

**PROGRAMM**  
der  
**kgl. bayer. Studienanstalt zu Erlangen**

zum  
Schlusse des Schuljahres 1884/85.

**Die Kreisconchoiden**

von  
**H. Naegelsbach,**  
k. Gymnasialprofessor.

**Erlangen.**

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von E. Th. Jacob.

1885.



9er  
8(1885)



## Die Kreisconchoiden.

Im Nachstehenden wird eine Reihe von Curven behandelt, welche von hervorragender Bedeutung für die Winkeltheilung sind. Die Untersuchung gründet sich auf eine eindeutige, Cremona'sche Transformation der Ebene. Es ist dieselbe ein specieller Fall einer Transformation der Ebene, bei welcher alle Punkte einer Curve dritter Ordnung fest bleiben, und jeder Strahl eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt auf der Curve liegt, so in sich transformirt wird, dass die entsprechenden Punkte eine Involution bilden, deren Ordnungspunkte die beiden andern Schnittpunkte des Strahls mit der Curve sind. Die Beziehung ist also eindeutig, nur entsprechen dem Mittelpunkt des Strahlenbüschels alle Punkte der ersten Polare desselben, u. u. Zerfällt die Curve in einen Kreis und die unendlich ferne Gerade, so ergibt sich die hier benützte Transformation, welche im I. Abschnitt rein geometrisch definirt, und nach ihren Haupteigenschaften untersucht wird\*). Dabei ergibt sich, dass gewisse Kreise in sich selbst transformirt werden, was zu einer zweiten Definition Veranlassung gibt.

Im II. Abschnitt wird dann durch wiederholte Anwendung der Transformation mit alternirenden Polen aus dem Kreis eine Reihe von Curven erzeugt. Die erste ist die unter dem Namen

---

\*) Die Transformation lässt sich auch leicht durch stereographische Projektion auf die Kugel übertragen. Nimmt man den Kreis als Hauptkreis der Kugel, so entspricht ein sphärischer Pol desselben der unendlich fernen Geraden. An die Stelle des Strahlenbüschels tritt ein Kreisbüschel. Auf jedem Kreis desselben bilden die entsprechenden Punkte eine Involution, deren Ordnungspunkte jener Pol und der Schnitt mit dem Hauptkreis sind.

Kreisconchoide oder Paskals Schnecke bekannte Curve. Die folgenden, meines Wissens noch nicht untersuchten Curven dürften passend Kreisconchoiden höherer Ordnung genannt werden.

Im Abschnitt III. wird gezeigt, dass bei all diesen Transformationen gewisse Kreispaaire immer sich selbst wieder erzeugen, so dass alle der Reihe nach einander entsprechenden Punkte der Ebene entweder die Eckpunkte von diesen Kreispaairen eingeschriebenen regulären  $n$ —Ecken sind, oder die Kreispaaire durchlaufen. Dies würde auch Anlass zu einer dritten Definition geben.

Abschnitt IV enthält den Beweis der bemerkenswerthesten Eigenschaft der Curven. Die Kreisconchoide erster Ordnung ist bekanntlich dadurch ausgezeichnet, dass jede Gerade, welche durch den einen Pol geht und mit der Hauptachse einen beliebigen Winkel  $\alpha$  bildet, die Curve in 3 Punkten so schneidet, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte und des zweiten Poles mit der Geraden bezüglich die Winkel  $\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha + \pi}{3}, \frac{\alpha + 2\pi}{3}$

unter sich also die Winkel  $\frac{\pi}{3}$  bilden. Analog hat nun die Kreisconchoide  $n$ ter Ordnung die Eigenschaft, dass jede solche Gerade die Curve in  $n + 2$  Punkten so schneidet, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte und des zweiten Poles mit der Geraden beziehungsweise die Winkel  $\frac{\alpha}{n + 2}, \frac{\alpha + \pi}{n + 2}, \dots, \frac{\alpha + (n - 1)\pi}{n + 2}$ , unter sich also die Winkel  $\frac{\pi}{n + 2}$  bilden.

Im V. Abschnitt wird das Geschlecht der Curven und die Anzahl der Schnittpunkte je zweier derselben untersucht. Es zeigt sich, dass die reellen Punkte allein die nothwendigen Zahlen nicht liefern, dass aber jede Curve die unendlich fernen imaginären Kreispunkte als vielfache Punkte mit einer gemeinsamen Tangente enthält, und damit die nothwendige Ergänzung jener Zahlen gegeben ist.

Ist bis daher die Untersuchung rein geometrisch geführt worden, so werden nun schliesslich im Abschnitt VI noch die Gleichungen der Curven aufgestellt. Die Gleichungen in Polar-

coordinaten ergeben sich von selbst. Besonders geeignet zeigt sich ein Bipolarsystem, von dem aus leicht zu gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten übergegangen werden kann.

Ein Recursionsgesetz führt zur Aufstellung der independenten Form der Gleichung. Auch zeigt sich, dass in diesem Coordinatensystem die Curvengleichungen sich als Differenzen der Quadrate zweier ganzen rationalen Ausdrücke darstellen lassen, also in 2 rationale Faktoren zerfallen.

Zuletzt wird noch die Uebereinstimmung der Transformation mit der allgemeinen Theorie der Cremona'schen Transformation untersucht und dabei gefunden, dass hier der besondere Fall vorliegt, wo je zwei einfache Fundamentalpunkte in den unendlich fernen Kreispunkten so zusammenfallen, dass alle Transformationscurven sich in diesen Punkten berühren.

### I.

Es sei (Fig. 1)  $M$  der Mittelpunkt eines Kreises,  $AB = a$  ein Durchmesser desselben, und um  $A$  und  $B$  ebenfalls Kreise mit dem Halbmesser  $AB$  gezogen. Ich bezeichne die drei Kreise kurz mit  $K_m$ ,  $K_a$  und  $K_b$ , die Senkrechten die in  $A$  und  $B$  auf der  $AB$  errichtet, und also Tangenten an  $K_m$  und  $K_b$ , resp.  $K_a$  sind, mit  $T_a$  und  $T_b$ , und endlich die Durchschnittspunkte von  $K_a$  und  $K_b$  mit  $N$  und  $O$ , die Durchschnittspunkte von  $AB$  mit  $K_a$  und  $K_b$  durch  $R$  und  $R^1$ .

Liegt irgend eine Curve  $C_1$  mit diesen Kreisen in einer Ebene, so bekomme ich eine zweite Curve  $C_2$ , wenn ich jedem Punkt  $c_1$  der  $C_1$ , der aus  $A$  auf den  $K_m$  durch den Strahl  $Ac_1$  im Punkte  $c$  projectirt wird, einen Punkt  $c_2$  der  $C_2$  entsprechen lasse, welcher auf demselben Strahle so liegt, dass  $cc_2$  gleich und entgegengesetzt dem  $cc_1$  ist. Man kann auch sagen, jedem Punkt  $c_1$ , entspricht der Punkt  $c_2$ , welcher von ihm durch  $K_m$  und den unendlich fernen Punkt der  $Ac_1$  harmonisch getrennt ist. Fällt der Punkt  $c_1$  der  $C_1$  mit  $A$  zusammen, so wird der Strahl  $Ac_1$  eine Tangente der  $C_1$  in  $A$  und das entsprechende  $c_2$  liegt auf  $K_b$ . Berührt die  $C_1$  den  $K_m$  in  $A$ , so geht der Strahl  $Ac_1$  über in  $T_a$  und  $c_2$  fällt ebenfalls mit  $A$  zusammen.

Die Curven  $C_1$  und  $C_2$  nenne ich circular verbunden durch

den Strahlenbüschel A in Bezug auf  $K_m$ . Ich kann mir ebenso gut die  $C_1$  aus der  $C_2$  erzeugt denken als umgekehrt.

Jedem Punkt der  $C_1$ , der ausserhalb  $K_b$  auf einer Seite der AB und einer Seite der  $T_a$  liegt, entspricht ein Punkt der  $C_2$ , der ebenfalls ausserhalb des  $K_b$ , aber auf der andern Seite von AB und der andern Seite von  $T_a$  liegt. Jedem Punkt der  $C_1$ , der innerhalb  $K_b$  und ausserhalb  $K_m$  liegt, entspricht ein Punkt der  $C_2$ , der innerhalb des  $K_m$  auf derselben Seite von AB liegt, u. u. Abgesehen von Punkt A selbst, von dem schon oben gehandelt wurde, entspricht jedem Punkt der  $C_1$ , der auf  $K_b$  liegt, der Punkt A, und jeder Punkt, der auf  $K_m$  liegt, sich selbst.

Jedem Zweig der  $C_1$ , der durch einen andern Punkt als A in  $K_b$  eindringt, entspricht ein Zweig der  $C_2$ , der durch A in  $K_m$  eindringt u. u. Jedem Zweig, der  $K_b$  in irgend einem Punkt ausser A berührt, entspricht ein Zweig, für welchen A ein Rückkehrpunkt ist u. u.; jedem Zweig, der  $K_b$  in A berührt, ein Zweig, der  $K_m$  also auch  $K_b$  in A berührt. Dabei berührt in allen 3 Fällen der Zweig von  $C_2$  in A den Strahl, welcher von A nach dem Punkte geht, den der Zweig von  $C_1$  mit  $K_b$  gemeinsam hat, wie leicht zu beweisen. Berührt dabei  $C_1$  in dem Punkt der  $K_b$  den nach A gehenden Strahl, so ist A ein Wendepunkt der  $C_2$ .

Jedem Zweig der  $C_1$ , der durch einen andern Punkt als A in  $K_m$  eindringt, entspricht ein Zweig der  $C_2$ , der durch denselben Punkt aus  $K_m$  hinaustritt. Jedem Zweig, der  $K_m$  in einem andern Punkt als A von Aussen berührt, entspricht ein Zweig der  $C_2$ , der  $K_m$  in demselben Punkt von Innen berührt, u. u. Wenn ein Zweig der  $C_1$  durch B in  $K_m$  eintritt, also der entsprechende Zweig der  $C_2$  durch B aus  $K_m$  hinaustritt, schneiden sich beide Curven in B, und bilden mit  $K_m$  den nämlichen Winkel.

Dies lässt sich folgendermassen beweisen: Die Richtungen der 3 Curven im Punkt B werden durch ihre Tangenten in diesem Punkte gegeben. Wenn ich aber durch B zwei Gerade lege, die den nämlichen Winkel mit  $T_b$  bilden, und eine von ihnen als erzeugende Curve nehme, so muss die erzeugte die andere Gerade in B berühren. Denn sind Q, R, S die Durchschnitte eines durch

A gehenden Strahles beziehungsweise mit der Erzeugenden, dem  $K_m$  und der zweiten Geraden, so ist für die Punkte der Erzeugenden, die innerhalb  $K_m$  liegen,  $QR < RS$ ; für die ausserhalb liegenden  $QR > RS$ ; für B selbst aber fallen alle drei Punkte zusammen; wie sich leicht daraus ergibt, dass  $BR \perp QS$ , und im ersten Fall Winkel  $RBQ < SBR$ , im zweiten Fall  $RBQ > SBR$  ist.

Die  $C_2$  und  $C_1$  können, abgesehen von A und B und etwaigen imaginären Punkten, nur dann einen Punkt miteinander gemein haben, wenn  $C_1$  den  $K_m$  schneidet, oder wenn auf einem Strahl des Strahlenbüschels A zwei Punkte der  $C_1$  gleichweit von seinem Durchschnitt mit  $K_m$  entfernt liegen, in welchem Fall die Curven beide Punkte gemein haben.

A und B sind nur dann als gemeinschaftliche Punkte anzusehen, wenn ein Zweig der  $C_2$  einen Zweig der  $C_1$  in A oder B berührt. Dies ist bei A der Fall, wenn  $C_1$  denn  $K_b$  in A berührt, oder wenn ein Strahl des A, der  $C_1$  in A berührt, zugleich  $C_1$  in einem zweiten Punkt des  $K_b$  schneidet oder berührt, in welchem Fall dann die Curven beide Punkte gemeinsam haben. Bei B aber berühren sich beide Curven, wenn  $C_1$  den  $K_m$  in B berührt, oder wenn zwei Zweige der  $C_1$ , die sich in B schneiden, mit  $T_b$  gleiche Winkel bilden, in welchem Falle  $C_2$  beide Zweige in B berührt.

Zwei einander entsprechende Punkte  $c_1$  und  $c_2$  liegen immer gleichweit von B entfernt, also immer auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt B ist. Ist nämlich wieder c der Durchschnitt von  $c_1 c_2$  und  $K_m$ , so ist  $Bc \perp c_1 c_2$  und  $c_1 c = cc_2$ . Demnach wird jeder Kreis, dessen Mittelpunkt B ist, in sich selbst transformirt, und die Beziehung zwischen  $c_1$  und  $c_2$  lässt sich auch so auffassen, dass  $c_2$  der zweite Schnittpunkt der  $Ac_1$  mit dem Kreis ist, der um B mit dem Radius  $Bc_1$  beschrieben ist. Auch aus dieser Auffassung ergibt sich einfach, dass nur Punkte des  $K_m$  sich selbst entsprechen, nur Punkte der  $T_a$  mit den entsprechenden symmetrisch liegen in Bezug auf AB, und dass der Punkt A allen Punkten des  $K_b$  entspricht u. u.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass allemal Winkel  $Bc_1 c_2 = c_1 c_2 B$ , also  $Bc_1 A = Ac_2 B$  oder  $= 180 - Ac_2 B$  ist, je nachdem A zwischen  $c_2$  und  $c_1$  liegt oder nicht. Es liegen demnach  $c_1$

und  $c_2$  auf zwei Kreisen, welche beide über der Sehne AB den nämlichen Winkel fassen und symmetrisch zu AB liegen.

Wenn ich fortan die Drehung eines Winkels immer in dem nämlichen Sinn geschehen denke, (der des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt), und unter dem Winkel  $(Bz, zA)$ , ganz abgesehen von der Lage des Punktes A auf dem Strahl  $zA$ , den hohlen Winkel verstehe, den die beiden Strahlen  $Bz$  und  $zA$ , (in dieser Ordnung), miteinander bilden, so ist für jeden Punkt der beiden Curven  $(Bc_1, c_1A) = (Ac_2, c_2B)$ .

Sind  $C_1$  und  $C_2$  und  $D_1$  und  $D_2$  zwei Paare von Curven, die circular verbunden sind durch A in Bezug auf  $K_m$ , so wird jeder Berührung der  $C_1$  und  $D_1$  in A ein Punkt des  $K_b$  entsprechen, welchen  $C_2$  und  $D_2$  gemeinsam haben, u. u.

Ferner wird jeder Berührung der  $C_1$  und  $D_1$  in B eine Berührung der  $C_2$  und  $D_2$  in demselben Punkt entsprechen, und endlich jedem sonstigen gemeinsamen Punkt der  $C_1$  und  $D_1$  ein gemeinsamer Punkt der  $C_2$  und  $D_2$ . Wenn ich also A und B nur so oft als gemeinsame Punkte der Curven  $C_1$  und  $D_1$  ansehe, als sie sich in diesen Punkten berühren, so ist die Anzahl der Punkte, welche  $C_2$  und  $D_2$  gemeinsam haben, gleich der Anzahl der Punkte, welche  $C_1$  und  $D_1$  gemeinsam haben. Wenn ich demnach die Anzahl der gemeinsamen Punkte zweier Curven  $C_1$  und  $D_1$  kurz mit  $N(C_1, D_1)$  bezeichne, gilt die Gleichung  $N(C_1, D_1) = N(C_2, D_2)$ .

Wie  $C_2$  mit  $C_1$  durch A circular verbunden ist, kann ich auch eine zweite Curve  $C_3$  durch B mit  $C_2$  circular verbinden. In Bezug auf diese Curven gelten dann ganz die nämlichen Gesetze, nur ist überall statt A, B,  $K_b$ ,  $T_a$  u. s. w. zu setzen B, A,  $K_a$ ,  $T_b$  u. s. w.

## II.

Ich nehme nun als  $C_1$  den  $K_a = P_1$  selbst, so wird die mit ihm durch A circular verbundene  $C_2$  (Fig. 2) die unter dem Namen Paskals Schneckenlinie oder Kreiskonchoide bekannte Curve, die ich fortan mit  $P_2$  bezeichnen will. Es ist leicht einzusehen, dass unsere Transformation für diesen speciellen Fall zusammenfällt mit der gewöhnlichen Erzeugungsweise der Conchoide, wonach

auf jedem Strahl des Büschels A von seinem Schnittpunkt mit  $K_b$  a vorwärts und rückwärts aufgetragen wird.

Die  $P_2$  schneidet den  $K_m$  zweimal in A unter einem Winkel von  $30^\circ$ , und berührt ihn in B von Innen, weil  $K_a$  den  $K_b$  zweimal schneidet und den  $K_m$  in B von Aussen berührt. Den  $K_b$  schneidet und berührt sie nicht ausser in A, da  $K_a$  nicht durch A geht. Den  $K_a$  selbst berührt sie in B und schneidet ihn zweimal in Punkten der  $T_a$ . Die Curve ist 4ter Ordnung, da A ein Doppelpunkt ist, und auf jedem Strahl von A im Allgemeinen noch 2 Punkte der Curve liegen.

Die mit  $K_b$  durch den Strahlenbüschel B circular verbundene Curve ist der vorigen congruent und liegt mit ihr symmetrisch in Bezug auf NO.

Sind  $p_1$  und  $p_2$  entsprechende Punkte von  $P_1$  und  $P_2$ , so ist beständig Winkel  $RAp_1 = 2$ . ( $Bp_1, p_1A$ ). Während  $p_1$  den  $K_a$  von R aus durchläuft, wächst  $RAp_1$  von 0 bis  $2\pi$ , also ( $Bp_1, p_1A$ ) und der ihm gleiche ( $Ap_2, p_2B$ ) von 0 bis  $\pi$ .

Es soll nun weiter die ganze Reihe von Curven besprochen werden, von welchen jede mit der vorhergehenden und der folgenden circular verbunden ist, mit der einen durch A und mit der andern durch B. Ich werde diese Curven der Reihe nach mit  $P_1 (= K_a)$ ,  $P_2, P_3, \dots$  bezeichnen. Eine zweite, ebenso von  $K_b$  ausgehende Curvenreihe bezeichne ich mit  $P^1_1 (= K_b)$ ,  $P^1_2, P^1_3, \dots$  u. s. w. Ich bekomme so, wenn ich zwischen je 2 Curven den sie verbindenden Strahlenbüschel setze, die Reihen

$$P_1-A-P_2-B-P_3-\dots-P_{2n}-B-P_{2n+1}-A-P_{2n+2}-\dots$$

$$P^1_1-B-P^1_2-A-P^1_3-\dots-P^1_{2n}-A-P^1_{2n+1}-B-P^1_{2n+2}-\dots$$

Beide Reihen lassen sich auch nach links fortsetzen.  $P_2$  wird durch B in den Punkt B selbst  $= P$  transformirt, dieser durch A in sich selbst, und dann durch B wieder in die  $P_1$ , worauf sich die Reihe wie oben fortsetzt. Analog ist es mit der zweiten Reihe. Man hat also

$$\dots-P_2-A-P_1-B-P-A-P-B-P_1-A-P_2-\dots$$

$$\dots-P^1_2-B-P^1_1-A-P^1-B-P^1-A-P^1_1-B-P^1_2-\dots$$

$P_n$  und  $P^1_n$  sind congruent und liegen symmetrisch zu NO. Die Curven können sämtlich nur durch A und B in  $K_m$  ein-

drängen, da die ersten Glieder beider Reihen keinen andern Punkt mit  $K_m$  gemein haben. Alle Curven der ersten Reihe berühren  $K_m$  einmal in B, und zwar die  $P_{2n}$  von Innen, die  $P_{2n+1}$  von Aussen. Analog verhalten sich die  $P_1$  in A. Keine der Curven kann, abgesehen von A und B, sich selber schneiden oder berühren; auch A und B können nicht Doppelpunkte in unserem Sinne sein, nämlich so, dass sich zwei Zweige einer Curve in diesen Punkten berühren. Dies folgt daraus, dass  $P_1$  keinen Doppelpunkt besitzt.

Wenn ich den dem Punkte  $p_1$  der  $P_1$  entsprechenden Punkt der  $P_a$  mit  $p_a$  bezeichne, so ist  $(Bp_{2b+1}, p_{2b+1}A) = (Ap_{2a}, p_{2a}B)$ . Für alle Curven  $P_{2a}$  wird demnach, während  $p_{2a}$  die Curven von ihrem Durchschnittspunkt mit der AB aus, den ich mit  $R_{2a}$  bezeichnen will, dem Zeiger der Uhr entgegengesetzt durchläuft, der Winkel  $(Ap_{2a}, p_{2a}B)$  von 0 bis  $\pi$  wachsen; ebenso wird für alle  $P_{2a+1}$ , wenn ich unter  $R_{2a+1}$  den analogen Punkt verstehe, der Winkel  $(Bp_{2a+1}, p_{2a+1}A)$  von  $p_{2a+1} = R_{2a+1}$  aus von 0 bis  $\pi$  wachsen.

Ausserdem werden unten noch die folgenden Eigenschaften der P nachgewiesen werden.

Für die  $P_{2n}$  ist A ein  $2n$  facher und B ein  $2n-1$  facher Punkt. Jeder der  $2n-1$  Zweige von  $P_{2n}$ , die durch B gehen, wird durch einen Zweig der  $P_{2n-1}$  in diesem Punkt berührt, und jeder der  $2n$  Zweige, die durch A gehen, durch einen Zweig der  $P_{2n+1}$ . Dagegen haben  $P_{2n}$  und  $P_{2n-1}$  in A keine Berührung,  $P_{2n}$  und  $P_{2n+1}$  in B eine einzige.

Die Curve  $P_{2n}$  ist  $4n$ ter Ordnung. Sie hat im Allgemeinen mit jedem Strahl des A, insbesondere aber mit  $T_a$ , ausser A noch  $2n$  Punkte gemein. Mit jedem Strahl des B hat sie im Allgemeinen ausser B  $2n+1$  Punkte gemein.  $T_b$  berührt sie in B und schneidet sie noch in  $2n$  Punkten. Mit  $NO$  und also mit  $P_{2n}$  hat sie  $4n$  Punkte gemein, und mit  $P_{2n-1}$  hat sie  $4n-1$  Punkte gemein, nämlich die  $2n-1$  Berührungspunkte in B und die  $2n$  Schnittpunkte mit  $T_a$ .

Die Curve  $P_{2n}$  besteht aus  $2n$  geschlossenen Zweigen, von denen jeder von A ausgeht und nach A zurückkehrt.  $2n-2$  derselben, welche ich Zweige der ersten Klasse nennen will, schnei-

den in A den  $K_m$ ,  $K_b$  und  $T_a$ , in B den  $K_m$ ,  $K_a$  und  $T_b$ , sie schneiden ausserdem  $K_b$ ,  $T_a$ ,  $K_a$  und  $T_b$  noch je in einem zweiten Punkte und NO in 2 Punkten. Ein Zweig, zweiter Klasse, liegt ganz ausserhalb  $K_m$  und  $K_b$ , schneidet die AB in dem Punkte  $R_{2n}$ , der von M aus in der Richtung von B um  $(2n + \frac{1}{2})a$  entfernt liegt, und schneidet ausserdem  $K_a$ ,  $T_a$ , NO und  $T_b$  in je zwei Punkten. Der letzte Zweig endlich, dritter Classe liegt ganz innerhalb des  $K_m$ , berührt ihn in B von Innen und schneidet NO zweimal.

Für  $P_{2n+1}$  ist B ein  $2n+1$  facher Punkt und A ein  $2n$  facher Punkt. Jeder der  $2n$  Zweige, die durch A gehen, wird in diesem Punkt von einem Zweig der  $P_{2n}$ , und jeder der  $2n+1$  Zweige, die durch B gehen, in diesem Punkt durch einen Zweig der  $P_{2n+2}$  berührt. Dagegen haben  $P_{2n+1}$  und  $P_{2n+2}$  in A keine Berührung,  $P_{2n+1}$  und  $P_{2n}$  in B eine einzige.

$P_{2n+1}$  ist  $4n+2$ ter Ordnung. Jeder Strahl des B hat mit  $P_{2n+1}$  im Allgemeinen  $2n+1$  Punkte gemein,  $T_b$  insbesondere berührt sie in B und schneidet sie noch in  $2n$  Punkten. Mit jedem Strahl des A hat sie  $2n+2$  Punkte gemein, mit NO und also mit  $P_{2n+1}^1$  hat sie  $4n+2$  Punkte gemein, und endlich mit  $P_{2n}$   $4n+1$  Punkte, nämlich die  $2n$  Berührungspunkte in A, und die  $2n$  Schnittpunkte und den Berührungspunkt in  $T_b$ .

Die Curve  $P_{2n+1}$  besteht aus  $2n+1$  geschlossenen Zweigen, welche von B ausgehen und nach B zurückkehren.  $2n-2$  derselben, die Zweige erster Klasse, schneiden in B den  $K_m$ ,  $K_a$ ,  $T_b$  und in A den  $K_m$ ,  $K_b$ ,  $T_a$ , ausserdem noch  $K_a$ ,  $T_b$ ,  $K_b$  und  $T_a$  in je einem zweiten Punkte und NO in 2 Punkten. Ein Zweig, zweiter Klasse, liegt ganz ausserhalb  $K_m$  und  $K_a$ , schneidet AB in dem Punkt  $R_{2n+1}$ , der von M aus in der Richtung von A um  $(2n+1 + \frac{1}{2})a$  entfernt liegt, und schneidet ausserdem  $K_b$ ,  $T_b$ , NO und  $T_a$  in je zwei Punkten. Von zwei Zweigen endlich, dritter Klasse, liegt jeder ganz innerhalb  $K_a$ , berührt mit dem einen Ende in B  $K_a$  von Innen und  $K_m$  von Aussen, während das andere Ende innerhalb  $K_m$  liegt, schneidet in A die  $K_m$ ,  $K_b$  und  $T_a$ , ausserdem noch  $T_a$  und  $K_b$  je in einem zweiten Punkte und NO in zwei Punkten.

Der Nachweis der allgemeinen Geltung dieser Eigenschaften,

welche für die ersten  $P$  evident sind, beruht auf folgenden Sätzen:

$$\text{Es ist } N(P_n, P_{n+a}) = N(P_{n-a}, P_{n+1+a}) = N(K_a, P_{2n}) = N(B, P_{2n+1}); \\ N(P_n, P'_n) = N(P_{n+a}, P'_{n-a}) = N(P_{2n-1}, K_b) = N(P_{2n}, A).$$

Jede der betrachteten Curven ist durch  $AB$  in zwei symmetrische Theile getheilt, namentlich also wird  $T_a$  und  $T_b$  von jeder der Curven in Punkten geschnitten, die paarweise gleichweit von  $A$ , beziehungsweise  $B$  abstehen, und bilden die durch  $A$  und  $B$  gehenden Zweige, abgesehen von dem in  $B$  berührenden Zweige, paarweise gleiche Winkel mit  $T_a$  und  $T_b$ . Daraus folgt sofort, wie oben gezeigt,  $N(P_{2n-1}, B) = N(P_{2n}, B)$  und  $N(P_{2n}, A) = N(P_{2n+1}, A)$ .

Dies lässt sich nocherweitern. Wenn ich unter  $N(C_1, C_2, C_3)$  die Anzahl der Punkte verstehe, welche die Curven  $C_1, C_2, C_3$  in unserem Sinne gemeinsam haben, so ergibt sich ähnlich wie oben

$$N(P_{2n-1}, P_{2n}, B) = N(B, P_{2mn-1}, P_{2n-1}) = N(B, P_{2mn}, P_{2n-1}); \\ N(P_{2n}, P_{2n+1}, A) = N(P_{2n}, P_{(2m+1)(2n+1)-1}, A) = N(P_{2n}, P_{(2m+1)(2n+1)}, A) \\ \text{d. h. alle Zweige der } P_{2n-1} \text{ werden in } B \text{ berührt von der } P_{2mn-1} \text{ und } P_{2mn}, \text{ alle Zweige der } P_{2n} \text{ in } A \text{ von der } P_{(2m+1)(2n+1)-1} \\ \text{und } P_{(2m+1)(2n+1)}, \text{ unter } m \text{ o und alle positiven ganzen Zahlen verstanden.}$$

Was die Berührungen der  $P_{2n-1}$  und  $P_{2n}$  in  $A$  betrifft, so hat man  $N(P_{2n-1}, P_{2n}, A) = N(P_{2n-2}, P_{2n}, A) =$

$$N(P_{2n-2-a}, P_{2n-a}, P'_a) = N(B, P_2, P'_{2n-2}) = N(B, P_1, P'_{2n-1}) = 0.$$

In Bezug auf die Berührung von  $P_{2n}$  und  $P_{2n+1}$  in  $B$  aber ist  $N(P_{2n}, P_{2n+1}, B) = N(P_{2n-1}, P_{2n+1}, B) = N(P_{2n-1-a}, P_{2n+1-a}, P_a) = N(B, P_2, P_{2n-1}) = N(B, P_1, P_{2n}) = 1.$

Weiter ist  $N(P_{2n-1}, P_{2n}) = N(P_{2n-1}, B) + N(P_{2n-1}, T_a).$

Es ist nämlich nach dem Vorhergehenden  $N(P_{2n-1}, P_{2n}, B) = N(P_{2n-1}, B)$ , und  $N(P_{2n-1}, P_{2n}, T_a) = N(P_{2n-1}, T_a)$ . Weitere Punkte können  $P_{2n-1}$  und  $P_{2n}$  nicht miteinander gemein haben. Denn würden sie irgend einen andern Punkt  $p_{2n-1}$  gemein haben, so müssten sie auch den entsprechenden  $p_{2n}$ , und die zu diesen in Bezug auf  $AB$  symmetrischen Punkte  $q_{2n-1}$  und  $q_{2n}$  gemein haben. Dann wäre  $(B p_{2n-1}, p_{2n-1} A) = (A p_{2n}, p_{2n} B) = \pi - (B p_{2n}, p_{2n} A) = (B q_{2n}, q_{2n} A)$ , was unmöglich ist, weil die

Winkel  $(Bp_{2n-1}, p_{2n-1}A)$  von 0 bis  $\pi$  wachsen. Ebenso ist auch  $N(P_{2n}, P_{2n+1}) = N(P_{2n}, A) + N(2n, T_b)$ , unter der letzteren Anzahl auch den Punkt B mitgezählt, in welchem die  $P_{2n}$  die  $T_b$  berührt.

Endlich ist  $N(P_n, P^1_n) = N(P_n, NO)$ .

$B_n$  und  $P^1_n$  liegen symmetrisch zu der Geraden NO. Durch jeden Punkt, den die  $P_n$  mit NO gemein hat, muss sonach auch die  $P^1_n$  gehen. Würden sie ausserdem noch einen Punkt  $p_n$  gemeinsam haben, so müssten sie auch den in Bezug auf NO symmetrischen Punkt  $p^1_n$  gemeinsam haben. Dann aber wäre wieder  $(Bp_n, p_nA) = (Bp^1_n, p^1_nA)$ , was nicht möglich ist.

Nehmen wir nun an, unsere Behauptungen seien bewiesen für alle Curven bis  $P_{2n-1}$  incl., so ist

$$N(P_{2n}, A) = N(P_n, P^1_n) = 2n,$$

$$N(P_{2n}, B) = N(P_{2n-1}, B) = 2n-1.$$

Da nun A ein  $2n$  facher Punkt von  $P_{2n}$  ist, und jeder Strahl des A die  $P_{2n-1}$  im Allgemeinen in  $2n$  Punkten schneidet, also nach dem Bildungsgesetz der Curven auf jedem Strahl des A auch  $2n$  Punkte der  $P_{2n}$  liegen, ist  $P_{2n}$  von  $4n$ ten Grade. Dass dann  $P_{2n}$  von jedem Strahl des B im Allgemeinen in  $2n+1$  Punkten geschnitten wird, folgt daraus, dass  $P_{2n}$  von  $4n$ ten Grade und B ein  $2n-1$  facher Punkt derselben ist. Dass  $T_b$ , welches in B einmal die Curve berührt, nur  $2n$  Punkte ausser B, und dass die NO überhaupt  $4n$  Punkte mit  $P_{2n}$  gemeinsam hat, folgt ebenfalls daraus, dass  $P_{2n}$  von  $4n$ ten Grade ist. Um aber nachzuweisen, dass diese  $2n$  und  $4n$  Punkte alle reell sind, müsste ich die einzelnen Zweige der  $P_{2n}$  betrachten, wie sie aus denen der  $P_{2n-1}$  entstehen. Dies mag der Kürze wegen hier unterbleiben.

Analog ist auch der Beweis für die über  $P_{2n+1}$  aufgestellten Behauptungen und ist damit für alle Curven der Beweis erbracht.

### III.

Bezeichne wieder  $p_a$  den Punkt der  $P_a$ , welcher dem Punkt  $p_1$  der  $P_1$  entspricht, so folgt aus der Gleichheit aller Winkel  $(Bp_a, p_aA)$ , dass alle  $p_a$  auf den schon in I erwähnten zwei in Bezug auf AB symmetrisch liegenden Kreisen

liegen müssen, welche über AB als Sehne einen Peripheriewinkel  $= (Bp_1, p_1 A)$  fassen. Fällt dabei ein Punkt  $p_a$  mit A oder B zusammen, so berührt  $P_a$  den betreffenden Kreis in diesem Punkt, und die gemeinsame Tangente bildet mit AB einen Winkel  $= (Bp_1, p_1 A)$ .

Das Kreispaar ist bestimmt durch die Punkte A, B,  $p_1$  oder auch durch A, B und den zu  $p_1$  in Bezug auf AB symmetrischen Punkt. Es liegen also auch alle ihnen weiter entsprechenden Punkte auf dem nämlichen Kreispaar und wieder symmetrisch zu AB.

Alle  $p_{2a+1}$  liegen auf dem Kreis (A, B,  $p_1$ ); alle  $p_{2a}$  auf dem symmetrischen. Ich will den ersten kurz mit  $K_1$ , den zweiten mit  $K_2$  bezeichnen.

Dem Punkt B als Punkt der  $P_1$  entspricht in allen Curven wieder B. Für den Punkt R werden die Radien des Kreispaares unendlich, die beiden Kreise gehen über in die Gerade AB, und die entsprechenden Punkte sind die oben schon mit  $R_a$  bezeichneten Punkte. Sie liegen abwechselnd auf beiden Seiten von B, je zwei nebeneinanderliegende um  $2a$  von einander entfernt. Ich werde sie fortan als die Anfangspunkte der Curven nehmen.

Ist Winkel  $RAp_1 = \alpha$ , so ist, wie schon oben bemerkt,  $(Bp_1, p_1 A) = \frac{\alpha}{2}$  und weiter der Bogen  $BAp_1 = 2BA$ . Nach einem bekannten Satz der Planimetrie (vgl. z. B. Baltzer, Elemente der Mathematik II, 4. B. §. 4, 7.) ergibt sich dann leicht:  $\text{arc. } Bp_1 = p_1 p_3 = \dots p_{2a+1} p_{2a+3} = \dots = Bp_2 = p_2 p_4 = \dots p_{2a} p_{2a+2} = \dots = 2BA$ .

Ist nun  $\alpha$  ein nicht rationaler Theil von  $\pi$ , so können keine zwei Punkte  $p_a$  und  $p_b$  zusammenfallen, und es liegt auf  $K_1$  und  $K_2$  kein einziger Punkt, den zwei der Curven gemeinsam hätten.

Es berührt auch keine der Curven die Kreise in A oder B, oder geht durch einen ihrer Durchschnittspunkte mit  $T_a$ ,  $T_b$ , NO oder  $K_b$ .

Ist aber  $\alpha$  ein rationaler Theil von  $\pi$ , so dass  $2\alpha = \frac{m}{n} 2\pi$ , so wird jeder der betreffenden Kreise  $K_1$  und  $K_2$  von sämtlichen Curven nur in den  $n$  Eckpunkten eines ihm eingeschrie-

benen regelmässigen  $n$  Ecks geschnitten, resp. berührt, so zwar, dass in demselben Punkt  $p_{2a-1}$  alle Curven  $P_{2a-1+b_{2n}}$  und  $P_{2n-1-(2a-1)+b_{2n}}$  sich schneiden.

In B werden beide Kreise berührt von den Curven  $P_{b_{2n}-1}$  und  $P_{b_{2n}}$ , in A nur wenn  $m$  gerade und  $n$  ungerade ist von den Curven  $P_{n+2b_n}$  und  $P_{n-1+2b_n}$ . In einem Durchschnittspunkt mit der NO werden beide Kreise nur geschnitten, wenn  $m$  gerade und  $n$  ungerade ist, und zwar von den Curven  $P_{\frac{n-1}{2}+b_n}$ . Dabei

sind die betr. Punkte die äusseren, wenn  $m=4a+2$ , die inneren, wenn  $m=4a$ . In einem Durchschnittspunkt mit  $T_a$  werden beide Kreise geschnitten nur, wenn  $n$  gerade und  $m$  ungerade ist und zwar von den Curven  $P_{n-1+2b_n}$  und  $P_{n+2b_n}$ , in einem Durchschnittspunkt mit  $T_b$  nur, wenn  $n$  und  $m$  ungerade sind, von den Curven  $P_{n-1+2b_n}$  und  $P_{n+2b_n}$ . In einem Durchschnittspunkt mit  $K_b$  werden beide Kreise geschnitten, wenn  $m$  gerade und  $n$  ungerade, von den Curven  $P_{n-2+2b_n}$  und  $P_{n+1+2b_n}$ , in einem Durchschnittspunkt mit  $K_a$  endlich allemal von den Curven  $P_{1+2b_n}$  und  $P_{2n-2+2b_n}$ .

Auch wenn  $c_1$  ein ganz beliebiger Punkt der Ebene ist, liegen alle der Reihe nach ihm entsprechenden Punkte auf dem Kreis  $K_1 = K(A, B, c_1)$  und dem symmetrischen. Dabei hat man  $Bc_1 = Bc_2$ ,  $Ac_2 = Ac_3$ ,  $c_1c_3 = Ac_3 - Ac_1 = Ac_2 - Bc_1 + AB = = Ac_2 - Bc_2 + AB = 2AB$ , und dann weiter  $c_1c_3 = c_2c_4 = c_3c_5 = \dots$ . Wir können also überhaupt sagen: Bei unserer Transformation geht jeder  $K_1$  in den  $K_2$  über, u. u.; nach einer geraden Anzahl von Transformationen jeder Kreis in sich selber. Ist dabei  $2AB$  ein rationaler Theil,  $\left(\frac{m}{n}\right)$ , des ganzen Kreises, so fallen die den  $c_1$  nacheinander entsprechenden Punkte in die Ecken von regulären, den beiden Kreisen einbeschriebenen  $n$  Ecken, und immer nach  $2n$  Transformationen fällt jeder Punkt des Kreises wieder in seine ursprüngliche Lage.

Aus dem Abschnitt III ergibt sich eine dritte Auffassung unserer Transformation, welche als nahe liegend hier nicht weiter verfolgt werden soll.

IV.

Jede  $P_{2n}$  wird durch einen Strahl des Büschels B ausser in B noch in  $2n + 1$  Punkten geschnitten. Werden diese von links nach rechts der Reihe nach mit  $p^1_{2n}, p^2_{2n}, \dots p^{2n+1}_{2n}$  bezeichnet, und Winkel  $R_{2n} B p^1_{2n}$  mit  $\alpha$ , so ist Winkel  $(Ap^1_{2n}, p^1_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} \alpha$ ;  $(Ap^2_{2n}, p^2_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} (\alpha + \pi)$ ; ..  $(Ap^k_{2n}, p^k_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} [\alpha + (k-1)\pi]$ , ..  $(Ap^{2n+1}_{2n}, p^{2n+1}_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} (\alpha + 2n\pi)$ . Folglich auch  $(Ap^2_{2n}, Ap^1_{2n}) = (Ap^3_{2n}, Ap^2_{2n}) = (Ap^{2n+1}_{2n}, Ap^{2n}_{2n}) = \frac{1}{2n+1} \pi$ .

Ist speciell der schneidende Strahl BA selbst, so folgt daraus, dass die  $2n$  Zweige der  $P_{2n}$ , und also auch die der  $P_{2n+1}$ , und AB in A unter sich je den Winkel  $\frac{1}{2n+1} \pi$  bilden.

Jede  $P_{2n+1}$  wird durch einen Strahl des Büschels A ausser in A noch in  $2n + 2$  Punkten geschnitten. Werden diese von rechts nach links der Reihe nach mit  $p^1_{2n+1}, p^2_{2n+1}, \dots p^{2n+2}_{2n+1}$  bezeichnet, und Winkel  $R_{2n+1} A p^1_{2n+1}$  mit  $\alpha$ , so ist  $(Bp^1_{2n+1}, Ap^1_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} \alpha$ ,  $(Bp^2_{2n+1}, Ap^2_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} (\alpha + \pi)$ , ..  $(Bp^k_{2n+1}, Ap^k_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} [\alpha + (k-1)\pi]$ , ..  $(Bp^{2n+2}_{2n+1}, Ap^{2n+2}_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} [\alpha + (2n+1)\pi]$ . Folglich auch  $(Bp^2_{2n+1}, Bp^1_{2n+1}) = (Bp^3_{2n+1}, Bp^2_{2n+1}) = \dots (Bp^{2n+2}_{2n+1}, Bp^{2n+1}_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} \pi$ .

Ist speciell der schneidende Strahl AB, so folgt daraus, dass die  $2n+1$  Zweige der  $P_{2n+1}$ , und also auch die der  $P_{2n+2}$ , und AB in B unter sich je den Winkel  $\frac{1}{2n+2} \pi$  bilden.

Aus dem Verhalten der Curven in A und B folgt dann ferner: Die Schnittpunkte von  $P_{2n}$  mit  $K_b$  und  $R^1$  sind die Ecken

eines regulären  $2n-1$  Ecks, die Schnittpunkte von  $P_{2n}$  mit  $K_a$  und  $R$  die Ecken eines regulären  $2n+2$  Ecks. Die Schnittpunkte von  $P_{2n+1}$  mit  $K_a$  und  $R$  sind die Ecken eines regulären  $2n$  Ecks, die Schnittpunkte von  $P_{2n+1}$  mit  $K_b$  und  $R'$  die Ecken eines regulären  $2n+3$  Ecks.

Um den Beweis dieser Sätze auf synthetischem Wege streng zu führen, muss ich den Gang der einzelnen Curven genauer betrachten und die einzelnen Zweige von einander unterscheiden.

Ich denke mir  $P_1$  beschrieben durch einen Punkt auf einem Strahl des Büschels  $A$ , während dieser sich um  $A$  aus der Anfangsrichtung  $AR$  immer in demselben Sinne stetig dreht. Nach einer Drehung  $= 2\pi$  schliesst sich die Curve. Ich bezeichne den ersten Zweig derselben, welchen der Punkt beschreibt, während sich der Strahl von  $0$  bis  $\pi$  dreht, mit  $P_1^1$ , einzelne Punkte desselben mit  $p_1^1$ ; den zweiten Zweig, welchen der Punkt beschreibt, während sich der Strahl von  $\pi$  bis  $2\pi$  dreht, mit  $P_1^2$ , einzelne Punkte desselben mit  $p_1^2$ . Jeder Strahl, der durch einen  $p_1^1$ , geht, trifft die Curve auch noch in einem  $p_1^2$ .

Ebenso entsteht dann auch  $P_2$  durch einen Punkt, der sich auf einen Strahl des  $A$  stetig bewegt, während der Strahl selbst sich um  $A$  stetig dreht und auch diese Curve muss sich schliessen nach einer Drehung  $= 2\pi$ . Dem  $P_1^1$  entspricht ein Theil der  $P_2$ , der von  $R_2$  durch  $A$  bis  $B$  geht, dem  $P_1^2$  ein symmetrischer, der von  $B$  durch  $A$  nach  $R_2$  zurückkehrt. Lasse ich aber  $P_2$  entstehen durch Drehung eines Strahles um den Punkt  $B$  aus der Anfangsrichtung  $BR_2$ , so schliesst sich die Curve erst nach einer Drehung  $= 3\pi$ . Ich bezeichne den ersten Zweig, der durch Drehung des Strahles von  $0$  bis  $\pi$  entsteht, und von  $R_2$  bis  $A$  geht, mit  $P_2^1$ , einzelne Punkte mit  $p_2^1$ ; den zweiten Zweig, der durch Drehung des Strahles von  $\pi$  bis  $2\pi$  entsteht, und eine geschlossene Linie bildet, die von  $A$  durch  $B$  wieder nach  $A$  geht, mit  $P_2^2$ , einzelne Punkte mit  $p_2^2$ ; endlich den dritten Zweig, der durch Drehung des Strahles von  $2\pi$  bis  $3\pi$  entsteht, und von  $A$  nach  $R_2$  geht, mit  $P_2^3$ , einzelne Punkte mit  $p_2^3$ . Der beschreibende Punkt ist in der Mitte seines Weges auf die entgegengesetzte Seite des Strahles übergetreten. Den  $p_2^1$  entsprechen  $p_1^1$ ; den  $p_2^2$ , welche rechts von  $AB$  liegen,  $p_1^1$ , nämlich

die vom ersten Durchschnitt der  $P_1$  mit  $K_b$  bis B; den  $p^2_2$ , welche links von AB liegen,  $p^2_1$ , nämlich die von B bis zum zweiten Durchschnitt der  $P_1$  mit  $K_b$ ; den  $p^3_2$  endlich entsprechen  $p^2_1$ . Jeder Strahl des B, welcher durch einen  $p^1_2$  geht, trifft die  $P_2$  zuerst noch in einem  $p^2_2$ , dann in einem  $p^3_2$ , in dieser Ordnung.

Die  $P_3$  entsteht dann ebenfalls durch einen Strahl der sich um B dreht, so dass sich die Curve nach einer Drehung  $= 3\pi$  schliesst. Dem  $P^1_2$  entspricht ein Zweig der  $P_3$  von  $R_3$  durch B bis A, dem  $P^2_2$  eine geschlossene Curve von A durch B bis wieder A, dem  $P^3_2$  ein Zweig von A durch B bis zurück zu  $R_3$ .

Lässt man dagegen die  $P_3$  durch einen Strahl entstehen, der sich um A dreht, so schliesst sich die Curve erst nach einer Drehung  $= 4\pi$ . Bei der Drehung von 0 bis  $\pi$  entsteht der Zweig  $P^1_3$ , der von  $R_3$  bis B geht; bei der Drehung von  $\pi$  bis  $2\pi$  der geschlossene Zweig  $P^2_3$ , der links von AB von B bis A, dann rechts von AB von A bis B geht; bei der Drehung von  $2\pi$  bis  $3\pi$  der geschlossene Zweig  $P^3_3$ , der analog verläuft, endlich bei der Drehung von  $3\pi$  bis  $4\pi$  der Zweig  $P^4_3$ , der von B bis  $R_3$  geht. Den  $p^1_3$  entsprechen  $p^1_2$ ; den  $p^2_3$  links von AB die  $p^1_2$ , die vom ersten Durchschnitt der  $P_2$  mit  $K_a$  bis A liegen; den  $p^2_3$  rechts von AB die  $p^2_2$ , welche rechts von AB liegen; den  $p^3_3$  links von AB die  $p^2_2$ , welche links von AB liegen; den  $p^3_3$  rechts von AB die  $p^3_2$ , welche von A bis zum zweiten Durchschnitt der  $P_2$  mit  $K_a$  liegen; den  $p^4_3$  endlich  $p^3_2$ . Jeder Strahl des A, welcher durch einen  $p^1_3$  geht, trifft die  $P_3$  noch in einem  $p^2_3$ ,  $p^3_3$ ,  $p^4_3$ , in dieser Ordnung.

Analog lässt sich nun weiter schliessen. Man erhält als allgemeines Resultat: Wenn eine  $P_{2n}$  durch Drehung eines Strahles um B entsteht, schliesst sich die Curve nach einer Drehung um  $(2n+1)\pi$ . Je einer Drehung um  $\pi$  von der Anfangslage  $BR_{2n}$  aus entspricht ein Zweig. Der erste geht von  $R_{2n}$  bis A auf der linken Seite. Von den  $2n-1$  folgenden geht jeder auf der rechten Seite von A nach B, dann auf der linken von B nach A, so zwar, dass rechts jeder Zweig von dem folgenden, links von dem vorhergehenden eingeschlossen ist. Jedem  $p_{2n}$  auf der linken Seite entspricht ein  $p_{2n-1}$  mit gleichem oberen Index, jedem  $p_{2n}$  auf der rechten Seite ein  $p_{2n-1}$  mit einem um 1 kleineren

Index. Jeder Strahl, der durch einen  $p_{2n}^1$  geht, trifft die  $P_{2n}$  nach einander in einem  $p_{2n}^2, p_{2n}^3, \dots p_{2n}^{2n+1}$ , von links nach rechts, in dieser Ordnung, so dass also auch, wenn die  $p_{2n}^1, p_{2n}^2, \dots p_{2n}^a$  auf der linken Seite liegen, dann die  $p_{2n}^{a+1} \dots p_{2n}^{2n+1}$  auf der rechten Seite liegen.

Wenn eine  $P_{2n+1}$  durch Drehung eines Strahles um A entsteht, schliesst sich die Curve nach einer Drehung  $= (2n+2)\pi$ . Je einer Drehung um  $\pi$  von der Anfangslage  $AR_{2n+1}$  an entspricht ein Zweig. Der erste geht rechts von  $R_{2n+1}$  bis B. Von den  $2n$  folgenden jeder auf der linken Seite von B bis A, dann auf der rechten von A bis B, so zwar, dass auf der linken Seite jeder Zweig von dem folgenden, auf der rechten jeder von dem vorhergehenden eingeschlossen ist. Der letzte Zweig geht von B auf der linken Seite zurück nach  $R_{2n+1}$ . Jedem  $p_{2n+1}$  auf der rechten Seite entspricht ein  $p_{2n}$  mit gleichem oberen Index, jedem  $p_{2n+1}$  auf der linken Seite ein  $p_{2n}$  mit einem um 1 kleineren oberen Index. Jeder Strahl, der durch einen  $p_{2n+1}^1$  geht, trifft die  $P_{2n+1}$  noch nacheinander in einem  $p_{2n+1}^2, p_{2n+1}^3, \dots p_{2n+1}^{2n+2}$ , von rechts nach links in dieser Ordnung, so dass also auch, wenn die  $p_{2n+1}^1 \dots p_{2n+1}^a$  auf der rechten Seite liegen, dann die  $p_{2n+1}^{a+1} \dots p_{2n+1}^{2n+2}$  auf der linken Seite liegen.

Mit Hülfe dieser Unterscheidungen und der oben bewiesenen Gleichheit der Winkel  $(Bp_{2a-1}, Ap_{2a-1}) = (Ap_{2b}, Bp_{2b})$  ergibt sich nun der Beweis unserer Behauptung folgendermassen. Angenommen der Satz sei gültig für alle P bis zur  $P_{2n-1}$ , so gilt er auch für  $P_{2n}$ . Denn für irgend ein  $p_{2n}^k$ , welches links liegt, welchem also ein  $p_{2n-1}^k$  entspricht, ist  $(BR_{2n}, Bp_{2n}^k) = (AR_{2n}, Ap_{2n}^k) + (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k)$ . Es ist aber  $(AR_{2n}, Ap_{2n}^k) = (AR_{2n-1}, Ap_{2n-1}^k)$  und dieses nach der Annahme  $= 2n(Bp_{2n-1}^k, Ap_{2n-1}^k) - (k-1)\pi = 2n(Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k) - (k-1)\pi$ ; also ist auch  $(BR_{2n}, Bp_{2n}^k) + (k-1)\pi = (2n+1) \cdot (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k)$ .

Für ein  $p_{2n}^k$ , welches rechts liegt, welchem also ein  $p_{2n-1}^{k-1}$  entspricht, ist  $[BR_{2n}, Bp_{2n}^k] = (AR_{2n}, Ap_{2n}^k) - (\pi - (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k))$ . Hier ist nun  $(AB_{2n}, Ap_{2n}^k) = (AR_{2n-1}, Ap_{2n-1}^{k-1}) = 2n (Bp_{2n-1}^{k-1}, Ap_{2n-1}^{k-1}) - (k-2) \pi = 2n (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k) - (k-2) \pi$ ; also wird wieder  $(BR_{2n}, Bp_{2n}^k) + (k-1) \pi = (2n+1) \cdot (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k)$ .

Die Behauptung gilt dann auch weiter für  $p_{2n+1}^k$ . Es ist nämlich für ein  $p_{2n+1}^k$ , welches rechts liegt, welchem also ein  $p_{2n}^k$  entspricht  $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) = (BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) + (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)$ . Es ist aber  $(BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) = (BR_{2n}, Bp_{2n}^k) = (2n+1) (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k) - (k-1) \pi = (n+1) \cdot (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k) - (k-1) \pi$ ; folglich wird  $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) + (k-1) \pi = (2n+2) \cdot (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)$ .

Liegt aber  $p_{2n+1}^k$  links, so dass ihm ein  $p_{2n}^{k-1}$  entspricht, so hat man  $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) = (BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) - [\pi - (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)]$ . Hier ist  $(BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) = (BR_{2n}, Bp_{2n}^{k-1}) = (2n+1) \cdot (Ap_{2n}^{k-1}, Bp_{2n}^{k-1}) - (k-2) \pi = (2n+1) \cdot (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k) - (k-2) \pi$ . Also wieder  $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) + (k-1) \pi = (2n+2) (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)$ .

Für die ersten P ist die Behauptung nach demselben Schema leicht zu beweisen, also gilt sie allgemein.

## V.

Die Anzahl der Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinne von  $P_r$  und  $P_s$  muss gleich  $4rs$  sein. Die Untersuchung der reellen Schnittpunkte gibt aber diese Anzahl kleiner. Daraus folgt, dass die Curven auch imaginäre Punkte gemeinsam haben müssen. Ferner: die Transformation, durch welche eine Curve in die andere übergeht, ist eindeutig, demnach muss das Geschlecht der Curven, d. i. der Ueberschuss der Zahl der möglichen Doppel-

punkte über die der wirklichen,  $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ , erhalten bleiben. Es müssen also alle P, wie der Kreis, vom Geschlecht 0 sein. Wären die reellen vielfachen Punkte A und B allein vorhanden, so würde sich das Geschlecht von n abhängig zeigen: folglich muss jede Curve auch imaginäre Doppelpunkte besitzen. In der That lässt sich auch auf synthetischem Weg nachweisen, dass die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte vielfache Punkte aller P sind. Jede  $P_{2n}$  enthält dieselben als  $2n$ fache Punkte, deren einfache Tangenten sich in B schneiden, so dass  $P_{2n}$  mit  $K_b$  eine  $(2n+1)$  punktige Berührung hat. Jede  $P_{2n+1}$  enthält sie als  $(2n+1)$ fache Punkte, deren einfache Tangenten sich in A schneiden, so dass  $P_{2n+1}$  mit  $K_a$  eine  $(2n+2)$  punktige Berührung hat.

Werden diese mit hinzugerechnet, so sind die beiden erwähnten Bedingungen erfüllt, woraus dann wieder hervorgeht, dass die verschiedenen P keine weiteren imaginären Punkte gemeinsam haben können, und dass sie auch keine weiteren imaginären Doppelpunkte besitzen.

Die Anzahl der Schnittpunkte in unserem Sinne lässt sich bei zwei beliebigen P am einfachsten bestimmen wie in Abschnitt II. Es ist dabei zu unterscheiden, ob die Indices der P um eine ungerade oder gerade Zahl verschieden sind.

In ersten Fall seien  $P_{2e}$  und  $P_{2i+1}$  die beiden Curven, so ist  $N(P_{2e}, P_{2i+1}) = N(P_{e+i}, P_{e+i+1}) = N(B, P_{2e+2i+1}) = 2e+2i+1$ .

Im zweiten Falle hat man für  $P_{2e}$  und  $P_{2i}$  ( $i > e$ )

$$N(P_{2e}, P_{2i}) = N(B, P_{2i-2e}) = 2i-2e-1;$$

und für  $P_{2e+1}$  und  $P_{2i+1}$  ebenso

$$N(P_{2e+1}, P_{2i+1}) = N(B, P_{2i-2e}) = 2i-2e-1.$$

Wie viele von diesen Punkten in jedem Fall Berührungen in A und B ergeben, lässt sich dann leicht berechnen, da man die Winkel kennt, welche die einzelnen Zweige der Curven in diesen Punkten mit AB bilden. Ich ziehe vor zu dieser Untersuchung die Kreise des Abschnitts III zu verwenden.

Es möge nun der Kreis  $K_1$ , für welchen der Bogen  $2AB \frac{m}{n}$

von ganzen Kreis ist, mit  $K\left(\frac{m}{n}\right)$  bezeichnet werden, dann ist der zugehörige  $K_2 K\left(\frac{2n-m}{n}\right)$  und beide fallen zusammen für  $m=n$  in den  $K_m$ .

Sollen sich nun  $P_{2e}$  und  $P_{2i+1}$  schneiden, so geschieht dies in Punkten von Kreisen, für welche  $2e+2i+1=2n-1$  sein muss, also in Kreisen  $K\left(\frac{m}{e+i+1}\right)$ . Durch jeden Werth von  $m$ , der  $< e+i+1$  ist, ist dann ein Kreispaar bestimmt, auf welchem 2 symmetrische Schnittpunkte liegen, durch  $m=e+i+1$  aber der Kreis  $K_m$ , auf welchem der eine Berührungspunkt in B liegt. Im Ganzen sind es sonach wieder  $2e+2i+1$  gemeinsame Punkte. Auf jedem Kreispaar ist es der Punkt, für welchen ist  $\text{arc. } Bp_{2i+1} = \frac{(i+1)m}{e+i+1} \cdot K\left(\frac{m}{e+i+1}\right)$ , und der symmetrische Punkt. Wie viele von diesen Punkten nach B und A fallen, hängt von dem grössten gemeinsamen Faktor von  $e$  und  $i+1$ , resp.  $2e+1$  und  $2i+1$  ab. Soll nämlich  $Bp_{2i+1}$  ein Vielfaches des ganzen Kreisumfanges sein, so muss sein  $\frac{m(i+1)}{e+i+1} = q$ , wobei  $q$  eine ganze Zahl. Sei dann  $e=ra$ ,  $i+1=sa$ , so gibt dies  $m = \frac{r+s}{s} q$ . Es muss also  $m$  ein Vielfaches von  $r+s$  sein, und zugleich  $m \equiv e+i+1$ . Dies gibt sonach  $a$  Kreispaaire, und wie oben  $2a-1$  Punkte, welche nach B fallen.

Soll  $p_{2i+1}$  nach A fallen, so muss sein  $\frac{(i+1)m}{e+i+1} = q + \frac{m}{2(e+i+1)}$  also  $(2i+1)m = q(2e+2i+2)$ . Ist dann  $2e+1=tb$ ,  $2i+1=ub$ , so wird  $m = \frac{u+t}{u} q$ . Es muss also  $m$  ein Vielfaches von  $t+u$ , und  $m \equiv e+i+1$  sein. Da  $b$  ungerade ist, gibt dies  $\frac{b-1}{2}$  Kreispaaire und  $b-1$  Punkte, die nach A fallen.

Die Zahl der reellen Schnittpunkte in gewöhnlichem Sinne ergibt sich demnach so: B ist für  $P_{2e}$  ein  $2e-1$  facher, für  $P_{2i+1}$  ein  $2i+1$  facher Punkt, dabei finden in B  $2a-1$  Berührungen statt, also zählt B für  $(2e-1)(2i+1) + 2a-1$  einfache Schnittpunkte. Ferner ist A für  $P_{2e}$  ein  $2e$  facher, für  $P_{2i+1}$

ein  $2i$  facher Punkt und es finden in  $A$   $b-1$  Berührungen statt, also zählt  $A$  für  $4ei+b-1$  einfache Schnittpunkte. Ausserdem sind noch vorhanden  $2e + 2i + 1 - (2a-1) - (b-1)$  einfache Schnittpunkte. Im Ganzen hat man sonach  $4e(2i+1)$  reelle Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinn.

Analog findet man für eine  $P_{2e}$  und  $P_{2i}$ , dass, wenn  $e=ra$  und  $i=sa$  ist, in  $B$   $2a-1$  Berührungen statt finden, und wenn  $2e+1=tb$  und  $2i+1=ub$  ist, in  $A$   $b-1$  Berührungen statt finden. Die Zahl der reellen Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinn ist dann  $4e(2i-1)$ . Endlich finden bei einer  $P_{2e+1}$  und  $P_{2i+1}$  für  $e+1=ra$  und  $i+1=sa$  in  $B$   $2a-1$ , und für  $2e+1=tb$  und  $2i+1=ub$  in  $A$   $b-1$  Berührungen statt. Die Zahl der reellen Schnittpunkte in gewöhnlichem Sinn ist  $4i(2e+1)$ .

Das Verhalten der  $P$  zu den unendlich fernen imaginären Kreispunkten ergibt sich nun folgendermassen:  $K_m$  hat mit der unendlich fernen Geraden diese beiden Punkte gemein. Deswegen entsprechen bei einer Transformation durch  $A$  allen Punkten der durch  $A$  nach den Kreispunkten gelegten imaginären Strahlen die Kreispunkte u. u.; namentlich sie sich auch selbst wieder. Nun hat  $P_1$  mit der unendlich fernen Geraden nur die beiden Kreispunkte gemeinsam, und zwar so, dass die imaginären Geraden, welche diese Punkte mit  $A$  verbinden, die  $P_1$  in denselben berühren. Es fallen demnach auch die entsprechenden Punkte der  $P_2$  mit ihnen zusammen, und zwar sind sie für die  $P_2$  Doppelpunkte, da die imaginären Strahlen durch  $A$  als Tangenten zwei benachbarte Punkte mit  $P_1$  gemeinsam haben. Weitere Punkte kann  $P_2$  mit der unendlich fernen Geraden nicht gemein haben, da sie überhaupt mit derselben nur 4 Punkte gemeinsam hat, und jeden weiteren Punkt auch die  $P_1$  mit ihr gemeinsam haben müsste. Nun muss ebenso die  $P_3$  die unendlich fernen Kreispunkte enthalten, und zwar mindestens als Doppelpunkte. Dass sie aber für  $P_3$  sogar dreifache Punkte sein müssen, folgt daraus, dass die unendlich ferne Gerade überhaupt 6 Punkte mit  $P_3$  gemein haben muss, aber keinen anderen Punkt mit ihr gemeinsam haben kann, da denselben sonst auch die  $P_2$  enthalten müsste. Dreifache Punkte können sie aber nur dadurch werden, dass die imaginären Tangenten, welche die  $P_2$  in den

Kreispunkten berühren, durch B gehen. In dieser Weise weiter schliessend erhält man die am Anfang dieses Abschnitts behauptete Eigenschaft der Curven. Uebrigens wird dieselbe auch durch die Gleichungen der Curven bestätigt.

Nehme ich nun die Berechnung der Zahl der Schnittpunkte zweier P wieder auf, so ergibt sich:  $P_{2e}$  und  $P_{2i+1}$  haben in jedem unendlich fernen Kreispunkt einen  $2e$ , resp.  $2i+1$  fachen Punkt mit verschiedenen Tangenten. Dies zählt für  $2 \cdot 2e \cdot (2i+1)$  einfache Schnittpunkte. Zusammen mit den oben gefundenen reellen Schnittpunkten gibt dies  $4e(4i+2)$  Schnittpunkte, wie es sein muss.  $P_{2e}$  und  $P_{2i}$  haben in jedem Kreispunkt einen  $2e$ , resp.  $2i$  fachen Punkt mit gemeinsamer Tangente. Dies zählt für  $2 \cdot 2e(2i+1)$  einfache Schnittpunkte. Zusammen mit den reellen Schnittpunkten gibt dies  $4e \cdot 4i$  Schnittpunkte.  $P_{2e+1}$  und  $P_{2i+1}$  endlich berühren sich in jedem Kreispunkt mit einem  $2e+1$ , resp.  $2i+1$  fachen Punkt. Dies zählt für  $2 \cdot (2e+1)(2i+2)$  einfache Schnittpunkte. Mit den reellen zusammen sind es dann  $(4e+2)(4i+2)$  einfache Schnittpunkte.

Ich gehe nun über zur Berechnung des Geschlechtes der Curven. Eine  $P_{2n}$  ist vom Grade  $4n$ , hat in A einen  $2n$  fachen, in B einen  $2n-1$  fachen, und in jedem imaginären Kreispunkt einen  $2n$  fachen Punkt. Demnach ist

$$p = \frac{(4n-1)(4n-2)}{2} - \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{(2n-1)(2n-2)}{2} - 2 \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} = 0.$$

Eine  $P_{2n+1}$  ist vom Grade  $4n+2$ , hat in B einen  $2n+1$  fachen, in A einen  $2n$  fachen Punkt und in jedem imaginären Kreispunkt einen  $2n+1$  fachen Punkt. Demnach ist

$$p = \frac{(4n+1)4n}{2} - \frac{(2n+1)2n}{2} - \frac{2n(2n-1)}{2} - 2 \cdot \frac{(2n+1)2n}{2} = 0.$$

## VI.

Die Gleichungen der Curven in Polarcoordinaten lassen sich sehr leicht aufstellen. Versteht man unter  $\alpha$  wie oben den Winkel, welchen ein Strahl mit der AB bildet so erhält man für den

Pol A die Gleichung von  $P_{2n}$   $r = a \cdot \frac{\sin \left( \frac{2n+1}{2n} \alpha \right)}{\sin \left( \frac{1}{2n} \alpha \right)},$

und die Gleichung von  $P_{2n+1}$   $r = a \cdot \frac{\sin \left( \frac{2n+1}{2n+2} \alpha \right)}{\sin \left( \frac{1}{2n+2} \alpha \right)},$

für den Pol B die Gleichung von  $P_{2n}$   $r = a \cdot \frac{\sin \left( \frac{2n}{2n+1} \alpha \right)}{\sin \left( \frac{1}{2n+1} \alpha \right)},$

und die Gleichung von  $P_{2n+1}$   $r = a \cdot \frac{\sin \left( \frac{2n+2}{2n+1} \alpha \right)}{\sin \left( \frac{1}{2n+1} \alpha \right)}.$

Als vorzüglich geeignet zur Aufstellung der Gleichungen erweist sich ferner ein Bipolarsystem, dessen Pole A und B sind.

Man hat nämlich bei der Transformation durch A :  $Bp_{2n} - 1 = Bp_{2n}$ , und nach einem bekannten Satz der Planimetrie  $(Bp_{2n}^2 - a^2) = \pm Ap_{2n-1} \cdot Ap_{2n}$ , je nachdem A auf der Strecke  $p_{2n-1} p_{2n}$  oder auf ihrer Verlängerung liegt, in beiden Fällen also

$$\frac{(Bp_{2n}^2 - a^2)^2}{Ap_{2n}^2} = A^2 p_{2n-1}, \text{ und auch } \frac{(Bp_{2n-1}^2 - a^2)^2}{Ap_{2n-1}^2} = A^2 p_{2n}.$$

Bei der Transformation durch B ist  $Ap_{2n} = Ap_{2n+1}$  und  $(Ap_{2n+1}^2 - a^2) = \pm Bp_{2n} \cdot Bp_{2n+1}$ , in allen Fällen  $\frac{(Ap_{2n+1}^2 - a^2)^2}{Bp_{2n+1}^2} = Bp_{2n}^2$  und  $\frac{(Ap_{2n}^2 - a^2)^2}{Bp_{2n}^2} = Bp_{2n+1}^2.$

Bezeichne ich also den Abstand eines Punktes von A durch  $R_a$ , den eines Punktes von B durch  $R_b$ , so erhalte ich aus der Gleichung einer  $P_{2n-1}$  in Bipolarcoordinaten die der  $P_{2n}$  u. u., wenn ich statt  $R_a^2$  setze  $\frac{(R_b^2 - a^2)^2}{R_a^2}$ , und aus der Gleichung

der  $P_{2n}$  die der  $P_{2n+1}$  u. u., wenn ich statt  $R_b^2$  setze  $\frac{(R_a^2 - a^2)^2}{R_b^2}$

Es enthalten jedoch die so entstehenden Gleichungen fremde Faktoren, die daher rühren, dass bei einer Transformation durch A A selbst in den  $K_b$  übergeht, und bei einer Transformation durch B B in den  $K_a$ .

Bezeichne ich die Faktoren, welche gleich 0 gesetzt, die

eigentlichen Curvengleichungen geben mit  $\pi$ , so hat man nacheinander

$$P_1 = \pi_1 = 0, \quad \pi_1 = R_a^2 - a^2 = 0,$$

$$P_2 = \frac{1}{R_a^2} \pi_2 = 0, \quad \pi_2 = (R_b^2 - a^2)^2 - a^2 R_a^2 = 0,$$

$$P_3 = \frac{\pi_1}{R_a^2 R_b^4} \pi_3 = 0, \quad \pi_3 = R_a^2 (R_a^2 - a^2)^2 - a^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2)^2 = 0$$

$$P_4 = \frac{\pi_2}{R_b^4 R_a^6} \pi_4 = 0, \quad \pi_4 = [(R_b^2 - a^2)^2 - a^2 R_a^2]^2 - a^2 R_a^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2)^2 = 0,$$

$$P_5 = \frac{\pi_3}{R_a^6 R_b^8} \pi_5 = 0, \quad \pi_5 = R_a^2 [(R_a^2 - a^2)^2 - a^2 R_b^2]^2 - a^2 [(R_b^2 - a^2)(R_a^2 + R_b^2 - a^2) + R_a^2 (R_a^2 - a^2)]^2 = 0.$$

⋮

Die Gleichungen der  $P^1$  und  $\pi^1$  ergeben sich, wenn man einfach  $R_a$  und  $R_b$  vertauscht.

Um die Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, darf man nur, wenn  $AB$  die  $y$  Achse und  $T_a$  die  $x$  Achse werden soll,  $R_a^2 = x^2 + y^2$ ,  $R_b^2 = x^2 + (y-a)^2$  setzen, und wenn  $T_b$  die  $x$  Achse werden soll,  $R_b^2 = x^2 + y^2$ ,  $R_a^2 = x^2 + (y+a)^2$ .

Um die allgemeinen Substitutionsgleichungen zu erhalten, bezeichne ich die rechtwinkligen Coordinaten mit  $A$  als Anfangspunkt, welche sich auf die Ebene einer  $P_{2n}$  beziehen, mit  $x_{2n}, y_{2n}$ ; die sich auf die Ebene  $P_{2n+1}$  beziehen, mit  $x_{2n+1}, y_{2n+1}$ , u. s. w. Bei einer Transformation durch  $A$  ist dann

$$\frac{x_{2n-1}}{x_{2n}} = \frac{y_{2n-1}}{y_{2n}}, \text{ also auch } \frac{x_{2n-1}^2}{x_{2n}^2} = \frac{x_{2n-1}^2 + y_{2n-1}^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}$$

$$\text{Ferner gilt, wie oben gezeigt, die Gleichung } x_{2n-1}^2 y_{2n-1}^2 = \frac{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2ay_{2n})^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}, \text{ also ist auch } x_{2n-1}^2 = x_{2n}^2 \cdot \frac{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2ay_{2n})^2}{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2)^2},$$

$$\text{und } x_{2n-1} = -x_{2n} \cdot \frac{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2ay_{2n})}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}.$$

Dass das negative Zeichen zu nehmen ist, entscheidet ein Blick in die Figur.

Ich schreibe hiefür kürzer  $x_{2n-1} \equiv -x_{2n} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}$ , wobei das Zeichen  $\equiv$  hier, und analog in den späteren Gleichungen andeuten soll, dass die Gleichung nur richtig ist, wenn  $\pi_1^1$  und  $R_a^2$  als Funktionen von  $x_{2n}$  und  $y_{2n}$  gedacht sind.

Ganz analog ergibt sich auch  $y_{2n-1} \equiv -y_{2n} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}$  u. recipr.

$$x_{2n} \equiv -x_{2n-1} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}, y_{2n} \equiv -y_{2n-1} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}.$$

Dabei wird  $\pi_{2n-1} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n-2} \pi_{2n}}{R_a^{4n-2}}$ , da A für  $\pi_{2n-1}$  ein  $2n-2$ facher Punkt ist, im Nenner nur eine Potenz von  $R_a^2$  erscheinen kann und der Ausdruck homogen sein muss.

$$\text{Ebenso wird } \pi_{2n} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n} \pi_{2n-1}}{R_a^{4n+2}}, \pi_{1,2n} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n-1} \pi_{1,2n+1}}{R_a^{4n}}$$

$$\pi_{1,2n+1} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n+1} \pi_{1,2n}}{R_a^{4n}}.$$

Bei einer Transformation durch B ist ebenso  $R_a^2 \equiv R_b^2$ ,  $R_b^2 \equiv \frac{\pi_1^2}{R_b^2}$

$$x_{2n+1} \equiv -x_{2n} \frac{\pi_1}{R_b^2}; y_{2n+1} - a \equiv -(y_{2n} - a) \frac{\pi_1}{R_b^2} \text{ u. reciprok.}$$

$$x_{2n} \equiv -x_{2n+1} \frac{\pi_1}{R_b^2}; y_{2n} - a \equiv -(y_{2n+1} - a) \frac{\pi_1}{R_b^2};$$

$$\pi_{2n} \equiv \frac{\pi_1^{2n-1} \pi_{2n+1}}{R_b^{4n}}, \pi_{2n+1} \equiv \frac{\pi_1^{2n+1} \pi_{2n}}{R_b^{4n}};$$

$$\pi_{1,2n-1} \equiv \frac{\pi_1^{2n-2} \pi_{1,2n}}{R_b^{4n-2}}, \pi_{1,2n} \equiv \frac{\pi_1^{2n} \pi_{1,2n-1}}{R_b^{4n-2}}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man dann leicht auch die weiteren aufstellen, die einer Transformation AB, d. h. erst durch A, dann durch B, einer Transformation BA, ABA, BAB, u. s. w. entsprechen. Dies mag hier übergangen und nur bemerkt werden, dass die im Abschnitt III behandelte Eigenschaft unserer Transformation sich dadurch ausspricht, dass der Ausdruck  $\frac{x_k^2 + y_k^2 - ay_k}{x_k}$  abgesehen vom Vorzeichen einen invarianten

Charakter für alle diese Transformationen hat.

Zu einer Recursionsformel zwischen den  $\pi$ , und damit schliesslich auch zu einer independenten Darstellung derselben gelange ich auf folgendem Wege:

Werden die Transformationen A und B abwechselnd auf die Gleichung  $\pi_1 = R_a^2$  angewandt, so erhält man

$$\frac{\pi_{2n} \pi_{2n+2}}{R_a^{4n+2} R_b^{4n}} = \frac{\pi_{2n+1}^2}{R_a^{4n+2} R_b^{4n}} - a^2, \quad \frac{\pi_{2n+1} \pi_{2n+3}}{R_b^{4n+4} R_a^{4n+2}} =$$

$$\frac{\pi_{2n+2}^2}{R_b^{4n+4} R_a^{4n+2}} - a^2,$$

und analog

$$\frac{\pi_{2n}^2 \pi_{2n+2}}{R_b^{4n+2} R_a^{4n}} = \frac{\pi_{2n+1}^2}{R_b^{4n+2} R_a^{4n}} - a^2, \quad \frac{\pi_{2n+1} \pi_{2n+3}}{R_a^{4n+4} R_b^{4n+2}} =$$

$$\frac{\pi_{2n+2}^2}{R_a^{4n+4} R_b^{4n+2}} - a^2.$$

Aus diesen folgt weiter

$$a^2 R_b^{4n+4} R_a^{4n+2} = \pi_{2n+2}^2 - \pi_{2n+1} \pi_{2n+3} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2)$$

$$a^2 R_a^{4n+2} R_b^{4n} = \pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n} \pi_{2n+2} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2 - \pi_{2n+1} \pi_{2n+2}),$$

$$a^2 R_b^{4n+2} R_a^{4n} = \pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n+1} \pi_{2n+2} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2 - \pi_{2n+1} \pi_{2n+2}),$$

$$a^2 R_a^{4n+2} R_b^{4n+2} = \pi_{2n+2}^2 - \pi_{2n+1}^2 + \pi_{2n+1} \pi_{2n+3} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2 - \pi_{2n+1} \pi_{2n+2}).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\pi_{2n+2} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n}}{\pi_{2n+1} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n-1}} = \frac{\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2}{\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n-1}^2} \text{ und dann allgemein}$$

$$\frac{\pi_{2n+2} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n}}{\pi_{2n-2k} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n-2k-2}} = \frac{\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n-1}^2}{\pi_{2n-1-2k}^2 - \pi_{2n-1-2k-2}^2}.$$

Nun ist aber  $\pi_2 + R_a^2 R_b^2 = \pi_1^2 (1 + R_a^2)$ . Folglich hat man

$$\pi_{2n+2} = \pi_{2n+1}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n} R_a^2 R_b^2 \text{ und analog}$$

$$\pi_{2n+3} = \pi_{2n+2}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n+1} R_a^2 R_b^2,$$

$$\pi_{2n+4} = \pi_{2n+3}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n+2} R_a^2 R_b^2,$$

$$\pi_{2n+5} = \pi_{2n+4}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n+3} R_a^2 R_b^2.$$

Wenn ich nun  $R_a^2 + R_b^2 - a^2 = s$  und  $R_a^2 R_b^2 = p$  setze, und die Reihe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 \\ - R_a^2 &= -s \pi_0 + \pi_1^2 \\ 0 &= p \pi_0 - s \pi_1^2 + \pi_2 \\ 0 &= 0 + p \pi_1^2 - s \pi_2 + \pi_3^2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Determinanten je nach der letzten Unbekannten auflöse, erhalte ich die independente Darstellung:

$$\pi_{2n} = A_{2n} - R_a^2 A_{2n-1}, \quad \pi_{12n} = A_{2n} - R_b^2 A_{2n-1}, \\ \pi_{12n+1} = A_{2n+1} - R_a^2 A_{2n}, \quad \pi_{2n+1} = A_{2n+1} - R_b^2 A_{2n}.$$

Dabei ist  $A_n$  eine Kettenbruch-Determinante  $n$ ten Grades ( $A_0 = 1$ ), und zwar

$$A_n = (-1)^n \begin{vmatrix} -s, & 1 & 0 & 0 & \dots \\ p, & -s & 1 & 0 & \dots \\ 0, & p-s & 1 & & \\ 0, & 0 & p-s & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}, \text{ oder entwickelt}$$

$$k = \frac{n}{2} \\ A_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k (n-k)_k p^k s^{n-2k}.$$

Es lässt sich nun auch noch jedes  $\pi$  als Differenz zweier Quadrate darstellen, mithin in zwei rationale Faktoren zerlegen. Wenn ich die obige Reihe der Gleichungen erst mit  $\pi_{2n-2k} = \pi_{2n-k} - p \cdot \pi_{12n-2k-1} = -s \pi_{2n-2k} + \pi_{12n-2k+1}$  beginne, und dann auflöse, erhalte ich  $\pi_{2n} = \pi_{2n-2k} A_{2k} - p \cdot \pi_{12n-2k-1} A_{2k-1}$ ,  $\pi_{2n+1} = \pi_{12n-2k} A_{2k+1} - p \cdot \pi_{2n-2k-1} A_{2k}$ ,  $\pi_{2n} = \pi_{12n-2k-1} A_{2k+1} - p \cdot \pi_{2n-2k-2} A_{2k}$ ,  $\pi_{2n+1} = \pi_{2n+1-2k} A_{2k} - p \cdot \pi_{12n-2k} A_{2k-1}$ .

Hieraus ergibt sich auch

$$\pi_{4n} = \pi_{2n} A_{2n} - p \cdot \pi_{12n-1} A_{2n-1}. \text{ Es ist aber } A_{2n} = \pi_{2n} + R_a^2 A_{2n-1}, \\ \text{folglich: } \pi_{4n} = \pi_{2n}^2 + A_{2n-1} (R_a^2 \pi_{2n} - p \cdot \pi_{12n-1}) = \pi_{2n}^2 - R_a^2 A_{2n-1} (R_b^2 \pi_{12n-1} - \pi_{2n}) = \pi_{2n}^2 - a^2 R_a^2 A_{2n-1}^2.$$

Auf etwas weitläufigerem Weg erhält man dann auch aus  $\pi_{4n+1} = \pi_{12n} A_{2n+1} - p \cdot \pi_{2n-1} A_{2n}$ , die Gleichung  $\pi_{4n+1} = R_a^2 \pi_{12n}^2 - a^2 A_{2n}^2$ . Ueberhaupt ergibt sich analog

$$\pi_{4n} = \pi_{2n}^2 - a^2 R_a^2 A_{2n-1}^2, \quad \pi_{14n} = \pi_{12n}^2 - a^2 R_b^2 A_{2n-1}^2, \\ \pi_{4n+1} = R_a^2 \pi_{12n}^2 - a^2 A_{2n}^2, \quad \pi_{14n+1} = R_b^2 \pi_{2n}^2 - a^2 A_{2n}^2, \\ \pi_{4n+2} = \pi_{12n+1}^2 - a^2 R_a^2 A_{2n}^2, \quad \pi_{14n+2} = \pi_{2n+1}^2 - a^2 R_b^2 A_{2n}^2, \\ \pi_{4n+3} = R_a^2 \pi_{2n+1}^2 - a^2 A_{2n+1}^2, \quad \pi_{14n+3} = R_b^2 \pi_{12n+1}^2 - a^2 A_{2n+1}^2.$$

Die nämlichen Resultate lassen sich auch durch Transformation der Gleichungen  $\pi_2 = \pi_1^2 - a^2 R_a^2$ ,  $\pi_{12} = \pi_1^2 - a^2 R_b^2$  erzielen.

Schliesslich soll nun noch die Uebereinstimmung unserer Transformation mit der allgemeinen Theorie der Cremona'schen Transformation untersucht werden, wie sie in den Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch, herausgegeben von Lindemann p. 478 ff. aufgestellt ist.

Ich setze zunächst, um homogene Coordinaten zu erhalten

$$x_{2n-1} = \frac{\zeta_1}{\zeta_3}, y_{2n-1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_3}, x_{2n} = \frac{\eta_1}{\eta_3}, y_{2n} = \frac{\eta_2}{\eta_3}. \text{ Dadurch wird}$$

$$\eta_1 = -\zeta_1(R^2_b - a^2), \eta_2 = -\zeta_2(R^2_b - a^2), \eta_3 = \zeta_3 R^2_a; \text{ oder}$$

$$\eta_1 = -\zeta_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3), \eta_2 = -\zeta_2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3), \eta_3 = \zeta_3(\zeta_1^2 + \zeta_2^2).$$

Dieselbe Form haben auch die Gleichungen, welche umgekehrt die  $\zeta$  durch die  $\eta$  ausdrücken. Die Curven  $f_1 = -\zeta_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3) = 0$ ,  $f_2 = -\zeta_2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3) = 0$ ,  $f_3 = \zeta_3(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 0$  sind zerfallende Curven dritter Ordnung. Die beiden ersten haben einen gemeinsamen Faktor, entgegen der Annahme bei Lindemann p. 478.

Die erste besteht aus dem  $K_b$  und der  $y$  Achse, hat also 2 Doppelpunkte in ihren Durchschnittspunkten und geht durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte so, dass die imaginären Tangenten durch den reellen Punkt B gehen.

$f_2$  besteht aus demselben  $K_b$  und der  $x$  Achse, hat also in A einen Selbstberührungspunkt, und geht ebenso wie  $f_1$  durch die unendlich fernen Kreispunkte.

$f_3$  zerfällt in drei Gerade: die unendlich ferne Gerade und die beiden imaginären Geraden  $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0$ , welche durch A und die unendlich fernen Kreispunkte gehen. Die 3 Doppelpunkte sind eben A und die imaginären Kreispunkte.

Die Curven, welche den Geraden  $u$   $\eta$  in beiden Systemen entsprechen, sind

$$u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + u_3\zeta_3 = -u_1\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2a\eta_2\eta_3) - u_2\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2a\eta_2\eta_3) + u_3\eta_3(\eta_1^2 + \eta_2^2) = 0, \text{ oder}$$

$$-(\eta_1^2 + \eta_2^2)(u_1\eta_1 + u_2\eta_2) + \eta_3[u_3(\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2a\eta_2(u_1\eta_1 + u_2\eta_2)] = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass sie im Punkt  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$ , also in A einen Doppelpunkt besitzen, mit im Allgemeinen verschiedenen Tangenten deren Richtung von  $u$  abhängig ist. Ferner auch, dass sie alle mit der unendlich fernen Geraden die beiden imaginären Kreispunkte gemein haben, und ausserdem den reellen Punkt, in welchem  $u\zeta = 0$  diese Gerade schneidet.

Die Gleichung lässt sich auch (vgl. Salmon, höhere Curven, deutsch von Fiedler p. 46) auf die Form bringen

$$-[\eta_1^2 + (\eta_2 - a\eta_3)^2] \cdot (u_1\eta_1 + u_2\eta_2 - u_3\eta_3) + \eta_3^2[a^2(u_1\eta_1 + u_2\eta_2) + 2au_3\eta_2] - \eta_3^3a^2u_3 = 0.$$

Daraus geht hervor, dass alle diese Curven in den unendlich fernen Kreispunkten sich berühren, und ihre gemeinsamen imaginären Asymptoten durch den reellen Punkt B gehen. Die reelle Asymptote ist parallel  $u\xi$  und ebensoweit von A entfernt als  $u\xi$ .

Jeder Geraden, die durch A geht, entspricht eine zerfallende Curve, die aus der Geraden selbst und dem  $K_b$  besteht. Jeder Geraden, die durch einen der unendlich fernen Kreispunkte geht, entspricht dann ebenfalls eine zerfallende Curve. Sie zerfällt nämlich in die durch A und den Kreispunkt bestimmte Gerade und einen imaginären Kreis, der also ebenfalls durch die Kreispunkte und ausserdem auch durch A geht.

Schneidet eine Gerade den  $K_b$  in zwei reellen Punkten, so bildet die Curve eine Schleife mit A als Doppelpunkt, welche innerhalb  $K_b$  liegt, und wenn die Gerade auch den  $K_m$  schneidet, diesen in denselben Punkten schneidet. Berührt die Gerade den  $K_b$ , so hat die Curve in A einen Rückkehrpunkt. Schneidet sie endlich  $K_b$  nur in imaginären Punkten, so ist A ein isolirter reeller Doppelpunkt der Curve.

Die Fundamentalpunkte der Transformation sind sonach: der Punkt A, in welchem jede Curve einen Doppelpunkt hat, so dass dieser Punkt als vierfacher Schnittpunkt gilt, ferner jeder der beiden Kreispunkte, in welchen sich alle Curven berühren, so dass jeder als zweifacher Schnittpunkt zählt. Zu A gehört als Fundamentalcurve der  $K_b$ ; zu jedem der Kreispunkte die imaginäre Gerade, welche ihn mit A verbindet. Dies ergibt die geometrische Betrachtung oder auch die Berechnung nach Lindemann p. 481.

Unser Fall stimmt also nicht mit der bei Lindemann gemachten Voraussetzung, dass die Fundamentalpunkte aus einem Doppelpunkt mit getrennten Tangenten und 4 einfachen Punkten bestehen. Das System der Fundamentalcurven ist also auch nicht durch die Fundamentalpunkte allein bestimmt, sondern hängt wesentlich auch von der Lage des Punktes B, resp. dem Parameter  $a$  ab. Vgl. die Anmerkung bei Lindemann p. 481 und die Bemerkung dazu von Nöther in der Recension in Schömilchs Zeitschrift, Jahrgang 22, p. 79 der historisch literarischen

Abtheilung. Auch die Identitäten 8) bis 18) bei Lindemann sind einigermassen zu modificiren.

Unsere Transformation lässt sich wie bei Lindemann p. 489 in zwei quadratische Transformationen zerlegen. In der That erhalte ich, wenn ich als die eine davon eine Transformation durch reciproke Radien wähle:

$$x_{2n} - 1 = \frac{b^2 \zeta}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{2n} - 1 = \frac{b^2 \eta}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{-x_{2n} b^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2 a y_{2n}}, \eta = \frac{-y_{2n} b^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2 a y_{2n}}$$

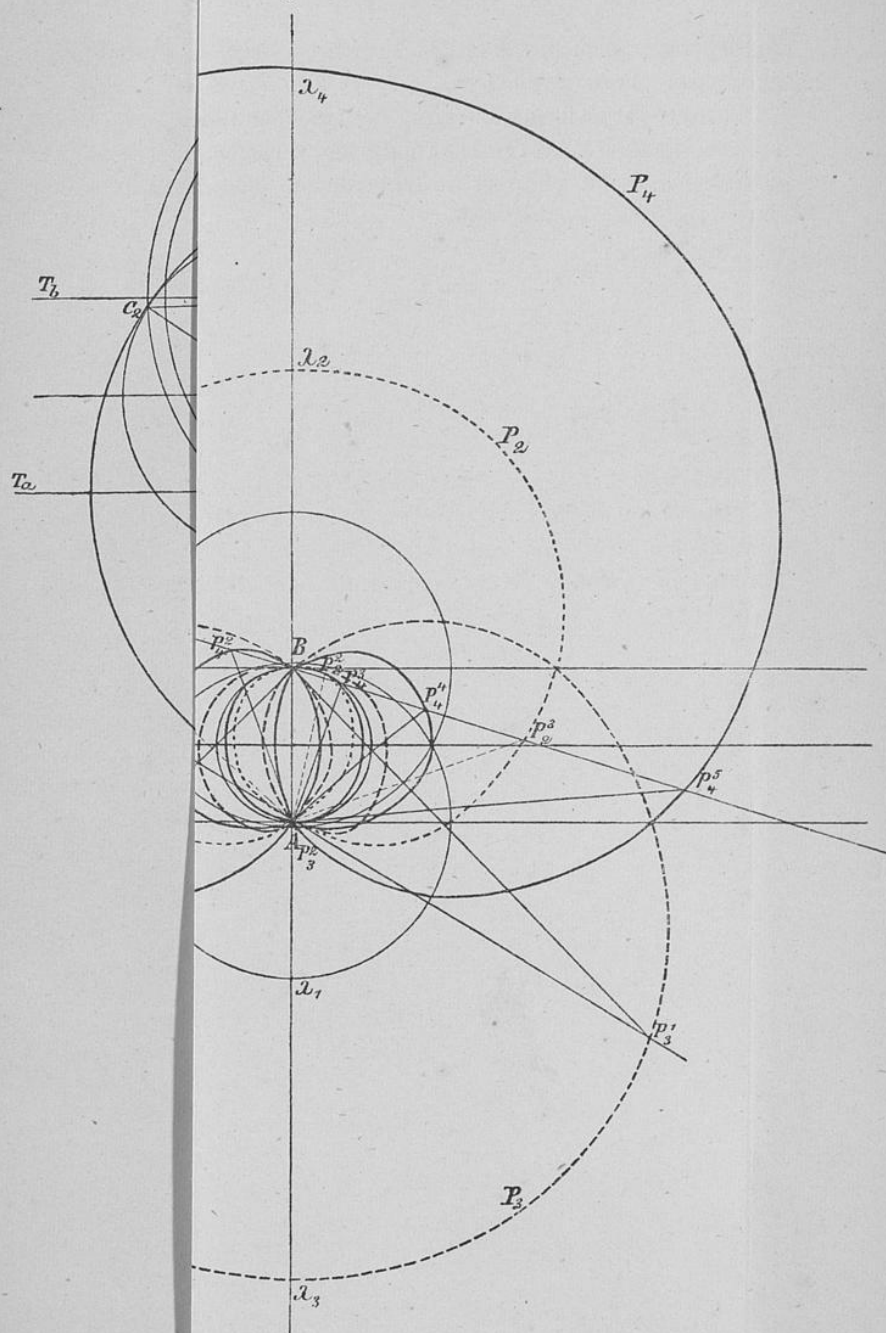
oder

$$x_{2n} - 1 = \frac{-\zeta(b^2 - 2a\eta)}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{2n} - 1 = \frac{-\eta(b^2 - 2a\eta)}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{b^2 x_{2n}}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}, \eta = \frac{b^2 y_{2n}}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}$$

Dabei ist b beliebig, am einfachsten gleich a zu nehmen.

Die erste führt auf die Trisektion des Winkels durch einen beweglichen Kreis und eine feste Hyperbel, die zweite ebenso durch einen festen Kreis und eine bewegliche gleichseitige Hyperbel.

Fig. 2.



Abtheilung. Auch die Identitäten 8) bis 18) bei Lindemann sind einigermaßen zu modifiziren.

Unsere Transformation lässt sich wie bei Lindemann p. 489 in zwei quadratische Transformationen zerlegen. In der That erhalte ich, wenn ich als die eine davon eine Transformation durch reciproke Radien wähle:

$$x_{23} - i = \frac{-b^2 \zeta}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{23} - i = \frac{b^2 \eta}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{-x_{23} b^2}{x_{23}^2 + y_{23}^2 - 2xy_{23}}, \eta = \frac{-y_{23} b^2}{x_{23}^2 + y_{23}^2 - 2xy_{23}}$$

oder

$$x_{23} - i = \frac{-\zeta(b^2 - 2\eta\eta)}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{23} - i = \frac{-\eta(b^2 - 2\eta\eta)}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{b^2 x_{23}}{x_{23}^2 + y_{23}^2}, \eta = \frac{b^2 y_{23}}{x_{23}^2 + y_{23}^2}$$

Dabei ist  $b$  beliebig, am einfachsten gleich  $a$  zu nehmen.

Die erste führt auf die Trisektion des Winkels durch einen beweglichen Kreis und eine feste Hyperbel, die zweite ebenso durch einen festen Kreis und eine bewegliche gleichseitige Hyperbel.

Fig. 1.

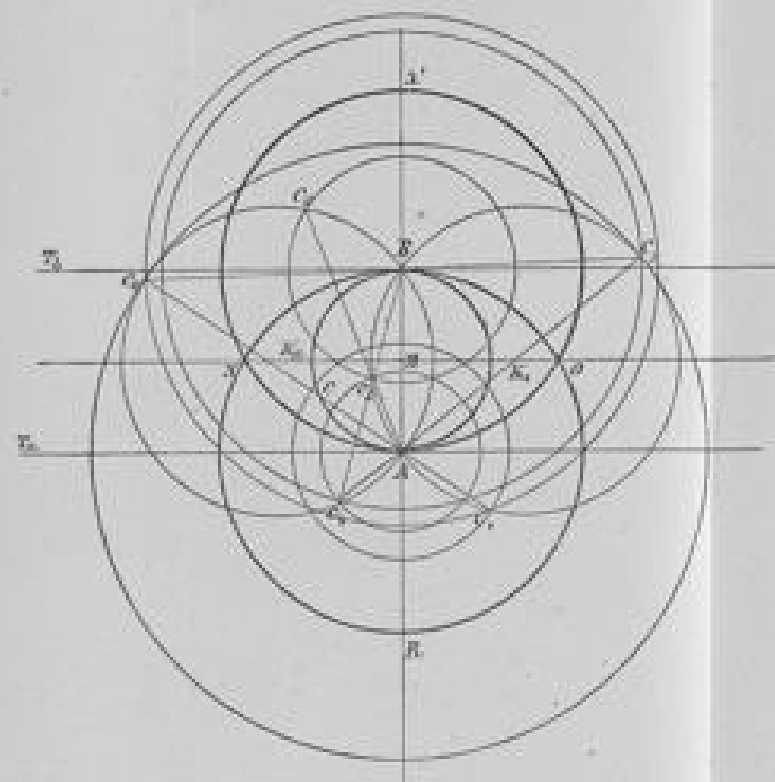


Fig. 2.

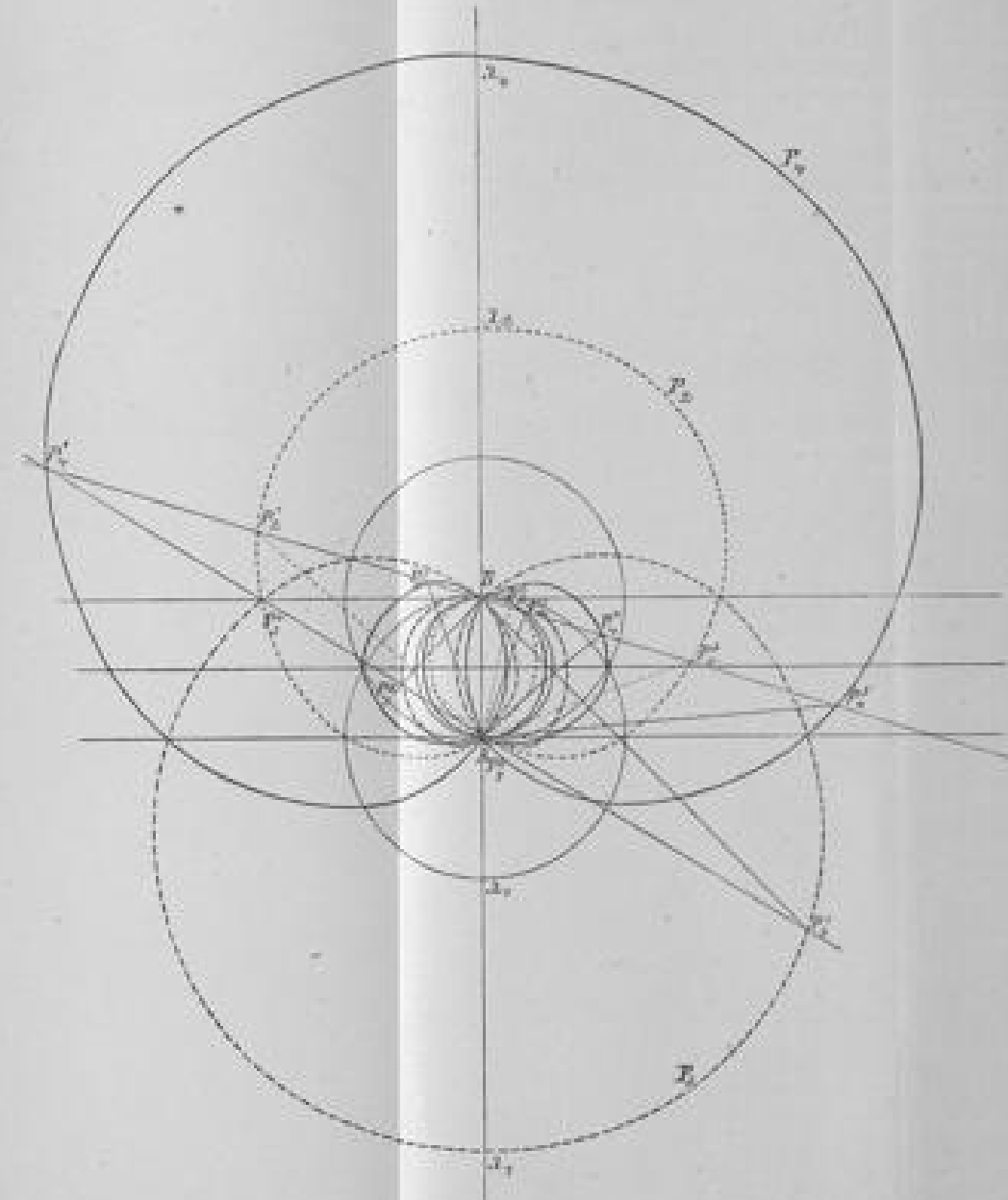


Fig. 1.

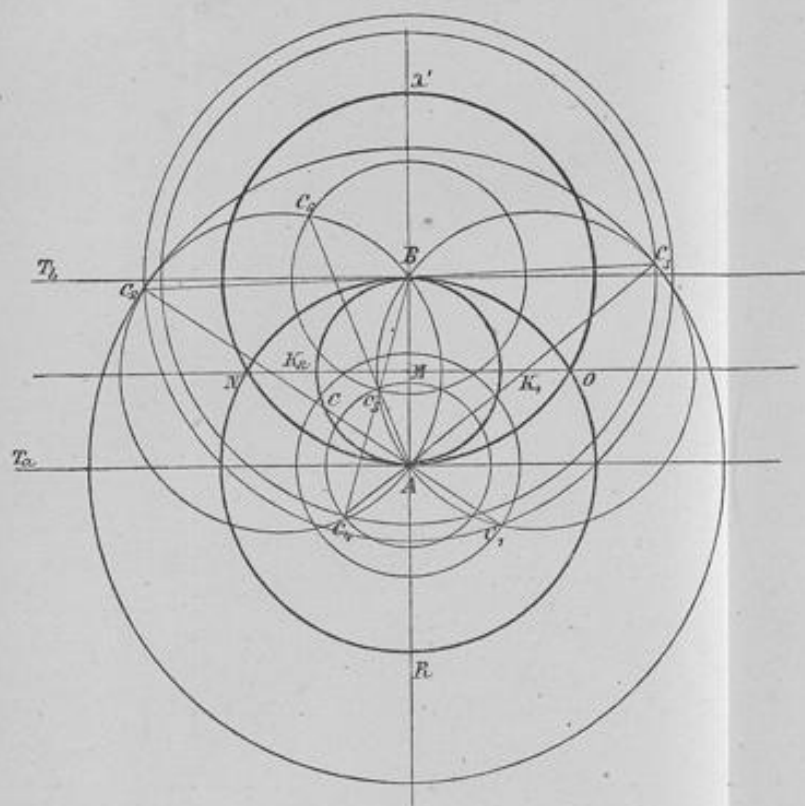
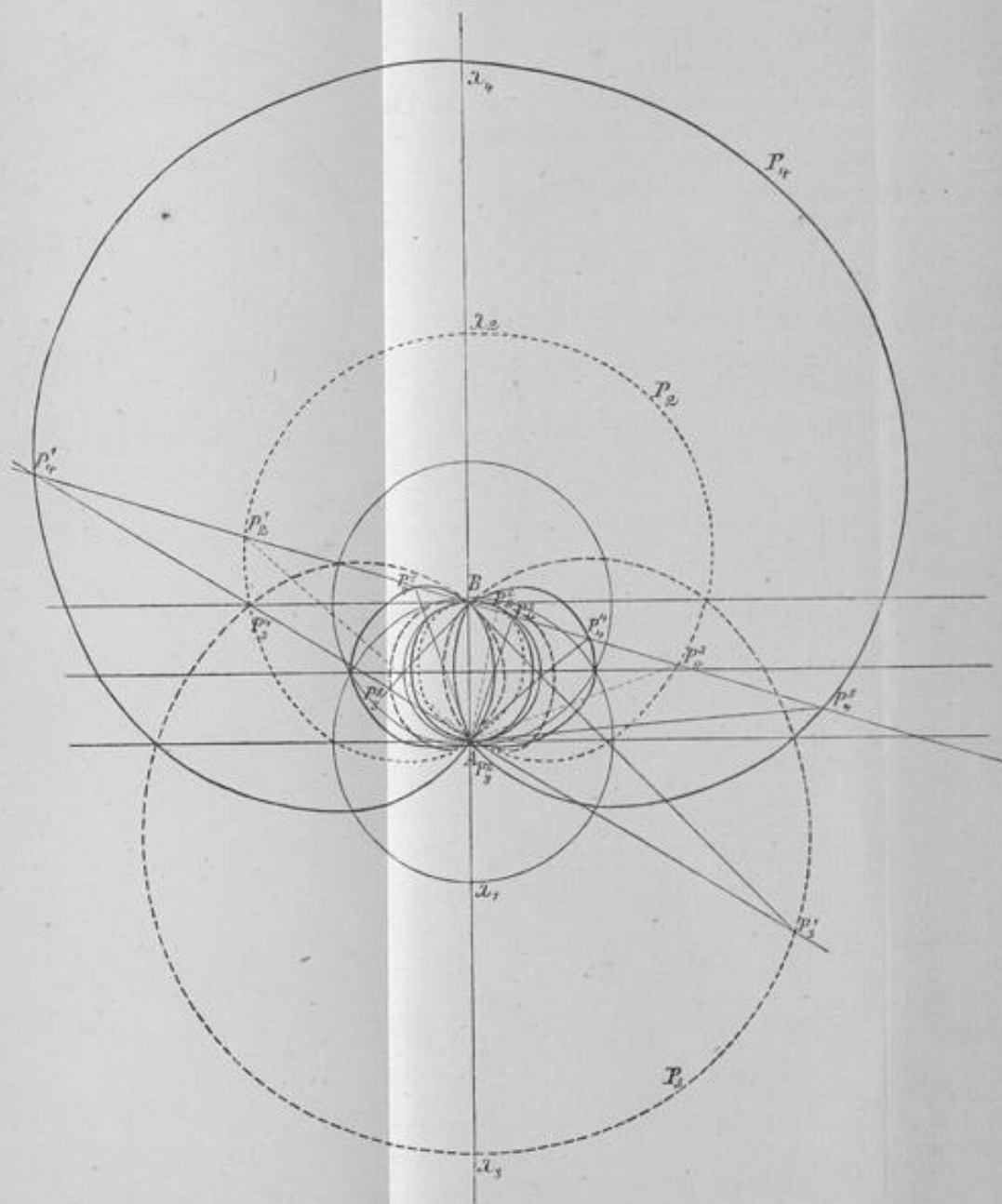
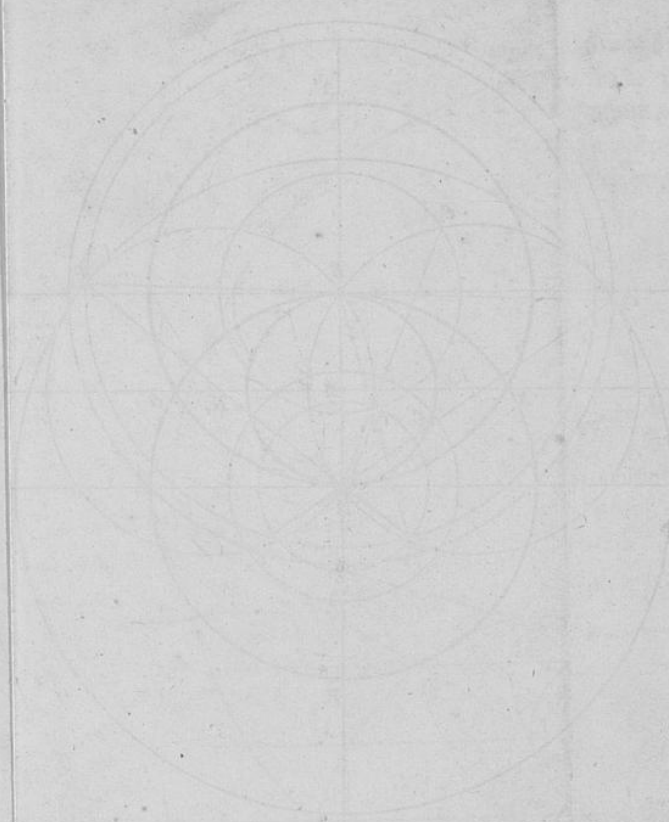


Fig. 2.





**TIFFEN** Gray Scale

© The Tiffen Company, 2007

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| R                                                                                 | G                                                                                 | B                                                                                 | W                                                                                 | G                                                                                 | K                                                                                  | C                                                                                   | Y                                                                                   | M                                                                                   |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

- A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

