

Metrische Relationen am Sehnenviereck.

Die metrischen Relationen am Sehnenviereck sind merkwürdiger Weise gegenüber denen am Dreieck bislang sehr vernachlässigt worden. Abgesehen von den längst bekannten Formeln für den Inhalt, die Diagonalen und den Radius des umschriebenen Kreises ist mir aus neuerer Zeit nur eine Abhandlung über den erwähnten Gegenstand bekannt: Dostor, Propriétés nouvelles du quadrilatère en général, avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles etc. in Grunerts Archiv XXXVIII S. 245. Aber auch hier wird über die Berechnung der sich zunächst darbietenden Strecken und Winkel nicht weit hinausgegangen.

Ich teile nun im Folgenden die hauptsächlichsten Ergebnisse mit, zu denen ich bis jetzt gekommen bin in Bezug auf die gegenseitige Lage der Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und der an- und eingeschriebenen Kreise, des Flächen- und Eckenschwerpunktes, des Schnittpunktes der Lote von den Mitten der Seiten auf die Gegenseiten und der Schnittpunkte der drei Diagonalen.

Indem ich die Funktionen

$$ab+cd, ad+bc, ac+bd, b+c+d-a, a+c+d-b, a+b+d-c, a+b+c-d,$$

in denen a, b, c, d die Seiten AB, BC, CD, DA des Sehnenvierecks vorstellen, symbolisch stets mit

$$(ab), (ad), (ac), \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$$

bezeichne, stelle ich zunächst die Formeln zusammen, die die Grundlage für die folgenden Berechnungen bilden sollen; sie finden sich zumeist bei Dostor a. a. O.

$$(1) \quad AC=f=\sqrt{\frac{(ac)(ad)}{(ab)}}, \quad BD=g=\sqrt{\frac{(ac)(ab)}{(ad)}}, \quad AC'=h=\sqrt{\frac{(ab)(ad)}{(ac)}},$$

$$g^2-f^2=\frac{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}{h^2},$$

wo C' den einen Eckpunkt desjenigen Sehnenvierecks $ABC'D$ bedeutet, welches man erhält, wenn man BC mit CD vertauscht.

$$(2) \quad PQ=e=\sqrt{(ab)(ad)\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2}+\frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]};$$

- (3) Inhalt $J = \frac{1}{4} \sqrt{\{a\} \{b\} \{c\} \{d\}} =$
 $\frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8abcd};$
- (4) $MA = MB = MC = MD = R = \sqrt{\frac{(ab)(ad)(ac)}{\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}}} = \frac{fgh}{4J};$
- (5) $AN = \frac{ad}{h}, BN = \frac{ab}{h}, CN = \frac{bc}{h}, DN = \frac{cd}{h};$
- (6) $AQ = a \frac{(ad)}{a^2 - c^2}, BQ = a \frac{(ab)}{a^2 - c^2}, CQ = c \frac{(ad)}{a^2 - c^2}, DQ = c \frac{(ab)}{a^2 - c^2},$
 $AP = d \frac{(ad)}{b^2 - d^2}, BP = b \frac{(ab)}{b^2 - d^2}, CP = b \frac{(ad)}{b^2 - d^2}, DP = d \frac{(ab)}{b^2 - d^2};$
- (7) $\triangle ABQ = \frac{a^2 J}{a^2 - c^2}, \triangle CDQ = \frac{c^2 J}{a^2 - c^2}, \triangle BCP = \frac{b^2 J}{b^2 - d^2}, \triangle ADP = \frac{d^2 J}{b^2 - d^2};$
- (8) $\sin BAD = \sin \alpha = \frac{2J}{(ad)}, \sin ABC = \sin \beta = \frac{2J}{(ab)}, \sin AND = \sin \epsilon = \frac{2J}{(ac)};$
- (9) $\sin AQB = \sin(\alpha + \beta) = \frac{2J(a^2 - c^2)}{(ab)(ad)}, \sin BPC = \sin(\alpha - \beta) = \frac{2J(b^2 - d^2)}{(ab)(ad)};$
- (10) $\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad)}, \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab)}, \cos \epsilon = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac)};$
- (11) $\cos AQB = \cos(2R - \alpha - \beta) = \frac{[(ab)]^2 + [(ad)]^2 - (a^2 - c^2)^2}{2(ab)(ad)},$
 $\cos BPC = \cos(\alpha - \beta) = \frac{[(ab)]^2 + [(ad)]^2 - (b^2 - d^2)^2}{2(ab)(ad)};$
- (12) $\cot \epsilon = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{4J}, \cot(2R - \alpha - \beta) = \frac{[(ab)]^2 + [(ad)]^2 - (a^2 - c^2)^2}{4J(a^2 - c^2)}, \cot(\alpha - \beta) = \frac{[(ab)]^2 + [(ad)]^2 - (b^2 - d^2)^2}{4J(b^2 - d^2)};$
- (13) $\sin ADB = \sin ACB = \frac{a}{2R}, \sin BAC = \sin BDC = \frac{b}{2R},$
 $\sin CBD = \sin CAD = \frac{c}{2R}, \sin DBA = \sin DCA = \frac{d}{2R};$
- (14) $\cos ADB = \cos ACB = \frac{a(b^2 + c^2 + d^2 - a^2) + 2bcd}{2\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \cos BAC = \cos BDC = \frac{b(a^2 + c^2 + d^2 - b^2) + 2acd}{2\sqrt{(ab)(ad)(ac)}},$
 $\cos CBD = \cos CAD = \frac{c(a^2 + b^2 + d^2 - c^2) + 2abd}{2\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \cos DBA = \cos DCA = \frac{d(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) + 2abc}{2\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}.$

Für die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten und der Diagonalen gilt ferner:

$$(15) \quad A_1 C_1^2 = \frac{1}{4} (b^2 + d^2 - a^2 - c^2 + f^2 + g^2), \quad B_1 D_1^2 = \frac{1}{4} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + f^2 + g^2),$$

$$F_1 G_1^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2 - g^2) = \frac{ac(b^2 - d^2)^2 + bd(a^2 - c^2)^2}{4(ab)(ad)}.$$

Endlich verwende ich noch die bekannte Relation zwischen den 6 Strecken, welche vier in einer Ebene liegende Punkte 1, 2, 3, 4 verbinden:

$$(16) \quad \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \left\{ \overline{12}^2 + \overline{34}^2 - \overline{13}^2 - \overline{14}^2 - \overline{23}^2 - \overline{24}^2 \right\}$$

$$+ \overline{14}^2 \cdot \overline{23}^2 \left\{ \overline{14}^2 + \overline{23}^2 - \overline{12}^2 - \overline{13}^2 - \overline{24}^2 - \overline{34}^2 \right\}$$

$$+ \overline{13}^2 \cdot \overline{24}^2 \left\{ \overline{13}^2 + \overline{24}^2 - \overline{12}^2 - \overline{14}^2 - \overline{23}^2 - \overline{34}^2 \right\}$$

$$+ \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2 + \overline{23}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{42}^2 + \overline{34}^2 \cdot \overline{41}^2 \cdot \overline{13}^2 + \overline{41}^2 \cdot \overline{12}^2 \cdot \overline{24}^2 = 0.$$

I. 1) Zieht man durch N eine Sehne n senkrecht zu MN, so ist

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 = AN \cdot CN = BN \cdot DN = \frac{abcd}{h^2},$$

folglich

$$MN^2 = R^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{abcd}{h^2}.$$

2) Für die von P und Q an den Kreis gezogenen Tangenten t_p und t_q gilt:

$$t_p^2 = AP \cdot BP = \frac{bd(ab)(ad)}{(b^2 - d^2)^2}, \quad t_q^2 = BQ \cdot CQ = \frac{ac(ab)(ad)}{(a^2 - c^2)^2}$$

$$\text{also } t_p^2 + t_q^2 = e^2.$$

Da ferner $MP^2 = R^2 + t_p^2$ und $MQ^2 = R^2 + t_q^2$, so wird, wenn E_1 die Mitte von PQ bezeichnet,

$$ME_1^2 = \frac{1}{4} (2MP^2 + 2MQ^2 - e^2) = R^2 + \frac{1}{4} e^2.$$

Ferner ist:

$$MP^2 + MQ^2 - 2R^2 = e^{2*}$$

und da andererseits $MP^2 + MQ^2 - 2MP \cdot MQ \cdot \cos PMQ = e^2$, so ergibt sich

$$R^2 = MP \cdot MQ \cdot \cos PMQ.**$$

* Baltzer, Planimetrie § 14, 5.

** in Grunerts Archiv II S. 328 von Kunze als Übungsaufgabe aufgestellt.

3) Aus $\triangle BDP$ folgt mittelst des Stewartschen Satzes*

$$BP^2 \cdot ND + DP^2 \cdot NB - BD \cdot NB \cdot ND = NP^2 \cdot BD$$

$$\text{oder } NP^2 = \frac{bd(ab)(ad)}{(b^2-d^2)^2} - \frac{abcd}{h^2} = t_p^2 - \frac{abcd}{h^2};$$

in derselben Weise folgt aus $\triangle ACQ$

$$NQ^2 = t_q^2 - \frac{abcd}{h^2};$$

mithin hat man analog den Gleichungen unter 2)

$$MP^2 + MN^2 - 2R^2 = NP^2,$$

$$MQ^2 + MN^2 - 2R^2 = NQ^{2**};$$

$$\text{andererseits } MP^2 + MN^2 - 2MP \cdot MN \cos PMN = NP^2$$

$$\text{und } MQ^2 + MN^2 - 2MQ \cdot MN \cos QMN = NQ^2;$$

$$\text{also auch } R^2 = MP \cdot MN \cdot \cos PMN,$$

$$\text{und } R^2 = MQ \cdot MN \cdot \cos QMN.$$

Die 3 Gleichungen für R^2 unter 2) und 3) enthalten die bekannten Sätze in sich, dass N der Höhenschnittpunkt von $\triangle MPQ$ ist und dass P und Q die Pole von NQ und NP sind.

II. Da MNF_1G_1 ein Sehnenviereck ist, so folgt nach dem Ptolemäischen Lehrsatz

$$F_1G_1 \cdot MN + \left(\frac{1}{2}f - \frac{ad}{h}\right) \cdot \frac{g(a^2+d^2-b^2-c^2)}{8J} = \left(\frac{1}{2}g - \frac{cd}{h}\right) \cdot \frac{f(a^2+b^2-c^2-d^2)}{8J},$$

denn es ist $MF_1 = R \cos \beta$ und $MG_1 = R \cos \alpha$;

$$\text{oder } F_1G_1 \cdot MN + \frac{(ac)(bc-ad)(a^2+d^2-b^2-c^2)}{16J(ad)} = \frac{(ac)(ab-cd)(a^2+b^2-c^2-d^2)}{16J(ab)}$$

$$\text{oder } F_1G_1 \cdot MN = \frac{(ac)[ac(b^2-d^2)^2 + bd(a^2-c^2)^2]}{8J(ab)(ad)} = \frac{(ac) \cdot F_1G_1^2}{2J}$$

$$\text{folglich } F_1G_1 = MN \sin \epsilon.$$

In derselben Weise folgt aus den Sehnenvierecken PA_1MC_1 und QB_1MD_1

$$A_1C_1 = MP \sin(\alpha-\beta), \quad B_1D_1 = MQ \sin(\alpha+\beta).$$

* Man sehe über diesen Satz Baltzer, Planimetrie § 14, 22 oder Kunze, Geometrie 7. Anhang.

** Baltzer, Planimetrie § 14, 5.

III. In einem Dreieck ABC hat die Verbindungslinie von A mit dem Centrum O des eingeschriebenen Kreises den Wert $AO = \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}$ und die Verbindungslinie von A mit dem Centrum O_b des der Seite b angeschriebenen Kreises den Wert $AO_b = \sqrt{\frac{bc(a+b-c)}{a+c-b}}$. Sind demnach M_1, M_2, M_3, M_4 die Centren der dem Sehnenviereck angeschriebenen Kreise, so erhält man mittelst der Formeln unter (6)

$$AM_1 = \frac{a}{a+c} \sqrt{\frac{(ad)\{d\}}{\{a\}}}, \quad BM_1 = \frac{a}{a+c} \sqrt{\frac{(ab)\{b\}}{\{a\}}}, \quad BM_2 = \frac{b}{b+d} \sqrt{\frac{(ab)\{a\}}{\{b\}}}, \quad CM_2 = \frac{b}{b+d} \sqrt{\frac{(ad)\{c\}}{\{b\}}},$$

$$CM_3 = \frac{c}{a+c} \sqrt{\frac{(ad)\{b\}}{\{c\}}}, \quad DM_3 = \frac{c}{a+c} \sqrt{\frac{(ab)\{d\}}{\{c\}}}, \quad DM_4 = \frac{d}{b+d} \sqrt{\frac{(ab)\{c\}}{\{d\}}}, \quad AM_4 = \frac{d}{b+d} \sqrt{\frac{(ad)\{a\}}{\{d\}}}.$$

Um MM_1 zu finden, wende ich die Relation unter (16) auf die Punkte A, M, B, M_1 an und erhalte für $MM_1 = x$ die Gleichung:

$$x^4 - x^2(AM_1^2 + BM_1^2 - a^2 + 2R^2) = R^2(AM_1^2 + BM_1^2) - R^4 - AM_1^2 \cdot BM_1^2 - \frac{R^2}{a^2}(AM_1^2 - BM_1^2)^2,$$

$$\text{woraus } x^2 = \frac{1}{2}(AM_1^2 + BM_1^2 - a^2 + 2R^2) \pm \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left[2AM_1^2 + 2BM_1^2 - a^2 - \frac{(AM_1^2 - BM_1^2)^2}{a^2}\right]}$$

$$= \frac{a^2(a-c)\{b\}\{d\}}{2(a+c)^2\{a\}} + R^2 \pm \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{a^2\{b\}\{c\}\{d\}}{(a+c)^2\{a\}}}.$$

$$\text{Nun ist } R^2 - \frac{a^2}{4} = MA_1^2 = R^2 \cos^2 ACB = \frac{(ab^2 + ac^2 + ad^2 - a^3 + 2bcd)^2}{64J^2};$$

den zweiten Factor unter dem Wurzelzeichen aber kann man schreiben: $\frac{a^2 \cdot 16J^2}{(a+c)^2\{a\}\{a\}}$, so dass

$$x^2 = R^2 + \frac{a^2(a-c)\{b\}\{d\}}{2(a+c)^2\{a\}} \pm \frac{(ab^2 + ac^2 + ad^2 - a^3 + 2bcd)a}{2(a+c)\{a\}}$$

wird. Eine einfache Überlegung zeigt nun, dass unter allen Umständen das positive Zeichen zu nehmen ist, folglich

$$x^2 = R^2 + \frac{a(ab)(ad)}{(a+c)^2\{a\}} = MM_1^2.$$

Durch cyklische Vertauschung von a, b, c, d gelangt man zu

$$MM_2^2 = R^2 + \frac{b(ab)(ad)}{(b+d)^2\{b\}}, \quad MM_3^2 = R^2 + \frac{c(ab)(ad)}{(a+c)^2\{c\}}, \quad MM_4^2 = R^2 + \frac{d(ab)(ad)}{(b+d)^2\{d\}}.$$

Man kann diesen Ausdrücken durch Einführung der Radien der vier dem Sehnenviereck angeschriebenen Kreise noch eine elegantere Gestalt geben. Aus den Formeln unter (6) und (7) ergeben sich nämlich für diese Radien die Werte:

$$r_1 = \frac{2aJ}{(a+c)\{a\}}, \quad r_2 = \frac{2bJ}{(b+d)\{b\}}, \quad r_3 = \frac{2cJ}{(a+c)\{c\}}, \quad r_4 = \frac{2dJ}{(b+d)\{d\}};$$

also $MM_1^2 = R^2 + 2Rr_1 \cdot \frac{h}{a+c}$, $MM_2^2 = R^2 + 2Rr_2 \cdot \frac{h}{b+d}$, $MM_3^2 = R^2 + 2Rr_3 \cdot \frac{h}{a+c}$, $MM_4^2 = R^2 + 2Rr_4 \cdot \frac{h}{b+d}$.

Ganz entsprechende Formeln ergeben sich für die Centren M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 der vier dem Sehnenviereck eingeschriebenen Kreise mit den Radien e_1, e_2, e_3, e_4 :

$$AM'_1 = \frac{a}{a+c} \sqrt{\frac{(ad)\{b\}}{\{c\}}}, \quad BM'_1 = \frac{a}{a+c} \sqrt{\frac{(ab)\{d\}}{\{c\}}}, \quad BM'_2 = \frac{b}{b+d} \sqrt{\frac{(ab)\{c\}}{\{d\}}}, \quad CM'_2 = \frac{b}{b+d} \sqrt{\frac{(ad)\{a\}}{\{d\}}},$$

$$CM'_3 = \frac{c}{a+c} \sqrt{\frac{(ad)\{d\}}{\{a\}}}, \quad DM'_3 = \frac{c}{a+c} \sqrt{\frac{(ab)\{b\}}{\{a\}}}, \quad DM'_4 = \frac{d}{b+d} \sqrt{\frac{(ab)\{a\}}{\{b\}}}, \quad AM'_4 = \frac{d}{b+d} \sqrt{\frac{(ad)\{c\}}{\{b\}}};$$

$$e_1 = \frac{2aJ}{(a+c)\{c\}}, \quad e_2 = \frac{2bJ}{(b+d)\{d\}}, \quad e_3 = \frac{2cJ}{(a+c)\{a\}}, \quad e_4 = \frac{2dJ}{(b+d)\{b\}};$$

$$MM'_1 = R^2 - 2Re_1 \cdot \frac{h}{a+c}, \quad MM'_2 = R^2 - 2Re_2 \cdot \frac{h}{b+d}, \quad MM'_3 = R^2 - 2Re_3 \cdot \frac{h}{a+c}, \quad MM'_4 = R^2 - 2Re_4 \cdot \frac{h}{b+d}.$$

Man beachte die Ähnlichkeit dieser Formeln mit den entsprechenden am Dreieck, die z. B. in Baltzers Planimetrie § 14, 4 oder in Kunzes Geometrie, 4. Anhang, zu finden sind.

IV. Den Flächenschwerpunkt S des Sehnenvierecks findet man, indem man die Schwerpunkte S_1 und S_3 der Dreiecke ABD und BCD verbindet und den Abschnitt dieser Verbindungslinie von S_1 bis zur Diagonale BD vom andern Endpunkte S_3 aus auf ihr abträgt. Aus dem Dreieck AS_1S_3 ergibt sich dann mittelst des Stewart'schen Satzes

$$AS_1^2 \cdot SS_3 + AS_3^2 \cdot SS_1 - S_1S_3 \cdot SS_1 \cdot SS_3 = AS^2 \cdot S_1S_3$$

$$\text{oder } \frac{1}{9}(2a^2 + 2d^2 - g^2) \cdot \frac{ad}{3h} + \frac{1}{9}(3a^2 - b^2 - c^2 + 3d^2 + 3f^2 - g^2) \cdot \frac{bc}{3h} - \frac{1}{9}f \cdot \frac{abcd}{9h^2} = AS^2 \cdot \frac{1}{9}f,$$

$$\text{woraus } 9AS^2 = 2a^2 - b^2 - c^2 + 2d^2 - \frac{4abcd}{h^2} + 3f^2 - \frac{3a^2d^2}{h^2};$$

$$\text{analog } 9BS^2 = 2b^2 - c^2 - d^2 + 2a^2 - \frac{4abcd}{h^2} + 3g^2 - \frac{3a^2b^2}{h^2},$$

$$9CS^2 = 2c^2 - d^2 - a^2 + 2b^2 - \frac{4abcd}{h^2} + 3f^2 - \frac{3b^2c^2}{h^2}, \quad 9DS^2 = 2d^2 - a^2 - b^2 + 2c^2 - \frac{4abcd}{h^2} + 3g^2 - \frac{3c^2d^2}{h^2};$$

$$\text{also } 9(AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3(f^2 + g^2) - \frac{4abcd}{h^2}.$$

Um MS zu finden, kann man die Relation unter (16) auf die Punkte A, M, B, S anwenden und erhält auf dieselbe Weise wie unter Nr. III

$$\begin{aligned} MS^2 &= \frac{1}{2}(AS^2 + BS^2 - a^2 + 2R^2) \pm \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left[2AS^2 + 2BS^2 - a^2 - \frac{(AS^2 - BS^2)^2}{a^2}\right]} \\ &= \frac{1}{2}(AS^2 + BS^2 - a^2 + 2R^2) \pm \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{16J^2(abd + b^2c + cd^2)^2}{9[(ab)(ad)]^2}} \\ &= \frac{1}{2}(AS^2 + BS^2 - a^2 + 2R^2) \pm \frac{(ab^2 + ac^2 + ad^2 - a^3 + 2bcd)(abd + b^2c + cd^2)}{6(ab)(ad)}; \end{aligned}$$

da hier jederzeit das negative Zeichen zu wählen ist, so wird schliesslich

$$MS^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{abcd}{h^2}\right).$$

Diese Formel verwandelt sich für $d = 0$ in die für jedes Dreieck gültige: $MS^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Mittelst des Stewart'schen Satzes ergibt sich aus $\triangle ACG_1$

$$9AS_3^2 = 3(a^2 + d^2 + f^2) - (b^2 + c^2 + g^2);$$

bezeichnet man die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ADC mit S_2 und S_4 , so wird analog

$$9BS_4^2 = 3(a^2 + b^2 + g^2) - (c^2 + d^2 + f^2), \quad 9CS_1^2 = 3(b^2 + c^2 + f^2) - (a^2 + d^2 + g^2),$$

$$9DS_2^2 = 3(c^2 + d^2 + g^2) - (a^2 + b^2 + f^2);$$

also $9(AS_3^2 + BS_4^2 + CS_1^2 + DS_2^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)$.

Da ferner $9AS_1^2 = 2a^2 + 2d^2 - g^2$, $9BS_2^2 = 2a^2 + 2b^2 - f^2$, $9CS_3^2 = 2b^2 + 2c^2 - g^2$, $9DS_4^2 = 2c^2 + 2d^2 - f^2$,

so gilt $9(AS_1^2 + BS_2^2 + CS_3^2 + DS_4^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(f^2 + g^2)$

und $3(AS_3^2 + BS_4^2 + CS_1^2 + DS_2^2 - AS_1^2 - BS_2^2 - CS_3^2 - DS_4^2) = 2(f^2 + g^2)$.

V. Bedeutet J den Schnittpunkt der Lote s_1, s_2, s_3, s_4 von A_1, B_1, C_1, D_1 auf die Gegenseiten, so gilt zunächst

$$\begin{aligned} MJ^2 &= 4R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)^* \\ &= 4R^2 - (A_1C_1^2 + B_1D_1^2 + F_1G_1^2); \end{aligned}$$

durch Einführung der Grössen $MA_1^2 = \gamma_1^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2$, $MB_1^2 = \gamma_2^2 = R^2 - \frac{1}{4}b^2$, $MC_1^2 = \gamma_3^2 = R^2 - \frac{1}{4}c^2$, $MD_1^2 = \gamma_4^2 = R^2 - \frac{1}{4}d^2$ gewinnt der Ausdruck die Form

$$MJ^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \frac{1}{4}(f^2 + g^2);$$

oder da $\angle JA_1M = \angle BPC$ und $\angle JB_1M = \angle AQB$ ist, auch

$$MJ^2 = \gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 2\gamma_1\gamma_3 \cos(\alpha - \beta) = \gamma_2^2 + \gamma_4^2 + 2\gamma_2\gamma_4 \cos(2R - \alpha - \beta).$$

* Kunze, Geometrie. 4. Auhang.

Der Punkt J hat von A_1, B_1, C_1, D_1 die Entfernungen $JA_1 = \gamma_3, JB_1 = \gamma_4, JC_1 = \gamma_1, JD_1 = \gamma_2$, also von a, b, c, d die Entfernungen $s_3 = \gamma_1, s_4 = \gamma_2, s_1 = \gamma_3, s_2 = \gamma_4$; da nun $\angle PA_1J = \angle PC_1J = 90^\circ - \angle BPC$ und $\angle QB_1J = \angle QD_1J = 90^\circ - \angle AQB$, so wird

$$s_3 - \gamma_1 = \gamma_3 \cos(\alpha - \beta), s_4 - \gamma_2 = \gamma_4 \cos(2R - \alpha - \beta), s_1 - \gamma_3 = \gamma_1 \cos(\alpha - \beta), s_2 - \gamma_4 = \gamma_2 \cos(2R - \alpha - \beta);$$

$$\text{also } \triangle AJB = \frac{1}{2} a \gamma_3 \cos(\alpha - \beta), \triangle BJC = \frac{1}{2} b \gamma_4 \cos(2R - \alpha - \beta),$$

$$\triangle CJD = \frac{1}{2} c \gamma_1 \cos(\alpha - \beta), \triangle AJD = \frac{1}{2} d \gamma_2 \cos(2R - \alpha - \beta).$$

Es ist aber $\gamma_1 = R \cos ACB = \frac{ab^2 + ac^2 + ad^2 - a^3 + 2bcd}{8J}$, analog $\gamma_2 = \frac{a^2b + bc^2 + bd^2 - b^3 + 2acd}{8J}$,
 $\gamma_3 = \frac{a^2c + b^2c + cd^2 - c^3 + 2acd}{8J}$, $\gamma_4 = \frac{a^2d + b^2d + c^2d - d^3 + 2abc}{8J}$; daher $a\gamma_3 + c\gamma_1 = \frac{(ab)(ad)}{4J} = b\gamma_4 + d\gamma_2$,
 folglich $\triangle AJB + \triangle CJD = \frac{1}{4}(b^2 - d^2) \cot(\alpha - \beta)$, $\triangle BJC + \triangle AJD = \frac{1}{4}(a^2 - c^2) \cot(2R - \alpha - \beta)$.

VI. Aus dem Dreieck AA_1J folgt

$$AJ^2 = \frac{a^2}{4} + \gamma_3^2 - a\gamma_3 \sin(\alpha - \beta); \text{ analog } BJ^2 = \frac{b^2}{4} + \gamma_4^2 + b\gamma_4 \sin(\alpha + \beta),$$

$$CJ^2 = \frac{c^2}{4} + \gamma_1^2 + c\gamma_1 \sin(\alpha - \beta), DJ^2 = \frac{d^2}{4} + \gamma_2^2 - d\gamma_2 \sin(\alpha + \beta).$$

Hieraus folgt

$$AJ^2 - CJ^2 = \frac{a^2}{4} + R^2 - \frac{c^2}{4} - a\gamma_3 \sin(\alpha - \beta) - \frac{c^2}{4} - \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - c\gamma_1 \sin(\alpha - \beta) = \frac{a^2 - c^2}{2} - (a\gamma_3 + c\gamma_1) \sin(\alpha - \beta),$$

oder, da $a\gamma_3 + c\gamma_1 = \frac{(ab)(ad)}{4J}$ ist (nach Nr. V),

$$AJ^2 - CJ^2 = \frac{a^2 - c^2}{2} - \frac{b^2 - d^2}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2);$$

analog $BJ^2 - DJ^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$.

Ferner $AJ^2 + CJ^2 = \frac{a^2}{4} + R^2 - \frac{c^2}{4} - a\gamma_3 \sin(\alpha - \beta) + \frac{c^2}{4} + R^2 - \frac{a^2}{4} + c\gamma_1 \sin(\alpha - \beta)$
 $= 2R^2 + (c\gamma_1 - a\gamma_3) \sin(\alpha - \beta)$

und da $c\gamma_1 - a\gamma_3 = \frac{(ac)(c^2 - a^2)}{4J}$ ist,

$$AJ^2 + CJ^2 = 2R^2 + \frac{(ac)(c^2 - a^2)(b^2 - d^2)}{2(ab)(ad)} = 2R^2 + \frac{1}{2}(f^2 - g^2);$$

analog $BJ^2 + DJ^2 = 2R^2 + \frac{1}{2}(g^2 - f^2);$

$$\text{also } AJ^2 = R^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + f^2 - g^2), BJ^2 = R^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + g^2 - f^2),$$

$$CJ^2 = R^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + f^2 - g^2), DJ^2 = R^2 + \frac{1}{4}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + g^2 - f^2);$$

$$AJ^2 + CJ^2 - BJ^2 - DJ^2 = f^2 - g^2, AJ^2 + BJ^2 + CJ^2 + DJ^2 = 4R^2.$$

Verlängert man AJ, BJ, CJ, DJ über J hinaus um ihre eigene Länge, so gelangt man zu vier Punkten A', B', C', D', welche die Höhenschnittpunkte der Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC sind.* Also ist durch die vorigen Formeln auch die Entfernung jedes Eckpunktes des Sehnenvierecks vom Höhenschnittpunkt des durch die drei andern Eckpunkte gebildeten Dreiecks gefunden.

Da nach Kunze a. a. O. A'B'C'D' ein Sehnenviereck ist, welches nicht nur ABCD kongruent ist, sondern dessen Seiten auch den entsprechenden von ABCD parallel laufen, so sind ABA'B', BCB'C', CDC'D' und DAD'A' Parallelogramme. Die Seiten AB', BC', CD', DA' derselben sind leicht zu berechnen mit Hilfe des Satzes, dass der obere Höhenabschnitt der zur Seite a gehörigen Höhe eines Dreiecks gleich $a \cot \alpha$, d. h. doppelt so gross wie die Senkrechte vom Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises auf a ist. Die erwähnten Seiten sind nämlich die oberen Höhenabschnitte der zu den Seiten c, d, a, b gehörigen Höhen der Dreiecke CDA, DAB, ABC, BCD und demnach

$$AB' = BA' = 2\gamma_3, \quad BC' = CB' = 2\gamma_4, \quad CD' = DC' = 2\gamma_1, \quad DA' = AD' = 2\gamma_2.$$

VII. $\triangle$ Aus AJC folgt unter Anwendung des Stewart'schen Satzes:

$$JN^2 \cdot f = AJ^2 \cdot \frac{bc}{h} + CJ^2 \cdot \frac{ad}{h} - f \cdot \frac{abcd}{h^2}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } JN^2 \cdot (ad) &= \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + f^2 - g^2)bc + \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + f^2 - g^2)ad + R^2(ad) - \frac{abcd(ad)}{h^2} \\ &= MN^2 \cdot (ad) - \frac{bc}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2 - g^2) - \frac{ad}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2 - g^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}bc(a^2 + d^2 - g^2) + \frac{1}{2}ad(b^2 + c^2 - g^2) \end{aligned}$$

also, da $\frac{1}{2}bc(a^2 + d^2 - g^2) + \frac{1}{2}ad(b^2 + c^2 - g^2) = 0$ ist,

$$JN^2 = MN^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2 - g^2) = MN^2 - F_1 G_1^2.$$

In ähnlicher Weise folgt aus den Dreiecken BJP und BJQ

$$JP^2 = MP^2 - A_1 C_1^2, \quad JQ^2 = MQ^2 - B_1 D_1^2.$$

Mit Berücksichtigung der Resultate unter Nr. II ergibt sich

$$JN = MN \cdot \cos \epsilon, \quad JP = MP \cos(\alpha - \beta), \quad JQ = MQ \cdot \cos(2R - \alpha - \beta);$$

$$JN = F_1 G_1 \cdot \cot \epsilon, \quad JP = A_1 C_1 \cdot \cot(\alpha - \beta), \quad JQ = B_1 D_1 \cdot \cot(2R - \alpha - \beta).$$

VIII. Der Schnittpunkt K der drei Verbindungslinien $A_1 C_1$, $B_1 D_1$, $F_1 G_1$ der Mitten der Seiten und der Diagonalen des Sehnenvierecks, der zugleich den Eckenschwerpunkt desselben bildet, halbiert die Entfernung zwischen M und J;* also wird

$$AK^2 = \frac{1}{4}(2AM^2 + 2AJ^2 - MJ^2) = \frac{1}{16}(3a^2 + 3d^2 - b^2 - c^2 + 3f^2 - g^2),$$

$$\text{analog } BK^2 = \frac{1}{16}(3a^2 + 3b^2 - c^2 - d^2 + 3g^2 - f^2),$$

$$CK^2 = \frac{1}{16}(3b^2 + 3c^2 - a^2 - d^2 + 3f^2 - g^2),$$

$$DK^2 = \frac{1}{16}(3c^2 + 3d^2 - a^2 - b^2 + 3g^2 - f^2);$$

$$AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2).$$

* Kunze, a. a. O.

Aus $\triangle MNJ$ folgt weiter

$$KN^2 = \frac{1}{4}(2JN^2 + 2MN^2 - JM^2) = \frac{1}{4}\left(A_1C_1^2 + B_1D_1^2 - F_1G_1^2 - \frac{4abcd}{h^2}\right) = \frac{1}{16}\left(3f^2 + 3g^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - \frac{16abcd}{h^2}\right).$$

Da nach einem Satze von Hoppe* aber der Flächenschwerpunkt, der Eckenschwerpunkt und der Diagonalschnittpunkt jedes Vierecks in genannter Reihenfolge auf einer Geraden liegen, deren so begrenzte Abschnitte sich wie 1:3 verhalten, erhält man

$$SK = \frac{1}{3}NK, \quad SN = \frac{4}{3}KN,$$

und aus $\triangle MSJ$ folgt: $2SJ^2 + 2SM^2 - JM^2 = 4SK^2 = \frac{4}{9}KN^2$,

$$\text{also } SJ^2 = R^2 - \frac{1}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 3f^2 + 3g^2 + \frac{4abcd}{h^2}\right).$$

IX. Die Werte für A_1C_1 und B_1D_1 unter (14) nehmen durch Einsetzen der Werte von f und g die Form an

$$A_1C_1^2 = \frac{ab^4c + 2a^2b^3d + 2b^3c^2d + 6ab^2cd^2 + 2a^2bd^3 + 2bc^2d^3 + acd^4 - bc^4d + 2a^2bc^2d - a^4bd}{4(ab)(ad)},$$

$$B_1D_1^2 = \frac{a^4bd + 2a^3cd^2 + 2a^3b^2c + 6a^2bc^2d + 2ac^3d^2 + 2ab^2c^3 + bc^4d - ab^4c + 2ab^2cd^2 - acd^4}{4(ab)(ad)}.$$

Mit Hilfe derselben gewinnen die unter Nr. I angegebenen Formeln für NP^2 und NQ^2 die Gestalt:

$$NP^2 = \frac{4b^2d^2 \cdot B_1D_1^2}{(b^2-d^2)^2} \quad NQ^2 = \frac{4a^2c^2 \cdot A_1C_1^2}{(a^2-c^2)^2}$$

$$\text{oder } NP = \frac{2bd}{b^2-d^2} \cdot B_1D_1 \quad NQ = \frac{2ac}{a^2-c^2} \cdot A_1C_1.$$

$$\text{Folglich } \triangle NPQ = \frac{1}{2}NP \cdot NQ \cdot \sin PNQ = \frac{2abcd \cdot A_1C_1 \cdot B_1D_1}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)} \sin PNQ.$$

Um $\sin PNQ$ zu finden, berechne ich $\triangle NPQ$ noch auf andere Weise. Es ist nämlich $\triangle PDQ = \frac{1}{2}DP \cdot DQ \cdot \sin \beta = \frac{cdJ(ab)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}$, folglich, unter Anwendung des Symboles $(P \perp m)$ für das Lot von einem Punkte P auf eine Gerade m , $(D \perp e) = \frac{2cdJ(ab)}{e(a^2-c^2)(b^2-d^2)}$. Da nun, wenn N' den Schnittpunkt von e mit g bedeutet, $NN' = \frac{2abcd^{**}}{h(ab-cd)}$ und $DN' = \frac{cdg}{ab-cd}$ ist, so folgt aus $DN':NN' = (D \perp e):(N \perp e)$ $(N \perp e) = \frac{4abcdJ}{e(a^2-c^2)(b^2-d^2)}$, folglich $\triangle NPQ = \frac{2abcdJ}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}$. Durch Vergleichung dieses Wertes mit dem obigen erhält man

$$\sin PNQ = \frac{J}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}.$$

* Grunerts Archiv, II. Reihe 4. Theil S. 330.

** Dostor a. a. O.

Nun ist aber offenbar $J = A_1 C_1 \cdot B_1 D_1 \cdot \sin(A_1 C_1, B_1 D_1)$, also

$$\sin PNQ = \sin(A_1 C_1, B_1 D_1),$$

wobei zu bemerken ist, dass $\angle PNQ$ stets stumpf ist, da $NP^2 + NQ^2 = t_p^2 + t_q^2 - \frac{2abcd}{h^2} = e^2 - \frac{2abcd}{h^2}$, also $NP^2 + NQ^2 < e^2$ ist.

Weiter hat man für den spitzen Winkel zwischen $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$

$$\cos A_1 K B_1 = \frac{KA_1^2 + KB_1^2 - A_1 B_1^2}{2KA_1 \cdot KB_1} = \frac{g^2 - f^2}{4A_1 C_1 \cdot B_1 D_1}$$

oder wenn man für $g^2 - f^2$ den Wert aus (1) einsetzt und $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$ nach Nr. II durch MP und MQ ausdrückt,

$$\cos A_1 K B_1 = \frac{(ab)(ad)(ac)}{16J^2 \cdot MP \cdot MQ} = \frac{R^2}{MP \cdot MQ} = \cos PMQ, \text{ (Nr. I)}$$

Demnach $\angle PMQ = \angle A_1 K B_1$. Endlich ist $\angle PJQ = \angle A_1 K D_1$, da die Schenkel auf einander senkrecht stehen. Also hat man

$$\angle A_1 K B_1 = \angle PMQ = 2R - \angle PNQ = 2R - \angle PJQ;$$

analog findet man

$$\angle A_1 K G_1 = \angle PMN = \angle PQN = \angle PJN \text{ und } \angle B_1 K G_1 = \angle QMN = \angle NPQ = 2R - \angle NJQ.$$

Ein Teil dieser Gleichungen folgt auch aus dem Satze, dass N der Höhenschnittpunkt des Dreiecks MPQ ist.

Nach dem Vorigen ist nun PNJQ ein Sehnenviereck, weshalb die Gleichung gilt

$$NQ \cdot JP = NP \cdot JQ + NJ \cdot PQ.$$

Nach dem Vorigen ist ferner

$$\begin{aligned} \triangle PMQ &= \frac{1}{2} MP \cdot MQ \frac{J}{A_1 C_1 \cdot B_1 D_1} = \frac{J}{2 \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{[(ab)(ad)]^2}{8J(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)} = \\ &= \frac{(ab)(ad) \cdot e}{16J \cdot F_1 G_1} = \frac{(ab)(ad)(ac)e}{32J^2 \cdot MN} = \frac{R^2 e}{2MN}, \end{aligned}$$

folglich $(M - |e) = \frac{R^2}{MN}$ oder $MN \cdot (M - |e) = R^2$, was auch daraus folgt, dass N der Höhenschnittpunkt von $\triangle MPQ$ und N der Pol von PQ ist.

Nach (2) und (15) ist

$$e = \sqrt{(ab)(ad) \cdot \frac{ac(b^2 - d^2)^2 + bd(a^2 - c^2)^2}{(a^2 - c^2)^2 \cdot (b^2 - d^2)^2}} = \frac{(ab)(ad)}{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - f^2 - g^2} = \frac{2F_1 G_1 (ab)(ad)}{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)^2};$$

$$\text{folglich } (N - |e) = \frac{4abcdJ}{e(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)} = \frac{2abcdJ}{F_1 G_1 (ab)(ad)} = \frac{abcd}{h^2 \cdot MN} \text{ (nach Nr. II)}$$

2*

$$\text{oder } MN \cdot (N \dashv e) = \frac{abcd}{h^2} = AN \cdot CN = BN \cdot DN.$$

Da MN , PN , QN die oberen Höhenabschnitte des Dreiecks MPQ sind, so gilt auch die Gleichung

$$MN \cdot PQ + MQ \cdot PN + MP \cdot QN = 4\Delta MPQ = \frac{2R^2e}{MN}.$$

X. Da PA_1MC_1 ein Sehnenviereck ist, ist $\angle PA_1C_1 = \angle PMC_1$; mithin, da $PJ \perp A_1C_1$, auch $\angle APJ = \angle MPD$ und $\angle APM = \angle JPD$. Nun seien H_1, H_2, H_3, H_4 die Höhenschnittpunkte der Dreiecke APD, BPC, CQD, AQB , die bekanntlich bei jedem Viereck in gerader Linie liegen. Dann wird

$$\begin{aligned} \cos JPH_1 &= \cos JPA \cdot \cos APH_1 - \sin JPA \cdot \sin APH_1 \\ &= \cos MPD \cdot \sin \alpha - \sin MPD \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{PC_1}{MP} \cdot \sin \alpha - \frac{PA_1}{MP} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{16J^2(b^2c + cd^2 + 2abd) - (b^2 - d^2)(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(a^2c + b^2c + cd^2 - c^3 + 2abd)}{16J(ad)(b^2 - d^2) \cdot MP} \\ &= \frac{2d(ab)(ad) + b[(ab)]^2 + b[(ad)]^2 - b(a^2 - c^2)^2}{8J(b^2 - d^2) \cdot MP} \\ &= \frac{2d(ab)(ad) - 2b(ab)(ad) \cos(\alpha + \beta)}{8J(b^2 - d^2) MP} \\ &= \frac{(ab)(ad)[d - b \cos(\alpha + \beta)]}{4J(b^2 - d^2) \cdot MP} \\ &= \frac{d - b \cos(\alpha + \beta)}{2A_1C_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } JH_1^2 &= JP^2 + PH_1^2 - 2JP \cdot PH_1 \cdot \cos JPH_1 \\ &= MP^2 \cos^2(\alpha - \beta) + d^2 \cot^2(\alpha - \beta) - d^2 \cot^2(\alpha - \beta) [d - b \cos(\alpha + \beta)] \\ &= A_1C_1^2 \cot^2(\alpha - \beta) + bd \cos(\alpha + \beta) \cdot \cot^2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\text{und } JH_1 = \cot(\alpha - \beta) \sqrt{A_1C_1^2 + bd \cos(\alpha + \beta)} = F_1G_1 \cdot \cot(\alpha - \beta) = JH_3.$$

Angenommen nun, J läge auf H_1H_2 , so könnte es nur die Mitte von H_1H_2 sein, denn C_1J ist nicht nur parallel zu DH_1 und CH_2 , sondern auch gleich weit von beiden entfernt; JP müsste dann die Schwerpunktstransversale von $\triangle H_1PH_2$ sein; in der That ist nun auch

$$2PH_1^2 + 2PH_2^2 - H_1H_2^2 = 4JP^2$$

$$\text{oder } PH_1^2 + PH_2^2 = 2JH_1^2 + 2JP^2$$

$$\text{oder } d^2 \cot^2(\alpha - \beta) + b^2 \cot^2(\alpha - \beta) = 2F_1G_1^2 \cot^2(\alpha - \beta) + 2MP^2 \cot^2(\alpha - \beta)$$

$$\text{oder } b^2 + d^2 = 2F_1G_1^2 + 2MP^2 \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$= 2F_1G_1^2 + 2A_1C_1^2 \text{ gemäss den Formeln unter (15);}$$

daher liegt J mit H_1, H_2, H_3, H_4 in gerader Linie und in analoger Weise auch mit den Höhenschnittpunkten H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 der Dreiecke AND, BNC, ACQ, BDQ sowie mit den Höhenschnittpunkten $H''_1, H''_2, H''_3, H''_4$ der Dreiecke ANB, CND, BDP, ACP, denn J hat für die Vierecke ACBD und ACDB dieselbe Bedeutung wie für ABCD. Für die Entfernungen dieser Höhenschnittpunkte von J gelten also die Werte

$$\begin{aligned} JH_1 &= JH_2 = F_1 G_1 \cot(\alpha - \beta), & JH_3 &= JH_4 = F_1 G_1 \cot(2R - \alpha - \beta), \\ JH'_1 &= JH'_2 = A_1 C_1 \cot \varepsilon, & JH'_3 &= JH'_4 = A_1 C_1 \cot(2R - \alpha - \beta), \\ JH''_1 &= JH''_2 = B_1 D_1 \cot \varepsilon, & JH''_3 &= JH''_4 = B_1 D_1 \cot(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Die erwähnten Höhenschnittpunkte bilden drei Parallelelogramme $H_1 H'_3 H_2 H'_4$, $H'_1 H'_3 H'_2 H'_4$ und $H'_3 H_3 H'_4 H_4$, deren Seiten einfache Werte besitzen; es wird

$$H_1 H'_3 = DH'_1 + DH'_3 = AP \cot \beta + BP \cot BDC = a \cdot \cot(\alpha - \beta) = H_2 H'_4.$$

analog $H_1 H'_4 = H_2 H'_3 = c \cdot \cot(\alpha - \beta)$; $H'_1 H'_3 = H'_2 H'_4 = g \cot \varepsilon$; $H'_1 H'_2 = H'_3 H'_4 = f \cot \varepsilon$; $H'_3 H_3 = H'_4 H_4 = d \cot(2R - \alpha - \beta)$; $H'_3 H_4 = H'_4 H_3 = b \cot(2R - \alpha - \beta)$.

Mittelst des Sinussatzes ergibt sich weiterhin

$$\sin H'_1 H'_2 H'_3 = \frac{J}{g \cdot A_1 C_1}.$$

Nun ist aber $\sin(JP, CH'_2) = \sin(g, A_1 C_1)$, da die Schenkel der Winkel senkrecht auf einander stehen, und es wird ebenfalls

$$\sin(g, A_1 C_1) = \sin(PA_1 C_1 - ABD) = \frac{J}{g \cdot A_1 C_1};$$

folglich muss $H'_1 H'_2$ mit JP zusammenfallen, da das eine Schenkelpaar der Winkel (JP, CH'_2) und $H'_1 H'_2 H'_3$ zusammenfällt und das andere durch denselben Punkt P geht. Demnach liegen in gerader Linie:

$$H'_1, H'_2, H'_3, H'_4, J, P,$$

$$\text{und analog } H_1, H_2, H_3, H_4, J, N,$$

$$H''_1, H''_2, H''_3, H''_4, J, Q.$$

XI. 1) Die Lote $(D-lb)$, $(A-lc)$, $(B-l d)$, $(C-la)$ mögen sich der Reihe nach in L_1, L_2, L_3, L_4 schneiden, ebenso die Lote $(A-lb)$, $(B-lc)$, $(C-l d)$, $(D-la)$ in L'_1, L'_2, L'_3, L'_4 . Da $AL'_1 A'L_1$, $BL'_2 B'L_2$, $CL'_3 C'L_3$ und $DL'_4 D'L_4$ Parallelelogramme sind, so liegen L_1 u. L'_1 , L_2 u. L'_2 , L_3 u. L'_3 , L_4 u. L'_4 mit J in gerader Linie und es sind demnach auch $L_1 L_2 L'_1 L'_2$, $L_1 L_3 L'_1 L'_3$, $L_1 L_4 L'_1 L'_4$, $L_2 L_3 L'_2 L'_3$, $L_2 L_4 L'_2 L'_4$ und $L_3 L_4 L'_3 L'_4$ Parallelelogramme u. s. w. u. s. w. $L_1 L_2 L_3 L_4$ aber und $L'_1 L'_2 L'_3 L'_4$ sind zwei kongruente Sehnenvierecke mit denselben Winkeln wie ABCD. Da $AL_2 = a \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ und $(L_1-lc) = d \cos \beta \cdot \cot \alpha$, so wird

$$L_1 L_2 = d \sin \beta - d \cos \beta \cot \alpha - a \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = a',$$

$$\text{analog } L_2 L_3 = a \sin \alpha + a \cos \alpha \cot \beta - b \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = b',$$

$$L_3 L_4 = b \sin \beta - b \cos \beta \cot \alpha + c \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = c',$$

$$L_4 L_1 = c \sin \alpha + c \cos \alpha \cot \beta + d \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = d';$$

multipliziert man a' mit c und c' mit a und addiert, so ergibt sich

$$2J - (ab) \cos \beta \cot \alpha = a'e + ac'$$

$$\text{oder } 2J - a'e - ac' = (ab) \cos \beta \cot \alpha,$$

$$\text{analog wird } 2J - b'd - bd' = -(ad) \cos \alpha \cot \beta,$$

$$\text{folglich } \frac{2J - a'e - ac'}{b'd + bd' - 2J} = 1 \text{ oder } a'e + ac' + b'd + bd' = 4J.$$

$$2) \text{ Da } AL_1 = d \sin \beta - d \cos \beta \cot \alpha = \frac{d \cos (2R - \alpha - \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\text{und } AL'_1 = a \sin \beta + a \cos \beta \cot \alpha = \frac{a \cos (\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$$

und $\angle L_1 AL'_1 = \angle \alpha$ ist, so wird

$$\begin{aligned} L_1 L'_1 &= \frac{d^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta) + a^2 \cos^2 (\alpha - \beta) - 2ad \cos (\alpha - \beta) \cos (2R - \alpha - \beta) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2d^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta) + 2a^2 \cos^2 (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha} - 4AJ^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{analog } L_2 L'_2 &= \frac{a^2 \cos^2 (\alpha - \beta) + b^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta) - 2ab \cos (\alpha - \beta) \cos (2R - \alpha - \beta) \cos \beta}{\sin^2 \beta} \\ &= \frac{2a^2 \cos^2 (\alpha - \beta) + 2b^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta)}{\sin^2 \beta} - 4BJ^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 L'_3 &= \frac{b^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta) + c^2 \cos^2 (\alpha - \beta) + 2bc \cos (\alpha - \beta) \cos (2R - \alpha - \beta) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2b^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta) + 2c^2 \cos^2 (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha} - 4CJ^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4 L'_4 &= \frac{c^2 \cos^2 (\alpha - \beta) + d^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta) + 2cd \cos (\alpha - \beta) \cos (2R - \alpha - \beta) \cos \beta}{\sin^2 \beta} \\ &= \frac{2c^2 \cos^2 (\alpha - \beta) + 2d^2 \cos^2 (2R - \alpha - \beta)}{\sin^2 \beta} - 4DJ^2; \end{aligned}$$

$$\text{also } 4AJ^2 - L_1 L_1'^2 = \frac{4ad \cos(\alpha - \beta) \cos(2R - \alpha - \beta) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$L_3 L_3'^2 - 4CJ^2 = \frac{4bc \cos(\alpha - \beta) \cos(2R - \alpha - \beta) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha};$$

$$\text{daher } \frac{4AJ^2 - L_1 L_1'^2}{L_3 L_3'^2 - 4CJ^2} = \frac{ad}{bc} \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad L_1 L_1'^2 \cdot bc + L_3 L_3'^2 \cdot ad &= 4AJ^2 \cdot bc + 4CJ^2 \cdot ad \\ &= 4R^2 \cdot (ad) - bc(b^2 + c^2 - f^2) - ad(a^2 + d^2 - f^2) \\ &= 4R^2 \cdot (ad) - 4F_1 G_1^2 \cdot (ad). \end{aligned}$$

Andrerseits wird

$$(4AJ^2 - L_1 L_1'^2) + (L_3 L_3'^2 - 4CJ^2) = \frac{4(ad) \cos(\alpha - \beta) \cos(2R - \alpha - \beta) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

oder da $4AJ^2 - 4CJ^2 = 4(ad) \cos \alpha$ ist,

$$\begin{aligned} L_1 L_1'^2 - L_3 L_3'^2 &= \frac{4(ad) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} [\sin^2 \alpha - \cos(\alpha - \beta) \cos(2R - \alpha - \beta)] \\ &= \frac{4(ad) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Durch Elimination von $L_3 L_3'^2$ aus dieser Gleichung und aus (α) folgt

$$\begin{aligned} L_1 L_1'^2 &= 4(R^2 - F_1 G_1^2) + \frac{4ad \cos \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}, \\ \text{analog } L_2 L_2'^2 &= 4(R^2 - F_1 G_1^2) + \frac{4ab \cos \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta}, \\ L_3 L_3'^2 &= 4(R^2 - F_1 G_1^2) - \frac{4bc \cos \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}, \\ L_4 L_4'^2 &= 4(R^2 - F_1 G_1^2) - \frac{4cd \cos \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

XII. Für die Verbindungslinie von J mit dem Fusspunkt X von (A|b) gilt einerseits

$$\begin{aligned} JX^2 &= BJ^2 + a^2 \cos^2 \beta - 2BJ \cdot a \cos \beta \frac{b^2 + BJ^2 - CJ^2}{2b \cdot BJ} \\ &= BJ^2 + \frac{a \cos \beta}{b} [ab \cos \beta - b^2 - \frac{1}{2}(a^2 - c^2 + g^2 - f^2)] \\ &= BJ^2 + \frac{a \cos \beta}{b} \left[\frac{b(a^3 - ab^2 - ac^2 - ad^2 - 2bcd)}{2(ab)} - \frac{a^2 - c^2}{2h^2} (h^2 + b^2 - d^2) \right] \\ &= BJ^2 - a \cos \beta \left[\frac{ab^2 + ac^2 + ad^2 - a^3 - 2bcd}{2(ab)} + \frac{(a^2 - c^2)(a^2 d + b^2 d + c^2 d - d^3 + 2abc)}{2(ab)(ad)} \right] \\ &= BJ^2 - a \cos \beta \cdot g \cos CBD; \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} JX^2 &= CJ^2 + f^2 \cos^2 ACB - 2CJ \cdot f \cos ACB \frac{b^2 + CJ^2 - BJ^2}{2b \cdot CJ} \\ &= CJ^2 + f \cos ACB \left[\frac{ac^2 + ad^2 - ab^2 - a^3}{2(ab)} + \frac{(a^2 - c^2)(a^2 d + b^2 d + c^2 d - d^3 + 2abc)}{2(ab)(ad)} \right] \\ &= CJ^2 + f \cos ACB \cdot c \cos \alpha; \end{aligned}$$

also durch Addition

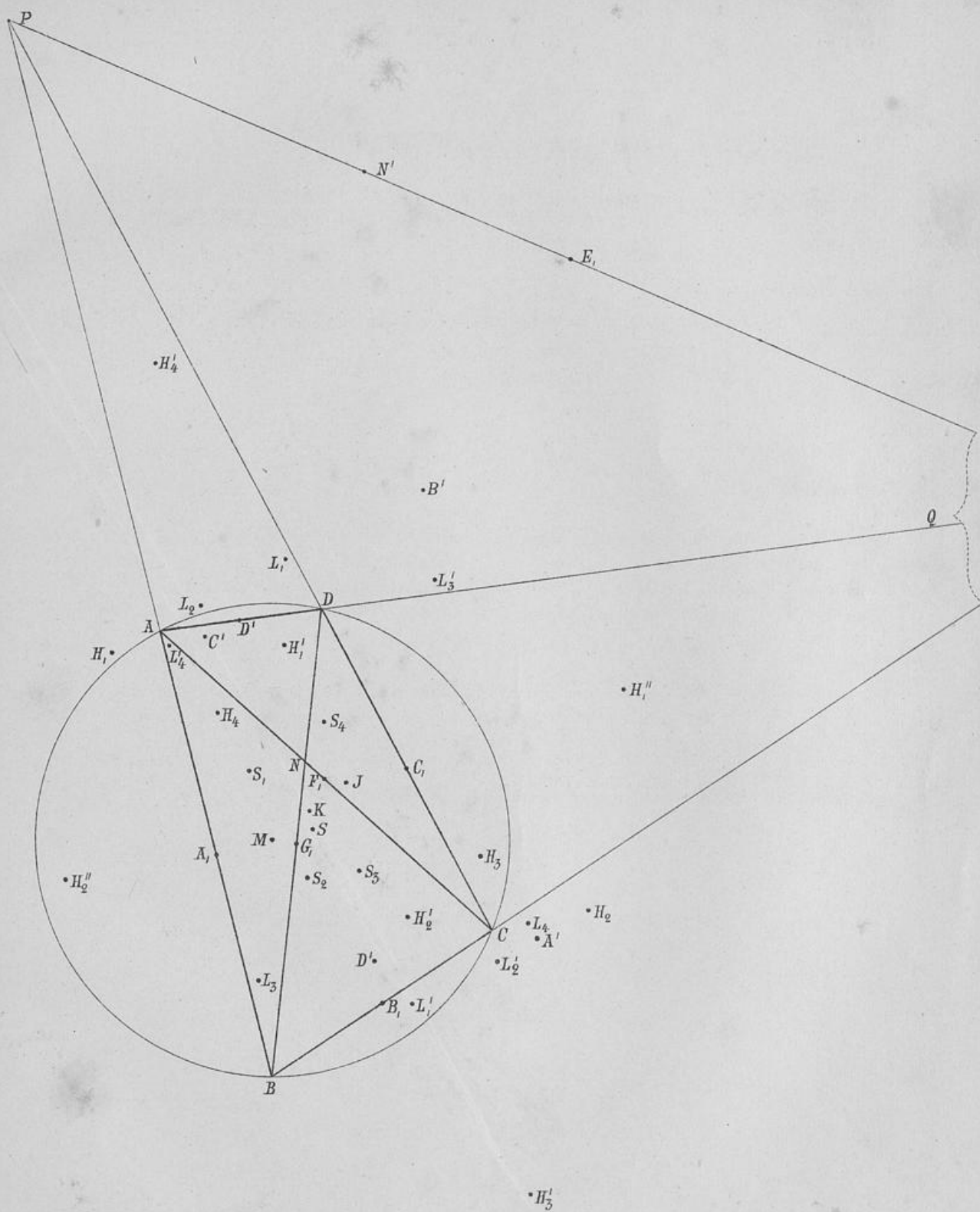
$$\begin{aligned} 2JX^2 &= 2R^2 + \frac{1}{2}(b^2 - d^2) + f \cos ACB \cdot c \cos \alpha - a \cos \beta \cdot g \cos CBD \\ &= 2R^2 + \frac{1}{2}(b^2 - d^2) - \frac{(ac)(a^2 - c^2)^2}{2(ab)(ad)} - \frac{1}{2}(b^2 - d^2) \\ &= 2R^2 - \frac{(a^2 - c^2)^2}{2h^2} \end{aligned}$$

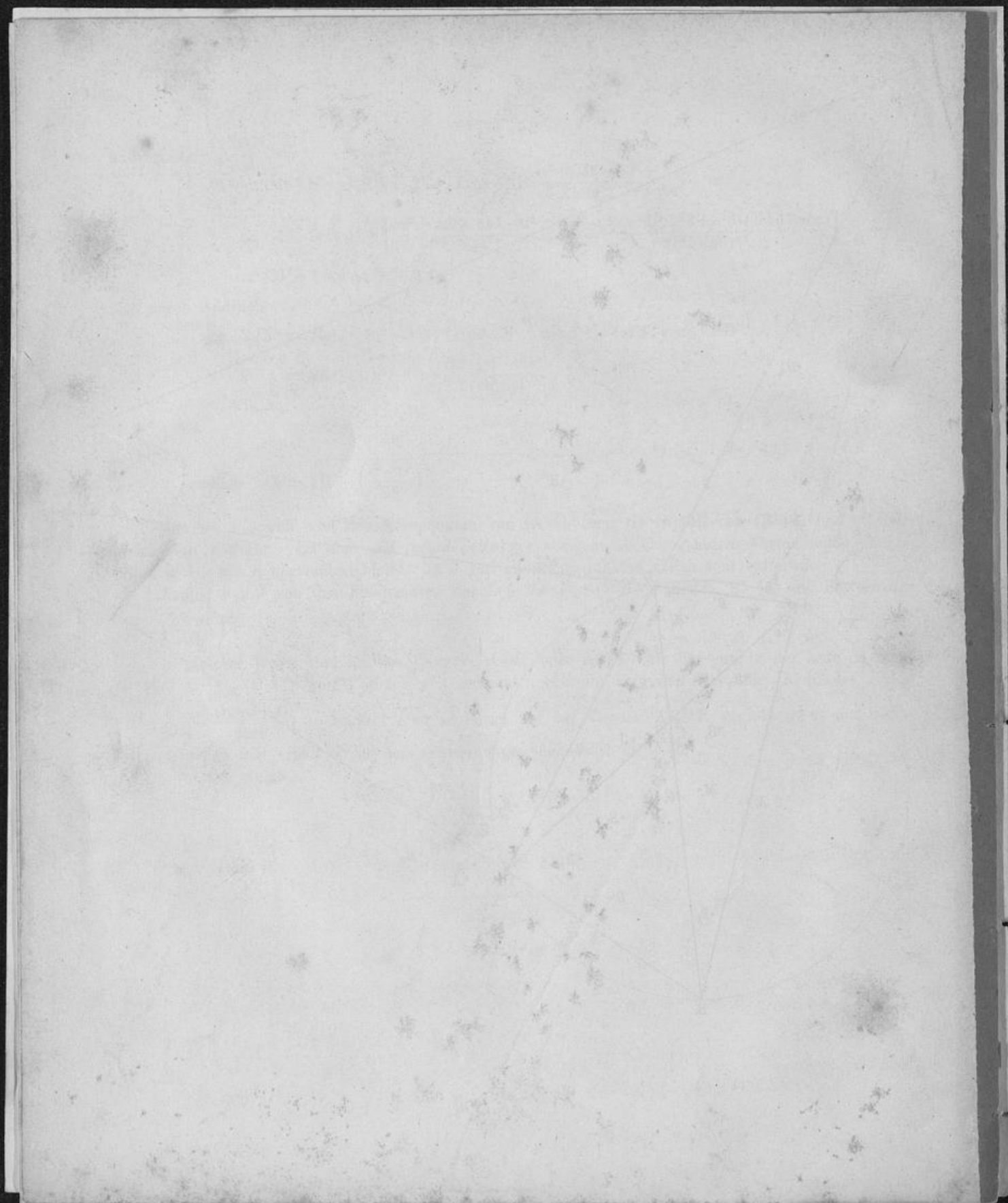
$$\text{endlich } JX = \sqrt{R^2 - \frac{(a^2 - c^2)^2}{2h^2}}.$$

Nun ist J sowohl von den Fusspunkten von (A-lb) und (D-lb) als von (B-lb) und (C-lb) gleich weit entfernt. Da aber die rechte Seite der vorigen Gleichung durch Vertauschung von a mit c und b mit d ungeändert bleibt, ist J von allen Fusspunkten gleich weit entfernt.

Analog hat J von den Fusspunkten der Lote (A-lc), (D-la), (B-lc), (C-la) die Entfernung $\sqrt{R^2 - \frac{(b^2 - d^2)^2}{2h^2}}$.

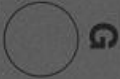
In gleicher Weise sind für das Viereck ACDB (oder ACBD) die Fusspunkte der Lote (A-lg), (B-lf), (C-lg), (D-lf) von J gleich weit entfernt. Schreibt man den Wert für JX in der Form $\sqrt{R^2 - \frac{a^2 - c^2}{4} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \epsilon}}$, so braucht man in Bezug auf das Viereck ACDB nur $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin \epsilon$ zu vertauschen und erhält so für jene Entfernungen den Wert $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}h^2}$.





TIFFEN Gray Scale

© The Tiffen Company, 2007



A

1

2

3

4

5

6

M

8

9

10

11

12

13

14

15

B

17

18

19

