

Die Kreisconchoiden.

Im Nachstehenden wird eine Reihe von Curven behandelt, welche von hervorragender Bedeutung für die Winkeltheilung sind. Die Untersuchung gründet sich auf eine eindeutige, Cremona'sche Transformation der Ebene. Es ist dieselbe ein specieller Fall einer Transformation der Ebene, bei welcher alle Punkte einer Curve dritter Ordnung fest bleiben, und jeder Strahl eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt auf der Curve liegt, so in sich transformirt wird, dass die entsprechenden Punkte eine Involution bilden, deren Ordnungspunkte die beiden andern Schnittpunkte des Strahls mit der Curve sind. Die Beziehung ist also eindeutig, nur entsprechen dem Mittelpunkt des Strahlenbüschels alle Punkte der ersten Polare desselben, u. u. Zerfällt die Curve in einen Kreis und die unendlich ferne Gerade, so ergibt sich die hier benützte Transformation, welche im I. Abschnitt rein geometrisch definirt, und nach ihren Haupteigenschaften untersucht wird*). Dabei ergibt sich, dass gewisse Kreise in sich selbst transformirt werden, was zu einer zweiten Definition Veranlassung gibt.

Im II. Abschnitt wird dann durch wiederholte Anwendung der Transformation mit alternirenden Polen aus dem Kreis eine Reihe von Curven erzeugt. Die erste ist die unter dem Namen

*) Die Transformation lässt sich auch leicht durch stereographische Projektion auf die Kugel übertragen. Nimmt man den Kreis als Hauptkreis der Kugel, so entspricht ein sphärischer Pol desselben der unendlich fernen Geraden. An die Stelle des Strahlenbüschels tritt ein Kreisbüschel. Auf jedem Kreis desselben bilden die entsprechenden Punkte eine Involution, deren Ordnungspunkte jener Pol und der Schnitt mit dem Hauptkreis sind.

Kreisconchoide oder Paskals Schnecke bekannte Curve. Die folgenden, meines Wissens noch nicht untersuchten Curven dürften passend Kreisconchoiden höherer Ordnung genannt werden.

Im Abschnitt III. wird gezeigt, dass bei all diesen Transformationen gewisse Kreispaaire immer sich selbst wieder erzeugen, so dass alle der Reihe nach einander entsprechenden Punkte der Ebene entweder die Eckpunkte von diesen Kreispaairen eingeschriebenen regulären n —Ecken sind, oder die Kreispaaire durchlaufen. Dies würde auch Anlass zu einer dritten Definition geben.

Abschnitt IV enthält den Beweis der bemerkenswerthesten Eigenschaft der Curven. Die Kreisconchoide erster Ordnung ist bekanntlich dadurch ausgezeichnet, dass jede Gerade, welche durch den einen Pol geht und mit der Hauptachse einen beliebigen Winkel α bildet, die Curve in 3 Punkten so schneidet, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte und des zweiten Poles mit der Geraden bezüglich die Winkel $\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha + \pi}{3}, \frac{\alpha + 2\pi}{3}$

unter sich also die Winkel $\frac{\pi}{3}$ bilden. Analog hat nun die Kreisconchoide n ter Ordnung die Eigenschaft, dass jede solche Gerade die Curve in $n + 2$ Punkten so schneidet, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte und des zweiten Poles mit der Geraden beziehungsweise die Winkel $\frac{\alpha}{n + 2}, \frac{\alpha + \pi}{n + 2}, \dots, \frac{\alpha + (n - 1)\pi}{n + 2}$, unter sich also die Winkel $\frac{\pi}{n + 2}$ bilden.

Im V. Abschnitt wird das Geschlecht der Curven und die Anzahl der Schnittpunkte je zweier derselben untersucht. Es zeigt sich, dass die reellen Punkte allein die nothwendigen Zahlen nicht liefern, dass aber jede Curve die unendlich fernen imaginären Kreispunkte als vielfache Punkte mit einer gemeinsamen Tangente enthält, und damit die nothwendige Ergänzung jener Zahlen gegeben ist.

Ist bis daher die Untersuchung rein geometrisch geführt worden, so werden nun schliesslich im Abschnitt VI noch die Gleichungen der Curven aufgestellt. Die Gleichungen in Polar-

coordinaten ergeben sich von selbst. Besonders geeignet zeigt sich ein Bipolarsystem, von dem aus leicht zu gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten übergegangen werden kann.

Ein Recursionsgesetz führt zur Aufstellung der independenten Form der Gleichung. Auch zeigt sich, dass in diesem Coordinatensystem die Curvengleichungen sich als Differenzen der Quadrate zweier ganzen rationalen Ausdrücke darstellen lassen, also in 2 rationale Faktoren zerfallen.

Zuletzt wird noch die Uebereinstimmung der Transformation mit der allgemeinen Theorie der Cremona'schen Transformation untersucht und dabei gefunden, dass hier der besondere Fall vorliegt, wo je zwei einfache Fundamentalpunkte in den unendlich fernen Kreispunkten so zusammenfallen, dass alle Transformationscurven sich in diesen Punkten berühren.

I.

Es sei (Fig. 1) M der Mittelpunkt eines Kreises, $AB = a$ ein Durchmesser desselben, und um A und B ebenfalls Kreise mit dem Halbmesser AB gezogen. Ich bezeichne die drei Kreise kurz mit K_m , K_a und K_b , die Senkrechten die in A und B auf der AB errichtet, und also Tangenten an K_m und K_b , resp. K_a sind, mit T_a und T_b , und endlich die Durchschnittspunkte von K_a und K_b mit N und O , die Durchschnittspunkte von AB mit K_a und K_b durch R und R^1 .

Liegt irgend eine Curve C_1 mit diesen Kreisen in einer Ebene, so bekomme ich eine zweite Curve C_2 , wenn ich jedem Punkt c_1 der C_1 , der aus A auf den K_m durch den Strahl Ac_1 im Punkte c projectirt wird, einen Punkt c_2 der C_2 entsprechen lasse, welcher auf demselben Strahle so liegt, dass cc_2 gleich und entgegengesetzt dem cc_1 ist. Man kann auch sagen, jedem Punkt c_1 , entspricht der Punkt c_2 , welcher von ihm durch K_m und den unendlich fernen Punkt der Ac_1 harmonisch getrennt ist. Fällt der Punkt c_1 der C_1 mit A zusammen, so wird der Strahl Ac_1 eine Tangente der C_1 in A und das entsprechende c_2 liegt auf K_b . Berührt die C_1 den K_m in A , so geht der Strahl Ac_1 über in T_a und c_2 fällt ebenfalls mit A zusammen.

Die Curven C_1 und C_2 nenne ich circular verbunden durch

den Strahlenbüschel A in Bezug auf K_m . Ich kann mir ebenso gut die C_1 aus der C_2 erzeugt denken als umgekehrt.

Jedem Punkt der C_1 , der ausserhalb K_b auf einer Seite der AB und einer Seite der T_a liegt, entspricht ein Punkt der C_2 , der ebenfalls ausserhalb des K_b , aber auf der andern Seite von AB und der andern Seite von T_a liegt. Jedem Punkt der C_1 , der innerhalb K_b und ausserhalb K_m liegt, entspricht ein Punkt der C_2 , der innerhalb des K_m auf derselben Seite von AB liegt, u. u. Abgesehen von Punkt A selbst, von dem schon oben gehandelt wurde, entspricht jedem Punkt der C_1 , der auf K_b liegt, der Punkt A, und jeder Punkt, der auf K_m liegt, sich selbst.

Jedem Zweig der C_1 , der durch einen andern Punkt als A in K_b eindringt, entspricht ein Zweig der C_2 , der durch A in K_m eindringt u. u. Jedem Zweig, der K_b in irgend einem Punkt ausser A berührt, entspricht ein Zweig, für welchen A ein Rückkehrpunkt ist u. u.; jedem Zweig, der K_b in A berührt, ein Zweig, der K_m also auch K_b in A berührt. Dabei berührt in allen 3 Fällen der Zweig von C_2 in A den Strahl, welcher von A nach dem Punkte geht, den der Zweig von C_1 mit K_b gemeinsam hat, wie leicht zu beweisen. Berührt dabei C_1 in dem Punkt der K_b den nach A gehenden Strahl, so ist A ein Wendepunkt der C_2 .

Jedem Zweig der C_1 , der durch einen andern Punkt als A in K_m eindringt, entspricht ein Zweig der C_2 , der durch denselben Punkt aus K_m hinaustritt. Jedem Zweig, der K_m in einem andern Punkt als A von Aussen berührt, entspricht ein Zweig der C_2 , der K_m in demselben Punkt von Innen berührt, u. u. Wenn ein Zweig der C_1 durch B in K_m eintritt, also der entsprechende Zweig der C_2 durch B aus K_m hinaustritt, schneiden sich beide Curven in B, und bilden mit K_m den nämlichen Winkel.

Dies lässt sich folgendermassen beweisen: Die Richtungen der 3 Curven im Punkt B werden durch ihre Tangenten in diesem Punkte gegeben. Wenn ich aber durch B zwei Gerade lege, die den nämlichen Winkel mit T_b bilden, und eine von ihnen als erzeugende Curve nehme, so muss die erzeugte die andere Gerade in B berühren. Denn sind Q, R, S die Durchschnitte eines durch

A gehenden Strahles beziehungsweise mit der Erzeugenden, dem K_m und der zweiten Geraden, so ist für die Punkte der Erzeugenden, die innerhalb K_m liegen, $QR < RS$; für die ausserhalb liegenden $QR > RS$; für B selbst aber fallen alle drei Punkte zusammen; wie sich leicht daraus ergibt, dass $BR \perp QS$, und im ersten Fall Winkel $RBQ < SBR$, im zweiten Fall $RBQ > SBR$ ist.

Die C_2 und C_1 können, abgesehen von A und B und etwaigen imaginären Punkten, nur dann einen Punkt miteinander gemein haben, wenn C_1 den K_m schneidet, oder wenn auf einem Strahl des Strahlenbüschels A zwei Punkte der C_1 gleichweit von seinem Durchschnitt mit K_m entfernt liegen, in welchem Fall die Curven beide Punkte gemein haben.

A und B sind nur dann als gemeinschaftliche Punkte anzusehen, wenn ein Zweig der C_2 einen Zweig der C_1 in A oder B berührt. Dies ist bei A der Fall, wenn C_1 denn K_b in A berührt, oder wenn ein Strahl des A, der C_1 in A berührt, zugleich C_1 in einem zweiten Punkt des K_b schneidet oder berührt, in welchem Fall dann die Curven beide Punkte gemeinsam haben. Bei B aber berühren sich beide Curven, wenn C_1 den K_m in B berührt, oder wenn zwei Zweige der C_1 , die sich in B schneiden, mit T_b gleiche Winkel bilden, in welchem Falle C_2 beide Zweige in B berührt.

Zwei einander entsprechende Punkte c_1 und c_2 liegen immer gleichweit von B entfernt, also immer auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt B ist. Ist nämlich wieder c der Durchschnitt von $c_1 c_2$ und K_m , so ist $Bc \perp c_1 c_2$ und $c_1 c = cc_2$. Demnach wird jeder Kreis, dessen Mittelpunkt B ist, in sich selbst transformirt, und die Beziehung zwischen c_1 und c_2 lässt sich auch so auffassen, dass c_2 der zweite Schnittpunkt der Ac_1 mit dem Kreis ist, der um B mit dem Radius Bc_1 beschrieben ist. Auch aus dieser Auffassung ergibt sich einfach, dass nur Punkte des K_m sich selbst entsprechen, nur Punkte der T_a mit den entsprechenden symmetrisch liegen in Bezug auf AB, und dass der Punkt A allen Punkten des K_b entspricht u. u.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass allemal Winkel $Bc_1 c_2 = c_1 c_2 B$, also $Bc_1 A = Ac_2 B$ oder $= 180 - Ac_2 B$ ist, je nachdem A zwischen c_2 und c_1 liegt oder nicht. Es liegen demnach c_1

und c_2 auf zwei Kreisen, welche beide über der Sehne AB den nämlichen Winkel fassen und symmetrisch zu AB liegen.

Wenn ich fortan die Drehung eines Winkels immer in dem nämlichen Sinn geschehen denke, (der des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt), und unter dem Winkel (Bz, zA) , ganz abgesehen von der Lage des Punktes A auf dem Strahl zA , den hohlen Winkel verstehe, den die beiden Strahlen Bz und zA , (in dieser Ordnung), miteinander bilden, so ist für jeden Punkt der beiden Curven $(Bc_1, c_1A) = (Ac_2, c_2B)$.

Sind C_1 und C_2 und D_1 und D_2 zwei Paare von Curven, die circular verbunden sind durch A in Bezug auf K_m , so wird jeder Berührung der C_1 und D_1 in A ein Punkt des K_b entsprechen, welchen C_2 und D_2 gemeinsam haben, u. u.

Ferner wird jeder Berührung der C_1 und D_1 in B eine Berührung der C_2 und D_2 in demselben Punkt entsprechen, und endlich jedem sonstigen gemeinsamen Punkt der C_1 und D_1 ein gemeinsamer Punkt der C_2 und D_2 . Wenn ich also A und B nur so oft als gemeinsame Punkte der Curven C_1 und D_1 ansehe, als sie sich in diesen Punkten berühren, so ist die Anzahl der Punkte, welche C_2 und D_2 gemeinsam haben, gleich der Anzahl der Punkte, welche C_1 und D_1 gemeinsam haben. Wenn ich demnach die Anzahl der gemeinsamen Punkte zweier Curven C_1 und D_1 kurz mit $N(C_1, D_1)$ bezeichne, gilt die Gleichung $N(C_1, D_1) = N(C_2, D_2)$.

Wie C_2 mit C_1 durch A circular verbunden ist, kann ich auch eine zweite Curve C_3 durch B mit C_2 circular verbinden. In Bezug auf diese Curven gelten dann ganz die nämlichen Gesetze, nur ist überall statt A, B, K_b , T_a u. s. w. zu setzen B, A, K_a , T_b u. s. w.

II.

Ich nehme nun als C_1 den $K_a = P_1$ selbst, so wird die mit ihm durch A circular verbundene C_2 (Fig. 2) die unter dem Namen Paskals Schneckenlinie oder Kreiskonchoide bekannte Curve, die ich fortan mit P_2 bezeichnen will. Es ist leicht einzusehen, dass unsere Transformation für diesen speciellen Fall zusammenfällt mit der gewöhnlichen Erzeugungsweise der Conchoide, wonach

auf jedem Strahl des Büschels A von seinem Schnittpunkt mit K_b a vorwärts und rückwärts aufgetragen wird.

Die P_2 schneidet den K_m zweimal in A unter einem Winkel von 30° , und berührt ihn in B von Innen, weil K_a den K_b zweimal schneidet und den K_m in B von Aussen berührt. Den K_b schneidet und berührt sie nicht ausser in A, da K_a nicht durch A geht. Den K_a selbst berührt sie in B und schneidet ihn zweimal in Punkten der T_a . Die Curve ist 4ter Ordnung, da A ein Doppelpunkt ist, und auf jedem Strahl von A im Allgemeinen noch 2 Punkte der Curve liegen.

Die mit K_b durch den Strahlenbüschel B circular verbundene Curve ist der vorigen congruent und liegt mit ihr symmetrisch in Bezug auf NO.

Sind p_1 und p_2 entsprechende Punkte von P_1 und P_2 , so ist beständig Winkel $RAp_1 = 2$. (Bp_1, p_1A). Während p_1 den K_a von R aus durchläuft, wächst RAp_1 von 0 bis 2π , also (Bp_1, p_1A) und der ihm gleiche (Ap_2, p_2B) von 0 bis π .

Es soll nun weiter die ganze Reihe von Curven besprochen werden, von welchen jede mit der vorhergehenden und der folgenden circular verbunden ist, mit der einen durch A und mit der andern durch B. Ich werde diese Curven der Reihe nach mit $P_1 (= K_a)$, $P_2, P_3, \dots$ bezeichnen. Eine zweite, ebenso von K_b ausgehende Curvenreihe bezeichne ich mit $P^1_1 (= K_b)$, $P^1_2, P^1_3, \dots$ u. s. w. Ich bekomme so, wenn ich zwischen je 2 Curven den sie verbindenden Strahlenbüschel setze, die Reihen

$$P_1-A-P_2-B-P_3-\dots-P_{2n}-B-P_{2n+1}-A-P_{2n+2}-\dots$$

$$P^1_1-B-P^1_2-A-P^1_3-\dots-P^1_{2n}-A-P^1_{2n+1}-B-P^1_{2n+2}-\dots$$

Beide Reihen lassen sich auch nach links fortsetzen. P_2 wird durch B in den Punkt B selbst $= P$ transformirt, dieser durch A in sich selbst, und dann durch B wieder in die P_1 , worauf sich die Reihe wie oben fortsetzt. Analog ist es mit der zweiten Reihe. Man hat also

$$\dots-P_2-A-P_1-B-P-A-P-B-P_1-A-P_2-\dots$$

$$\dots-P^1_2-B-P^1_1-A-P^1-B-P^1-A-P^1_1-B-P^1_2-\dots$$

P_n und P^1_n sind congruent und liegen symmetrisch zu NO. Die Curven können sämtlich nur durch A und B in K_m ein-

drängen, da die ersten Glieder beider Reihen keinen andern Punkt mit K_m gemein haben. Alle Curven der ersten Reihe berühren K_m einmal in B, und zwar die P_{2n} von Innen, die P_{2n+1} von Aussen. Analog verhalten sich die P_1 in A. Keine der Curven kann, abgesehen von A und B, sich selber schneiden oder berühren; auch A und B können nicht Doppelpunkte in unserem Sinne sein, nämlich so, dass sich zwei Zweige einer Curve in diesen Punkten berühren. Dies folgt daraus, dass P_1 keinen Doppelpunkt besitzt.

Wenn ich den dem Punkte p_1 der P_1 entsprechenden Punkt der P_a mit p_a bezeichne, so ist $(Bp_{2b+1}, p_{2b+1}A) = (Ap_{2a}, p_{2a}B)$. Für alle Curven P_{2a} wird demnach, während p_{2a} die Curven von ihrem Durchschnittspunkt mit der AB aus, den ich mit R_{2a} bezeichnen will, dem Zeiger der Uhr entgegengesetzt durchläuft, der Winkel $(Ap_{2a}, p_{2a}B)$ von 0 bis π wachsen; ebenso wird für alle P_{2a+1} , wenn ich unter R_{2a+1} den analogen Punkt verstehe, der Winkel $(Bp_{2a+1}, p_{2a+1}A)$ von $p_{2a+1} = R_{2a+1}$ aus von 0 bis π wachsen.

Ausserdem werden unten noch die folgenden Eigenschaften der P nachgewiesen werden.

Für die P_{2n} ist A ein $2n$ facher und B ein $2n-1$ facher Punkt. Jeder der $2n-1$ Zweige von P_{2n} , die durch B gehen, wird durch einen Zweig der P_{2n-1} in diesem Punkt berührt, und jeder der $2n$ Zweige, die durch A gehen, durch einen Zweig der P_{2n+1} . Dagegen haben P_{2n} und P_{2n-1} in A keine Berührung, P_{2n} und P_{2n+1} in B eine einzige.

Die Curve P_{2n} ist $4n$ ter Ordnung. Sie hat im Allgemeinen mit jedem Strahl des A, insbesondere aber mit T_a , ausser A noch $2n$ Punkte gemein. Mit jedem Strahl des B hat sie im Allgemeinen ausser B $2n+1$ Punkte gemein. T_b berührt sie in B und schneidet sie noch in $2n$ Punkten. Mit NO und also mit P'_{2n} hat sie $4n$ Punkte gemein, und mit P_{2n-1} hat sie $4n-1$ Punkte gemein, nämlich die $2n-1$ Berührungspunkte in B und die $2n$ Schnittpunkte mit T_a .

Die Curve P_{2n} besteht aus $2n$ geschlossenen Zweigen, von denen jeder von A ausgeht und nach A zurückkehrt. $2n-2$ derselben, welche ich Zweige der ersten Klasse nennen will, schnei-

den in A den K_m , K_b und T_a , in B den K_m , K_a und T_b , sie schneiden ausserdem K_b , T_a , K_a und T_b noch je in einem zweiten Punkte und NO in 2 Punkten. Ein Zweig, zweiter Klasse, liegt ganz ausserhalb K_m und K_b , schneidet die AB in dem Punkte R_{2n} , der von M aus in der Richtung von B um $(2n + \frac{1}{2})a$ entfernt liegt, und schneidet ausserdem K_a , T_a , NO und T_b in je zwei Punkten. Der letzte Zweig endlich, dritter Classe liegt ganz innerhalb des K_m , berührt ihn in B von Innen und schneidet NO zweimal.

Für P_{2n+1} ist B ein $2n+1$ facher Punkt und A ein $2n$ facher Punkt. Jeder der $2n$ Zweige, die durch A gehen, wird in diesem Punkt von einem Zweig der P_{2n} , und jeder der $2n+1$ Zweige, die durch B gehen, in diesem Punkt durch einen Zweig der P_{2n+2} berührt. Dagegen haben P_{2n+1} und P_{2n+2} in A keine Berührung, P_{2n+1} und P_{2n} in B eine einzige.

P_{2n+1} ist $4n+2$ ter Ordnung. Jeder Strahl des B hat mit P_{2n+1} im Allgemeinen $2n+1$ Punkte gemein, T_b insbesondere berührt sie in B und schneidet sie noch in $2n$ Punkten. Mit jedem Strahl des A hat sie $2n+2$ Punkte gemein, mit NO und also mit P_{2n+1}^1 hat sie $4n+2$ Punkte gemein, und endlich mit P_{2n} $4n+1$ Punkte, nämlich die $2n$ Berührungspunkte in A, und die $2n$ Schnittpunkte und den Berührungspunkt in T_b .

Die Curve P_{2n+1} besteht aus $2n+1$ geschlossenen Zweigen, welche von B ausgehen und nach B zurückkehren. $2n-2$ derselben, die Zweige erster Klasse, schneiden in B den K_m , K_a , T_b und in A den K_m , K_b , T_a , ausserdem noch K_a , T_b , K_b und T_a in je einem zweiten Punkte und NO in 2 Punkten. Ein Zweig, zweiter Klasse, liegt ganz ausserhalb K_m und K_a , schneidet AB in dem Punkt R_{2n+1} , der von M aus in der Richtung von A um $(2n+1 + \frac{1}{2})a$ entfernt liegt, und schneidet ausserdem K_b , T_b , NO und T_a in je zwei Punkten. Von zwei Zweigen endlich, dritter Klasse, liegt jeder ganz innerhalb K_a , berührt mit dem einen Ende in B K_a von Innen und K_m von Aussen, während das andere Ende innerhalb K_m liegt, schneidet in A die K_m , K_b und T_a , ausserdem noch T_a und K_b je in einem zweiten Punkte und NO in zwei Punkten.

Der Nachweis der allgemeinen Geltung dieser Eigenschaften,

welche für die ersten P evident sind, beruht auf folgenden Sätzen:

Es ist $N(P_n, P_{n+a}) = N(P_{n-a}, P_{n+1+a}) = N(K_a, P_{2n}) = N(B, P_{2n+1})$;
 $N(P_n, P'_n) = N(P_{n+a}, P'_{n-a}) = N(P_{2n-1}, K_b) = N(P_{2n}, A)$.

Jede der betrachteten Curven ist durch AB in zwei symmetrische Theile getheilt, namentlich also wird T_a und T_b von jeder der Curven in Punkten geschnitten, die paarweise gleichweit von A , beziehungsweise B abstehen, und bilden die durch A und B gehenden Zweige, abgesehen von dem in B berührenden Zweige, paarweise gleiche Winkel mit T_a und T_b . Daraus folgt sofort, wie oben gezeigt, $N(P_{2n-1}, B) = N(P_{2n}, B)$ und $N(P_{2n}, A) = N(P_{2n+1}, A)$.

Dies lässt sich nocherweitern. Wenn ich unter $N(C_1, C_2, C_3)$ die Anzahl der Punkte verstehe, welche die Curven C_1, C_2, C_3 in unserem Sinne gemeinsam haben, so ergibt sich ähnlich wie oben

$N(P_{2n-1}, P_{2n}, B) = N(B, P_{2mn-1}, P_{2n-1}) = N(B, P_{2mn}, P_{2n-1})$;
 $N(P_{2n}, P_{2n+1}, A) = N(P_{2n}, P_{(2m+1)(2n+1)-1}, A) = N(P_{2n}, P_{(2m+1)(2n+1)}, A)$
 d. h. alle Zweige der P_{2n-1} werden in B berührt von der P_{2mn-1} und P_{2mn} , alle Zweige der P_{2n} in A von der $P_{(2m+1)(2n+1)-1}$ und $P_{(2m+1)(2n+1)}$, unter m 0 und alle positiven ganzen Zahlen verstanden.

Was die Berührungen der P_{2n-1} und P_{2n} in A betrifft, so hat man $N(P_{2n-1}, P_{2n}, A) = N(P_{2n-2}, P_{2n}, A) =$

$N(P_{2n-2-a}, P_{2n-a}, P'_a) = N(B, P_2, P'_{2n-2}) = N(B, P_1, P'_{2n-1}) = 0$.

In Bezug auf die Berührung von P_{2n} und P_{2n+1} in B aber ist $N(P_{2n}, P_{2n+1}, B) = N(P_{2n-1}, P_{2n+1}, B) = N(P_{2n-1-a}, P_{2n+1-a}, P_a) = N(B, P_2, P_{2n-1}) = N(B, P_1, P_{2n}) = 1$.

Weiter ist $N(P_{2n-1}, P_{2n}) = N(P_{2n-1}, B) + N(P_{2n-1}, T_a)$.

Es ist nämlich nach dem Vorhergehenden $N(P_{2n-1}, P_{2n}, B) = N(P_{2n-1}, B)$, und $N(P_{2n-1}, P_{2n}, T_a) = N(P_{2n-1}, T_a)$. Weitere Punkte können P_{2n-1} und P_{2n} nicht miteinander gemein haben. Denn würden sie irgend einen andern Punkt p_{2n-1} gemein haben, so müssten sie auch den entsprechenden p_{2n} , und die zu diesen in Bezug auf AB symmetrischen Punkte q_{2n-1} und q_{2n} gemein haben. Dann wäre $(B p_{2n-1}, p_{2n-1} A) = (A p_{2n}, p_{2n} B) = \pi - (B p_{2n}, p_{2n} A) = (B q_{2n}, q_{2n} A)$, was unmöglich ist, weil die

Winkel $(Bp_{2n-1}, p_{2n-1}A)$ von 0 bis π wachsen. Ebenso ist auch $N(P_{2n}, P_{2n+1}) = N(P_{2n}, A) + N_{(2n, T_b)}$, unter der letzteren Anzahl auch den Punkt B mitgezählt, in welchem die P_{2n} die T_b berührt.

Endlich ist $N(P_n, P^1_n) = N(P_n, NO)$.

B_n und P^1_n liegen symmetrisch zu der Geraden NO. Durch jeden Punkt, den die P_n mit NO gemein hat, muss sonach auch die P^1_n gehen. Würden sie ausserdem noch einen Punkt p_n gemeinsam haben, so müssten sie auch den in Bezug auf NO symmetrischen Punkt p^1_n gemeinsam haben. Dann aber wäre wieder $(Bp_n, p_nA) = (Bp^1_n, p^1_nA)$, was nicht möglich ist.

Nehmen wir nun an, unsere Behauptungen seien bewiesen für alle Curven bis P_{2n-1} incl., so ist

$$N(P_{2n}, A) = N(P_n, P^1_n) = 2n,$$

$$N(P_{2n}, B) = N(P_{2n-1}, B) = 2n-1.$$

Da nun A ein $2n$ facher Punkt von P_{2n} ist, und jeder Strahl des A die P_{2n-1} im Allgemeinen in $2n$ Punkten schneidet, also nach dem Bildungsgesetz der Curven auf jedem Strahl des A auch $2n$ Punkte der P_{2n} liegen, ist P_{2n} von $4n$ ten Grade. Dass dann P_{2n} von jedem Strahl des B im Allgemeinen in $2n+1$ Punkten geschnitten wird, folgt daraus, dass P_{2n} von $4n$ ten Grade und B ein $2n-1$ facher Punkt derselben ist. Dass T_b , welches in B einmal die Curve berührt, nur $2n$ Punkte ausser B, und dass die NO überhaupt $4n$ Punkte mit P_{2n} gemeinsam hat, folgt ebenfalls daraus, dass P_{2n} von $4n$ ten Grade ist. Um aber nachzuweisen, dass diese $2n$ und $4n$ Punkte alle reell sind, müsste ich die einzelnen Zweige der P_{2n} betrachten, wie sie aus denen der P_{2n-1} entstehen. Dies mag der Kürze wegen hier unterbleiben.

Analog ist auch der Beweis für die über P_{2n+1} aufgestellten Behauptungen und ist damit für alle Curven der Beweis erbracht.

III.

Bezeichne wieder p_a den Punkt der P_a , welcher dem Punkt p_1 der P_1 entspricht, so folgt aus der Gleichheit aller Winkel (Bp_a, p_aA) , dass alle p_a auf den schon in I erwähnten zwei in Bezug auf AB symmetrisch liegenden Kreisen

liegen müssen, welche über AB als Sehne einen Peripheriewinkel $= (Bp_1, p_1 A)$ fassen. Fällt dabei ein Punkt p_a mit A oder B zusammen, so berührt P_a den betreffenden Kreis in diesem Punkt, und die gemeinsame Tangente bildet mit AB einen Winkel $= (Bp_1, p_1 A)$.

Das Kreispaar ist bestimmt durch die Punkte A, B, p_1 oder auch durch A, B und den zu p_1 in Bezug auf AB symmetrischen Punkt. Es liegen also auch alle ihnen weiter entsprechenden Punkte auf dem nämlichen Kreispaar und wieder symmetrisch zu AB.

Alle p_{2a+1} liegen auf dem Kreis (A, B, p_1); alle p_{2a} auf dem symmetrischen. Ich will den ersten kurz mit K_1 , den zweiten mit K_2 bezeichnen.

Dem Punkt B als Punkt der P_1 entspricht in allen Curven wieder B. Für den Punkt R werden die Radien des Kreispaares unendlich, die beiden Kreise gehen über in die Gerade AB, und die entsprechenden Punkte sind die oben schon mit R_a bezeichneten Punkte. Sie liegen abwechselnd auf beiden Seiten von B, je zwei nebeneinanderliegende um $2a$ von einander entfernt. Ich werde sie fortan als die Anfangspunkte der Curven nehmen.

Ist Winkel $RAp_1 = \alpha$, so ist, wie schon oben bemerkt, $(Bp_1, p_1 A) = \frac{\alpha}{2}$ und weiter der Bogen $BAp_1 = 2BA$. Nach einem bekannten Satz der Planimetrie (vgl. z. B. Baltzer, Elemente der Mathematik II, 4. B. §. 4, 7.) ergibt sich dann leicht: $\text{arc. } Bp_1 = p_1 p_3 = \dots p_{2a+1} p_{2a+3} = \dots = Bp_2 = p_2 p_4 = \dots p_{2a} p_{2a+2} = \dots = 2BA$.

Ist nun α ein nicht rationaler Theil von π , so können keine zwei Punkte p_a und p_b zusammenfallen, und es liegt auf K_1 und K_2 kein einziger Punkt, den zwei der Curven gemeinsam hätten.

Es berührt auch keine der Curven die Kreise in A oder B, oder geht durch einen ihrer Durchschnittspunkte mit T_a , T_b , NO oder K_b .

Ist aber α ein rationaler Theil von π , so dass $2\alpha = \frac{m}{n} 2\pi$, so wird jeder der betreffenden Kreise K_1 und K_2 von sämtlichen Curven nur in den n Eckpunkten eines ihm eingeschrie-

benen regelmässigen n Ecks geschnitten, resp. berührt, so zwar, dass in demselben Punkt p_{2a-1} alle Curven $P_{2a-1+b_{2n}}$ und $P_{2n-1-(2a-1)+b_{2n}}$ sich schneiden.

In B werden beide Kreise berührt von den Curven $P_{b_{2n}-1}$ und $P_{b_{2n}}$, in A nur wenn m gerade und n ungerade ist von den Curven P_{n+2b_n} und P_{n-1+2b_n} . In einem Durchschnittspunkt mit der NO werden beide Kreise nur geschnitten, wenn m gerade und n ungerade ist, und zwar von den Curven $P_{\frac{n-1}{2}+b_n}$. Dabei

sind die betr. Punkte die äusseren, wenn $m=4a+2$, die inneren, wenn $m=4a$. In einem Durchschnittspunkt mit T_a werden beide Kreise geschnitten nur, wenn n gerade und m ungerade ist und zwar von den Curven P_{n-1+2b_n} und P_{n+2b_n} , in einem Durchschnittspunkt mit T_b nur, wenn n und m ungerade sind, von den Curven P_{n-1+2b_n} und P_{n+2b_n} . In einem Durchschnittspunkt mit K_b werden beide Kreise geschnitten, wenn m gerade und n ungerade, von den Curven P_{n-2+2b_n} und P_{n+1+2b_n} , in einem Durchschnittspunkt mit K_a endlich allemal von den Curven P_{1+2b_n} und $P_{2n-2+2b_n}$.

Auch wenn c_1 ein ganz beliebiger Punkt der Ebene ist, liegen alle der Reihe nach ihm entsprechenden Punkte auf dem Kreis $K_1 = K(A, B, c_1)$ und dem symmetrischen. Dabei hat man $Bc_1 = Bc_2$, $Ac_2 = Ac_3$, $c_1c_3 = Ac_3 - Ac_1 = Ac_2 - Bc_1 + AB = = Ac_2 - Bc_2 + AB = 2AB$, und dann weiter $c_1c_3 = c_2c_4 = c_3c_5 = \dots$. Wir können also überhaupt sagen: Bei unserer Transformation geht jeder K_1 in den K_2 über, u. u.; nach einer geraden Anzahl von Transformationen jeder Kreis in sich selber. Ist dabei $2AB$ ein rationaler Theil, $\left(\frac{m}{n}\right)$, des ganzen Kreises, so fallen die den c_1 nacheinander entsprechenden Punkte in die Ecken von regulären, den beiden Kreisen einbeschriebenen n Ecken, und immer nach $2n$ Transformationen fällt jeder Punkt des Kreises wieder in seine ursprüngliche Lage.

Aus dem Abschnitt III ergibt sich eine dritte Auffassung unserer Transformation, welche als nahe liegend hier nicht weiter verfolgt werden soll.

IV.

Jede P_{2n} wird durch einen Strahl des Büschels B ausser in B noch in $2n + 1$ Punkten geschnitten. Werden diese von links nach rechts der Reihe nach mit $p^1_{2n}, p^2_{2n}, \dots p^{2n+1}_{2n}$ bezeichnet, und Winkel $R_{2n} B p^1_{2n}$ mit α , so ist Winkel $(Ap^1_{2n}, p^1_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} \alpha$; $(Ap^2_{2n}, p^2_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} (\alpha + \pi)$; .. $(Ap^k_{2n}, p^k_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} [\alpha + (k-1)\pi]$, .. $(Ap^{2n+1}_{2n}, p^{2n+1}_{2n} B) = \frac{1}{2n+1} (\alpha + 2n\pi)$. Folglich auch $(Ap^2_{2n}, Ap^1_{2n}) = (Ap^3_{2n}, Ap^2_{2n}) = (Ap^{2n+1}_{2n}, Ap^{2n}_{2n}) = \frac{1}{2n+1} \pi$.

Ist speciell der schneidende Strahl BA selbst, so folgt daraus, dass die $2n$ Zweige der P_{2n} , und also auch die der P_{2n+1} , und AB in A unter sich je den Winkel $\frac{1}{2n+1} \pi$ bilden.

Jede P_{2n+1} wird durch einen Strahl des Büschels A ausser in A noch in $2n + 2$ Punkten geschnitten. Werden diese von rechts nach links der Reihe nach mit $p^1_{2n+1}, p^2_{2n+1}, \dots p^{2n+2}_{2n+1}$ bezeichnet, und Winkel $R_{2n+1} A p^1_{2n+1}$ mit α , so ist

$$(B p^1_{2n+1}, A p^1_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} \alpha, (B p^2_{2n+1}, A p^2_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} (\alpha + \pi), \dots (B p^k_{2n+1}, A p^k_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} [\alpha + (k-1)\pi], \dots$$

$$(B p^{2n+2}_{2n+1}, A p^{2n+2}_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} [\alpha + (2n+1)\pi]. \text{ Folglich auch}$$

$$(B p^2_{2n+1}, B p^1_{2n+1}) = (B p^3_{2n+1}, B p^2_{2n+1}) = \dots (B p^{2n+2}_{2n+1}, B p^{2n+1}_{2n+1}) = \frac{1}{2n+2} \pi.$$

Ist speciell der schneidende Strahl AB, so folgt daraus, dass die $2n+1$ Zweige der P_{2n+1} , und also auch die der P_{2n+2} , und AB in B unter sich je den Winkel $\frac{1}{2n+2} \pi$ bilden.

Aus dem Verhalten der Curven in A und B folgt dann ferner: Die Schnittpunkte von P_{2n} mit K_b und R^1 sind die Ecken

eines regulären $2n-1$ Ecks, die Schnittpunkte von P_{2n} mit K_a und R die Ecken eines regulären $2n+2$ Ecks. Die Schnittpunkte von P_{2n+1} mit K_a und R sind die Ecken eines regulären $2n$ Ecks, die Schnittpunkte von P_{2n+1} mit K_b und R' die Ecken eines regulären $2n+3$ Ecks.

Um den Beweis dieser Sätze auf synthetischem Wege streng zu führen, muss ich den Gang der einzelnen Curven genauer betrachten und die einzelnen Zweige von einander unterscheiden.

Ich denke mir P_1 beschrieben durch einen Punkt auf einem Strahl des Büschels A , während dieser sich um A aus der Anfangsrichtung AR immer in demselben Sinne stetig dreht. Nach einer Drehung $= 2\pi$ schliesst sich die Curve. Ich bezeichne den ersten Zweig derselben, welchen der Punkt beschreibt, während sich der Strahl von 0 bis π dreht, mit P_1^1 , einzelne Punkte desselben mit p_1^1 ; den zweiten Zweig, welchen der Punkt beschreibt, während sich der Strahl von π bis 2π dreht, mit P_1^2 , einzelne Punkte desselben mit p_1^2 . Jeder Strahl, der durch einen p_1^1 , geht, trifft die Curve auch noch in einem p_1^2 .

Ebenso entsteht dann auch P_2 durch einen Punkt, der sich auf einen Strahl des A stetig bewegt, während der Strahl selbst sich um A stetig dreht und auch diese Curve muss sich schliessen nach einer Drehung $= 2\pi$. Dem P_1^1 entspricht ein Theil der P_2 , der von R_2 durch A bis B geht, dem P_1^2 ein symmetrischer, der von B durch A nach R_2 zurückkehrt. Lasse ich aber P_2 entstehen durch Drehung eines Strahles um den Punkt B aus der Anfangsrichtung BR_2 , so schliesst sich die Curve erst nach einer Drehung $= 3\pi$. Ich bezeichne den ersten Zweig, der durch Drehung des Strahles von 0 bis π entsteht, und von R_2 bis A geht, mit P_2^1 , einzelne Punkte mit p_2^1 ; den zweiten Zweig, der durch Drehung des Strahles von π bis 2π entsteht, und eine geschlossene Linie bildet, die von A durch B wieder nach A geht, mit P_2^2 , einzelne Punkte mit p_2^2 ; endlich den dritten Zweig, der durch Drehung des Strahles von 2π bis 3π entsteht, und von A nach R_2 geht, mit P_2^3 , einzelne Punkte mit p_2^3 . Der beschreibende Punkt ist in der Mitte seines Weges auf die entgegengesetzte Seite des Strahles übergetreten. Den p_2^1 entsprechen p_1^1 ; den p_2^2 , welche rechts von AB liegen, p_1^1 , nämlich

die vom ersten Durchschnitt der P_1 mit K_b bis B; den p^2_2 , welche links von AB liegen, p^2_1 , nämlich die von B bis zum zweiten Durchschnitt der P_1 mit K_b ; den p^3_2 endlich entsprechen p^2_1 . Jeder Strahl des B, welcher durch einen p^1_2 geht, trifft die P_2 zuerst noch in einem p^2_2 , dann in einem p^3_2 , in dieser Ordnung.

Die P_3 entsteht dann ebenfalls durch einen Strahl der sich um B dreht, so dass sich die Curve nach einer Drehung $= 3\pi$ schliesst. Dem P^1_2 entspricht ein Zweig der P_3 von R_3 durch B bis A, dem P^2_2 eine geschlossene Curve von A durch B bis wieder A, dem P^3_2 ein Zweig von A durch B bis zurück zu R_3 .

Lässt man dagegen die P_3 durch einen Strahl entstehen, der sich um A dreht, so schliesst sich die Curve erst nach einer Drehung $= 4\pi$. Bei der Drehung von 0 bis π entsteht der Zweig P^1_3 , der von R_3 bis B geht; bei der Drehung von π bis 2π der geschlossene Zweig P^2_3 , der links von AB von B bis A, dann rechts von AB von A bis B geht; bei der Drehung von 2π bis 3π der geschlossene Zweig P^3_3 , der analog verläuft, endlich bei der Drehung von 3π bis 4π der Zweig P^4_3 , der von B bis R_3 geht. Den p^1_3 entsprechen p^1_2 ; den p^2_3 links von AB die p^1_2 , die vom ersten Durchschnitt der P_2 mit K_a bis A liegen; den p^2_3 rechts von AB die p^2_2 , welche rechts von AB liegen; den p^3_3 links von AB die p^2_2 , welche links von AB liegen; den p^3_3 rechts von AB die p^3_2 , welche von A bis zum zweiten Durchschnitt der P_2 mit K_a liegen; den p^4_3 endlich p^3_2 . Jeder Strahl des A, welcher durch einen p^1_3 geht, trifft die P_3 noch in einem p^2_3 , p^3_3 , p^4_3 , in dieser Ordnung.

Analog lässt sich nun weiter schliessen. Man erhält als allgemeines Resultat: Wenn eine P_{2n} durch Drehung eines Strahles um B entsteht, schliesst sich die Curve nach einer Drehung um $(2n+1)\pi$. Je einer Drehung um π von der Anfangslage BR_{2n} aus entspricht ein Zweig. Der erste geht von R_{2n} bis A auf der linken Seite. Von den $2n-1$ folgenden geht jeder auf der rechten Seite von A nach B, dann auf der linken von B nach A, so zwar, dass rechts jeder Zweig von dem folgenden, links von dem vorhergehenden eingeschlossen ist. Jedem p_{2n} auf der linken Seite entspricht ein p_{2n-1} mit gleichem oberen Index, jedem p_{2n} auf der rechten Seite ein p_{2n-1} mit einem um 1 kleineren

Index. Jeder Strahl, der durch einen p_{2n}^1 geht, trifft die P_{2n} nach einander in einem $p_{2n}^2, p_{2n}^3, \dots p_{2n}^{2n+1}$, von links nach rechts, in dieser Ordnung, so dass also auch, wenn die $p_{2n}^1, p_{2n}^2, \dots p_{2n}^a$ auf der linken Seite liegen, dann die $p_{2n}^{a+1} \dots p_{2n}^{2n+1}$ auf der rechten Seite liegen.

Wenn eine P_{2n+1} durch Drehung eines Strahles um A entsteht, schliesst sich die Curve nach einer Drehung $= (2n+2)\pi$. Je einer Drehung um π von der Anfangslage AR_{2n+1} an entspricht ein Zweig. Der erste geht rechts von R_{2n+1} bis B. Von den $2n$ folgenden jeder auf der linken Seite von B bis A, dann auf der rechten von A bis B, so zwar, dass auf der linken Seite jeder Zweig von dem folgenden, auf der rechten jeder von dem vorhergehenden eingeschlossen ist. Der letzte Zweig geht von B auf der linken Seite zurück nach R_{2n+1} . Jedem p_{2n+1} auf der rechten Seite entspricht ein p_{2n} mit gleichem oberen Index, jedem p_{2n+1} auf der linken Seite ein p_{2n} mit einem um 1 kleineren oberen Index. Jeder Strahl, der durch einen p_{2n+1}^1 geht, trifft die P_{2n+1} noch nacheinander in einem $p_{2n+1}^2, p_{2n+1}^3, \dots p_{2n+1}^{2n+2}$, von rechts nach links in dieser Ordnung, so dass also auch, wenn die $p_{2n+1}^1 \dots p_{2n+1}^a$ auf der rechten Seite liegen, dann die $p_{2n+1}^{a+1} \dots p_{2n+1}^{2n+2}$ auf der linken Seite liegen.

Mit Hülfe dieser Unterscheidungen und der oben bewiesenen Gleichheit der Winkel $(Bp_{2a-1}, Ap_{2a-1}) = (Ap_{2b}, Bp_{2b})$ ergibt sich nun der Beweis unserer Behauptung folgendermassen. Angenommen der Satz sei gültig für alle P bis zur P_{2n-1} , so gilt er auch für P_{2n} . Denn für irgend ein p_{2n}^k , welches links liegt, welchem also ein p_{2n-1}^k entspricht, ist $(BR_{2n}, Bp_{2n}^k) = (AR_{2n}, Ap_{2n}^k) + (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k)$. Es ist aber $(AR_{2n}, Ap_{2n}^k) = (AR_{2n-1}, Ap_{2n-1}^k)$ und dieses nach der Annahme $= 2n(Bp_{2n-1}^k, Ap_{2n-1}^k) - (k-1)\pi = 2n(Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k) - (k-1)\pi$; also ist auch $(BR_{2n}, Bp_{2n}^k) + (k-1)\pi = (2n+1) \cdot (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k)$.

Für ein p_{2n}^k , welches rechts liegt, welchem also ein p_{2n-1}^{k-1} entspricht, ist $[BR_{2n}, Bp_{2n}^k] = (AR_{2n}, Ap_{2n}^k) - (\pi - (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k))$. Hier ist nun $(AB_{2n}, Ap_{2n}^k) = (AR_{2n-1}, Ap_{2n-1}^{k-1}) = 2n (Bp_{2n-1}^{k-1}, Ap_{2n-1}^{k-1}) - (k-2) \pi = 2n (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k) - (k-2) \pi$; also wird wieder $(BR_{2n}, Bp_{2n}^k) + (k-1) \pi = (2n+1) \cdot (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k)$.

Die Behauptung gilt dann auch weiter für p_{2n+1}^k . Es ist nämlich für ein p_{2n+1}^k , welches rechts liegt, welchem also ein p_{2n}^k entspricht $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) = (BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) + (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)$. Es ist aber $(BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) = (BR_{2n}, Bp_{2n}^k) = (2n+1) (Ap_{2n}^k, Bp_{2n}^k) - (k-1) \pi = (n+1) \cdot (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k) - (k-1) \pi$; folglich wird $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) + (k-1) \pi = (2n+2) \cdot (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)$.

Liegt aber p_{2n+1}^k links, so dass ihm ein p_{2n}^{k-1} entspricht, so hat man $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) = (BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) - [\pi - (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)]$. Hier ist $(BR_{2n+1}, Bp_{2n+1}^k) = (BR_{2n}, Bp_{2n}^{k-1}) = (2n+1) \cdot (Ap_{2n}^{k-1}, Bp_{2n}^{k-1}) - (k-2) \pi = (2n+1) \cdot (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k) - (k-2) \pi$. Also wieder $(AR_{2n+1}, Ap_{2n+1}^k) + (k-1) \pi = (2n+2) (Bp_{2n+1}^k, Ap_{2n+1}^k)$.

Für die ersten P ist die Behauptung nach demselben Schema leicht zu beweisen, also gilt sie allgemein.

V.

Die Anzahl der Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinne von P_r und P_s muss gleich $4rs$ sein. Die Untersuchung der reellen Schnittpunkte gibt aber diese Anzahl kleiner. Daraus folgt, dass die Curven auch imaginäre Punkte gemeinsam haben müssen. Ferner: die Transformation, durch welche eine Curve in die andere übergeht, ist eindeutig, demnach muss das Geschlecht der Curven, d. i. der Ueberschuss der Zahl der möglichen Doppel-

punkte über die der wirklichen, $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, erhalten bleiben. Es müssen also alle P, wie der Kreis, vom Geschlecht 0 sein. Wären die reellen vielfachen Punkte A und B allein vorhanden, so würde sich das Geschlecht von n abhängig zeigen: folglich muss jede Curve auch imaginäre Doppelpunkte besitzen. In der That lässt sich auch auf synthetischem Weg nachweisen, dass die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte vielfache Punkte aller P sind. Jede P_{2n} enthält dieselben als $2n$ fache Punkte, deren einfache Tangenten sich in B schneiden, so dass P_{2n} mit K_b eine $(2n+1)$ punktige Berührung hat. Jede P_{2n+1} enthält sie als $(2n+1)$ fache Punkte, deren einfache Tangenten sich in A schneiden, so dass P_{2n+1} mit K_a eine $(2n+2)$ punktige Berührung hat.

Werden diese mit hinzugerechnet, so sind die beiden erwähnten Bedingungen erfüllt, woraus dann wieder hervorgeht, dass die verschiedenen P keine weiteren imaginären Punkte gemeinsam haben können, und dass sie auch keine weiteren imaginären Doppelpunkte besitzen.

Die Anzahl der Schnittpunkte in unserem Sinne lässt sich bei zwei beliebigen P am einfachsten bestimmen wie in Abschnitt II. Es ist dabei zu unterscheiden, ob die Indices der P um eine ungerade oder gerade Zahl verschieden sind.

In ersten Fall seien P_{2e} und P_{2i+1} die beiden Curven, so ist $N(P_{2e}, P_{2i+1}) = N(P_{e+i}, P_{e+i+1}) = N(B, P_{2e+2i+1}) = 2e+2i+1$.

Im zweiten Falle hat man für P_{2e} und P_{2i} ($i > e$)

$$N(P_{2e}, P_{2i}) = N(B, P_{2i-2e}) = 2i-2e-1;$$

und für P_{2e+1} und P_{2i+1} ebenso

$$N(P_{2e+1}, P_{2i+1}) = N(B, P_{2i-2e}) = 2i-2e-1.$$

Wie viele von diesen Punkten in jedem Fall Berührungen in A und B ergeben, lässt sich dann leicht berechnen, da man die Winkel kennt, welche die einzelnen Zweige der Curven in diesen Punkten mit AB bilden. Ich ziehe vor zu dieser Untersuchung die Kreise des Abschnitts III zu verwenden.

Es möge nun der Kreis K_1 , für welchen der Bogen $2AB \frac{m}{n}$

von ganzen Kreis ist, mit $K\left(\frac{m}{n}\right)$ bezeichnet werden, dann ist der zugehörige $K_2 K\left(\frac{2n-m}{n}\right)$ und beide fallen zusammen für $m=n$ in den K_m .

Sollen sich nun P_{2e} und P_{2i+1} schneiden, so geschieht dies in Punkten von Kreisen, für welche $2e+2i+1=2n-1$ sein muss, also in Kreisen $K\left(\frac{m}{e+i+1}\right)$. Durch jeden Werth von m , der $< e+i+1$ ist, ist dann ein Kreispaar bestimmt, auf welchem 2 symmetrische Schnittpunkte liegen, durch $m=e+i+1$ aber der Kreis K_m , auf welchem der eine Berührungspunkt in B liegt. Im Ganzen sind es sonach wieder $2e+2i+1$ gemeinsame Punkte. Auf jedem Kreispaar ist es der Punkt, für welchen ist $\text{arc. } Bp_{2i+1} = \frac{(i+1)m}{e+i+1} \cdot K\left(\frac{m}{e+i+1}\right)$, und der symmetrische Punkt. Wie viele von diesen Punkten nach B und A fallen, hängt von dem grössten gemeinsamen Faktor von e und $i+1$, resp. $2e+1$ und $2i+1$ ab. Soll nämlich Bp_{2i+1} ein Vielfaches des ganzen Kreisumfanges sein, so muss sein $\frac{m(i+1)}{e+i+1} = q$, wobei q eine ganze Zahl. Sei dann $e=ra$, $i+1=sa$, so gibt dies $m = \frac{r+s}{s} q$. Es muss also m ein Vielfaches von $r+s$ sein, und zugleich $m \equiv e+i+1$. Dies gibt sonach a Kreispaaire, und wie oben $2a-1$ Punkte, welche nach B fallen.

Soll p_{2i+1} nach A fallen, so muss sein $\frac{(i+1)m}{e+i+1} = q + \frac{m}{2(e+i+1)}$ also $(2i+1)m = q(2e+2i+2)$. Ist dann $2e+1=tb$, $2i+1=ub$, so wird $m = \frac{u+t}{u} \cdot q$. Es muss also m ein Vielfaches von $t+u$, und $m \equiv e+i+1$ sein. Da b ungerade ist, gibt dies $\frac{b-1}{2}$ Kreispaaire und $b-1$ Punkte, die nach A fallen.

Die Zahl der reellen Schnittpunkte in gewöhnlichem Sinne ergibt sich demnach so: B ist für P_{2e} ein $2e-1$ facher, für P_{2i+1} ein $2i+1$ facher Punkt, dabei finden in B $2a-1$ Berührungen statt, also zählt B für $(2e-1)(2i+1) + 2a-1$ einfache Schnittpunkte. Ferner ist A für P_{2e} ein $2e$ facher, für P_{2i+1}

ein $2i$ facher Punkt und es finden in A $b-1$ Berührungen statt, also zählt A für $4ei+b-1$ einfache Schnittpunkte. Ausserdem sind noch vorhanden $2e + 2i + 1 - (2a-1) - (b-1)$ einfache Schnittpunkte. Im Ganzen hat man sonach $4e(2i+1)$ reelle Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinn.

Analog findet man für eine P_{2e} und P_{2i} , dass, wenn $e=ra$ und $i=sa$ ist, in B $2a-1$ Berührungen statt finden, und wenn $2e+1=tb$ und $2i+1=ub$ ist, in A $b-1$ Berührungen statt finden. Die Zahl der reellen Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinn ist dann $4e(2i-1)$. Endlich finden bei einer P_{2e+1} und P_{2i+1} für $e+1=ra$ und $i+1=sa$ in B $2a-1$, und für $2e+1=tb$ und $2i+1=ub$ in A $b-1$ Berührungen statt. Die Zahl der reellen Schnittpunkte in gewöhnlichem Sinn ist $4i(2e+1)$.

Das Verhalten der P zu den unendlich fernen imaginären Kreispunkten ergibt sich nun folgendermassen: K_m hat mit der unendlich fernen Geraden diese beiden Punkte gemein. Deswegen entsprechen bei einer Transformation durch A allen Punkten der durch A nach den Kreispunkten gelegten imaginären Strahlen die Kreispunkte u. u.; namentlich sie sich auch selbst wieder. Nun hat P_1 mit der unendlich fernen Geraden nur die beiden Kreispunkte gemeinsam, und zwar so, dass die imaginären Geraden, welche diese Punkte mit A verbinden, die P_1 in denselben berühren. Es fallen demnach auch die entsprechenden Punkte der P_2 mit ihnen zusammen, und zwar sind sie für die P_2 Doppelpunkte, da die imaginären Strahlen durch A als Tangenten zwei benachbarte Punkte mit P_1 gemeinsam haben. Weitere Punkte kann P_2 mit der unendlich fernen Geraden nicht gemein haben, da sie überhaupt mit derselben nur 4 Punkte gemeinsam hat, und jeden weiteren Punkt auch die P_1 mit ihr gemeinsam haben müsste. Nun muss ebenso die P_3 die unendlich fernen Kreispunkte enthalten, und zwar mindestens als Doppelpunkte. Dass sie aber für P_3 sogar dreifache Punkte sein müssen, folgt daraus, dass die unendlich ferne Gerade überhaupt 6 Punkte mit P_3 gemein haben muss, aber keinen anderen Punkt mit ihr gemeinsam haben kann, da denselben sonst auch die P_2 enthalten müsste. Dreifache Punkte können sie aber nur dadurch werden, dass die imaginären Tangenten, welche die P_2 in den

Kreispunkten berühren, durch B gehen. In dieser Weise weiter schliessend erhält man die am Anfang dieses Abschnitts behauptete Eigenschaft der Curven. Uebrigens wird dieselbe auch durch die Gleichungen der Curven bestätigt.

Nehme ich nun die Berechnung der Zahl der Schnittpunkte zweier P wieder auf, so ergibt sich: P_{2e} und P_{2i+1} haben in jedem unendlich fernen Kreispunkt einen $2e$, resp. $2i+1$ fachen Punkt mit verschiedenen Tangenten. Dies zählt für $2 \cdot 2e \cdot (2i+1)$ einfache Schnittpunkte. Zusammen mit den oben gefundenen reellen Schnittpunkten gibt dies $4e(4i+2)$ Schnittpunkte, wie es sein muss. P_{2e} und P_{2i} haben in jedem Kreispunkt einen $2e$, resp. $2i$ fachen Punkt mit gemeinsamer Tangente. Dies zählt für $2 \cdot 2e(2i+1)$ einfache Schnittpunkte. Zusammen mit den reellen Schnittpunkten gibt dies $4e \cdot 4i$ Schnittpunkte. P_{2e+1} und P_{2i+1} endlich berühren sich in jedem Kreispunkt mit einem $2e+1$, resp. $2i+1$ fachen Punkt. Dies zählt für $2 \cdot (2e+1)(2i+2)$ einfache Schnittpunkte. Mit den reellen zusammen sind es dann $(4e+2)(4i+2)$ einfache Schnittpunkte.

Ich gehe nun über zur Berechnung des Geschlechtes der Curven. Eine P_{2n} ist vom Grade $4n$, hat in A einen $2n$ fachen, in B einen $2n-1$ fachen, und in jedem imaginären Kreispunkt einen $2n$ fachen Punkt. Demnach ist

$$p = \frac{(4n-1)(4n-2)}{2} - \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{(2n-1)(2n-2)}{2} - 2 \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} = 0.$$

Eine P_{2n+1} ist vom Grade $4n+2$, hat in B einen $2n+1$ fachen, in A einen $2n$ fachen Punkt und in jedem imaginären Kreispunkt einen $2n+1$ fachen Punkt. Demnach ist

$$p = \frac{(4n+1)4n}{2} - \frac{(2n+1)2n}{2} - \frac{2n(2n-1)}{2} - 2 \cdot \frac{(2n+1)2n}{2} = 0.$$

VI.

Die Gleichungen der Curven in Polarcoordinaten lassen sich sehr leicht aufstellen. Versteht man unter α wie oben den Winkel, welchen ein Strahl mit der AB bildet so erhält man für den

Pol A die Gleichung von P_{2n} $r = a \cdot \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2n} \alpha \right)}{\sin \left(\frac{1}{2n} \alpha \right)},$

und die Gleichung von P_{2n+1} $r = a \cdot \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2n+2} \alpha \right)}{\sin \left(\frac{1}{2n+2} \alpha \right)},$

für den Pol B die Gleichung von P_{2n} $r = a \cdot \frac{\sin \left(\frac{2n}{2n+1} \alpha \right)}{\sin \left(\frac{1}{2n+1} \alpha \right)},$

und die Gleichung von P_{2n+1} $r = a \cdot \frac{\sin \left(\frac{2n+2}{2n+1} \alpha \right)}{\sin \left(\frac{1}{2n+1} \alpha \right)}.$

Als vorzüglich geeignet zur Aufstellung der Gleichungen erweist sich ferner ein Bipolarsystem, dessen Pole A und B sind.

Man hat nämlich bei der Transformation durch A : $Bp_{2n} - 1 = Bp_{2n}$, und nach einem bekannten Satz der Planimetrie $(Bp_{2n}^2 - a^2) = \pm Ap_{2n-1} \cdot Ap_{2n}$, je nachdem A auf der Strecke $p_{2n-1} p_{2n}$ oder auf ihrer Verlängerung liegt, in beiden Fällen also

$$\frac{(Bp_{2n}^2 - a^2)^2}{Ap_{2n}^2} = A^2 p_{2n-1}, \text{ und auch } \frac{(Bp_{2n-1}^2 - a^2)^2}{Ap_{2n-1}^2} = A^2 p_{2n}.$$

Bei der Transformation durch B ist $Ap_{2n} = Ap_{2n+1}$ und $(Ap_{2n+1}^2 - a^2) = \pm Bp_{2n} \cdot Bp_{2n+1}$, in allen Fällen $\frac{(Ap_{2n+1}^2 - a^2)^2}{Bp_{2n+1}^2} = Bp_{2n}^2$ und $\frac{(Ap_{2n}^2 - a^2)^2}{Bp_{2n}^2} = Bp_{2n+1}^2.$

Bezeichne ich also den Abstand eines Punktes von A durch R_a , den eines Punktes von B durch R_b , so erhalte ich aus der Gleichung einer P_{2n-1} in Bipolarcoordinaten die der P_{2n} u. u.,

wenn ich statt R_a^2 setze $\frac{(R_b^2 - a^2)^2}{R_a^2}$, und aus der Gleichung

der P_{2n} die der P_{2n+1} u. u., wenn ich statt R_b^2 setze $\frac{(R_a^2 - a^2)^2}{R_b^2}$

Es enthalten jedoch die so entstehenden Gleichungen fremde Faktoren, die daher rühren, dass bei einer Transformation durch A A selbst in den K_b übergeht, und bei einer Transformation durch B B in den K_a .

Bezeichne ich die Faktoren, welche gleich 0 gesetzt, die

eigentlichen Curvengleichungen geben mit π , so hat man nacheinander

$$P_1 = \pi_1 = 0, \quad \pi_1 = R_a^2 - a^2 = 0,$$

$$P_2 = \frac{1}{R_a^2} \pi_2 = 0, \quad \pi_2 = (R_b^2 - a^2)^2 - a^2 R_a^2 = 0,$$

$$P_3 = \frac{\pi_1}{R_a^2 R_b^4} \pi_3 = 0, \quad \pi_3 = R_a^2 (R_a^2 - a^2)^2 - a^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2)^2 = 0$$

$$P_4 = \frac{\pi_2}{R_b^4 R_a^6} \pi_4 = 0, \quad \pi_4 = [(R_b^2 - a^2)^2 - a^2 R_a^2]^2 - a^2 R_a^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2)^2 = 0,$$

$$P_5 = \frac{\pi_3}{R_a^6 R_b^8} \pi_5 = 0, \quad \pi_5 = R_a^2 [(R_a^2 - a^2)^2 - a^2 R_b^2]^2 - a^2 [(R_b^2 - a^2)(R_a^2 + R_b^2 - a^2) + R_a^2 (R_a^2 - a^2)]^2 = 0.$$

Die Gleichungen der P^1 und π^1 ergeben sich, wenn man einfach R_a und R_b vertauscht.

Um die Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, darf man nur, wenn AB die y Achse und T_a die x Achse werden soll, $R_a^2 = x^2 + y^2$, $R_b^2 = x^2 + (y-a)^2$ setzen, und wenn T_b die x Achse werden soll, $R_b^2 = x^2 + y^2$, $R_a^2 = x^2 + (y+a)^2$.

Um die allgemeinen Substitutionsgleichungen zu erhalten, bezeichne ich die rechtwinkligen Coordinaten mit A als Anfangspunkt, welche sich auf die Ebene einer P_{2n} beziehen, mit x_{2n}, y_{2n} ; die sich auf die Ebene P_{2n+1} beziehen, mit x_{2n+1}, y_{2n+1} , u. s. w. Bei einer Transformation durch A ist dann

$$\frac{x_{2n-1}}{x_{2n}} = \frac{y_{2n-1}}{y_{2n}}, \text{ also auch } \frac{x_{2n-1}^2}{x_{2n}^2} = \frac{x_{2n-1}^2 + y_{2n-1}^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}$$

$$\text{Ferner gilt, wie oben gezeigt, die Gleichung } x_{2n-1}^2 y_{2n-1}^2 = \frac{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2ay_{2n})^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}, \text{ also ist auch } x_{2n-1}^2 = x_{2n}^2 \cdot \frac{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2ay_{2n})^2}{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2)^2},$$

$$\text{und } x_{2n-1} = -x_{2n} \cdot \frac{(x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2ay_{2n})}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}.$$

Dass das negative Zeichen zu nehmen ist, entscheidet ein Blick in die Figur.

Ich schreibe hiefür kürzer $x_{2n-1} \equiv -x_{2n} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}$, wobei das Zeichen $\equiv$ hier, und analog in den späteren Gleichungen andeuten soll, dass die Gleichung nur richtig ist, wenn π_1^1 und R_a^2 als Funktionen von x_{2n} und y_{2n} gedacht sind.

Ganz analog ergibt sich auch $y_{2n-1} \equiv -y_{2n} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}$ u. recipr.

$$x_{2n} \equiv -x_{2n-1} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}, y_{2n} \equiv -y_{2n-1} \frac{\pi_1^1}{R_a^2}.$$

Dabei wird $\pi_{2n-1} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n-2} \pi_{2n}}{R_a^{4n-2}}$, da A für π_{2n-1} ein $2n-2$ -facher Punkt ist, im Nenner nur eine Potenz von R_a^2 erscheinen kann und der Ausdruck homogen sein muss.

$$\text{Ebenso wird } \pi_{2n} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n} \pi_{2n-1}}{R_a^{4n+2}}, \pi_{1,2n} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n-1} \pi_{1,2n+1}}{R_a^{4n}}$$

$$\pi_{1,2n+1} \equiv \frac{\pi_1^{1,2n+1} \pi_{1,2n}}{R_a^{4n}}.$$

Bei einer Transformation durch B ist ebenso $R_a^2 \equiv R_b^2$, $R_b^2 \equiv \frac{\pi_1^2}{R_b^2}$

$$x_{2n+1} \equiv -x_{2n} \frac{\pi_1}{R_b^2}; y_{2n+1} - a \equiv -(y_{2n} - a) \frac{\pi_1}{R_b^2} \text{ u. reciprok.}$$

$$x_{2n} \equiv -x_{2n+1} \frac{\pi_1}{R_b^2}; y_{2n} - a \equiv -(y_{2n+1} - a) \frac{\pi_1}{R_b^2};$$

$$\pi_{2n} \equiv \frac{\pi_1^{2n-1} \pi_{2n+1}}{R_b^{4n}}, \pi_{2n+1} \equiv \frac{\pi_1^{2n+1} \pi_{2n}}{R_b^{4n}};$$

$$\pi_{1,2n-1} \equiv \frac{\pi_1^{2n-2} \pi_{1,2n}}{R_b^{4n-2}}, \pi_{1,2n} \equiv \frac{\pi_1^{2n} \pi_{1,2n-1}}{R_b^{4n-2}}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man dann leicht auch die weiteren aufstellen, die einer Transformation AB, d. h. erst durch A, dann durch B, einer Transformation BA, ABA, BAB, u. s. w. entsprechen. Dies mag hier übergangen und nur bemerkt werden, dass die im Abschnitt III behandelte Eigenschaft unserer Transformation sich dadurch ausspricht, dass der Ausdruck $\frac{x_k^2 + y_k^2 - ay_k}{x_k}$ abgesehen vom Vorzeichen einen invarianten

Charakter für alle diese Transformationen hat.

Zu einer Recursionsformel zwischen den π , und damit schliesslich auch zu einer independenten Darstellung derselben gelange ich auf folgendem Wege:

Werden die Transformationen A und B abwechselnd auf die Gleichung $\pi_1 = R_a^2$ angewandt, so erhält man

$$\frac{\pi_{2n} \pi_{2n+2}}{R_a^{4n+2} R_b^{4n}} = \frac{\pi_{2n+1}^2}{R_a^{4n+2} R_b^{4n}} - a^2, \quad \frac{\pi_{2n+1} \pi_{2n+3}}{R_b^{4n+4} R_a^{4n+2}} =$$

$$\frac{\pi_{2n+2}^2}{R_b^{4n+4} R_a^{4n+2}} - a^2,$$

und analog

$$\frac{\pi_{2n}^2 \pi_{2n+2}}{R_b^{4n+2} R_a^{4n}} = \frac{\pi_{2n+1}^2}{R_b^{4n+2} R_a^{4n}} - a^2, \quad \frac{\pi_{2n+1} \pi_{2n+3}}{R_a^{4n+4} R_b^{4n+2}} =$$

$$\frac{\pi_{2n+2}^2}{R_a^{4n+4} R_b^{4n+2}} - a^2.$$

Aus diesen folgt weiter

$$a^2 R_b^{4n+4} R_a^{4n+2} = \pi_{2n+2}^2 - \pi_{2n+1} \pi_{2n+3} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2)$$

$$a^2 R_a^{4n+2} R_b^{4n} = \pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n} \pi_{2n+2} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2)$$

$$a^2 R_b^{4n+2} R_a^{4n} = \pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n} \pi_{2n+2} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+1}^2 - \pi_{2n}^2)$$

$$a^2 R_a^{4n+2} R_b^{4n+2} = \pi_{2n+2}^2 - \pi_{2n+1}^2 + \pi_{2n+1} \pi_{2n+3} = R_a^2 R_b^2 (\pi_{2n+2}^2 - \pi_{2n+1}^2)$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\pi_{2n+2} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n}}{\pi_{2n+1} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n-1}} = \frac{\pi_{2n+1} + 1}{\pi_{2n} - 1} \text{ und dann allgemein}$$

$$\frac{\pi_{2n+2} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n}}{\pi_{2n-2k} + R_a^2 R_b^2 \pi_{2n-2k-2}} = \frac{\pi_{2n+1} + 1}{\pi_{2n-1-2k}}.$$

Nun ist aber $\pi_2 + R_a^2 R_b^2 = \pi_1^2 (1 + R_a^2)$. Folglich hat man

$$\pi_{2n+2} = \pi_{2n+1}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n} R_a^2 R_b^2 \text{ und analog}$$

$$\pi_{2n+3} = \pi_{2n+2}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n+1} R_a^2 R_b^2,$$

$$\pi_{2n+4} = \pi_{2n+3}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n+2} R_a^2 R_b^2,$$

$$\pi_{2n+5} = \pi_{2n+4}^2 (R_a^2 + R_b^2 - a^2) - \pi_{2n+3} R_a^2 R_b^2.$$

Wenn ich nun $R_a^2 + R_b^2 - a^2 = s$ und $R_a^2 R_b^2 = p$ setze, und die Reihe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 \\ - R_a^2 &= -s \pi_0 + \pi_1^2 \\ 0 &= p \pi_0 - s \pi_1^2 + \pi_2 \\ 0 &= 0 + p \pi_1^2 - s \pi_2 + \pi_3^2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Determinanten je nach der letzten Unbekannten auflöse, erhalte ich die independente Darstellung:

$$\pi_{2n} = A_{2n} - R_a^2 A_{2n-1}, \quad \pi_{12n} = A_{2n} - R_b^2 A_{2n-1},$$

$$\pi_{12n+1} = A_{2n+1} - R_a^2 A_{2n}, \quad \pi_{2n+1} = A_{2n+1} - R_b^2 A_{2n}.$$

Dabei ist A_n eine Kettenbruch-Determinante n ten Grades ($A_0 = 1$), und zwar

$$A_n = (-1)^n \begin{vmatrix} -s, & 1 & 0 & 0 & \dots \\ p, & -s & 1 & 0 & \dots \\ 0, & p-s & 1 & & \\ 0, & 0 & p-s & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}, \text{ oder entwickelt}$$

$$k = \frac{n}{2}$$

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)_k p^k s^{n-2k}.$$

Es lässt sich nun auch noch jedes π als Differenz zweier Quadrate darstellen, mithin in zwei rationale Faktoren zerlegen. Wenn ich die obige Reihe der Gleichungen erst mit $\pi_{2n-2k} = \pi_{2n-k} - p \cdot \pi_{12n-2k-1} = -s \pi_{2n-2k} + \pi_{12n-2k+1}$ beginne, und dann auflöse, erhalte ich $\pi_{2n} = \pi_{2n-2k} A_{2k} - p \cdot \pi_{12n-2k-1} A_{2k-1}$, $\pi_{2n+1} = \pi_{12n-2k} A_{2k+1} - p \cdot \pi_{2n-2k-1} A_{2k}$, $\pi_{2n} = \pi_{12n-2k-1} A_{2k+1} - p \cdot \pi_{2n-2k-2} A_{2k}$, $\pi_{2n+1} = \pi_{2n+1-2k} A_{2k} - p \cdot \pi_{12n-2k} A_{2k-1}$.

Hieraus ergibt sich auch

$$\pi_{4n} = \pi_{2n} A_{2n} - p \cdot \pi_{12n-1} A_{2n-1}. \text{ Es ist aber } A_{2n} = \pi_{2n} + R_a^2 A_{2n-1},$$

folglich: $\pi_{4n} = \pi_{2n}^2 + A_{2n-1} (R_a^2 \pi_{2n} - p \cdot \pi_{12n-1}) = \pi_{2n}^2 - R_a^2 A_{2n-1} (R_b^2 \pi_{12n-1} - \pi_{2n}) = \pi_{2n}^2 - a^2 R_a^2 A_{2n-1}^2$.

Auf etwas weitläufigerem Weg erhält man dann auch aus

$$\pi_{4n+1} = \pi_{12n} A_{2n+1} - p \cdot \pi_{2n-1} A_{2n}, \text{ die Gleichung } \pi_{4n+1} = R_a^2 \pi_{12n}^2 - a^2 A_{2n}^2. \text{ Ueberhaupt ergibt sich analog}$$

$$\pi_{4n} = \pi_{2n}^2 - a^2 R_a^2 A_{2n-1}^2, \quad \pi_{14n} = \pi_{12n}^2 - a^2 R_b^2 A_{2n-1}^2,$$

$$\pi_{4n+1} = R_a^2 \pi_{12n}^2 - a^2 A_{2n}^2, \quad \pi_{14n+1} = R_b^2 \pi_{2n}^2 - a^2 A_{2n}^2,$$

$$\pi_{4n+2} = \pi_{12n+1}^2 - a^2 R_a^2 A_{2n}^2, \quad \pi_{14n+2} = \pi_{2n+1}^2 - a^2 R_b^2 A_{2n}^2,$$

$$\pi_{4n+3} = R_a^2 \pi_{2n+1}^2 - a^2 A_{2n+1}^2, \quad \pi_{14n+3} = R_b^2 \pi_{12n+1}^2 - a^2 A_{2n+1}^2.$$

Die nämlichen Resultate lassen sich auch durch Transformation der Gleichungen $\pi_2 = \pi_1^2 - a^2 R_a^2$, $\pi_1^2 = \pi_1^2 - a^2 R_b^2$ erzielen.

Schliesslich soll nun noch die Uebereinstimmung unserer Transformation mit der allgemeinen Theorie der Cremona'schen Transformation untersucht werden, wie sie in den Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch, herausgegeben von Lindemann p. 478 ff. aufgestellt ist.

Ich setze zunächst, um homogene Coordinaten zu erhalten

$$x_{2n-1} = \frac{\zeta_1}{\zeta_3}, y_{2n-1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_3}, x_{2n} = \frac{\eta_1}{\eta_3}, y_{2n} = \frac{\eta_2}{\eta_3}. \text{ Dadurch wird}$$

$$\eta_1 = -\zeta_1(R^2_b - a^2), \eta_2 = -\zeta_2(R^2_b - a^2), \eta_3 = \zeta_3 R^2_a; \text{ oder}$$

$$\eta_1 = -\zeta_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3), \eta_2 = -\zeta_2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3), \eta_3 = \zeta_3(\zeta_1^2 + \zeta_2^2).$$

Dieselbe Form haben auch die Gleichungen, welche umgekehrt die ζ durch die η ausdrücken. Die Curven $f_1 = -\zeta_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3) = 0$, $f_2 = -\zeta_2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2a\zeta_2\zeta_3) = 0$, $f_3 = \zeta_3(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 0$ sind zerfallende Curven dritter Ordnung. Die beiden ersten haben einen gemeinsamen Faktor, entgegen der Annahme bei Lindemann p. 478.

Die erste besteht aus dem K_b und der y Achse, hat also 2 Doppelpunkte in ihren Durchschnittspunkten und geht durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte so, dass die imaginären Tangenten durch den reellen Punkt B gehen.

f_2 besteht aus demselben K_b und der x Achse, hat also in A einen Selbstberührungspunkt, und geht ebenso wie f_1 durch die unendlich fernen Kreispunkte.

f_3 zerfällt in drei Gerade: die unendlich ferne Gerade und die beiden imaginären Geraden $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0$, welche durch A und die unendlich fernen Kreispunkte gehen. Die 3 Doppelpunkte sind eben A und die imaginären Kreispunkte.

Die Curven, welche den Geraden u η in beiden Systemen entsprechen, sind

$$u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + u_3\zeta_3 = -u_1\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2a\eta_2\eta_3) - u_2\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2a\eta_2\eta_3) + u_3\eta_3(\eta_1^2 + \eta_2^2) = 0, \text{ oder}$$

$$-(\eta_1^2 + \eta_2^2)(u_1\eta_1 + u_2\eta_2) + \eta_3[u_3(\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2a\eta_2(u_1\eta_1 + u_2\eta_2)] = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass sie im Punkt $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$, also in A einen Doppelpunkt besitzen, mit im Allgemeinen verschiedenen Tangenten deren Richtung von u abhängig ist. Ferner auch, dass sie alle mit der unendlich fernen Geraden die beiden imaginären Kreispunkte gemein haben, und ausserdem den reellen Punkt, in welchem $u\zeta = 0$ diese Gerade schneidet.

Die Gleichung lässt sich auch (vgl. Salmon, höhere Curven, deutsch von Fiedler p. 46) auf die Form bringen

$$-[\eta_1^2 + (\eta_2 - a\eta_3)^2] \cdot (u_1\eta_1 + u_2\eta_2 - u_3\eta_3) + \eta_3^2[a^2(u_1\eta_1 + u_2\eta_2) + 2au_3\eta_2] - \eta_3^3a^2u_3 = 0.$$

Daraus geht hervor, dass alle diese Curven in den unendlich fernen Kreispunkten sich berühren, und ihre gemeinsamen imaginären Asymptoten durch den reellen Punkt B gehen. Die reelle Asymptote ist parallel $u\xi$ und ebensoweit von A entfernt als $u\xi$.

Jeder Geraden, die durch A geht, entspricht eine zerfallende Curve, die aus der Geraden selbst und dem K_b besteht. Jeder Geraden, die durch einen der unendlich fernen Kreispunkte geht, entspricht dann ebenfalls eine zerfallende Curve. Sie zerfällt nämlich in die durch A und den Kreispunkt bestimmte Gerade und einen imaginären Kreis, der also ebenfalls durch die Kreispunkte und ausserdem auch durch A geht.

Schneidet eine Gerade den K_b in zwei reellen Punkten, so bildet die Curve eine Schleife mit A als Doppelpunkt, welche innerhalb K_b liegt, und wenn die Gerade auch den K_m schneidet, diesen in denselben Punkten schneidet. Berührt die Gerade den K_b , so hat die Curve in A einen Rückkehrpunkt. Schneidet sie endlich K_b nur in imaginären Punkten, so ist A ein isolirter reeller Doppelpunkt der Curve.

Die Fundamentalpunkte der Transformation sind sonach: der Punkt A, in welchem jede Curve einen Doppelpunkt hat, so dass dieser Punkt als vierfacher Schnittpunkt gilt, ferner jeder der beiden Kreispunkte, in welchen sich alle Curven berühren, so dass jeder als zweifacher Schnittpunkt zählt. Zu A gehört als Fundamentalcurve der K_b ; zu jedem der Kreispunkte die imaginäre Gerade, welche ihn mit A verbindet. Dies ergibt die geometrische Betrachtung oder auch die Berechnung nach Lindemann p. 481.

Unser Fall stimmt also nicht mit der bei Lindemann gemachten Voraussetzung, dass die Fundamentalpunkte aus einem Doppelpunkt mit getrennten Tangenten und 4 einfachen Punkten bestehen. Das System der Fundamentalcurven ist also auch nicht durch die Fundamentalpunkte allein bestimmt, sondern hängt wesentlich auch von der Lage des Punktes B, resp. dem Parameter a ab. Vgl. die Anmerkung bei Lindemann p. 481 und die Bemerkung dazu von Nöther in der Recension in Schömilchs Zeitschrift, Jahrgang 22, p. 79 der historisch literarischen

Abtheilung. Auch die Identitäten 8) bis 18) bei Lindemann sind einigermassen zu modificiren.

Unsere Transformation lässt sich wie bei Lindemann p. 489 in zwei quadratische Transformationen zerlegen. In der That erhalte ich, wenn ich als die eine davon eine Transformation durch reciproke Radien wähle:

$$x_{2n} - 1 = \frac{b^2 \zeta}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{2n} - 1 = \frac{b^2 \eta}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{-x_{2n} b^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2 a y_{2n}}, \eta = \frac{-y_{2n} b^2}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2 - 2 a y_{2n}}$$

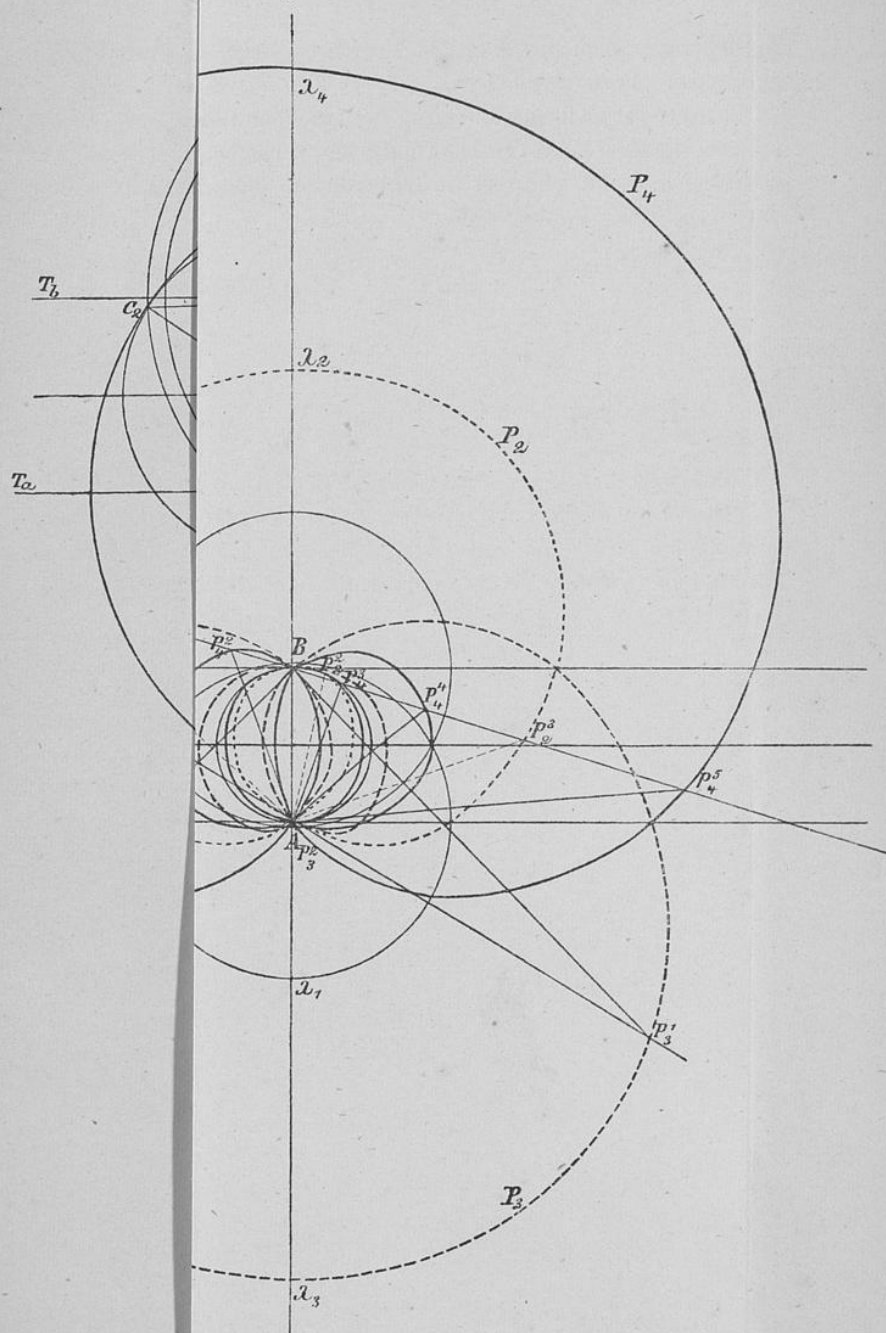
oder

$$x_{2n} - 1 = \frac{-\zeta(b^2 - 2a\eta)}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{2n} - 1 = \frac{-\eta(b^2 - 2a\eta)}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{b^2 x_{2n}}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}, \eta = \frac{b^2 y_{2n}}{x_{2n}^2 + y_{2n}^2}$$

Dabei ist b beliebig, am einfachsten gleich a zu nehmen.

Die erste führt auf die Trisektion des Winkels durch einen beweglichen Kreis und eine feste Hyperbel, die zweite ebenso durch einen festen Kreis und eine bewegliche gleichseitige Hyperbel.

Fig. 2.



Abtheilung. Auch die Identitäten 8) bis 18) bei Lindemann sind einigermaßen zu modifiziren.

Unsere Transformation lässt sich wie bei Lindemann p. 489 in zwei quadratische Transformationen zerlegen. In der That erhalte ich, wenn ich als die eine davon eine Transformation durch reciproke Radien wähle:

$$x_{23} - i = \frac{-b^2 \zeta}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{23} - i = \frac{b^2 \eta}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{-x_{23} b^2}{x_{23}^2 + y_{23}^2 - 2xy_{23}}, \eta = \frac{-y_{23} b^2}{x_{23}^2 + y_{23}^2 - 2xy_{23}}$$

oder

$$x_{23} - i = \frac{-\zeta(b^2 - 2\eta\eta)}{\zeta^2 + \eta^2}, y_{23} - i = \frac{-\eta(b^2 - 2\eta\eta)}{\zeta^2 + \eta^2} \text{ u. } \zeta = \frac{b^2 x_{23}}{x_{23}^2 + y_{23}^2}, \eta = \frac{b^2 y_{23}}{x_{23}^2 + y_{23}^2}$$

Dabei ist b beliebig, am einfachsten gleich a zu nehmen.

Die erste führt auf die Trisektion des Winkels durch einen beweglichen Kreis und eine feste Hyperbel, die zweite ebenso durch einen festen Kreis und eine bewegliche gleichseitige Hyperbel.

Fig. 1.

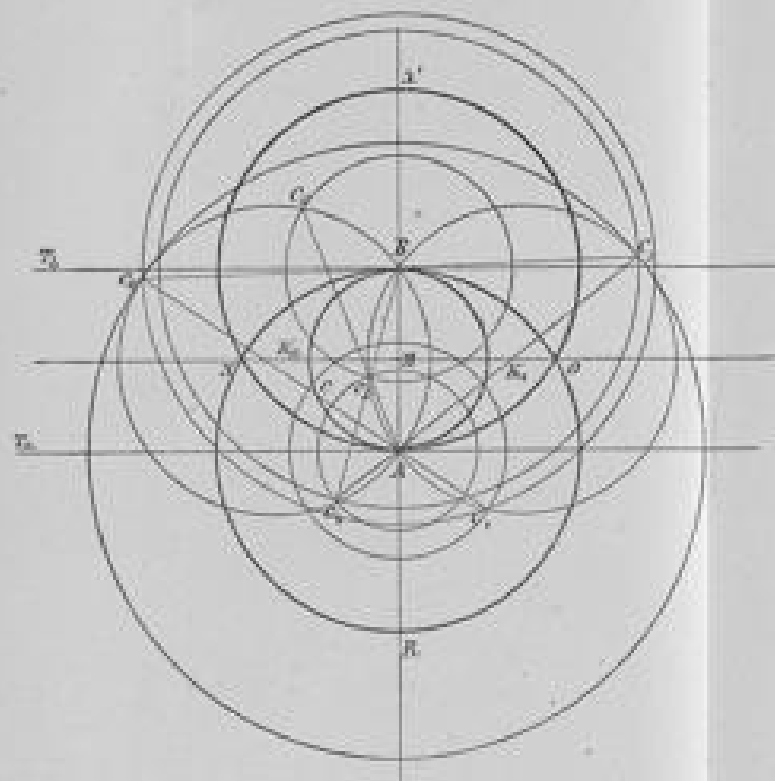


Fig. 2.

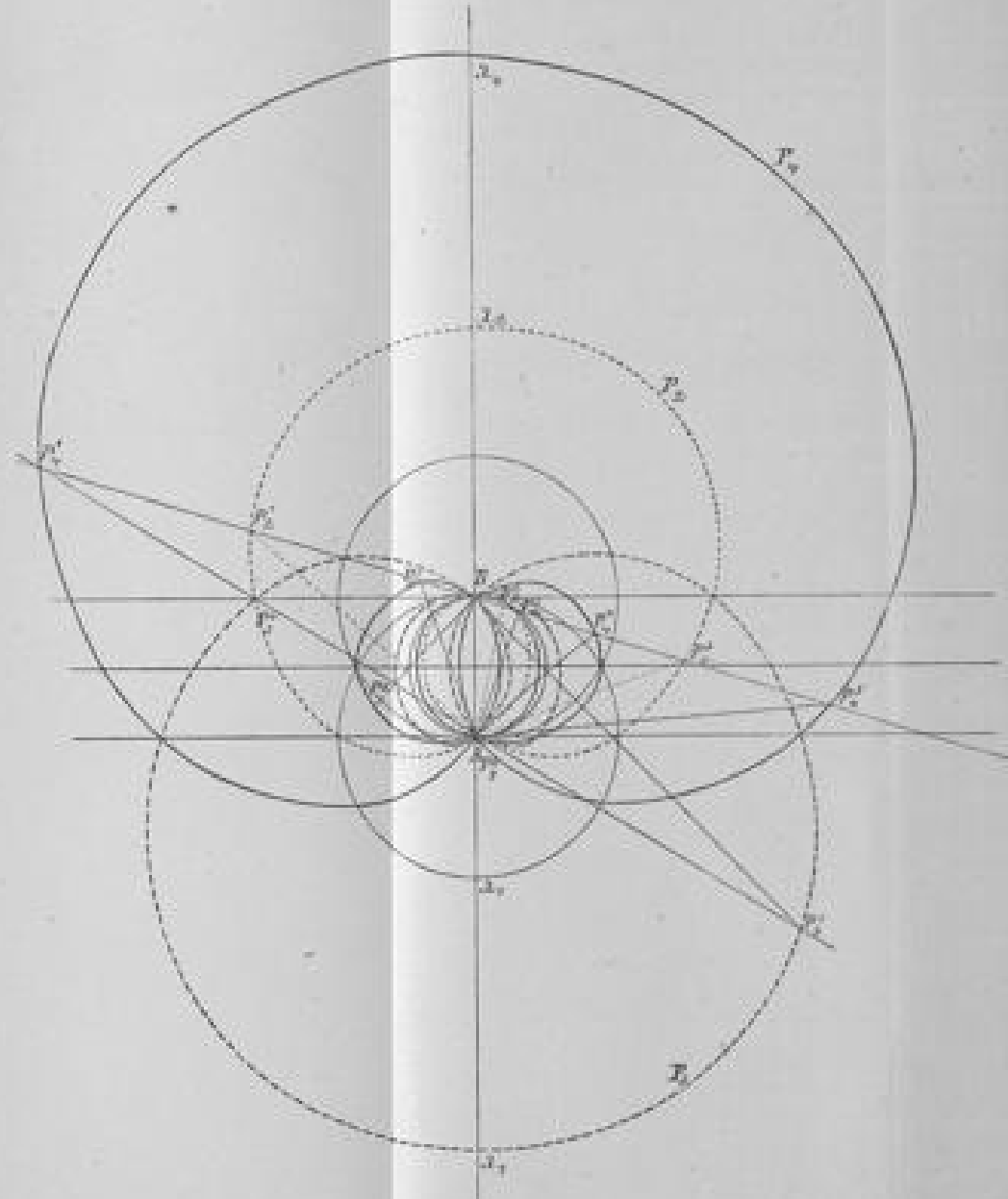


Fig. 1.

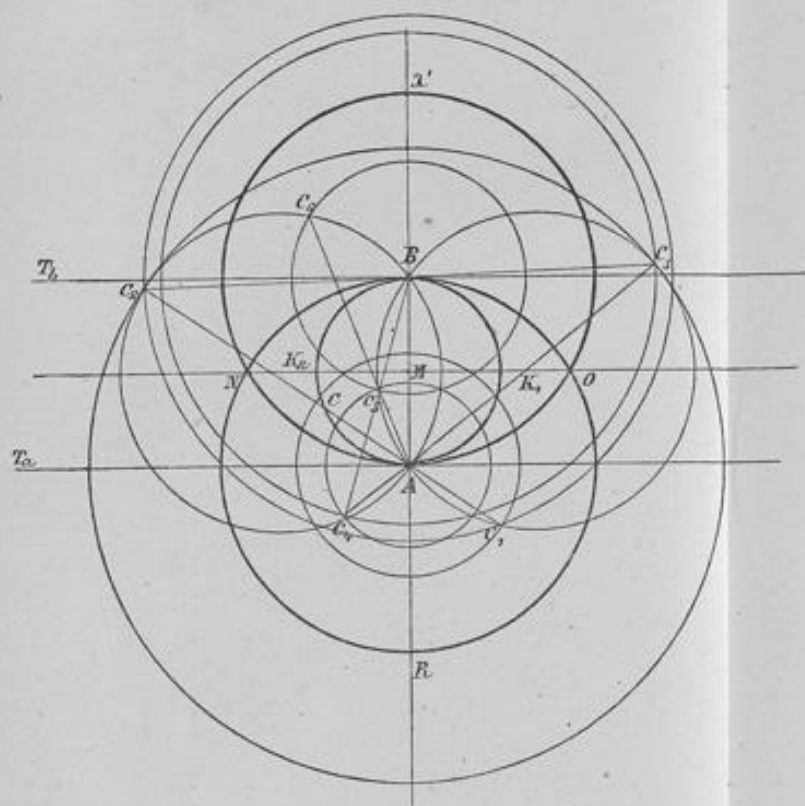
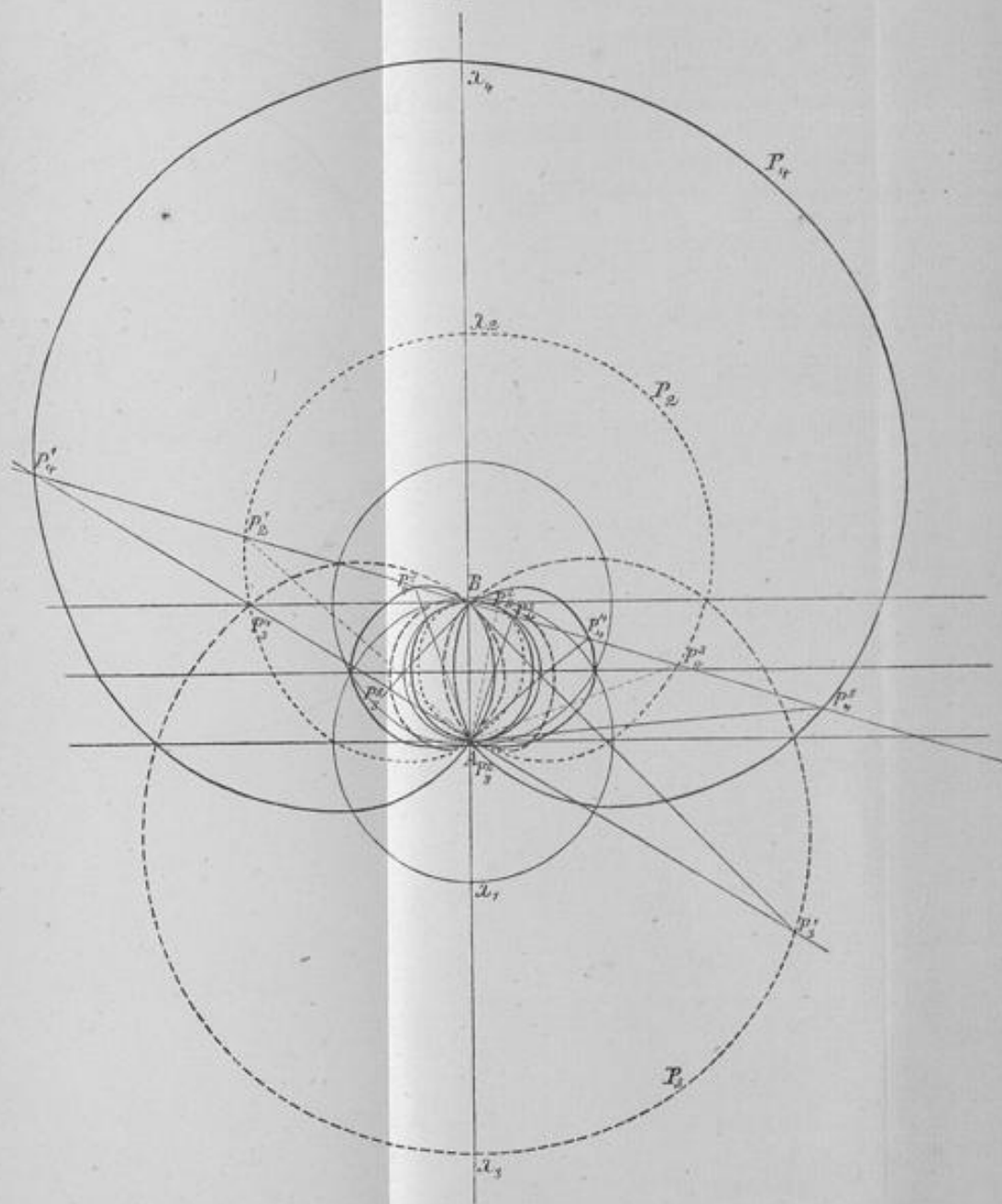
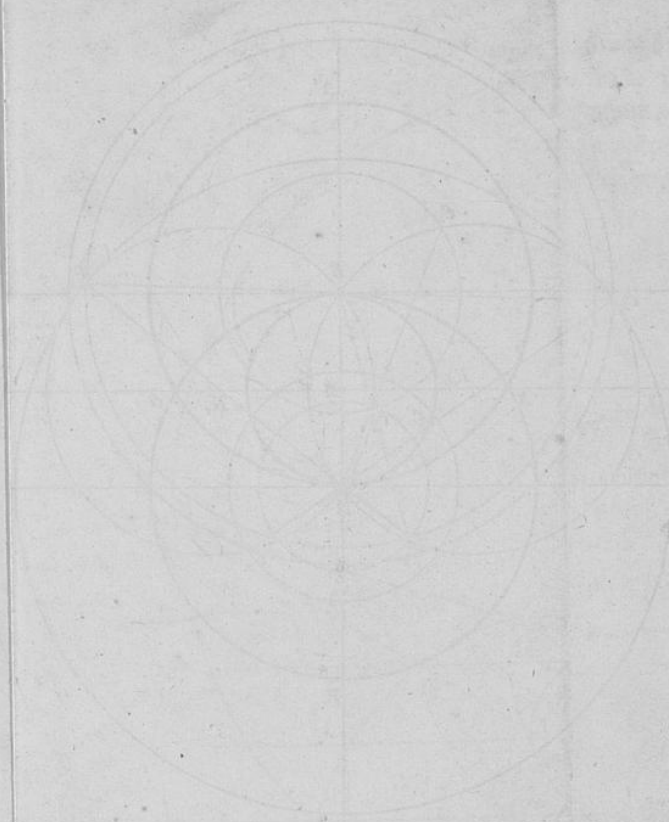


Fig. 2.





TIFFEN Gray Scale

© The Tiffen Company, 2007

R	G	B	W	G	K	C	Y	M
								

- A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

