

BEITRÄGE

zur

Determination der Elemente des Dreiecks

von

Wilhelm Algenstaedt,
Oberlehrer.

Teil 3 (Schluss).



DOBERAN.

Druck von Herm. Rehse & Co.
1896.

1896. Progr. Nr. 664.

664 a

900
1 (1896)

BEITRÄGE

Beiträge zur Kenntnis der Pflanzen des Districts

Wunderlich, Albert

1888

1888

1888

DOBERAN

Verlag von H. H. H. H.

1888



$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = h_a \cdot \frac{\sin \gamma + \cos \gamma}{\sin \gamma \cdot \cos \gamma}$, und der Factor von h_a ein Minimum für $\sin \gamma = \cos \gamma$; mithin ist $\rho_a + \rho \geq h_a \cdot 2 \sqrt{2}$.

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad h_a = c \text{ (bez. } = b); \text{ vergl. (4) ff. —}$$

$$\rho_a - \rho \geq h_a.$$

Es ist

$$(2) \quad \rho_a - \rho = h_a \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$. $\rho_a - \rho = h_a \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}$, und der Factor von h_a ein Minimum, und zwar $= \frac{1}{4}$, für $\lim \alpha = 0$; $\rho_a - \rho \geq h_a$, jenachdem $\cos \alpha \leq \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)^*$ ist.

$\beta = \gamma$. $\rho_a - \rho = h_a \cdot 2 \cot^2 \gamma$ und $\rho_a - \rho \geq h_a$, jenachdem $\cot \gamma \geq \frac{1}{2} \sqrt{2}$, oder $\gamma \leq 54^\circ 44' 8''^{***}$ ist. —

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = h_a \cdot \frac{2}{\sin 2\gamma}$, oder $\geq 2 \cdot h_a$. Das Minimum tritt ein, wenn $\gamma = 45^\circ$ ist. —

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad h_a = c, \text{ bez. } h_a = b; \text{ vergl. 1, (3) und (6). —}$$

$$\rho_a + \rho \geq h_c.$$

Es ist

$$(3) \quad \rho_a + \rho = h_c \cdot \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta}^{***}. —$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho = h_c \cdot \frac{1 + 2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \text{ und } \frac{3}{2} h_c > \rho_a + \rho > h_c. —$$

$$\alpha = \gamma. \quad h_c = h_a. —$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho = h_c \cdot \frac{1}{\sin^2 \gamma}, \text{ mithin } \rho_a + \rho > h_c. —$$

* Folgt auch aus § II, 2, (4); $\rho_a = h_c$, bez. $= h_b$. —

** Anmerk. 1. Vergl. § I, 1, (1). Es ist $h_b + h_c$ für $r = \text{const.}$ ein Maximum in demselben Dreieck, in welchem $\rho_a - \rho = h_a$ ist. —

*** Anmerk. 2. $\rho_a + \rho > \frac{1}{2} h_c$, da, für verschwindend ρ und $\lim \beta = 180^\circ$, ρ_a als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete $\frac{1}{2} h_c > \frac{1}{2} h_c$ ist. —

$$\begin{aligned} \alpha = 90^\circ. & \quad \rho_a + \rho = h_c (1 + \operatorname{tg} \gamma), \text{ mithin } \rho_a + \rho > h_c. \text{ —} \\ \beta = 90^\circ. & \quad h_c = a. \end{aligned}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho = h_c \cdot \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ mithin } \rho_a + \rho > h_c. \text{ —}$$

$$\rho_a - \rho \geq h_c.$$

Es ist

$$(4) \quad \rho_a - \rho = h_c \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho = h_c \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ mithin } \rho_a - \rho < h_c. \text{ —}$$

$$\alpha = \gamma. \quad h_c = h_a. \text{ —}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a - \rho = h_c \cdot \frac{\operatorname{cotg} \beta}{\sin \beta}, \text{ und } \rho_a - \rho \geq h_c, \text{ jenachdem } \cos \beta \geq \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

oder $\beta \geq 51^\circ 49' 38''$ ist. —

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad h_c = b \text{ (bez. } h_c = a). \text{ —}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho = h_c \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \text{ und der Factor von } h_c \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(5) \quad \cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0, \text{ und } \cos \alpha = 0,543699 \text{ ist; mithin ist}$$

$$\rho_a - \rho \geq h_c, \text{ jenachdem } \alpha \geq 57^\circ 3' 51'' \text{ ist. —}$$

3.

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \rho_a + \rho &= w_a \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \\ (2) \quad \rho_a - \rho &= w_a \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \\ (3) \quad \rho_a + \rho &= w_c \cdot \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta} \\ (4) \quad \rho_a - \rho &= w_c \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta} \end{aligned} \right\} \rho_a \pm \rho \geq w_a (w_c). * \text{ —}$$

* Vergl. die Anmerk. zu § V, 3. —

$$4. \quad \left. \begin{aligned} (1) \quad \rho_a \pm \rho &= m_a \cdot \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta \mp \gamma}{2}}{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}} \\ (2) \quad \rho_a \pm \rho &= m_c \cdot \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta \mp \gamma}{2}}{\sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos \gamma + \cos^2 \gamma}} \end{aligned} \right\} \rho_a \pm \rho \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} m_a (m_c).^*$$

5. $\rho_a \pm \rho \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} r$. Vergl. § V, 5, und § VI, 5. —

6. $\rho_a + \rho \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \rho_b$. Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho = \rho_b \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right). —$$

$\alpha = \beta$. $\rho_a + \rho = \rho_b \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \alpha \right)$, und der Factor von ρ_b gleich 1, wenn

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{3}, \text{ und } \alpha = 60^\circ \text{ ist; mithin ist}$$

$$\frac{4}{3} \rho_b > \rho_a + \rho > \rho_b. —$$

$$\alpha = \gamma. \quad \rho_a + \rho = \rho_b \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \text{ und}$$

$$\rho_a + \rho \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \rho_b, \text{ jenachdem } \operatorname{tg} \alpha \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sqrt{2}^{**} \text{ ist. —}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho = \rho_b \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2}}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}, \text{ und}$$

$$\rho_a + \rho \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \rho_b, \text{ jenachdem } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sqrt{\sqrt{2} - 1}^{**} \text{ ist. —}$$

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = \rho_b \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$, und der Factor von ρ_b im allgemeinen > 1 , mithin $\rho_a + \rho > \rho_b$. —

$$\beta = 90^\circ, \quad \rho_a + \rho = \rho_b \cdot \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ und der Factor von } \rho_b \text{ im allgemeinen ein}$$

echter Bruch, mithin $\rho_a + \rho < \rho_b$. —

* Vergl. die Anmerk. zu § V, 3. —

** Anmerk. Für $\alpha = \gamma$ ist $\rho_a = \rho_b$; das Resultat war also auch durch 2. (2) ff. gegeben. — Für $\beta = \gamma$ ist $\rho_b = \rho_a$; mithin gelten auch die Betrachtungen von 2. (1) ff. —

$\gamma = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = \rho_b \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, und der Factor von ρ_b gleich 1, wenn $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ ist; es ist also

(3) $\rho_a + \rho \geq \rho_b$, jenachdem $\alpha \geq 36^\circ 52' 12''$, bez. $\leq 90^\circ - 36^\circ 52' 12''^*$ ist. —

$\rho_a - \rho = \rho_b \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$. — Für das gleichschenkelige Dreieck vergl. 2., da ρ_a (bez. ρ_b) = h_c , h_b (bez. h_a) ist. —

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = \rho_b \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}$ und $\rho_a - \rho > \rho_b$. —

$\beta = 90^\circ$. $\rho_a - \rho < \rho_b$. —

$\gamma = 90^\circ$. $\rho_a - \rho \geq \rho_b$, jenachdem $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}$ ist.* —

7. $\rho_a + \rho \geq s$.

Es ist

(1) $\rho_a + \rho = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$. —

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$. $\rho_a + \rho = s \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$, und der Factor von s ein Maximum und = 1 für $\lim \alpha = 90^\circ$; mithin ist $\rho_a + \rho < s$. —

$\beta = \gamma$. $\rho_a + \rho = s \cdot \cotg \gamma \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \right)$, und der Factor von s gleich 1, wenn

(2) $\operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - 1 = 0$, oder $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 0,47463$ ist; alsdann ist $\rho_a + \rho \geq s$, jenachdem $\gamma \leq 50^\circ 23' 26''$ ist. —

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = s \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$, und = s , wenn $\lim \gamma = 0^\circ$ und $\lim \gamma = 90^\circ$ ist; ferner ist der Factor von s ein Maximum, wenn $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} - 1$ ist; mithin ist $s \cdot 2(2 - \sqrt{2}) \geq \rho_a + \rho > s$. —

* Anmerk. Der Complementwinkel gilt für $\rho_b + \rho$, verglichen mit ρ_a . —

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (3) \quad \rho_a + \rho = s \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ und } \rho_a + \rho < s, \text{ da der Factor von } s$$

ein echter Bruch ist. —

$$\rho_a - \rho \geq s.$$

Es ist

$$(4) \quad \rho_a - \rho = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right).$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad \rho_a - \rho = s \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right), \text{ und } \rho_a - \rho < s, \text{ da der Factor}$$

von s ein echter Bruch ist. —

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a - \rho = s \cdot \frac{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } s \text{ gleich } 1, \text{ wenn}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + 1 = 0, \text{ oder } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 0,37150 \text{ ist;}$$

mithin ist

$$\rho_a - \rho \geq s, \text{ jenachdem } \gamma \geq 40^\circ 45' 36'' \text{ ist. —}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad (6) \quad \rho_a - \rho = s \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \text{ und der Factor von } s \text{ ein Minimum f\u00fcr}$$

$\gamma = 45^\circ$; alsdann ist

$$s \cdot 2(\sqrt{2} - 1) \leq \rho_a - \rho < s. —$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho = s \cdot \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ mithin } \rho_a - \rho < s, \text{ da der Factor von } s \text{ ein}$$

echter Bruch ist. —

$$8. \quad \rho_a + \rho \geq s_a.$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho = s_a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} + 1 \right).$$

$$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha. \quad \rho_a + \rho = s_a \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich } 1, \text{ wenn}$$

(2) $\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 = 0^*$; mithin ist $\rho_a + \rho \geq s_a$, jenachdem $\alpha \geq 34^\circ 33' 44''$ ist. —

$\beta = \gamma$. $\rho_a + \rho = s_a \cdot \cotg \gamma \cdot \left(\cotg^2 \frac{\gamma}{2} + 1 \right)$, und $\rho_a + \rho \geq s_a$, jenachdem (angenehert) $\gamma \geq 71^\circ 30'$ ist. —

$\alpha = 90^\circ$. (3) $\rho_a + \rho = s_a \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} + 1 \right)$, und der Factor von s_a ein Minimum für $\cotg \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} + 1$; mithin ist $\rho_a + \rho \geq s_a \cdot 2(2 + \sqrt{2})$. —

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ$. (4) $\rho_a + \rho = s_a \cdot \frac{2}{\cotg \frac{\alpha}{2} - 1}$, und $\rho_a + \rho \geq s_a$, jenachdem

$\cotg \frac{\alpha}{2} \leq 3$ ist, (vergl. § I, 3, (4)). —

$\rho_a - \rho \geq s_a$.

Es ist

(5) $\rho_a - \rho = s_a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} - 1 \right)$.

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$. $\rho_a - \rho = s_a \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$, und der Factor von s_a gleich 1, wenn

$\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$ ist. —

$\beta = \gamma$. $\rho_a - \rho = s_a \cdot \frac{\left(1 - \cotg^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2}{2 \cotg \frac{\gamma}{2}}$, und ist der Factor von s_a gleich 1, wenn

(6) $\cotg^4 \frac{\gamma}{2} - 2 \cotg^2 \frac{\gamma}{2} - 2 \cotg \frac{\gamma}{2} + 1 = 0$; vergl. 7, (5). —

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = s_a \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} - 1 \right)$, und der Factor von s_a ein Minimum für $\cotg \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} + 1$; mithin ist

(7) $\rho_a - \rho \geq s_a \cdot 2(\sqrt{2} + 1)$. —

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = s_a \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cotg \frac{\alpha}{2} - 1}$, und

* Vergl. § I, 3, (2). —

$\rho_a - \rho \geq s_a$, jenachdem $\cotg \frac{\alpha}{2} \leq 2$ ist. —

$\rho_a + \rho \geq s_c$. —

Es ist

$$(8) \rho_a + \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\gamma}{2} \right).$$

$\alpha = \beta$. $\rho_a + \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \alpha \right)$, und $\rho_a + \rho > s_c$. —

$\alpha = \gamma$. $\rho_a + \rho = s_c \cdot \left(\tg \alpha + \tg \frac{\alpha}{2} \right)$, und der Factor von s_c gleich 1, wenn

$$(9) \tg^3 \frac{\alpha}{2} - \tg^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \tg \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \text{ oder } \tg \frac{\alpha}{2} = 0,31111045 \text{ ist; mithin ist}$$

$\rho_a + \rho \geq s_c$, jenachdem $\alpha \geq 34^\circ 33' 44''^*$ ist. —

$\beta = \gamma$. $\rho_a + \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\gamma}{2} + \tg \frac{\gamma}{2} \right)$, und $> 2 \cdot s_c$. —

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = s_c \cdot \frac{1 + 2 \tg \frac{\gamma}{2} - \tg^2 \frac{\gamma}{2}}{1 - \tg \frac{\gamma}{2}}$, und $\rho_a + \rho > s_c$. —

$\beta = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = s_c \cdot \left(1 + \tg \frac{\gamma}{2} \right)$, und $2 \cdot s_c > \rho_a + \rho > s_c$. —

$\gamma = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} + 1 \right)$, und $\rho_a + \rho > 2 \cdot s_c$. —

$\rho_a - \rho \geq s_c$.

Es ist

$$(10) \rho_a - \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} - \tg \frac{\gamma}{2} \right).$$

$\alpha = \beta$. $\rho_a - \rho = s_c \cdot \operatorname{cosec} \alpha$, und $\rho_a - \rho > s_c$. —

$\alpha = \gamma$. $s_c = s_a$. —

$\beta = \gamma$. $\rho_a - \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\gamma}{2} - \tg \frac{\gamma}{2} \right)$, und $\rho_a - \rho \geq s_c$, jenachdem

$$\tg \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2} \quad (\sqrt{5} - 1) \text{ ist. —}$$

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = s_c \cdot \frac{\cotg^2 \frac{\gamma}{2} + 1}{\cotg \frac{\gamma}{2} (\cotg \frac{\gamma}{2} - 1)}$, und $\rho_a - \rho > s_c$. —

$\beta = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = s_c \cdot \left(1 - \tg \frac{\gamma}{2} \right)$, mithin $\rho_a - \rho < s_c$. —

* Vergl. § I, 3, (2). —

$\gamma = 90^\circ$. $\rho_a - \rho = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\beta}{2} - 1 \right)$, und $\rho_a - \rho \geq s_c$, jenachdem $\cotg \frac{\beta}{2} \geq 2$ ist.

9. $\rho_a + \rho \geq \sqrt{F}$.

Es ist

$$(1) \rho_a + \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}. -$$

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = \alpha$. $\rho_a + \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{\sin \frac{3}{2} \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$, und der Factor von $\sqrt{F}$ gleich 1, wenn

(2) $(1 - \cos \alpha) \cdot (2 \cos \alpha + 1)^2 = (1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ist; mithin ist

$\rho_a + \rho \geq \sqrt{F}$, jenachdem α (angenähert) $\geq 25^\circ$ ist. —

$\beta = \gamma$. $\rho_a + \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{4 \cos \gamma}{\sin \gamma \sqrt{2 \sin 2 \gamma}}$, und der Factor von $\sqrt{F}$ gleich 1, wenn

(3) $\sin^6 \gamma + 16 \sin^2 \gamma - 16 = 0$, und $\rho_a + \rho \geq \sqrt{F}$, jenachdem $\gamma \geq 76^\circ 44'$ ist.

$\alpha = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{2(\sin \gamma + \cos \gamma)}{\sqrt{1/2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma}}$, und der Factor von $\sqrt{F}$ ein Minimum

für $\gamma = 45^\circ$; mithin ist $\rho_a + \rho \geq \sqrt{F} \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{8}$. —

$\left. \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ$. $\rho_a + \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{\sin 2 \alpha}}$, und $\rho_a + \rho \geq \sqrt{F}$, jenachdem $\cos \alpha \leq \frac{2}{5} \sqrt{5}^*$ ist.

$\rho_a - \rho \geq \sqrt{F}$.

Es ist

$$(4) \rho_a - \rho = \sqrt{F} \cdot \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}. ** -$$

§ VIII.

1. $\rho_a + \rho_b \geq a$.

Es ist

$$(1) \rho_a + \rho_b = a \cdot \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \alpha}.$$

* Anmerk. 1. Für $\gamma = 90^\circ$ ist $(a - b) \geq \sqrt{F}$, jenachdem $\frac{1}{5} \sqrt{5} \geq \sin \alpha \geq \frac{2}{5} \sqrt{5}$ ist. Im Dreieck $\gamma = 90^\circ$

$\alpha = 26^\circ 33' 54''$ (bez. $\alpha = 90^\circ - 26^\circ 33' 54''$) ist also $(a - b) = \rho_a + \rho$, (bez. $= \rho_b + \rho$). —

** Anmerk. 2. Die Betrachtungen über das gleichschenkelige und rechtwinkelige Dreieck führen zu analogen Ergebnissen, wie in (1) ff. —

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho_b = a \cdot 2 \sin \alpha, \text{ mithin } \rho_a + \rho_b < 2a. -$$

$$\alpha = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = a \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}, \text{ mithin } \rho_a + \rho_b > a. -$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = a \cdot \frac{1 + \cos \gamma}{\sin 2\gamma}, \text{ und der Factor von } a \text{ ein Minimum, wenn}$$

$$(2) \cos^3 \gamma + 2 \cos^2 \gamma - 1 = 0, \text{ oder } \cos \gamma = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ ist; dann ist}$$

$$\rho_a + \rho_b \geq a \cdot \frac{1}{4} \sqrt{2(5\sqrt{5} + 11)}; \text{ vergl. 2, (1) und 9, (1). -}$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = a \cdot (1 + \cos \gamma), \text{ mithin } 2a > \rho_a + \rho_b > a. -$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = a \cdot \frac{1 + \cos \gamma}{\cos \gamma}, \text{ mithin } \rho_a + \rho_b > 2a. -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = a \cdot \operatorname{cosec} \alpha. -$$

$$(\rho_a - \rho_b) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} a. * \quad \text{Es ist}$$

$$(3) (\rho_a - \rho_b) = a \cdot \pm \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha}. **$$

$$(\rho_a \pm \rho_b) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c. \quad \text{Es ist } (\rho_a \pm \rho_b) = c \cdot \pm \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \gamma}. **$$

$$2. \quad \rho_a + \rho_b > \frac{1}{2} h_a. \quad \text{Es ist}$$

$$(1) \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \frac{\cotg \frac{\gamma}{2}}{\sin \beta}. ***$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \beta}, \\ \alpha = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \frac{\cotg \frac{\gamma}{2}}{\sin 2\gamma}, \\ \beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \frac{\cotg \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma}, \end{array} \right\} \text{ mithin } \rho_a + \rho_b > h_a. -$$

* Anmerk. 1. $(\rho_a - \rho_b) = 0$, wenn $\alpha = \beta$. Für $\alpha (\beta) = 90^\circ$ ist $(\rho_a - \rho_b) > 0$. -

** Vergl. die Anmerk. zu § VII, 6. (4)

*** Anmerk. 2. $\rho_a + \rho_b$ ist für $h_a = \text{const.}$ ein Minimum für $\lim \gamma = 180^\circ$; der Factor von h_a erscheint alsdann unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, nimmt aber nach bekannter Methode (Schlömilch, Höhere Analysis, V) den Wert $\frac{1}{2}$ an. -

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \frac{\cotg \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ ein Minimum, wenn}$$

$$\cos^2 \gamma + \cos \gamma - 1 = 0, \text{ oder } \cos \gamma = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ ist;}$$

$$\text{mithin ist } \rho_a + \rho_b \geq h_a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2(5\sqrt{5} + 11)}. -$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} \\ \gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = h_a \cdot \operatorname{cosec} \beta \end{array} \right\} \text{ mithin } \rho_a + \rho_b > h_a. -$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq h_a.$$

Es ist

$$(2) (\rho_a - \rho_b) = h_a \cdot \pm \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho_b = 0. -$$

$$\alpha = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b) = h_a \cdot \mp \frac{\cos \frac{3}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 2 \alpha}, \text{ und der Factor von } h_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}, \text{ bez. } = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ ist; es ist also}$$

$$(2a) (\rho_a - \rho_b) \geq h_a, \text{ jenachdem } 45^\circ \geq \alpha \geq 72^\circ 58' 7'' \text{ ist.}^* -$$

$$\beta = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b) = h_a \cdot \pm \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \gamma}{\sin^2 \gamma}, \text{ und}$$

$$\rho_a - \rho_b \geq h_a, \text{ jenachdem } \cos \gamma \geq \frac{2}{3} \text{ ** ist. } -$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho_b = h_a \cdot \sec \gamma, \text{ also } \rho_a - \rho_b > h_a. -$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho_b = h_a, \text{ also konstant. } -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho_b = h_a \cdot (\tg \alpha - 1), \text{ mithin } \rho_a - \rho_b \geq h_a, \text{ jenachdem } \tg \alpha \geq 2 \text{ ist.}$$

* Anmerk. 1. Da $\rho_a = h_b$ ist, würde man das Resultat auch aus § II 3. (3) ableiten können. —

** Anmerk. 2. Vergl. § I, 5, (1): Im Dreieck $\beta = \gamma$ besteht also die Proportion $\rho_a - \rho_b : a - b = h_a : s_a$, oder

$$s_a : s_b = \frac{1}{\rho_a} : \frac{1}{\rho_b}; \text{ (vergl. auch § V, 5, Anmerk.). } -$$

$$\rho_a + \rho_b \geq 2 h_c. *$$

Es ist

(3) $\rho_a + \rho_b = h_c \cdot \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$, und der Factor von h_c ein Minimum für $\alpha = \beta$; gleichzeitig ist dann $\rho_a + \rho_b \text{ constant} = 2 h_c$. —

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma$. $\rho_a + \rho_b = h_c \cdot \frac{1}{2(1 - \cos \gamma) \cdot \cos \gamma}$, und der Factor von h_c ein Minimum, wenn $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ ist; mithin ist

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b \geq 2 h_c. —$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = h_c \cdot \frac{2}{\sin 2\alpha}. —$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq h_c. \quad \text{Vergl. (2). —}$$

$$3. \quad \rho_a + \rho_b \geq w_a$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho_b = w_a \cdot \frac{(1 + \cos \gamma) \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

$\alpha = \beta$. $\rho_a + \rho_b = w_a \cdot \frac{\sin \frac{3}{2}\alpha}{\cos \alpha}$, und der Factor von w_a gleich 1, wenn

$$(2) \quad \sin^3 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} = 0, \text{ oder } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1);$$

mithin ist $\rho_a + \rho_b \geq w_a$, jenachdem $\alpha \geq 36^\circ$ ist. —

$$\beta = \gamma. \quad w_a = h_a. \quad \text{Vergl. 2. (1). —}$$

$$\alpha = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = w_a \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}, \text{ und der Factor von } w_a \text{ ein}$$

Minimum, wenn $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ ist; mithin ist $\rho_a + \rho_b \geq 2 w_a$. —

$$(\rho_a - \rho_b) \geq w_a. ** —$$

* Anmerk. 1. $\rho_a + \rho_b \geq 2 h_c$ ist auch geometrisch leicht nachweisbar. Es sei $\rho_b > \rho_a$; dann sind in dem rechtwinkligen Dreieck, gebildet aus ρ_b , c nebst Verlängerung und der Halbierungslinie des Aussenwinkels von γ , h_c und ρ_a parallel ρ_b , sind also ihren Scheitelabschnitten proportioniert; dieselben seien für ρ_a , h_c und ρ_b bezeichnet mit w , $v + w$ und $u + v + w$; dann ist, weil $\rho_b > \rho_a$, auch $u > v$; dann ist

$$\rho_a + \rho_b = h_c \frac{u + v + 2w}{v + w}, \text{ oder, wenn man } v \text{ für } u \text{ setzt, } \rho_a + \rho_b > 2 h_c. —$$

** Anmerk. 2. Hier und im folgenden Abschnitt 4 sind die Betrachtungen gekürzt, da sie sich vielfach mit den Ergebnissen von 2 und 3 decken. —

$$\rho_a + \rho_b = w_c \cdot \frac{(1 + \cos \gamma) \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq w_c.$$

$$4. \quad \rho_a + \rho_b \geq m_a.$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho_b = m_a \cdot \frac{2(1 + \cos \gamma)}{\sqrt{1 + 2 \cos(\beta - \gamma) \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}}.$$

$\alpha = \beta.$ $\rho_a + \rho_b = m_a \cdot \frac{4 \sin \alpha}{\sqrt{9 - 8 \sin^2 \alpha}},$ und der Factor von m_a ein Maximum für $\lim \alpha = 90^\circ$, mithin $\rho_a + \rho_b < 4 \cdot m_a$; ferner ist

$$\rho_a + \rho_b \geq m_a, \text{ je nachdem } \sin \alpha \geq \frac{1}{4} \sqrt{6}^* \text{ ist.}$$

$$\alpha = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = m_a \frac{2 \cotg \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{9 - 8 \sin^2 \alpha}}, \text{ und } \rho_a + \rho_b > 2 m_a.$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = m_a \frac{1}{1 - \cos \gamma}, \text{ und } \rho_a + \rho_b > m_a.$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq m_a.$$

$$\rho_a + \rho_b = m_c \frac{2(1 + \cos \gamma)}{\sqrt{1 + 2 \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos \gamma + \cos^2 \gamma}}.$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq m_c.$$

$$5. \quad \rho_a + \rho_b < 4 \cdot r.$$

Es ist

(1) $\rho_a + \rho_b = r \cdot 2(1 + \cos \gamma).$ und der Factor von r ein Maximum für $\lim \gamma = 0^\circ$, und gleich 1 für $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$; mithin ist $\rho_a + \rho_b \leq r$, je nachdem $\gamma \leq 120^\circ$ ist.

$$(\rho_a - \rho_b) = r \cdot 4 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho_b = 0.$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b) = r \cdot \mp \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \gamma, \text{ und}$$

$(\rho_a - \rho_b) \geq r$, je nachdem $\cos \gamma \leq \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1)$, bez. $\cos \gamma \leq \frac{1}{4} (\sqrt{13} - 1)$ ist; u. s. f. vergl. § VI, 6.

$$6. \quad \rho_a + \rho_b > 4 \rho.$$

Es ist

* Anmerk. Folgt auch aus § IV, 3, (4), da $\rho_b = m_c$ ist.

(1) $\rho_a + \rho_b = \rho \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right)$, und der Factor von ρ ein Minimum, wenn $\alpha = \beta$ und $\cos \alpha = 1$ ist. Es nimmt (1) dann die Form an

$$\rho_a + \rho_b = \rho \cdot \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} = 4 \cdot \rho. -$$

$$(\rho_a - \rho_b) = \rho \cdot \pm \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} - \cotg \frac{\beta}{2} \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho_b = 0. -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b) = \rho \cdot \mp \frac{(1 + \cos \gamma)(1 - 2 \cos \gamma)}{(1 - \cos \gamma) \cos \gamma}, \text{ und der Factor von } \rho \text{ gleich}$$

1, wenn $\cos \gamma = \sqrt{2} - 1$, bez. $= \frac{1}{3} \sqrt{3}$ ist, (u. s. f. vergl. § VII, 2 und 6); mithin ist

$$(\rho_a - \rho_b) \geq \rho, \text{ jenachdem } 54^\circ 44' 8'' \geq \gamma \geq 65^\circ 31' 48'' \text{ ist.} -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) > \rho. -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) = \rho \cdot \pm \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}, \text{ und der Factor von } \rho \text{ gleich}$$

1, wenn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, bez. $\sin \alpha = \frac{5}{9}$ ist; dann ist

$$(\rho_a - \rho_b) \geq \rho, \text{ jenachdem } 36^\circ 52' 12'' \geq \alpha \geq 53^\circ 7' 48'' \text{ ist. Vergl.}$$

§ VII, 7 und 8. -

$$7. \quad \rho_a + \rho_b \geq \rho_c.$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho_b = \rho_c \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2} \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho_b = \rho_c \cdot 2 \tg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}, \text{ und } \rho_a + \rho_b \geq \rho_c, \text{ jenachdem}$$

$$\tg \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{5} \sqrt{5} \text{ ist}^*. -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad \rho_a, \text{ bez. } \rho_b = \rho_c. -$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b > \rho_c, \text{ da schon an sich } \rho_a, \text{ bez. } \rho_b > \rho_c \text{ ist.} -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = \rho_c \cdot \left(\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2} \right), \text{ und der Factor von } \rho_c \text{ ein Minimum, wenn}$$

* Anmerk. In Verbindung mit § I, 5, (1) ergibt sich für das Dreieck $\alpha = \beta$ und $\tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5} \sqrt{5}$ die Beziehung
 $c - b : sc = \rho_c : \rho_a + \rho_b. -$

<

<

<

<

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) < s. \quad -$$

$$9. \quad \rho_a + \rho_b \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} s_a.$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\tg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} + 1 \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot 2 \cotg \frac{\gamma}{2}. \text{ und } \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} s_a, \text{ je nachdem } \tg \frac{\gamma}{2} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 2 \text{ ist. } -$$

$$\alpha = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot \frac{1 + \tg^2 \frac{\alpha}{2}}{\tg \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - \tg^2 \frac{\alpha}{2} \right)}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ ein Minimum,}$$

wenn $\tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ ist; mithin ist

$$\rho_a + \rho_b \geq s_a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2(5\sqrt{5} + 11)}^*. \quad -$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot \frac{1}{2} \left(\tg^3 \frac{\gamma}{2} + \tg \frac{\gamma}{2} \right), \text{ und}$$

$$\rho_a + \rho_b > s_a. \quad -$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot \frac{2 \cotg^2 \frac{\gamma}{2}}{\cotg \frac{\gamma}{2} - 1}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ ein Minimum, wenn}$$

 $\cotg \frac{\gamma}{2} = 2$, und $\gamma = 53^\circ 7' 48''$ ist; alsdann ist $\rho_a + \rho_b \geq 8 \cdot s_a$. —

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\tg \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \left| \right. \rho_a + \rho_b > s_a. \quad -$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = s_a \cdot \left(\tg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} + 1 \right) \left| \right. \rho_a + \rho_b > s_a. \quad -$$

$$(\rho_a - \rho_b) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} s_a.$$

Es ist

$$(2) \quad (\rho_a - \rho_b) = s_a \cdot \pm \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\tg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} - 1 \right).$$

$$\alpha = \beta. \quad (\rho_a - \rho_b) = 0. \quad -$$

$$\alpha = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b) = s_a \cdot \pm \left(\tg \alpha - \cotg \frac{\alpha}{2} \right), \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1, wenn}$$

* Anmerk. Das Minimum ergibt sich auch aus 1, (2), da, für $\alpha = \gamma$, $s_a = \frac{b}{2}$ ist. — Vergl. auch 2, (1) ff. und VII, 2, (4). —

$$(3) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \pm 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \mp 1 = 0, \text{ oder } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,67513, \text{ bez.}$$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,460805$ ist; mithin ist

$$(\rho_a - \rho_b) \geq s_a, \text{ jenachdem } 49^\circ 28' 48'' \geq \alpha \geq 68^\circ 2' 56'' \text{ ist. —}$$

$$\beta = \gamma. \quad \rho_a - \rho_b = s_a \cdot \left(\cotg \gamma \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} - 1 \right) \cotg \frac{\gamma}{2}, \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1, wenn}$$

$$(4) \cotg^3 \frac{\gamma}{2} - 3 \cotg \frac{\gamma}{2} - 2 = 0 \text{ ist; mithin ist}$$

$$\rho_a - \rho_b \geq s_a, \text{ jenachdem } \cotg \frac{\gamma}{2} \geq 2 \text{ ist; } \rho_b - \rho_a < s_a. —$$

$$\alpha = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho_b > s_a. —$$

$$\beta = 90^\circ. \quad \rho_b - \rho_a = s_a \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \text{ mithin}$$

$$s_a < \rho_b - \rho_a < 2 \cdot s_a. —$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a - \rho_b = s_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} - 1 \right), \text{ und der Factor von } s_a \text{ gleich 1,}$$

$$\text{wenn } \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{17} + 3)^* \text{ ist; dann ist } \rho_a - \rho_b \geq s_a, \text{ jenachdem } \alpha \geq 58^\circ 37' 58''$$

$$\text{ist; } \rho_b - \rho_a < s_a. —$$

$$\rho_a + \rho_b > 2 s_c.$$

Es ist

$$(5) \rho_a + \rho_b = s_c \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right), \text{ und der Factor ein Minimum für}$$

$$\alpha = \beta; \text{ es ist also } \rho_a + \rho_b = s_c \cdot 2 \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}, \text{ also } > 2 s_c. —$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b \geq s_c \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2(5\sqrt{5} + 11)}, \text{ da } s_c = s_a, \text{ bez. } = s_b \text{ ist; vergl. 9, (1) ff. —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = s_c \cdot \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \text{ und } \rho_a + \rho_b > 2 \cdot s_c. —$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = s_c \cdot \frac{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} + 1}{\cotg \frac{\alpha}{2} - 1}, \text{ und der Factor von } s_c \text{ ein Minimum,}$$

* Anmerk. Mit Berücksichtigung von § I, 5, (2) folgt: für $\gamma = 90^\circ$ ist $\rho_a - \rho_b = a - b$. — Vergl. auch § I, 6, (5) und 10, (5). —

sobald $\cotg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} + 1$ ist; mithin ist $\rho_a + \rho_b \geq s_c \cdot 2 (\sqrt{2} + 1)$. —

$$(\rho_a - \rho_b) \geq s_c.$$

Es ist

$$(6) (\rho_a - \rho_b) = s_c \cdot \pm \left(\cotg \frac{\beta}{2} - \cotg \frac{\alpha}{2} \right). —$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho_b = 0. —$$

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b) = s_c \cdot \pm \left(\tg \frac{\gamma}{2} - \cotg \frac{\gamma}{2} \right),$ und der Factor von s_c gleich 1, wenn

$$(7) \tg^3 \frac{\gamma}{2} \pm 3 \tg^2 \frac{\gamma}{2} - \tg \frac{\gamma}{2} \pm 1 = 0 \text{ ist; n. s. f. vergl. 9, (3). —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) = s_c \cdot \frac{2 \tg \frac{\gamma}{2}}{1 - \tg \frac{\gamma}{2}} \text{ und } (\rho_a - \rho_b) \geq s_c, \text{ sobald } \tg \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{3} \text{ ist.}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) = s_c \cdot \pm \frac{2 \cotg \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\alpha}{2} + 1}{\cotg \frac{\alpha}{2} - 1}, \text{ und der Factor von } s_c$$

gleich 1, wenn $\cotg \frac{\alpha}{2} = 2$, bez. $\cotg \frac{\alpha}{2} = 3$ ist; mithin ist

$$(\rho_a - \rho_b) \geq s_c, \text{ jenachdem } 36^\circ 52' 12'' \leq \alpha \leq 53^\circ 7' 48'' \text{ ist. —}$$

$$10. \quad \rho_a + \rho_b \geq \sqrt{F}.$$

Es ist

$$(1) \quad \rho_a + \rho_b = \sqrt{F} \cdot \frac{2(1 + \cos \gamma)}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a + \rho_b = \sqrt{F} \cdot \frac{4 \sin \alpha}{\sqrt{2 \cdot \sin 2 \alpha}}, \text{ und der Factor von } \sqrt{F} \text{ gleich 1, wenn}$$

$\sin \alpha = \frac{1}{17} \cdot \sqrt{17}$ ist; mithin ist $\rho_a + \rho_b \geq \sqrt{F}$, jenachdem $\alpha \geq 14^\circ 2' 10''$ ist. —

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad \rho_a + \rho_b = \sqrt{F} \cdot \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma \cdot \sqrt{\sin \gamma \cdot \cos \gamma}},$ und der Factor von $\sqrt{F}$ ein Minimum, wenn

$$(2) \sin^2 \gamma \cdot \sin 2 \gamma + (1 + \cos \gamma) \cdot \sin 3 \gamma = 0, \text{ oder } \cos \gamma = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1),$$

mithin $\gamma = 68^\circ 31' 45''$ ist; es ist also

$$\rho_a + \rho_b \geq \sqrt{F} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3(5 + 3\sqrt{3})} \sqrt[4]{12}. —$$

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ.$ $\rho_a + \rho_b = \sqrt{F} \cdot \frac{2(1 + \cos \gamma)}{\sqrt{\sin 2\gamma}}$, und der Factor von $\sqrt{F}$ ein Minimum, wenn

$$(3) \quad 2 \sin^2 \gamma \cdot \cos \gamma + (1 + \cos \gamma) \cdot (2 \cos^2 \gamma - 1) = 0, \text{ oder } \cos \gamma = \frac{1}{2} \text{ ist;}$$

alsdann ist $\rho_a + \rho_b \geq \sqrt{F} \cdot \sqrt{6\sqrt{3}}.$ —

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b = \sqrt{F} \cdot \frac{2}{\sqrt{\sin 2\alpha}}, \text{ und } \rho_a + \rho_b \geq 2 \cdot \sqrt{F}. —$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq \sqrt{F}. \quad \text{Es ist}$$

$$(4) \quad (\rho_a - \rho_b) = \sqrt{F} \cdot \pm \frac{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sqrt{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}.$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho_b = 0. —$$

$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma.$ $(\rho_a - \rho_b) = \sqrt{F} \cdot \mp \frac{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \gamma}{\sin \gamma \cdot \sqrt{2 \sin 2\gamma}}$, und der Factor von $\sqrt{F}$ für die zwei Werte gleich 1, welche sich aus der Gleichung

$$(5) \quad (1 + \cos \gamma) \cdot (2 \cos \gamma - 1)^4 = (1 - \cos \gamma)^3 \cdot \cos^2 \gamma \text{ bestimmen. —}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) = \sqrt{F} \cdot \frac{2 \sin \gamma}{\sqrt{\sin 2\gamma}}, \text{ und } (\rho_a - \rho_b) \geq \sqrt{F}, \text{ jenachdem}$$

$$\sin \gamma \geq \frac{1}{5} \sqrt{5} \text{ ist. —}$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b) = \sqrt{F} \cdot \pm \frac{2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sqrt{\sin 2\alpha}}, \text{ und } (\rho_a - \rho_b) \geq \sqrt{F}, \text{ jenachdem}$$

$$\frac{1}{5} \sqrt{5} \geq \sin \alpha \geq \frac{2}{5} \sqrt{5} \text{ ist. —}$$

Anmerk. α ist der Winkel im Dreieck $\gamma = 90^\circ$, in welchem die Katheten im Verhältniß von 1:2 stehen. Vergl. auch § VII, 9, (3), Anmerk., und § VIII, 9, (4) Anmerk. —



$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ$. $\rho_a + \rho_b$
wenn

$$(3) 2 \sin^2 \gamma \cdot \rho$$

alsdann ist $\rho_a + \rho_b$

$$\gamma = 90^\circ. \quad \rho_a + \rho_b =$$

$$(\rho_a - \rho_b) \geq \sqrt{F}.$$

$$(4) (\rho_a - \rho_b)$$

$$\alpha = \beta. \quad \rho_a - \rho_b =$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \gamma. \quad (\rho_a - \rho_b)$$

die zwei Werte gleich 1

$$(5) (1 + \cos$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 90^\circ. \quad (\rho_a -$$

$$\sin \gamma$$

$$\gamma = 90^\circ. \quad (\rho_a - \rho_b)$$

$$\frac{1}{5} \sqrt{F}$$

Anmerk. α ist der Winkel im Dreieck
auch § VII, 9, (3), Anmerk.



Factor von $\sqrt{F}$ ein Minimum,

0, oder $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ ist;

$$2 \cdot \sqrt{F}. -$$

der Factor von $\sqrt{F}$ für

γ bestimmen. —

$\sqrt{F}$, jenachdem

$(\rho_a - \rho_b) \geq \sqrt{F}$, jenachdem

Verhältnis von 1:2 stehen. Vergl.