

V o r w o r t.

Mit vorliegender dem dießjährigen Programm unsrer Schule beigegebenen Abhandlung über die Zerlegung des Icosaeders eröffne ich eine Reihe von Betrachtungen über die gegenseitigen Verhältnisse der beiden gleichglidrigen Körpersysteme zu einander, erste Elemente einer Harmonico mundi des $(3+5)$ glidrigen Systems, denen in demselben Sinne eine akustisch-musicalische und einige naturwissenschaftliche Abhandlungen nachfolgen sollen. Mit der kleinen krystallographischen Beilage freue ich mich, Freunden der wissenschaftlichen Mineralogie nach langer Zeit wieder einmal einen flüchtigen Gruß bieten zu dürfen.

Elberfeld, den 19. Juli 1851.

p. w.

Die Zerlegung des Icosaeders in fünf Tetraeder.

§. 1.

Unter den fünf regelmäßigen Körpern haben einerseits der Würfel und das Octaeder, andererseits das Dodecaeder und das Icosaeder eine nähere Verwandtschaft zu einander. Der Würfel und das Octaeder sind die Grundgestalten eines Systems von körperlichen Gebilden, das auf drei gleichen, sich unter rechten Winkeln schneidenden Axen beruht; das Dodecaeder und das Icosaeder sind die Grundgestalten eines andern Systems von körperlichen Gebilden, das auf sechs gleichen, sich unter tang. 2 schneidenden Axen beruht.

§. 2.

Die drei Axen oder sechs Paar Stralen des ersteren Systems sind 4glidrig; mit ihnen sind vier 3glidrige Zwischenaxen oder vier Paar 3glidrige Zwischenstralen und sechs $(2+2)$ glidrige Zwischenaxen oder sechs Paar $(2+2)$ glidrige Zwischenstralen gegeben. Die sechs Axen oder zwölf Paar Stralen des andern Systems sind 5glidrig; mit ihnen sind zehn 3glidrige Zwischenaxen oder zehn Paar 3glidrige Zwischenstralen und fünfzehn $(2+2)$ glidrige Zwischenaxen oder fünfzehn Paar $(2+2)$ glidrige Zwischenstralen gegeben.

§. 3.

Da der Unterschied zwischen beiden Systemen in den 4gliedrigen und 5gliedrigen Axen beruht, während 3gliedrige und (2+2)gliedrige beiden gemeinschaftlich sind, so könnte es scheinen, als sei darin zugleich die passendste Namengebung begründet und das eine System werde schicklich das 4gliedrige, das andere das 5gliedrige heißen. Diese Namen werden allerdings gebraucht werden können, wo es sich nur um die beiden gleichgliedrigen Systeme handelt; sonst könnten sie auch Systeme von Doppelpyramiden bezeichnen, und deshalb ist es wohl am geeignetsten, dem Ausdrucke noch ein Element, das neben dem andern nur bei gleichgliedrigen Bildungen statt finden kann, hinzuzufügen und das eine System das (3+4)gliedrige, das andere das (3+5)gliedrige zu nennen.

§. 4.

In dem (3+4)gliedrigen System ist die 4gliedrige Axe beim Würfel Flächenaxe, beim Octaeder Eckaxe, umgekehrt die 3gliedrige Axe beim Würfel Eckaxe, beim Octaeder Flächenaxe; in dem (3+5)gliedrigen System ist die 5gliedrige Axe beim Dodecaeder Flächenaxe, beim Icosaeder Eckaxe, umgekehrt die 3gliedrige Axe beim Dodecaeder Eckaxe, beim Icosaeder Flächenaxe. Mit andern Worten: Würfel und Octaeder, Dodecaeder und Icosaeder sind Gegenkörper von einander: die Flächen des einen entsprechen den Ecken des andern. Die (2+2)gliedrigen Axen sind bei allen vier Körpern Kantenaxen.

§. 5.

Die Kantenaxen des Dodecaeders so wie des Icosaeders können in fünf Gruppen von je drei sich unter rechten Winkeln schneidenden zusammengefaßt werden; dadurch ist ein Band zwischen dem (3+5)gliedrigen System und dem auf drei rechtwinklichen Axen beruhenden (3+4)gliedrigen gegeben, so daß es möglich wird, das eine in das andere zu versetzen, eines in dem andern zu finden. So weist eine krystallographische Untersuchung nach, daß derjenige Pyramidenwürfel, dessen Hälfte unser Dodecaeder ist, das Weißsche Zeichen

$$2a : (1 + \sqrt{5})a : \infty a$$

haben würde, und daß demjenigen Pyritöeder, das mit der Abstumpfung seiner 3gliedrigen Ecken verbunden das Icosaeder gibt, das Weißsche Zeichen

$$3a : (4 + \sqrt{7})a : \infty a$$

zukommen müßte.

§. 6.

Dies Band zwischen den beiden gleichgliedrigen Systemen hat schon unter den fünf regelmäßigen Körpern seinen Ausdruck, im Tetraeder. Dieser Körper ist der Gestalt nach die Hälfte des Octaeders, d. h. vier Flächen des Octaeders, von denen jede zu jeder der drei andern eine gleiche Lage hat, was sich hier darin ausdrückt, daß jede mit ihren Scheiteln die Scheitel der drei andern berührt, schließen sich erweitert zu einem Tetraeder zusammen; eben so die vier anderen; beide Tetraeder erscheinen als Gegenkörper von einander: die Flächen des einen entsprechen den Ecken des andern. Von diesem Verhältnis und dem Verhältnis der Hemiedrie überhaupt handelt die Krystallographie. Der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung ist, zu zeigen, daß das Tetraeder auch zu dem entsprechenden Körper des (3+5)gliedrigen Systems, zu dem Icosaeder, in einer ähnlichen Beziehung steht, nämlich in der, daß es das formale Fünftel des Icosaeders ist, daß das Icosaeder in fünf Tetraeder zerlegt werden kann.

§. 7.

Fig. 1 stellt das Icosaeder dar, mit einer solchen Bezeichnung der Flächen, daß die Lage derjenigen vier, welche gegeneinander erweitert jedesmal ein Tetraeder geben, dadurch von selber ins Auge springt; die Flächen, die das eine Tetraeder geben, sind mit A, die das andere geben mit B, und so weiter die dreierlei andern mit C, D, und E bezeichnet. Der Beweis, daß solche vier Flächen sich jedesmal zu einem regelmäßigen Tetraeder zusammenschließen, beruht auf der gleichen Lage derselben zu einander, oder, wenn man lieber will, zu der Gesamtgestalt des Icosaeders. Der Ausdruck der gleichen Lage kann verschieden lauten; entweder: je drei Flächen berühren mit ihren Scheiteln die Scheitel einer und derselben nicht erweiterten Icosaederfläche; oder: zwischen je zwei der vier Flächen liegt ein Paar von nicht erweiterten Flächen des Icosaeders, die in einer Kante verbunden sind, an deren einen Endpunkt ein Scheitel der einen, an deren andern ein Scheitel der andern von jenen zweien stößt; oder: an jeder Ecke des Icosaeders liegt eine der vier Flächen, aber nur eine.

§. 8.

In den Zeichnungen Fig. 2 bis 6 sind die fünf Tetraeder einzeln dargestellt, jedes in der Lage, die es zu dem gegebenen Icosaeder hat. Zur größeren Verdeutlichung sind die jedesmal erweiterten Flächen des Icosaeders die vorderen stärker, die hintern verdeckten schwächer schraffiert und zugleich die Ecken des Tetraeders jede mit dem Buchstaben bezeichnet, der dem Buchstaben der ihr gegenüber liegenden Fläche entspricht.

§. 9.

Die Durchdringung sämtlicher fünf Tetraeder, deren gemeinschaftlicher Kern das Icosaeder ist, durch Zeichnung darzustellen, ist ausführbar, aber ohne alle Anschaulichkeit für den Leser, wenn nicht verschiedener Farbendruck zur Hilfe genommen wird. Ich habe mich daher darauf beschränkt, in Fig. 7 und 8 Beispiele von der Durchdringung je zweier Tetraeder zu zeichnen; es ist eine gute Aufgabe für Schüler, welche sich in Darstellungen der descriptiven Geometrie üben wollen, die andern paarweisen Durchdringungen, sodann die dreifachen und vierfachen und endlich die aller fünf Tetraeder zu entwerfen. Was diese Darstellungen erleichtern kann, ist eine Betrachtung, welche sich an die §. 7 angeregten Ausdrücke für die Lage derjenigen vier Flächen des Icosaeders, die jedesmal ein Tetraeder geben, anschließt und zu der ich mich jetzt wende.

§. 10.

Der letzte jener Ausdrücke war, daß von den vier Flächen des Icosaeders, die erweitert ein Tetraeder bilden, je eine an einer Ecke des Icosaeders liege. Die fünf Flächen an jeder Ecke desselben sind also einzelne Flächen der sämtlichen Tetraeder, und da jede von ihnen zu den zwei an den benachbarten Icosaederecken liegenden Flächen, mit denen sie erweitert in einer Ecke zusammentrifft, dieselbe Lage hat, als die andern zu den ihnen in dieser Weise zugehörigen zwei Flächen, so werden die fünf Tetraederecken, die sich hier bilden, zu der Age der Icosaederecke gleiche Lage haben, also in einem gleichschrägigen Fünfeck um dieselbe herumliegen. So folgt unmittelbar, daß die zwanzig Scheitel der fünf Tetraeder die Scheitel eines sich um das Icosaeder bildenden Dodecaeders sind, wie Fig. 9 es darstellt. Da die Bezeichnung der Scheitel des Dodecaeders in dieser Figur mit denselben Buchstaben geschehen ist, die in den vorhergehenden Figuren für die Scheitel der Tetraeder gebraucht worden, so wird man ohne Schwierigkeit diese Tetraeder der Reihe nach in dem Dodecaeder als eingeschriebene auffinden können.

§. 11.

In Fig. 10 ist die Tetraederfläche $e' e'' e'''$ gezeichnet als in die Ecken eines derjenigen dreigliedrigen Schnitte am Dodecaeder fallend, die durch drei Paar Ecken desselben gehen und von drei Kanten und drei Diagonalen begrenzt werden; wie es die gleichen Buchstaben beider Figuren 9 und 10 näher nachweisen. Fig. 11 ist $f' e''' a' f'' d''' e'''$ der durch die beiden parallelen Kanten $e''' d'''$ und $e''' a'$ gelegte $(2+2)$ gliedrige Durchschnitt des Dodecaeders, in kleinerem Maßstab: sämtliche Linien sind die Hälfte der gleichnamigen in Fig. 9. Die durch die Figur hindurch gehenden mit $f g$ bezeichneten Linien sind die Projectionen von vier solchen Schnitten wie Fig. 10, und zwar ist

f' die Projection von a^{iv} und d^{iv} ,
 f'' „ „ „ e^{iv} und e' ,
 g' „ „ „ a'' und b'' ,
 g'' „ „ „ b' und d' ,
 g''' „ „ „ e'' und b''' ,
 g^{iv} „ „ „ b^{iv} und e^{iv} ,

$e''' e'''$ ist die auch Fig. 9 zu findende Linie, welche zweien Schnitten angehört und daher die Richtung einer Kante des Icosaeders bezeichnet. So bildet sich in jenem Durchschnitt des Dodecaeders zugleich der des Icosaeders, und vermöge der weiteren durch Stärke ausgezeichneten Linie die vollständige $(2+2)$ gliedrige Projection beider Körper. Die Kantenprojectionen habe ich weggelassen, um die Figur nicht zu überfüllen; allein man beachte, daß die Ecken eines der fünf Tetraeder (B) in den vier Punkten g projiziert sind, daß dagegen in jenen vier Schnitten in jedem die Fläche eines der vier anderen Tetraeder liegt, diese vier Flächen also parallel der in m projizierten $(2+2)$ gliedrigen Axe gehen; so daß unsere Figur

in $f' g'$ drei Punkte a ,
 „ $f' g''$ „ „ d ,
 „ $f'' g'''$ „ „ e ,
 „ $f'' g^{iv}$ „ „ c

enthält. Im Allgemeinen geht jede Tetraederfläche dreien $(2+2)$ gliedrigen Axen parallel, z. B. die Fläche $e' e'' e'''$ in Fig. 10 parallel den Axen der an e' und b^{iv} , e'' und a''' , e''' und c''' stoßenden, in der Projection Fig. 13 erscheinenden Paare von Kanten; andrerseits gehen immer vier Flächen parallel einer und derselben $(2+2)$ gliedrigen Axe.

§. 12.

Aus Vergleichung beider Projectionen ergeben sich folgende Verhältnisse des Icosaeders zum Dodecaeder:

- Die $(2+2)$ gliedrige Axe des Icosaeders ist gleich der Kante des Dodecaeders: $a''' e'$ stellt beide Linien dar.
- Die 3gliedrige Axe des Icosaeders verhält sich zu der des Dodecaeders wie 1 zu 3, $mi' : me''' = a''' i' : a''' k' = 1 : 3$, denn $a''' k'$ ist Höhenlinie einer Icosaederfläche und i' der Schwerpunkt derselben, durch welchen die 3gliedrige Axe geht.
- Die 5gliedrige Axe des Icosaeders verhält sich zu der des Dodecaeders wie $\sqrt{5} : \sqrt{5} + 2$, denn man ziehe $k'' l$ parallel $f'' a'$, so ist $k'' l = g'' a'$; in $f'' a'$ ist aber n der Schwerpunkt des Fünfecks, g' der Halbirungspunkt einer Diagonale, und aus den Eigenschaften des Fünfecks folgt, daß

$$g'' a' : n'' a' = 5 - \sqrt{5} : 4, \quad \text{also auch} \quad k' k'' : k' n'' = k'' l : n'' a' = 5 - \sqrt{5} : 4.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Daraus folgt } m k'' : m n'' &= \frac{1}{2} k' k'' : k' n'' = \frac{1}{2} k' k'' \\
 &= 5 - \sqrt{5} : 3 + \sqrt{5} \\
 &= 20 : 20 + 8\sqrt{5} \\
 &= \sqrt{5} : \sqrt{5} + 2,
 \end{aligned}$$

wie zu erweisen war.

§. 13.

Fig. 12 stellt die 5gliedrige Projection beider Körper dar, in demselben verjüngten Maßstabe gegen Fig. 9, wie Fig. 11. Die Projection des Dodecaeders fordert zuerst als Umriß das gleichgliedrige Zehneck, darnach die zu den Ecken desselben gehörigen Stralen. Da sodann zwei Diagonalen wie $a'' b''$ und $b'' c''$ einander gleich sein müssen, so werden die Diagonalen $b'' b'''$ u. s. w., je mit Ueberspringung zweier Ecken, gezogen, wodurch sich ein zweites Zehneck bildet und die Eckstralen $m c''$ des vordern und $m d'$ des verdeckten hintern Fünfecks bestimmt werden. Zugleich folgt, da $\angle \alpha = \beta$, daß $m c' = c' b' = c'' b''$, also der Eckstral des innern Fünfecks gleich der Seite des Zehnecks. Die Projection des Icosaeders fordert nun nach §. 12^a, daß die (2+2)gliedrigen Axen, wie $h' h''$, gleich der Kante des Dodecaeders werden; es bedarf also der Linien $d'' e''$ u. s. w. Und daß zugleich je zwei Ecken des auf diese Weise hervorgehenden Projections-Umrißes, des dritten Zehnecks, in Linien wie $d''' a'$ fallen, folgt unmittelbar aus Fig. 11. Die Projectionen der fünf Tetraeder sind durch die in der Figur bezeichneten Projectionen ihrer Ecken gegeben; je eine Seite von jedem fällt in eine von jenen Diagonalen des ersten Zehnecks, die sich mit ihr kreuzenden in eine Seite des zweiten.

§. 14.

Fig. 13 ist die 3gliedrige Projection beider Körper, in demselben kleineren Maßstabe. Den Umriß der Projection des Dodecaeders bildet eine (6+6)kantige oder (6.2)eckige Figur, an welcher die längere Seite sich zu der nächsten ihr parallelen Diagonale wie die Seite zur Diagonale eines Fünfecks verhält. Damit dann wieder $b'' c'' = c'' b'''$ werde, bedarf es der mit den kürzern Seiten des Umrißes parallelen ihnen zunächst liegenden Diagonalen, wie $b'' b'''$ u. s. w. In dieser Projection ist Fig. 10 vermöge der entsprechenden Buchstaben leicht erkennbar. Der Umriß der Icosaederprojection findet sich wieder nach der §. 12^a angegebenen Eigenschaft: es müssen die Linien $b'' a'$, $c''' d'$ u. s. w. gezogen werden. Die Scheitel des innern Dreiecks werden durch die gleichnamigen Linien von Fig. 10 und 12 bestimmt. Von den fünf Tetraedern befanden sich zwei (D und E) in der 3gliedrigen Stellung; für diese beiden fällt die Projection der einen Ecke d'' und e'' in die Mitte der Figur, die andern sind die Scheitel eines in die Ecken des Umrißes eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Jedes der drei andern Tetraeder liegt so, daß die Projectionen des einen Paares sich kreuzender Kanten in die Richtung zweier parallelen Diagonalen der oben bezeichneten Art fallen, die eine gleich dieser Diagonale, die andere ein mittlerer Teil derselben.

§. 15.

Ich knüpfe hieran die Herleitung einiger Beziehungen aus Fig. 10. Sehen wir zu diesem Zwecke das Verhältnis der größeren Seite des Umrißes zur kleineren, nämlich das Verhältnis der Diagonale eines Fünfecks zur Seite desselben, $= m : n$; es ist dieß das Verhältnis des sogenannten goldenen Schnittes, $2 : \sqrt{5} - 1$ oder $\sqrt{5} + 1 : 2$.

- a. Die mit $e p$ bezeichneten Linien ($e' p'$ u. s. w.), in welchen sich die Kanten des Icosaeders ($o' o'''$ u. s. w.) bilden, teilen die Seiten des Tetraeders nach dem Verhältnis $m : n$. Denn
- $$p' e''' : p' e'' = e''' b'' : e'' o''' = e''' b'' : e''' b'' : e''' e'.$$

b. Die Seiten des Dreiecks $a^m c^m b^{iv}$ liegen jede in der Ebene einer Fläche eines der drei Tetraeder, die auf gleiche Weise die Fläche $e' e'' e'''$ in jenen Linien $e p$ durchdringen. Und zwar sind es die Punkte s , in welchen die Kanten der drei Tetraeder hindurchstechen, und somit $b' p'$, $b'' p''$ und $b''' p'''$ die Durchdringungstrecken. Aus der gleichartigen Richtung von $e'' e'''$ und $c^m a^m$ gegen $e''' a^m$ folgt, daß $o^m s' = o' p'$, und $s' e' = p' b^{iv}$; aus der gleichartigen Richtung von $e' o'$ und $e'' p'$ gegen $o^m b^{iv}$, daß $p' b^{iv} = o' o^m$. Also auch $o' s' = o' b^{iv}$, $o^m p' = o^m e'$.

c. In den Linienabschnitten der Figuren 10 — 13 wiederholt sich sehr oft das Verhältnis $m : n$, auch kommen im Zusammenhange damit mehrmals harmonische Teilungen vor, wie Fig. 10 durch die harmonischen Strahlen von den Punkten e und r aus. Folgendes als Beispiel:

$$s' e' : s' o^m = e' c^m : o^m a^m = m : n,$$

also auch die Verhältnisse

$$s' e' : e' o^m,$$

$$o' o^m : e' o^m,$$

$$e' o^m : e' o',$$

$$= m : n,$$

sämtlich

ferner

$$b^{iv} o^m : o^m e' = m : n,$$

also auch

$$b^{iv} e' : b^{iv} o^m = m : n,$$

also ist $b^{iv} e'$ in o^m und s' harmonisch geteilt.

d. Die mit $e q$ bezeichneten Linien ($e' q'$ u. s. w.), welche durch die Ecken der Icosaederfläche $o' o'' o'''$ gehen, bilden das derselben umschriebene Dreieck $r' r'' r'''$, durch dessen Ecken die Kanten des vierten Tetraeders hindurchstechen und dessen Seiten die Durchdringungstrecken zwischen beiden Tetraedern in der Fläche $e' e'' e'''$ sind. In denselben Punkten r durchstechen jene Kanten auch je eine Fläche der drei andern Tetraeder, so daß diese Punkte auch in die Seiten des Dreiecks $a^m b^{iv} e^m$ fallen, und zwar in deren Halbierungspunkte, weil

$$b^{iv} r'' : r'' a^m = b^{iv} o' : o' s'.$$

Die Seiten des Dreiecks $r' r'' r'''$ sind durch o' , o'' und o''' wieder nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt, denn

$$o^m r'' : o^m r' = o^m o' : o^m s'.$$

e. Das Dreieck $e' e'' e'''$ ist gleichschenkelig, denn $e'' e''' = b^{iv} e^m = e'' e'$; wird nun $e''' s'$ gezogen und bis u' verlängert, so ist

$$u' e' : o^m v' = s' e' : s' v^m = m : n,$$

ferner

$$u' t^m : v' o^m = e'' t^m : e'' o^m = e'' p^m : e'' e' = m : n,$$

also $u' t^m = u' e'$, also $\angle \alpha = \beta$, an u' rechte Winkel, desgleichen an e''' , also an e''' harmonische Strahlen, ferner $e' t^m = e' s' = o' o^m$.

f. Setzen wir $a^m o'' = m$, $a^m o''' = n$, so ist

$$o^m o'' = e' t^m = m - n,$$

$$u' e' = \frac{m - n}{2},$$

$$u' c^m = u' t^m + t^m c^m = \frac{m - n}{2} + n = \frac{m + n}{2},$$

$$e'' u' = u' c^m \sqrt{3} = \frac{m + n}{2} \sqrt{3}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (e' e''')^2 &= (n' e')^2 + (e''' n')^2 \\ &= \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = m^2 + n^2 + m n, \end{aligned}$$

also $e' e''' = \sqrt{m^2 + n^2 + m n}$,
und da $m : n = \sqrt{5} + 1 : 2$, so sind im Verhältnis zu einander

die Seite des Dodecaeders $e' a''' = 2$,

die Seite des Icosaeders $a'' a''' = \sqrt{5} - 1$,

die Seite des Tetraeders $e' e'' = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$.

In Folge der Proportionen

$$e'' w''' : w''' e' = a' s' : s' e' = m : n,$$

$$e' p'' : p'' e'' = m : n \text{ (nach a)}$$

ist $e' w'' = e'' p''$. Also ist $e' e''$ nach denselben Verhältnissen geteilt wie $a''' a''$, also an dem gemeinschaftlichen Scheitel e''' der beiden gleichseitigen Dreiecke über $e' e''$ und $a''' a''$ die Winkel $a''' e''' p'''$ und $p'' e''' w'''$, also auch die Winkel α, β, γ und δ einander gleich.

Und dergl. m.

§. 16.

Zum Schluß gehe der Leser zurück auf §. 7 und Fig. 1. Er denke sich zu jedem der fünf Tetraeder das Gegentetraeder; dieß ist, da die Flächen des Icosaeders paarweise parallel sind, immer ebenfalls aus Erweiterung von vier Flächen dieses Körpers entstanden, und zwar

das Gegentetraeder von	$A' A'' A''' A^{IV}$	aus den Flächen	E''', B''', D'', C'
"	$B' B'' B''' B^{IV}$	"	C^{IV}, E'', A'', D'
"	$C' C'' C''' C^{IV}$	"	A^{IV}, E', D''', B'
"	$D' D'' D''' D^{IV}$	"	$B^{IV}, A''', C''', E^{IV}$
"	$E' E'' E''' E^{IV}$	"	C'', B'', A', D^{IV}

Es folgt also, daß das Icosaeder auf doppelte Weise in fünf Tetraeder zerlegt werden kann, daß die fünf Tetraeder der einen Zerlegung die Gegenkörper von denen der andern sind, und daß also je eines der einen Zerlegung mit einem der andern ein Octaeder bildet. Es darf aber nicht gesagt werden, daß das Icosaeder deswegen in fünf Octaeder zerlegt werden könne, weil die vier Flächen jedes der beiden Tetraeder, aus denen ein solches Octaeder besteht, zugleich Flächen derjenigen vier Tetraeder sind, die zu der Gruppe seines Gegentetraeders gehören, also zugleich Flächen der andern vier Octaeder. So sind $A' A'' A''' A^{IV}$ und $E''' B''' D'' C'$ Gegentetraeder und bilden in ihrer Durchdringung ein Octaeder; aber die Flächen A', A'', A''', A^{IV} finden sich auch an den vier Tetraedern $C'' B'' A' D^{IV}, C^{IV} E'' A'' D', B^{IV} A''' C''' E^{IV}$ und $A^{IV} E' D''' B'$, und umgekehrt die Flächen des Tetraeders $E''' B''' D'' C'$ auch an den vier Tetraedern, welche mit diesen Buchstaben bezeichnet sind, Fig. 3 — 6.