2\gamma}{3 \sin \frac{3}{2} \gamma} + \sin \gamma \right) \geq 1^* \text{ ist. —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad w_a + w_b \geq r, \text{ jenachdem}$$

$$2 \sin \gamma \cdot \left(\frac{\cos \gamma}{\cos (45 - \gamma)} + \frac{1}{\cos (45 - \frac{\gamma}{2})} \right) \geq 1 \text{ ist. —}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad w_a + w_b \geq r, \text{ jenachdem}$$

$$2 \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}{\cos (\frac{\alpha}{2} - 45)} \right) \geq 1 \text{ ist. —}$$

$(w_a - w_b) < 2r$. Die Function nähert sich ihrer oberen Grenze für $\lim \alpha (\beta) = 0$ und $\beta = \gamma (\alpha = \gamma)$. —

* Anmerk. Die Rechnung führt hier und im folgenden auf Gleichungen 5. und 6. Grades, die teilweise durch Annäherung gelöst sind. —

2. $w_a + w_b \geq \rho \cdot \frac{1}{3} \sqrt{2(69 + 11\sqrt{33})}$ Es ist

$$(1) w_a + w_b = \rho \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right)$$

und der Factor von ρ ein Minimum, wenn die Gleichungen bestehen:

$$(2) \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2}};$$

aus (2) folgt

$$(3) \alpha = \beta \text{ und } 4 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2} - 9 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 3 = 0; \text{ der allein brauchbaren}$$

Wurzel $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2(9 - \sqrt{33})}$ entspricht $\alpha = 79^\circ 16' 20''$ und $w_a + w_b = \rho \cdot 5,41993$.

$$(w_a - w_b) = \rho \cdot \pm 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right) *.$$

3. $w_a + w_b \geq \rho_a$.

Es ist

$$(1) w_a + w_b = \rho_a \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right].$$

$\alpha = \beta$. $w_a + w_b = \rho_a \cdot \frac{4 \cdot \cos \alpha}{3 \sin \frac{\alpha}{2}}$, und der Factor von ρ_a gleich 1, wenn

$$(2) \sin^3 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \text{ oder } \sin \frac{\alpha}{2} = 0,6221822 \text{ ist; dann ist}$$

$$w_a + w_b, \text{ d. i. } 2 w_a \geq \rho_a, \text{ sobald } \alpha \leq 76^\circ 57' 4'' \text{ ist. —}$$

* Vergl. die Anmerk. zu 1. (2)

$$\alpha = \gamma. \quad w_a + w_b = \rho_a \cdot \left(\frac{2 \cos \gamma}{\sin \frac{3}{2} \gamma} + 1 \right), \text{ mithin}$$

$$w_a + w_b > \rho_a. -$$

$$\beta = \gamma. \quad w_a + w_b = \rho_a \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{2}{3 - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \right) \text{ und der Factor}$$

von ρ_a gleich 1, wenn

$$(3) \sin^4 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin^3 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{3}{16} = 0, \text{ oder die allein}$$

brauchbare Wurzel $\sin \frac{\gamma}{2} = 0,373731$ ist; dann ist

$$w_a + w_b \geq \rho_a, \text{ sobald } \gamma \geq 43^\circ 53' 30'' \text{ ist. -}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad w_a + w_b \geq \rho_a. * -$$

$$\beta = 90^\circ. \quad w_a + w_b \geq \rho_a. -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad w_a + w_b > \rho_a. -$$

$$(w_a - w_b) \geq \rho_a.$$

Es ist

$$(4) (w_a - w_b) = \rho_a \cdot \pm 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} - \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad w_a - w_b = 0. -$$

$$\alpha = \gamma. \quad (w_a - w_b) = \rho_a \cdot \pm \left(\frac{2 \cos \gamma}{\sin \frac{3}{2} \gamma} - 1 \right), \text{ und der Factor von } \rho_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(5) \sin^3 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} = 0, \text{ und die allein verwendbare}$$

Wurzel $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)$ ist; alsdann ist

$$w_a - w_b \geq \rho_a, \text{ jenachdem } \gamma \leq 36^\circ \text{ ist; ** ebenso ergibt sich}$$

$$w_b - w_a < \rho_a. -$$

* (Vergl. die Anmerk. zu 2.). -

** Die Gleichheit tritt also ein, sobald der Schenkel gleich dem grösseren Abschnitt der stetig getheilten Basis ist.

$$\beta = \gamma. \quad (w_a - w_b) = \rho_a \cdot \pm 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} - \frac{2}{3 - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \right), \text{ und der}$$

Factor von ρ_a gleich 1, wenn

$$(6) \sin^4 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin^3 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{3}{16} = 0, \text{ oder } \sin \frac{\gamma}{2} = 0,598567 \text{ ist;}$$

dann ist $w_a - w_b \geq \rho_a$, sobald $\gamma \geq 73^\circ 32' 4''$ ist; auch hier ist $w_b - w_a < \rho_a$. —

$$\alpha = 90^\circ. \quad (w_a - w_b) < \rho_a. —$$

$$\beta = 90^\circ. \quad (w_a - w_b) \geq \rho_a. —$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (w_a - w_b) \geq \rho_a. — (\text{vergl. zu } w_a + w_b).$$

$$w_a + w_b \geq \rho_c.$$

Es ist

$$(7) w_a + w_b = \rho_c \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad w_a + w_b = \rho_c \cdot \frac{8 \sin \frac{\alpha}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ und}$$

$w_a + w_b$ oder $2 w_a \geq \rho_c$, sobald $\sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2} (\sqrt{7} - 2)$ oder $\alpha \geq 37^\circ 40' 28''$ ist; aber $w_a + w_b$, oder $2 w_a < \rho_c \cdot 4 \sqrt{2}$; die obere Grenze wird erreicht für $\lim \alpha = 90^\circ$. —

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad \rho_c = \rho_a.$$

$$w_a + w_b = \rho_c \cdot \left(1 + \frac{2 \cos \gamma}{\sin \frac{3}{2} \gamma} \right) \text{ u. s. f. (vergl. für } \rho_a). —$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad w_a + w_b = \rho_c \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos \gamma - \sin \gamma}{\sin \gamma + \cos \gamma} + \frac{1}{1 + \sin \gamma} \right) \text{ und}$$

$$w_a + w_b > \rho_c. —$$

$\gamma = 90^\circ$. $w_a + w_b > \rho_c$, aber $< \rho_c \cdot 4 \sqrt{10 - 7 \sqrt{2}}$; das Maximum tritt ein für $\alpha = \beta$. —

$$(w_a - w_b) \geq \rho_c.$$

Es ist

$$(8) (w_a - w_b) = \rho_c \cdot \pm 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad w_a - w_b = 0. -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (w_a - w_b) = \rho_c \cdot \pm \left(\frac{2 \cos \gamma}{\sin \frac{3}{2} \gamma} - 1 \right) \text{ u. s. f. (vergl. (5)). -}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (w_a - w_b) < \rho_c. -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (w_a - w_b) < \rho_c. -$$

$$4. \quad w_a + w_b < s \cdot \frac{4}{3}.$$

Es ist

$$(1) (w_a + w_b) = s \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right).$$

Aus den gleichgesetzten ersten Ableitungen

$$(2) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2}}$$

erhalten wir als Bedingung dafür, dass der Factor von s ein Maximum ist,

$$(3) \alpha = \beta \text{ und } \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot (\cos \alpha - 1)}{\sin \frac{3}{2} \alpha} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) = 0, \text{ oder}$$

$$(4) \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{und} \quad (5) 8 \sin^4 \frac{\alpha}{2} - 6 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 0^*$$

Unter Berücksichtigung von (3) nimmt (1) alsdann die Form an

$$(6) w_a + w_b = s \cdot \frac{4 \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}, \text{ und ist}$$

$$w_a + w_b = s \cdot 1,333 \dots -$$

* Anmerk. 1. Die allein reelle Wurzel von (5) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2(3 + \sqrt{17})}$ entspricht einem Winkel $\alpha > 90^\circ$, ist mithin in Rücksicht auf (3) unmöglich. —

$$\alpha = \beta. \quad w_a + w_b = s \cdot \frac{4 \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{3}{2} \alpha}, \text{ und der Factor von } s \text{ gleich } 1, \text{ wenn}$$

$$(7) \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} - \frac{31}{16} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{7}{16} = 0 \text{ oder } \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0,325895 \text{ ist;}$$

dann ist

$$w_a + w_b, \text{ oder } 2 w_a \geq s, \text{ sobald } \alpha \leq 69^\circ 37' 20'' \text{ ist. —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad w_a + w_b = s \cdot \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\frac{2 \cos \gamma}{3 - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \sin \frac{\gamma}{2} \right). \text{ — Auch bezüglich der}$$

rechtwinkligen Dreiecke vergl. 2. Anmerk. —

$$(w_a - w_b) < s.*$$

Es ist

$$(w_a - w_b) = s \cdot \pm 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right),$$

und nähert sich $(w_a - w_b)$ seiner oberen Grenze für $\lim \alpha(\beta) = 0$ und $\beta(\alpha) = \gamma$. —

$$5. \quad w_a + w_b > s_a.*$$

Es ist

$$(1) \quad w_a + w_b = s_a \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right). \text{ —**}$$

$$(2) \quad (w_a - w_b) = s_a \cdot \pm 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right) \text{ und}$$

$$(w_a - w_b) \geq s_a. \text{ —}$$

$$w_a + w_b \geq s_c.$$

Es ist

$$(3) \quad w_a + w_b = s_c \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right). \text{ —***}$$

* Anmerk. 1. vergl. Haebler II, 2, 3) und 6), und § I, 5, Anm. 2. —

** Anmerk. 2. Für $\alpha = \beta$ ist $w_a + w_b = s_a \cdot 8 \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, und ein Maximum für $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$; alsdann ist

$$w_a + w_b > s_a \cdot 2,666 \dots \text{ —}$$

*** Anmerk. 3. Für $\alpha = \beta$ ist der Factor von s_c in (3) = 1, wenn $\cos^4 \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - \frac{5}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}$

$$(4) (w_a - w_b) = s_c \cdot \pm 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} - \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} \right) -$$

§ IV.

$$1. m_a + m_b \leq r \cdot \frac{9}{4} \sqrt{2}.$$

Es ist

$$(1) m_a + m_b = r \cdot (\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta});$$

die gleichgesetzten ersten Ableitungen

$$(2) \begin{cases} -\frac{\cos(\beta - \alpha) \cdot \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}} - \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}} \\ = -\frac{\sin(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}} - \frac{\cos(\alpha - \gamma) \cdot \sin \beta - \sin \beta \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}} \\ = \frac{\sin(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}} + \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}} \end{cases}$$

liefern als Bedingung dafür, dass der Factor von r ein Maximum ist,

$$(3) \alpha = \beta \text{ und } (4) 3 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0; \text{ aus (4) folgt}$$

$$(5) \sin \alpha = \frac{3}{4} \text{ und } \alpha = 48^\circ 35' 25'', \text{ und aus (1) in Verbindung mit (3) u. (5)}$$

$$m_a + m_b, \text{ d. i. } 2 m_a \leq r \cdot \frac{9}{4} \sqrt{2}. -$$

$\alpha = \beta.$ $m_a + m_b = r \cdot 2 \sqrt{1 - 2 \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$, und der Factor von r gleich 1, wenn

$$(6) 2 \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}, \text{ oder } \cos \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{7 + \sqrt{73}} \text{ ist; alsdann ist}$$

$$m_a + m_b \geq r, \text{ je nachdem } \alpha \geq 9^\circ 43' 9'' \text{ ist. -}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad m_a + m_b = r \cdot (2 \sin^2 \gamma + \sqrt{1 - 2 \cos 3\gamma \cdot \cos \gamma + \cos^2 \gamma}) \text{ und}$$

$$m_a + m_b \geq r, \text{ je nachdem } \cos \gamma \leq \frac{1}{6} \sqrt{33} \text{ oder}$$

$$\gamma \geq 16^\circ 46' 43'' \text{ ist. -}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad 2r < m_a + m_b < 3r;$$

$m_a + m_b$ nähert sich den Grenzen für $\lim \beta = 0$, bez. $\lim \gamma = 0$. -

$$+ \frac{1}{4} = 0 \text{ oder } \cos \frac{\alpha}{2} = 0,764984, \text{ und } w_a + w_b \geq s_c, \text{ sobald } \alpha \leq 80^\circ 11' 20'' \text{ ist. -}$$

$\gamma = 90^\circ$. $3r < m_a + m_b < r \cdot \sqrt{10}$; die Grenzen werden erreicht für $\lim \alpha (\beta) = 0$,
bez. $\alpha = \beta = 45^\circ$.

$$(m_a - m_b) = r \cdot \pm (\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}).$$

$$\alpha = \beta. \quad m_a - m_b = 0.$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (m_a - m_b) = r \cdot \pm (\sqrt{1 - 8 \cos^4 \alpha + 7 \cos^2 \alpha + 1 - \cos 2\alpha}), \text{ und}$$

$$m_a - m_b < r. \quad -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (m_a - m_b) < r, \text{ da } m_a (m_b) = r, \text{ und } m_a < 2r. \quad -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (m_a - m_b) = r \cdot \pm (\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}), \text{ und}$$

$$(m_a - m_b) < r. \quad -$$

$$2. \quad m_a + m_b \geq \rho \cdot 5,7627.$$

Es ist

$$(1) \quad m_a + m_b = \rho \cdot \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}},$$

die Differentialrechnung liefert als Bedingung dafür, dass der Factor von ρ ein Minimum ist, die Gleichungen

$$(2) \quad \alpha = \beta \quad \text{und}$$

$$(3) \quad (2 \cos \alpha - \cos 2\alpha - 1)(3 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) - 2(1 - 2 \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = 0,$$

oder unter Vernachlässigung der Wurzeln $\cos \alpha = 0$ und $\cos \alpha = 1$:

$$(4) \quad 8 \cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0;$$

der einzigen reellen Wurzel $\cos \alpha = 0,3869173$ entspricht

$$\alpha = 67^\circ 14' 14'' \text{ und das Minimum } m_a + m_b = \rho \cdot 1,7627. \quad -$$

$$(m_a - m_b) \geq \rho.$$

Es ist

$$(5) \quad (m_a - m_b) = \rho \cdot \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\alpha = \beta. \quad m_a - m_b = 0. \quad -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (m_a - m_b) = \rho \cdot \pm \frac{1 - \cos 2\gamma - \sqrt{1 - 2 \cos 3\gamma \cdot \cos \gamma + \cos^2 \gamma}}{2 \cos \gamma \cdot (1 - \cos \gamma)},$$

und der Factor von ρ gleich 1, wenn

$$(6) \quad 8 \cos^4 \gamma - 3 \cos^2 \gamma - 8 \cos \gamma + 3 = 0, \text{ oder } \cos \gamma = 0,34456 \text{ ist; mithin}$$

$$(m_a - m_b) \geq \rho, \text{ jenachdem } \gamma \geq 69^\circ 51' 42'' \text{ ist.} \quad -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (7) \quad (m_b - m_a) = \rho \cdot \mp \frac{1 - \sqrt{1 + 3 \sin^2 \gamma}}{\sin \gamma + \cos \gamma - 1}, \text{ und ist}$$

$$(m_b - m_a) \geq \rho, \text{ jenachdem } \sin \gamma \geq \frac{2}{13} \sqrt{13}, \text{ oder } \gamma \geq 33^\circ 41' 24'' \text{ ist.} \quad -$$

$\gamma = 90^\circ$. $(m_a - m_b) = \rho \cdot \pm \frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha} - \sqrt{1+3\sin^2\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}$, und der Factor von ρ gleich 1, wenn

$$*(8) \ 4 \left(4 - 9 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \right) = \left(\sin \alpha + \cos \alpha \right)^4 - 4 \left(\sin \alpha + \cos \alpha \right)^2 \cdot \left(\sin \alpha + \cos \alpha + 2 \right) + 4 \left(\sin \alpha + \cos \alpha + 2 \right)^2 \text{ ist. —}$$

3. $m_a + m_b \geq \rho_a$.

Es ist

$$(1) \ m_a + m_b = \rho_a \cdot \frac{\sqrt{1-2\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+\cos^2\alpha} + \sqrt{1+2\cos(\alpha-\gamma)\cos\beta+\cos^2\beta}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

$\alpha = \beta$. $m_a + m_b$, d. i. $2 m_a > \rho_a$.** —

$\alpha = \gamma$. $m_a + m_b > \rho_a$, da $\rho_a = m_b$. —

$\beta = \gamma$. $m_a + m_b \geq \rho_a$;

es ist

$$(2) \ m_a \pm m_b = \rho_a \cdot \frac{1 - 2 \cos \gamma \pm \sqrt{1 - 2 \cos 3 \gamma \cdot \cos \gamma + \cos^2 \gamma}}{2 \cos \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)}, \text{ und der}$$

Factor von ρ_a gleich 1, wenn

(3) $24 \cos^4 \gamma + 16 \cos^3 \gamma - 19 \cos^2 \gamma - 8 \cos \gamma + 3 = 0$ ist; den beiden allein verwendbaren Wurzeln

$\cos \gamma_1 = 0,72712$, und $\cos \gamma_2 = 0,262146$ entsprechen die Winkel

$\gamma_1 = 43^\circ 21' 16''$ und $\gamma_2 = 74^\circ 48' 9''$; es ist also

$m_a \pm m_b \geq \rho_a$, jenachdem

$\gamma_1 \geq 43^\circ 21' 16''$, bez. $\gamma_2 \geq 74^\circ 48' 9''$ ist, wo γ_2 für die Diffe-

renz gilt. —

* Anmerk. 1. Gleichung (7) nimmt unter Substitution von $\sin \alpha + \cos \alpha = u$, mithin $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \left(\frac{u^2 - 1}{2} \right)^2$,

die lösbare Form $u^4 + \frac{1}{2} u^3 - \frac{7}{4} u^2 - 2u + \frac{9}{8} = 0$ an; der gefundene numerische Wert $u = a$ führt

alsdann auf die Lösung $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2 - a^2}$ und liefert den Winkel α , für welchen $(m_a - m_b) = \rho$ ist. —

** Anmerk. 2. $2 m_a > a > \rho_a$. —

$\gamma = 90^\circ$. $(m_a - m_b)$
gleich 1, wenn

$$*(8) 4 \left(4 - 9 \sin^2 \alpha \right) \cdot \left(\sin \alpha \right)^2$$

$$3. m_a + m_b \geq \rho_a.$$

$$(1) m_a + m_b = \rho_a.$$

$$\alpha = \beta. \quad m_a + m_b, \text{ d}$$

$$\alpha = \gamma. \quad m_a + m_b >$$

$$\beta = \gamma. \quad m_a + m_b \geq$$

$$(2) m_a \pm m_b$$

Factor von ρ_a gleich 1,

(3) $24 \cos^4 \gamma$
verwendbaren Wurzeln

$$\cos \gamma_1 =$$

$$\gamma_1 = 4$$

$$m_a \pm m_b \geq \rho_a,$$

$$\gamma_1 \geq$$

renz gilt. —

* Anmerk. 1. Gleichung (7) nimmt

$$\text{die lösbare Form } u^4 + \frac{1}{2}$$

alsdann auf die Lösung

** Anmerk. 2. $2 m_a > a > \rho_a.$

α , und der Factor von ρ

$$\left(\sin \alpha + \cos \alpha \right)^2$$

$\left(\right)^2$ ist. —

$$1 + 2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta$$

$$\cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma \cdot \cos \gamma + \cos^2 \gamma, \text{ und der}$$

$$\cos \gamma)$$

= 0 ist; den beiden allein

sprechen die Winkel
also

ist, wo γ_2 für die Diffe-

$$\text{mithin } \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \left(\frac{u^2 - 1}{2} \right)^2,$$

eine numerische Wert $u = a$ führt

für welchen $(m_a - m_b) = \rho$ ist. —

