

Nachtrag

zu dem

Programm der Real- und Gewerbe-Schule

zu Elberfeld

vom Jahre 1852.

Fortsetzung

der

Abhandlung über die Zerlegung des Icosaeders in fünf Tetraeder,

von

Professor Dr. Philipp Wackernagel,

Director der Real- und Gewerbe-Schule zu Elberfeld.

Mit drei Steintafeln.

Elberfeld, 1853.

Gedruckt bei Sam. Lucas.

926
5 (1852)



L. Pr. 20

2 y

05.1512.



Nach dem Druck des ersten Stückes meiner Arbeit über den Zusammenhang des $(3+5)$ -gliedrigen Systems mit dem $(3+4)$ -gliedrigen, im Herbst 1851, schickte ich mich sogleich zur Bearbeitung des zweiten an, der nicht mehr von dem Icosaeder handeln sollte, in der Hoffnung, es würde unter denen, an die ich mich gewandt, Jemand gelingen, mir die sich einander durchsetzenden fünf Tetraeder in einem Modell darzustellen. Allein selbst Herr Zeichenlehrer Schröder in Darmstadt, dem sonst Alles gelingt, beschied mich zuletzt abschläglich, und so mußte ich mich wohl entschließen, die Aufgabe für eine schwierige zu halten, wenigstens ihre Lösung selbst zu versuchen, statt Andere für mich arbeiten zu lassen. Herr Schröder verzeihe mir also, falls er es nicht aufgegeben, noch einmal an die Arbeit zu gehen, daß ich ihm zuvorgekommen, und habe die Freundlichkeit, mich erfahren zu lassen, ob er einen anderen als den von mir angegebenen Weg, die Tetraedersterne aus Holz zu modellieren, einschlagen würde.

P. W.

§. 16.

Der Körper, welcher aus ebenmäßiger Durchdringung von fünf Tetraedern oder aus gleichseitiger Erweiterung jener 5.4 Flächen des Icosaeders entsteht, erhält durch die 20 Spitzen der Tetraeder eine sternförmige Gestalt; wir nennen ihn aus diesem Grunde den Tetraederstern.

§. 17.

Die äußere Beschreibung des Tetraedersterns ist folgende:

1. Er hat dreierlei Ecken: 3-kantige, 5-kantige und $(1+1+1)$ -kantige. Die 3-kantigen sind von lauter erhabenen Kanten, die 5-kantigen von lauter hohlen, die $(1+1+1)$ -kantigen von einer erhabenen und zwei hohlen gebildet.

Dreikantige hat der Körper 20, fünfkantige 12 und $(1+1+1)$ -kantige 30×2 .

Die 3-kantigen sind die Ecken der 5 Tetraeder und liegen nach §. 10. wie die Ecken eines Dodecaeders. Die 5-kantigen sind die Scheitecken über den Ecken des Icosaeders, aus welchem der Tetraederstern durch Erweiterung von 5.4 Flächen entstanden. Die $(1+1+1)$ -kantigen liegen je zwei in einer Tetraederkante, Fig. 10 mit p und w bezeichnet, und je drei auf einer Tetraederfläche, Fig. 10 mit s bezeichnet.

2. Kanten hat der Tetraederstern dreierlei: lange, mittlere und kurze.

Die langen befinden sich an den 3-kantigen und den $(1+1+1)$ -kantigen Ecken, der Zahl nach also $20 \cdot 3 = 60$; sie sind Teile der Tetraederkanten und finden sich Fig. 10 mit $e\ p$ und $e\ w$ ($e''\ w'$ und $e''' p'$ zc.) bezeichnet.

Die kurzen liegen an den 5-kantigen und den $(1+1+1)$ -kantigen Ecken, der Zahl nach also $12 \cdot 5 = 60$; sie sind Verlängerungen der Kanten des zu Grunde liegenden Icosaeders, Fig. 10 mit $o\ p$ und $o\ s$ ($o' p'$ und $o'' s'$ zc.) bezeichnet.

Die mittleren, 30 an der Zahl, liegen zwischen zwei $(1+1+1)$ -kantigen Ecken, mit andern Worten: sie verbinden jede die zwei Punkte mit einander, in welchen an zwei benachbarten Tetraeder spitzen eine Fläche der einen von einer Kante der andern durchstoßen wird, Fig. 10 mit $w\ s$ ($w' s''$ zc.) bezeichnet.

Der Winkel α der kurzen Kanten ist der der Icosaederkante, nur hohl, einspringend, also

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1},$$

$$\text{tang. } \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Der Winkel λ der langen Kanten ist der der Tetraederkante, also

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{tang. } \lambda = 2\sqrt{2}.$$

Der Winkel μ der mittleren Kanten ist wiederum der der Tetraederkante, nur hohl, einspringend, vergl. S. 21, 3; es ist also ebenfalls

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \mu = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{tang. } \mu = 2\sqrt{2}.$$

3. Flächen hat der Tetraederstern 20. $3 = 60$. Die Gestalt der Fläche ist die des Fünfecks $e'' w' s''' o'' p''$ oder $b'' w' p' o' s''$ in Fig. 10 und 16, e'' und b'' zu einer dreikantigen Ecke, o'' und o' zu einer fünfkantigen, w', s''', p'' und w', p', s'' zu drei $(1+1+1)$ -kantigen Ecken des Tetraedersternes gehörig.

Daß $e'' w' = e'' p''$, folgt unmittelbar aus der Zeichnung, eben so daß o'', s''' und e'' in einer Linie liegen. Daß $o'' s''' = o'' p''$, folgt aus S. 15, 6. Die Winkel an e'' und o'' sind $= 60^\circ$, also die Dreiecke $e'' p'' w'$ und $o'' p'' s'''$ gleichseitig.

§. 13.

Ich wende mich zu der Aufgabe, die Fläche des Tetraedersternes zu construieren. Um noch einige dazu dienende Verhältnisse herleiten zu können, bezeichne man Fig. 10 und 16 den Punkt, wo $b'' e'''$ und $e' e''$ sich schneiden, mit η' .

Daß $\eta' p'' = \eta' s'''$, folgt unmittelbar aus der Zeichnung. Sodann verhält sich

$$o' e''' : o' p'' = m : n, \quad \text{also}$$

$$o' e''' : p'' e''' = m : m-n, \quad \text{also auch}$$

$$b'' e'' : p'' e''' = e'' \eta' : \eta' p''$$

$$= m : m-n,$$

$$e'' \eta' : e'' p'' = m : 2m-n$$

$$= \sqrt{5}+1 : 2\sqrt{5}$$

$$= 5+\sqrt{5} : 10.$$

Die Construction der Fläche ist hiernach, Fig. 10 und Fig. 16, folgende:

- Zeichne einen Winkel von 60° (an e'') und mache dessen Schenkel gleich lang ($e'' w' = e'' p''$).
- Teile den einen dieser Schenkel ($e'' p''$) so, daß der ganze Schenkel zu dem am Scheitelpunkt liegenden Stück sich wie $10 : 5+\sqrt{5}$ verhält, also $e'' p'' : e'' \eta' = 10 : 5+\sqrt{5}$.
- Verbinde den Teilungspunkt mit dem Endpunkt des anderen Schenkels, η' mit w' , und mache $\eta' s''' = \eta' p''$.
- Errichte auf der linken Seite von $p'' s'''$ über dieser Strecke ein gleichseitiges Dreieck und zieh $p'' o'', s''' o''$.

c. Zur Kontrolle: s^{III} und o^{II} müssen mit e^{II} in Einer Geraden liegen, und es muß sein

$$e^{\text{II}} s^{\text{III}} : s^{\text{III}} o^{\text{II}} = m : n.$$

Denn es ist

$$e^{\text{II}} s^{\text{III}} = e^{\text{III}} p^{\text{II}}$$

$$s^{\text{III}} o^{\text{II}} = p^{\text{II}} o^{\text{II}}.$$

aber es verhalten sich

$$p^{\text{II}} o^{\text{II}} : e^{\text{III}} o^{\text{II}} = p^{\text{II}} o^{\text{II}} : e^{\text{I}} a^{\text{III}}$$

$$= e^{\text{II}} p^{\text{II}} : e^{\text{II}} e^{\text{I}}$$

$$= m : n,$$

also auch

$$e^{\text{III}} p^{\text{II}} : p^{\text{II}} o^{\text{II}} = m : n.$$

§. 19.

Es gibt nach §. 16 zweierlei zu demselben eingeschriebenen Icosaeder gehörige Tetraedersterne. Die in §. 17. gegebene Beschreibung bezieht sich zunächst auf den aus den Tetraedern

$$A^{\text{I}} A^{\text{II}} A^{\text{III}} A^{\text{IV}},$$

$$B^{\text{I}} B^{\text{II}} B^{\text{III}} B^{\text{IV}},$$

$$C^{\text{I}} C^{\text{II}} C^{\text{III}} C^{\text{IV}},$$

$$D^{\text{I}} D^{\text{II}} D^{\text{III}} D^{\text{IV}},$$

$$E^{\text{I}} E^{\text{II}} E^{\text{III}} E^{\text{IV}}$$

gebildet. Derselbe ist Fig. 14 dargestellt. Der andere entsteht aus den Tetraedern

$$E^{\text{III}} B^{\text{III}} D^{\text{II}} C^{\text{I}},$$

$$C^{\text{IV}} E^{\text{II}} A^{\text{II}} D^{\text{I}},$$

$$A^{\text{IV}} E^{\text{I}} D^{\text{III}} B^{\text{I}},$$

$$B^{\text{IV}} A^{\text{III}} C^{\text{III}} E^{\text{IV}},$$

$$C^{\text{II}} B^{\text{II}} A^{\text{I}} D^{\text{IV}},$$

und ist Fig. 15 dargestellt.

Den ersteren nenne ich den rechts gewundenen, den anderen den links gewundenen Tetraederstern, weil an den 5-gliedrigen Ecken jede Tetraeder Spitze dort rechts, hier links über die andere hinübergreift. Die Fläche des rechts gewundenen ist Fig. 16 das schraffierte Fünfeck über $e^{\text{II}} w^{\text{I}}$, die des links gewundenen das schraffierte Fünfeck über $b^{\text{IV}} w^{\text{I}}$.

§. 20.

Die in §. 9. ausgesprochene Befürchtung, es werde eine Zeichnung, welche die Durchdringung der 5 Tetraeder darzustellen versuche, der Anschaulichkeit entbehren, hat weniger Grund, wenn man darauf verzichtet, den Vorgang der Durchdringung, die Zeichnung sämtlicher Durchdringungslinien wiederzugeben.

Ich bin überzeugt, daß die Darstellung des Resultates der Durchdringung, nämlich die Darstellung des Tetraedersterns, wie sie die beiden Fig. 14 und 15 enthalten, für jeden, der sich mit dem Gegenstande bis auf diesen Punkt vertraut gemacht, einige Anschaulichkeit haben und dazu beitragen werde, ihn weiter in dieselben einzuführen. Was ich mir erlaubt habe, ist die Zeichnungen in einem größeren Maßstabe zu geben, als den Figuren der früheren Tafeln zu Grunde liegt; die Stellung dagegen ist ganz dieselbe geblieben, welche jene Figuren haben. Fig. 14 ist die Zeichnung des rechts gewundenen Tetraedersterns, Fig. 15 die des links gewundenen.

§. 21.

Die beiden Fig. 14 und 15 lassen einige Eigenschaften des Tetraedersterns leichter begreifen, als es unter bloßer Voraussetzung der früher gegebenen Figuren möglich ist.

1. Zwei längere Kanten des Sterns gehören immer einer Tetraederkante an, von der sie die äußeren Teile sind, während der mittlere im Körper verborgen liegt; zwei solche Kanten fallen also immer in Eine Gerade, z. B. Fig. 14 die Kanten $a^m f^i$ und $a^{iv} f^n$.
2. Die mittlere Verbindungsstrecke, $f^i f^n$, durch welche zwei längere Kanten des Körpers zu einer Tetraederkante ergänzt werden, geht durch den Halbierungspunkt einer mittleren Kante, $f^m f^{iv}$, rechtwinkelig und ist derselben gleich; $w^i s^m = w^i p^i$ in Fig. 10. Die 4 Punkte f^i, f^n, f^m und f^{iv} liegen also in Einer Ebene und sind die Scheitel eines Quadrates.
3. Die mittlere Kante $f^m f^{iv}$ in dem rechts gewundenen Tetraederstern, Fig. 14, ist in dem links gewundenen, Fig. 15, die Ergänzungsstrecke zweier längeren Kanten $e^m f^m$ und $b^m f^{iv}$ zu einer Tetraederkante, und umgekehrt die mittlere Kante $f^i f^n$ des links gewundenen Sterns, Fig. 15, die Ergänzung zweier längeren Kanten $a^m f^i$ und $a^{iv} f^n$ des rechts gewundenen, Fig. 14, zu einer Tetraederkante. Denn die mittlere Kante des einen Sterns wird immer von denselben Flächen gebildet als die zwei in ihre Richtung fallenden längeren Kanten des andern Sterns: die Kante $f^m f^{iv}$ Fig. 14 wird gleich der Tetraederkante $e^m b^m$ Fig. 15 von den Flächen C^i und D^n gebildet.
4. Eine mittlere Kante des einen Tetraedersterns fällt also jedesmal in die Verbindungslinie zweier Tetraederecken, und zwar derjenigen, die an dem anderen zu einer Tetraederkante gehören. Fig. 14 liegen also die mittleren Kanten in der Richtung von:

$$\begin{aligned} &e^m b^m, e^m d^n, e^m c^i, b^m d^n, b^m c^i, d^n c^i; \\ &c^{iv} e^n, c^{iv} a^n, c^{iv} d^i, e^n a^n, e^n d^i, a^n d^i; \\ &a^{iv} e^i, a^{iv} d^m, a^{iv} b^i, e^i d^m, e^i b^i, d^m b^i; \\ &b^{iv} a^m, b^{iv} c^m, b^{iv} e^{iv}, a^m c^m, a^m e^{iv}, c^m e^{iv}; \\ &c^n b^n, c^n a^i, c^n d^{iv}, b^n a^i, b^n d^{iv}, a^i d^{iv}. \end{aligned}$$

Fig. 15 fallen die mittleren Kanten in die Richtung:

$$\begin{aligned} &a^i a^n, a^i a^m, a^i a^{iv}, a^n a^m, a^n a^{iv}, a^m a^{iv}; \\ &b^i b^n, b^i b^m, b^i b^{iv}, b^n b^m, b^n b^{iv}, b^m b^{iv}; \\ &c^i c^n, c^i c^m, c^i c^{iv}, c^n c^m, c^n c^{iv}, c^m c^{iv}; \\ &d^i d^n, d^i d^m, d^i d^{iv}, d^n d^m, d^n d^{iv}, d^m d^{iv}; \\ &e^i e^n, e^i e^m, e^i e^{iv}, e^n e^m, e^n e^{iv}, e^m e^{iv}. \end{aligned}$$

5. Die Scheitel der 5-kantigen Ecken des Sterns sind die Scheitel der Ecken des eingeschriebenen Icosaeders; die Verbindungsstrecke zwischen zwei 5-kantigen Ecken ist eine Kante des eingeschriebenen Icosaeders; die an den 5-gliedrigen Ecken liegenden kurzen Kanten des Sterns sind Verlängerungen von den Kanten dieses Icosaeders, es müssen also je zwei kürzere Kanten zweier benachbarten 5-gliedrigen Ecken in Einer Geraden liegen, wie Fig. 14 und 15 die Kanten $k^i l^i$ und $k^n l^n$. Da aber (Fig. 10 und 16) die Punkte o^n, s^m und e^n in Einer Geraden liegen, so ist dieß auch Fig. 14 und 15 mit k^i, l^i und b^{iv} zc. der Fall, und es folgt, daß je zwei in Einer Linie liegende kurze Kanten noch außerdem verlängert durch 2 Tetraederecken gehen, also Fig. 14 und 15 die Kanten $k^i l^i$ und $k^n l^n$ in die Linie $b^{iv} e^i$ fallen.
6. Ein Quadrat $f^i f^n f^m f^{iv}$ Fig. 14 und 15 stößt mit zwei gegenüberliegenden Seiten an die beiden Fünfecke, welche durch die Endpunkte der an den 5-gliedrigen Ecken k^i und k^n liegenden Kanten bestimmt sind, andererseits liegt es zwischen den zwei Dreiecken (wie $f^n f^{iv} f^i$), welche durch die $(1+1+1)$ -kantigen Ecken auf den Flächen der beiden Tetraederspitzen c^{iv} und d^{iv} bestimmt

sind. So construirt sich ein Körper, der von dreierlei regelmäßigen Figuren, nämlich 12 Fünfecken, 20 Dreiecken und 30 Vierecken, umgeben ist und die angeführten Beziehungen ebenmäßig zu beiden Tetraedersternen hat.

§. 22.

Will man sich den Tetraederstern aus Pappendeckel modellieren, so ist das Erste die Bildung der dreiseitigen Tetraeder Spitze in der Gestalt, wie sie der Tetraederstern zeigt, als dreiseitiger unten offener pyramidalen Raum, von Flächen gebildet, deren Konstruktion §. 18 gelehrt worden. Das Netz für die Spitze des rechts gewundenen Tetraedersterns ist Fig. 17, des links gewundenen Fig. 18 dargestellt, und zwar samt Fig. 16 in den zu Fig. 14 und 15 gehörigen Ausmessungen. Mehrere klar vor Augen liegende geometrische Verhältnisse erleichtern den Entwurf und die Controlle desselben. Diese sind:

- a. Da die Winkel an der Spitze jeder 60° betragen, so bilden im Netz alle 3 Winkel zusammen einen gestreckten; die Kanten, welche bei der Bildung der Spitze zusammen geklebt werden, liegen also in Einer geraden Linie.
- b. Da die Dreiecke $e'' o'' e'''$ und $b'' o'' e'''$ in Fig. 16, 17 und 18 gleichseitige sind, so fallen im Netz nicht bloß je 3 Punkte, wie o'' , p'' , e''' Fig. 17 und o'' , s'' , e''' Fig. 18, in Eine Gerade, sondern da außerdem Fig. 17 $\eta' p'' = \eta' s''$ und Fig. 18 $3 s'' = 3 p'$, so fallen auch je 3 Punkte wie w' , s'' , e''' Fig. 17 und w' , p' , e''' Fig. 18 in Eine Gerade.

Nachdem man die Tetraeder Spitze modelliert, kann man zur Bildung des ganzen Tetraedersterns zwei Wege einschlagen, die für den links gewundenen dieselben sind, wie für den rechts gewundenen, weshalb ich nur von dem einen, und zwar von dem letzteren ausdrücklich handeln will.

a.

Man mache sich 20 jener dreiseitigen pyramidalen Räume und füge dieselben mit ihren Rändern an einander. Da hierdurch lauter nach Außen hohle Kanten entstehen, so kann man die 20 Netze der Pyramiden vorher zu keinem Gesamtnetz des ganzen Tetraedersterns vereinigen, und das genaue Zusammenkleben der 20 einzeln fertig gemachten dreiseitigen Räume hat für den Ungerübten einige Schwierigkeit.

b.

Der andere Weg ist folgender:

1. Man mache eines der 5 Tetraeder, aus deren Durchdringung der Stern entsteht, nach dem in §. 15 zu Fig. 10 ausgesprochenen Verhältnis:

$$p'' e' : e'' p'' = m : n \\ = 1 + \sqrt{5} : 2$$

$$e'' e' : e'' p'' = m + n : n \\ = 3 + \sqrt{5} : 2.$$

Die Fläche der in Fig. 14 und 15 gezeichneten Tetraeder ist das Dreieck $e' e'' e'''$.

2. Hiernach bestimme man auf jeder der 4 Flächen dieses Tetraeders die Punkte r' , r'' , r''' , von deren Lage und Bedeutung §. 15, d gehandelt worden, und verbinde dieselben zu einem Dreieck; mache dann 4 Tetraeder, deren Fläche $= r' r'' r'''$, und befestige dieselben über jenen auf den Flächen des großen Tetraeders gezeichneten Dreiecken. Diese vier kleineren Tetraeder sind einzelne Spitzen der vier anderen großen Tetraeder, mit welchen diese die vier Flächen jenes ersten durchdringen. Ich mache dabei auf das schon oben §. 21, 2 erörterte Verhältnis aufmerksam,

daß jeder Punkt r in dem Halbierungspunkt einer mittleren Kante ($w' s'''$ Fig. 10 und 16) des Tetraedersterns liegt.

3. Endlich mache man sich 12 jener Tetraeder Spitzen, deren Netz Fig. 17 und 18 gegeben worden, und füge je drei derselben um jedes der zuerst befestigten 4 Tetraeder herum zwischen diesem und der Fläche des großen Tetraeders ein.

§. 23.

Es bleibt mir noch übrig, nachdem ich die Zeichnungen der Tetraedersterne gegeben und ihrer Modellierung aus Pappdeckel gedacht, auch an der Aufgabe, wie dieselben in fester Masse darzustellen seien, nicht vorüber zu gehen.

Die Modellierung des Tetraedersternes aus Holz oder einer andern Substanz, welche wie dieses einerseits die Behandlung mit der Feile fordert, andererseits nicht zuläßt, daß, wenn irgend wo mit Schneide oder Feile zu viel weggenommen worden, dieses wieder ersetzt werde, hat seine großen Schwierigkeiten. Die vielen einspringenden Kanten, besonders die stumpfen an den 5-gliedrigen Ecken, machen es kaum möglich, den Körper aus Einem Stück darzustellen. Aus diesem Grunde wird für die Modellierung des Tetraedersternes aus solchen Substanzen kaum ein anderer Weg übrig bleiben als der für die Modellierung aus Pappdeckel angegebene.

Dagegen kann man bei weichen Substanzen, die geschabt werden können und zulassen, daß man, um einen gemachten Fehler zu verbessern, neue Masse auftrage, recht wohl ein anderes Verfahren beobachten. Bei diesem geht man von dem Icosaeder aus, und zeichnet auf jeder Fläche desselben, $i' i'' i'''$ Fig. 19, ein Dreieck $\eta' \eta'' \eta'''$, das dem ersten in der Lage, die (Fig. 16) $o' o'' o'''$ zu $e' e'' e'''$ hat, eingeschrieben ist, daß nämlich

$$i' i'' : i' \eta'' = m : n \\ 2 : \sqrt{5} - 1.$$

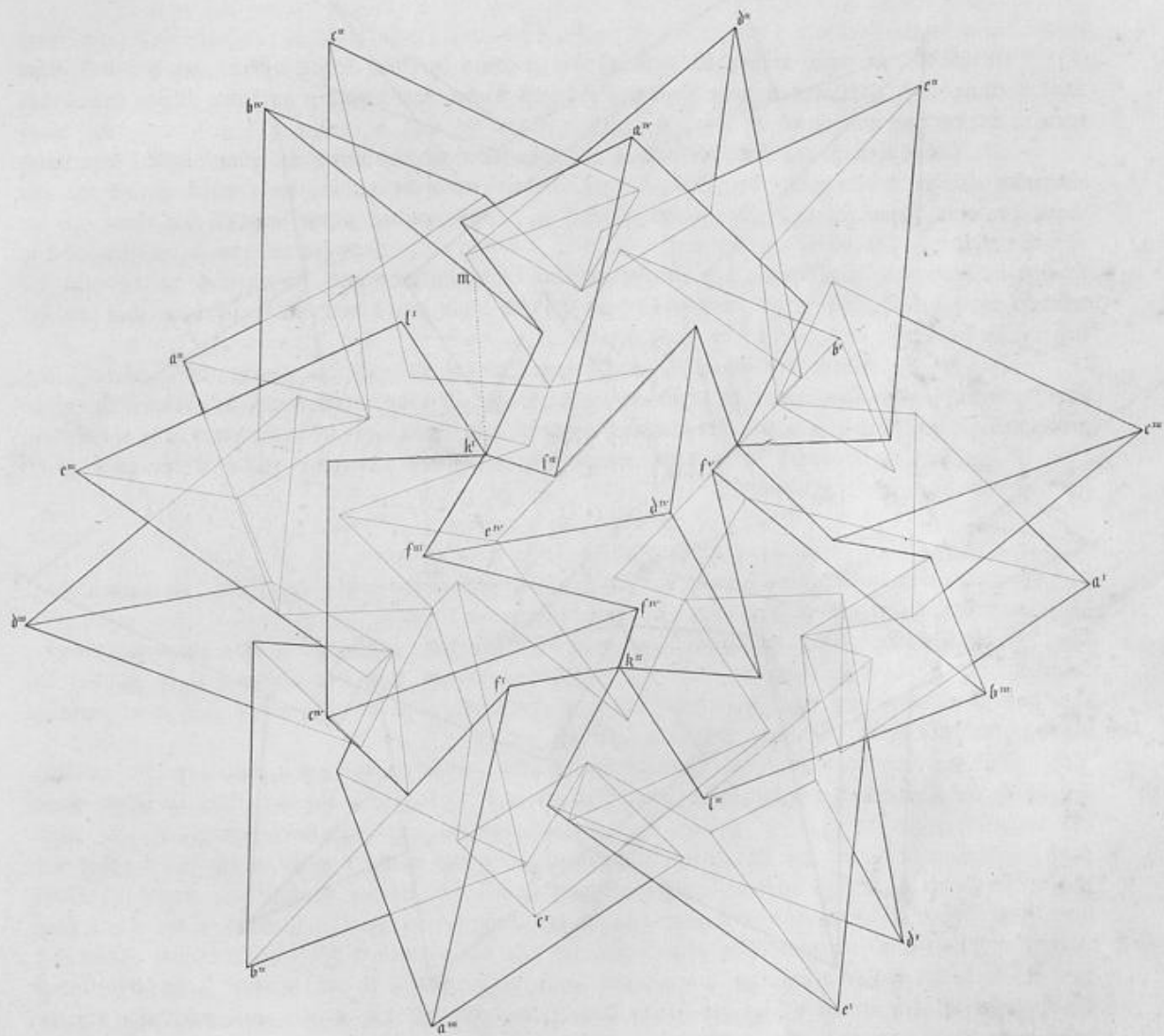
Fig. 19 stellt das eingeschriebene Dreieck dar für den rechts gewundenen Tetraederstern; die kleinen Ringe bezeichnen die Scheitel des entsprechenden für den links gewundenen.

Diese Dreiecke werden zu Grundflächen von 20 Tetraedern gemacht, die man auf dem Icosaeder befestigt, und sind die Spitzen des beabsichtigten Tetraedersternes. In der Richtung ihrer Flächen hat man nun nach Innen von dem Icosaeder solange wegzumeißeln oder wegzuschneiden, bis von demselben nichts mehr sichtbar ist. Dann ist der Tetraederstern fertig.

Soll das Verfahren zu einem Tetraederstern führen, dessen Ausmessungen mittelbar oder unmittelbar durch die Kante der sich durchdringenden Tetraeder ($e' e''$ Fig. 16) gegeben sind, so ist die Kante des zugehörigen Icosaeders $= e'' \eta'$ Fig. 16. Denn wenn an einem Tetraederstern durch eine Kante einer 5-gliedrigen Ecke und die Axe dieser Ecke eine Ebene gelegt wird, Fig. 14 durch die Axe der Ecke k' und die Kante $k' f'''$, so halbiert diese den ebenen Winkel der Fläche, welche dieser Kante gegenüberliegt, und schneidet die nächste Tetraederkante in m : dieß ist der Punkt, in welchem die Kante eines Icosaeders, das dem eingeschriebenen concentrisch ist und mit demselben paarweise parallele Fläche hat, diese Kante des Tetraeders schneiden würde, und durch diesen Punkt ist das gesuchte Icosaeder bestimmt. Denn dieser ist der Punkt η' auf der Fläche des Tetraedersternes; die Kanten des auf das Icosaeder aufgesetzten Tetraeders sind also $= e'' \eta'$ Fig. 16, und in Fig. 19 ist $\eta' \eta'' \eta'''$ die Fläche eines solchen Tetraeders, $i' i'' i'''$ die des gesuchten Icosaeders, hier in den Ausmessungen, die denen der beiden Tetraedersterne Fig. 14 und 15 entsprechen.

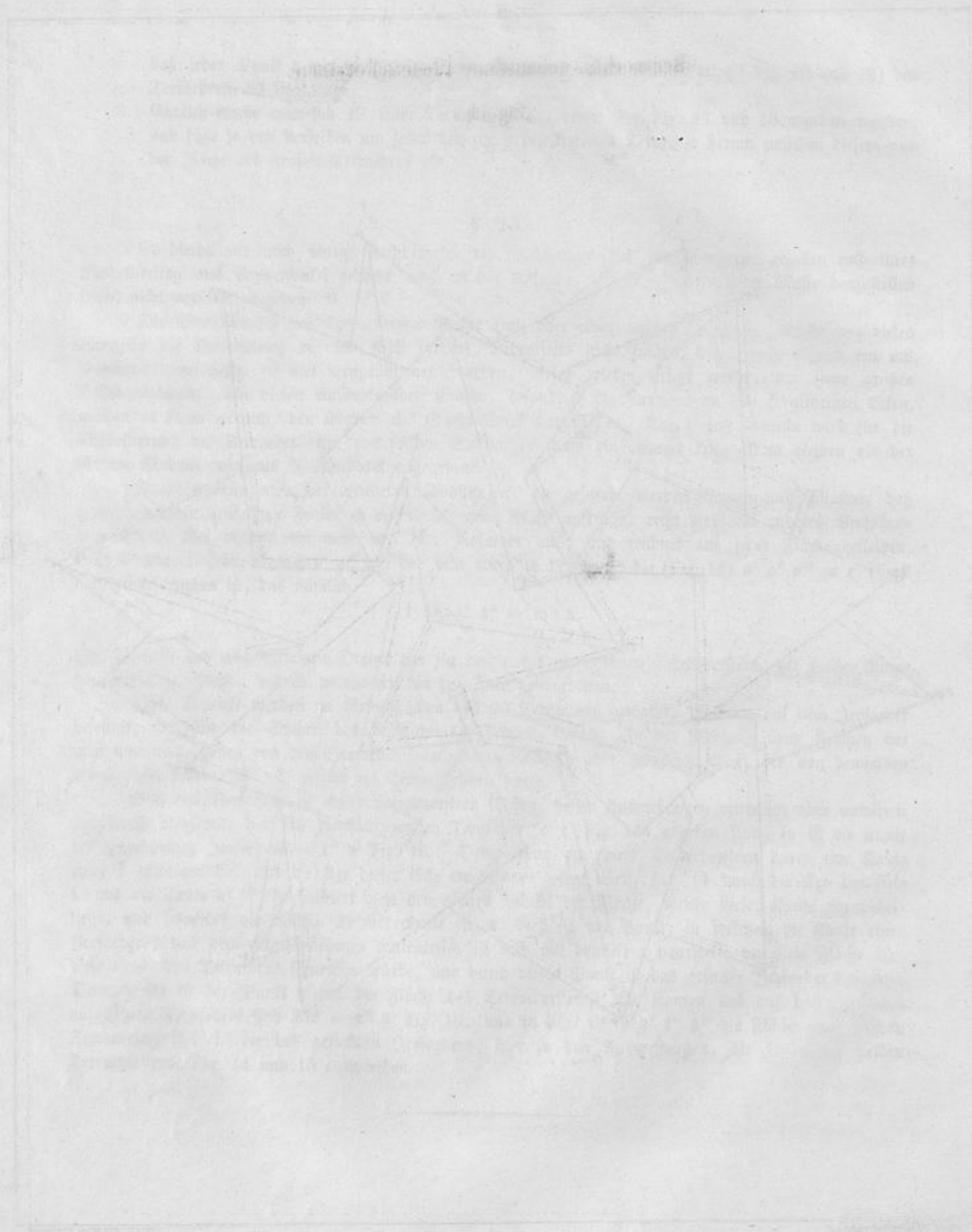
Der rechts gewundene Tetraëderstern.

Fig. 14.



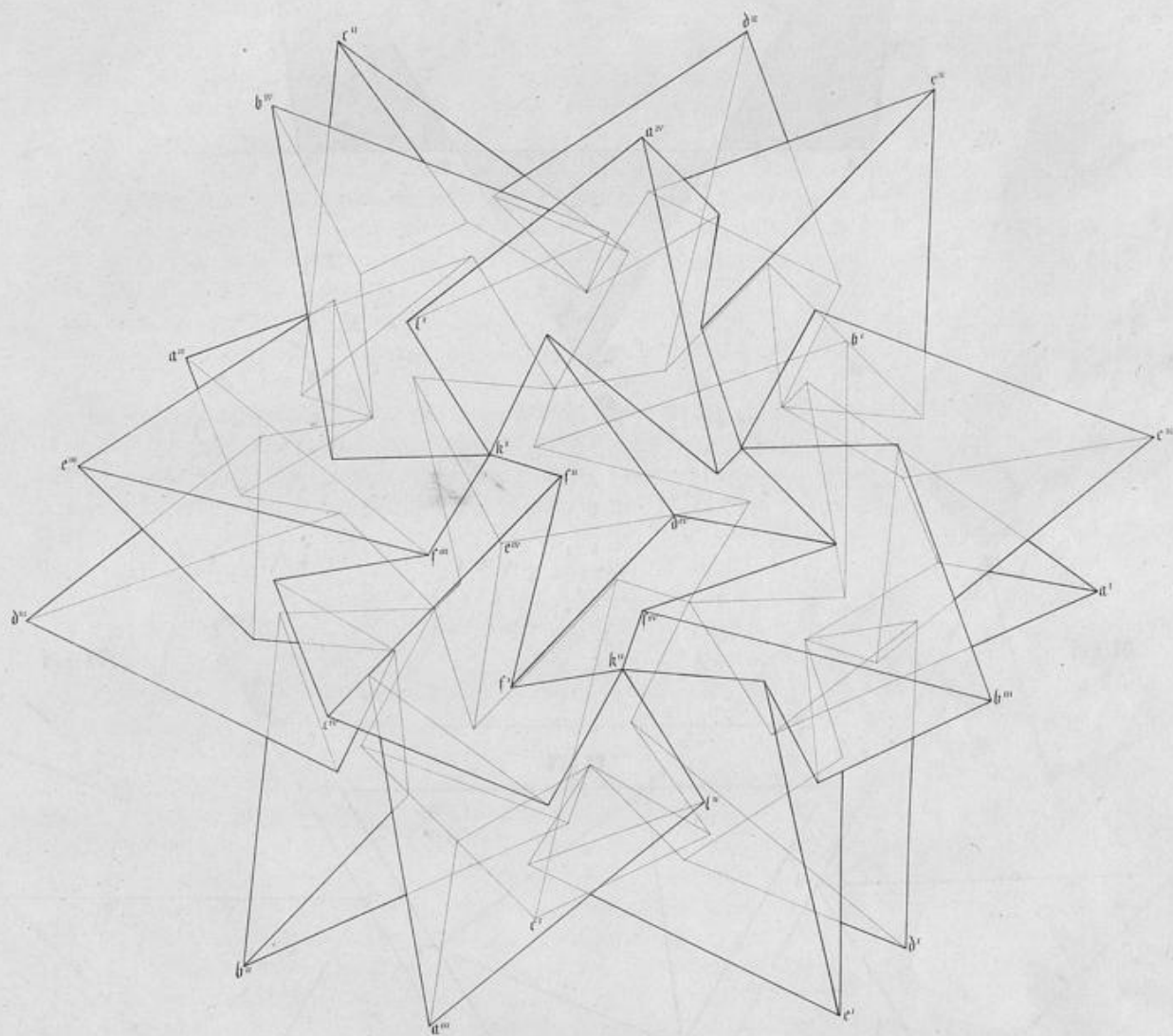
gea. von Phil. Wackerungel

lith. bei J.D. Roth, E. Kersfeld



Der links gewundene Tetraëderstern.

Fig. 15.



gez. von Phil. Wackernagel.

lith. von J. B. Roth, Elberfeld.

Die hiesige Wissenschaft

Fig. 13

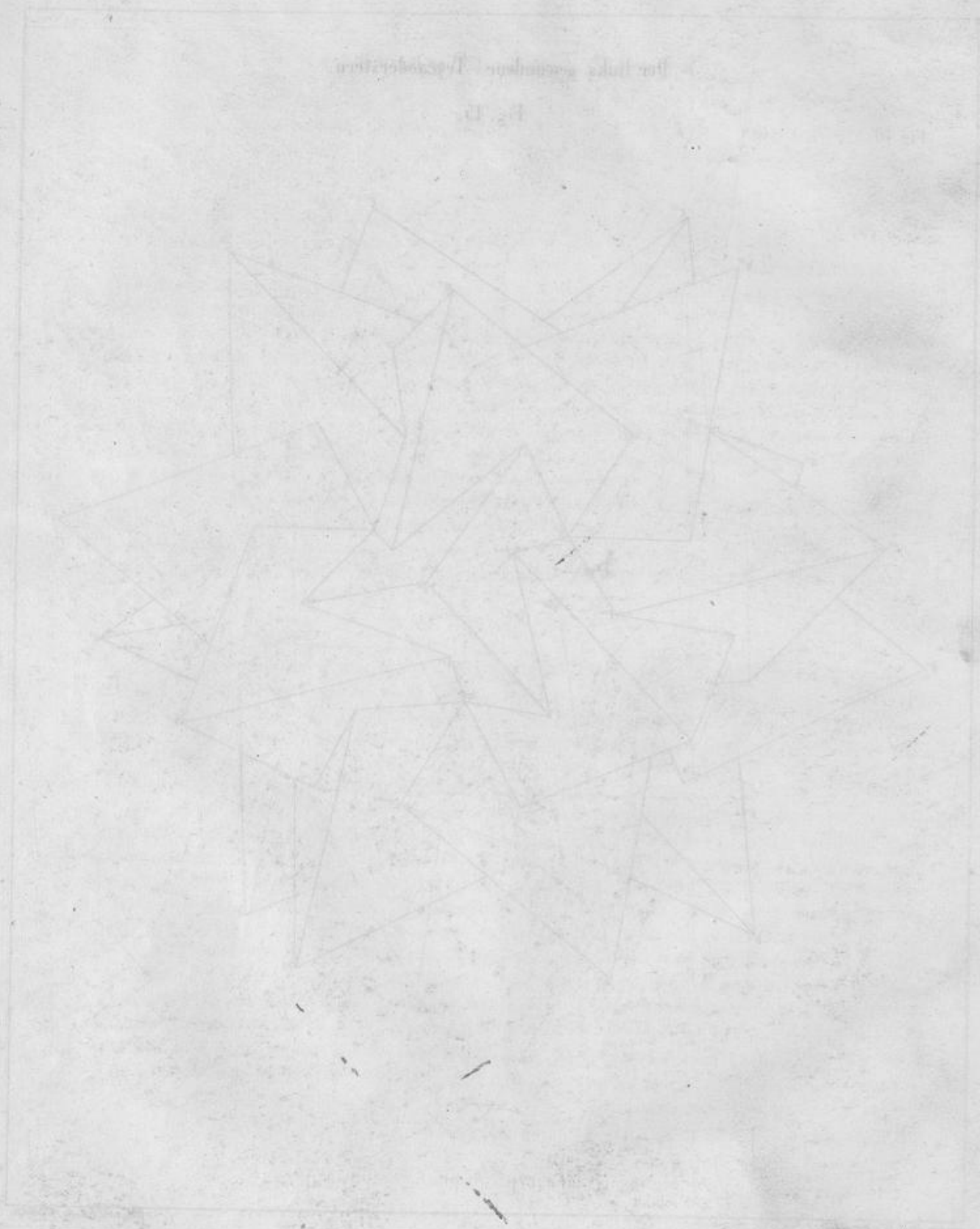


Fig. 16.

Fig.17.

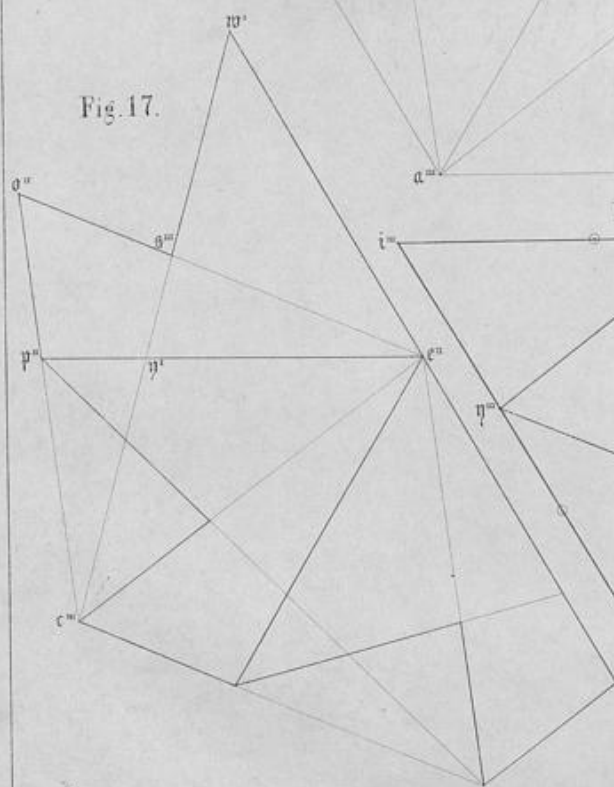


Fig.19.

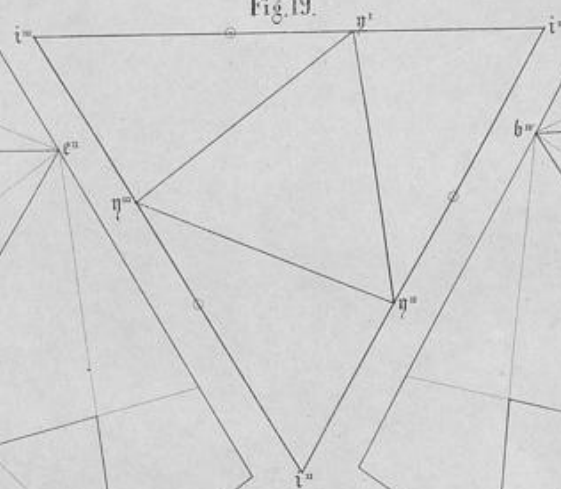
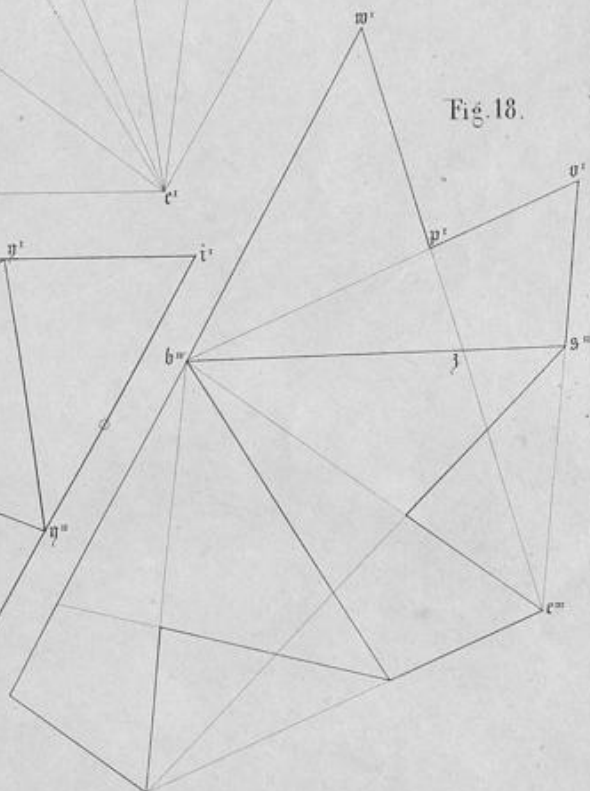


Fig. 18.



gez. von Phil. Wackernagel

lith. bei J. D. Roth Elberfeld.

