

Analytische Untersuchung einer Gruppe verwandter Umhüllungslinien.

I. Teil.

Den nachfolgenden Untersuchungen liegt eine Frage zu Grunde, welche sowohl in einzelnen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, als auch in den bekannteren Sammlungen von Aufgaben aus diesem Gebiete der höheren Mathematik gestellt ist, eine eingehende und umfassende Beantwortung aber meines Wissens bis jetzt nicht gefunden hat, die Frage nämlich nach der Beschaffenheit der Umhüllungslinie eines Kreises von variablem Radius, dessen Mittelpunkt sich auf einer gegebenen Kurve bewegt, während seine Peripherie fortwährend durch einen und denselben gegebenen festen Punkt geht. (Vergl. u. a. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, von Ludwig, Immanuel Magnus, S. 445 u. f., L. A. Lohnke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, herausgegeben von Dr. H. Amstein, S. 212). Über die Lage des festen Punktes zur gegebenen leitenden Kurve, sowie über diese selbst werden nähere Angaben in jenen Werken nicht gemacht; indes beziehen sich die wenigen Resultate, die an den betreffenden Stellen mitgeteilt werden, nur auf ebene Kurven, in deren Ebene jeweils auch der feste Punkt liegt. Diese Annahme ist vorläufig auch hier gemacht worden. Später sollen jedoch noch Kurven doppelter Krümmung als leitende Kurven und statt des bewegten Kreises eine ebensolche Kugel, deren Oberfläche beständig durch den festen Punkt geht, in Betracht gezogen werden.

Was die Arbeiten Anderer betrifft, die sich außer mir schon früher mit der vorgenannten Frage beschäftigt haben, so beschränken sich dieselben, so weit sie mir bekannt geworden sind, durchweg auf die Entwicklung der Gleichung, welche der Umhüllungslinie für einzelne spezielle und im allgemeinen die einfachsten Formen der leitenden Kurve (Kreis, Ellipse logarithmische Spirale) entsprechen, keine aber beschäftigt sich mit einer näheren Untersuchung der Umhüllungslinie selbst, keine enthält eine allgemeinere Formel für Kurven gleicher Art (gleichen Grades), aus welcher alle besonderen Fälle abgeleitet werden könnten, auch giebt keine ein besonderes Verfahren an, wie die Umhüllungslinie und die wichtigsten zu ihr in Beziehung stehenden Linien konstruiert werden. Diese Lücken suchte die vorliegende Arbeit auszufüllen, doch erhebt sie keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit. Wer auch nur flüchtig erwägt, wie mannigfaltig die Gestalten der leitenden Kurve, wie verschiedenartig ihre Beziehungen zu dem festen Punkte sein können

und wie reichhaltig demgemäfs das Material ist, das obige Frage der Forschung und praktischen Gestaltung darbietet, wird leicht beurteilen können, wie schwierig es ist, absolute Vollständigkeit zu erzielen. Von den einfacheren Formen zu den complizierteren fortschreitend sind zuerst die Kurven vom zweiten Grade, dann solche dritten und höheren Grades, als Bahnen für den Mittelpunkt des bewegten Kreises gewählt und die Umhüllungslinie für jede Form der leitenden Linie im allgemeinen in drei verschiedenen Gestalten (entsprechend drei verschiedenen Lagen des festen Punktes zu der leitenden Linie) konstruiert und untersucht worden. Gerade auf die Konstruktionen, auf die Darstellung des einem analytischen Ausdrucke entsprechenden geometrischen Gebildes, auf die Wechselbeziehung zwischen analytischer Formel und geometrischer Form ist besonderes Gewicht gelegt worden. Nicht selten wird dieser Punkt bei ähnlichen Arbeiten und auch in denjenigen Werken, welche recht eigentlich den Zweck verfolgen, das Wesen des analytischen Kalküls an konkreten Fällen klar zu legen, wenig berücksichtigt oder ganz außer acht gelassen. Und docht trägt das sinnfällige Bild bei denjenigen, welche sich mit analytischen Untersuchungen vertraut machen wollen und noch nicht imstande sind, das geometrische Äquivalent irgend eines bestimmten analytischen Ausdruckes im Geiste zu erschauen, nicht wenig zum vollen Verständnis des durch bloße Rechnung gefundenen Resultates bei, und wie etwa der Physiker, der durch bloße Reflexionen eine neue Wahrheit gefunden hat, mit froher Genugthuung erfüllt wird, wenn er durch das Experiment die Richtigkeit seiner Schlüsse bestätigt sieht, so überzeugt sich auch der jüngere Analytiker gern durch sinnliche Wahrnehmungen, durch Konstruktionen oder Messungen von der Richtigkeit der analytischen Ergebnisse, selbst wenn der theoretische Beweis für die aufgestellten Behauptungen hinreichend klar ist und bei dem Einsichtsvolleren jeden Zweifel ausschließt. Solche praktische Proben, die Hand und Auge üben, sind von nicht geringem Werthe, sie machen mit dem Gegenstande näher vertraut, regen häufig zu näheren Untersuchungen an und eröffnen nicht selten neue Gesichtspunkte, die noch andere, bis dahin unerforschte Seiten desselben hervortreten lassen. Gleichwie gute Illustrationen eines fremden Gegenstandes das Interesse für denselben wecken und die richtige Auffassung desselben erleichtern, so verhelfen auch auf dem Gebiete der Mathematik ausführliche Zeichnungen zu einer klareren Vorstellung über Wesen und Umfang einer gegebenen Frage, und wenn sie auch über den inneren Gehalt derselben keinen Aufschluß geben und wenn namentlich der analysierende Verstand keiner Zeichnungen und Figuren bedarf, um die Richtigkeit seiner Deduktionen zu prüfen, so sind sie doch zur Verbreitung aufgefundener Wahrheiten auf dem Wege schriftlicher Mitteilung von wesentlichem Einfluß.

Die Resultate sind durchweg nur in allgemeinen Zahlengrößen angegeben worden, da Rechnungen in speziellen Zahlen, wie sie gelegentlich in ähnlichen Abhandlungen ausgeführt werden, namentlich wenn sie sich auf feststehende Formeln gründen, keinen besondern Wert haben.

Der Zweck vorliegender Abhandlung bestand darin, denjenigen, welche die erforderlichen Kenntnisse in der niederen Analysis, sowie in der Differential- und Integralrechnung besitzen, an einem interessanten Beispiele, das eine große Anzahl spezieller Fälle in sich schließt, die Anwendung dieser höheren Rechnungsarten auf die Untersuchung von Kurven, Flächen und Körpern zu zeigen und die wesentlichsten Punkte, die bei solchen Unter-

suchungen in Betracht kommen, im Zusammenhange vorzuführen. Darum sind auch diesem ersten Teile an verschiedenen Stellen Erläuterungen hinzugefügt worden, die demjenigen, welcher mit analytischen Untersuchungen schon vertraut ist, als eine überflüssige Beigabe erscheinen werden, die aber mit Rücksicht auf den angedeuteten Zweck ihre Berechtigung haben dürften.

Wegen des eingeschränkten Raumes konnten die sämtlichen Untersuchungen nicht auf einmal veröffentlicht werden, und selbst die ursprüngliche Absicht, wenigstens diejenigen Fälle im Zusammenhange zur Darstellung zu bringen, in denen die leitende Kurve eine Linie zweiter Ordnung ist, konnte nicht ausgeführt werden. Der vorliegende erste Teil beschränkt sich daher auf die Entwicklung der allgemeinen Gleichung der Umhüllungslinie, giebt dann im einzelnen die Gleichungen derselben an, wenn die leitende Kurve vom zweiten Grade ist, und beschäftigt sich endlich genauer mit dem Falle, in welchem diese Kurve ein Kreis ist.

Die Umhüllungslinien im allgemeinen.

Die Umhüllungslinien oder Enveloppen sind Linien, welche, wie ihre Namen andeuten wollen, andere Linien umgeben; doch ist der gewöhnliche Begriff von „umhüllen“ nur unter bestimmten Voraussetzungen, beziehungsweise Einschränkungen auf diese Linien zu übertragen. Einerseits umhüllen sie nicht eine einzige andere Linie, sondern ein ganzes System von Linien, deren Gestalt, Größe und gegenseitige Lage im einzelnen Falle durch ein besonderes Gesetz bestimmt wird; anderseits findet nicht immer eine wirkliche Umhüllung des Systems statt, sondern in manchen Fällen nur eine einseitige Begränzung desselben; denn zu den Umhüllungslinien gehören nicht bloß geschlossene Kurven, sondern auch nichtgeschlossene und selbst die Gerade.

Sehr einfach und kurz ist die Definition, welche Ch. Sturm in seinem bekannten Werke „Cours d'analyse etc.“ von den Umhüllungslinien giebt; er sagt nämlich: „Quand une courbe se meut sur un plan, en changeant de forme suivant une loi déterminée, en général elle touche constamment une courbe fixe qu'on nomme son enveloppe. On peut supposer,“ fügt er dann zur näheren Erläuterung hinzu, „que la courbe mobile est représentée par une équation (1) $F(x, y, c) = 0$, dans laquelle c est un paramètre que l'on fait varier d'une manière continue. Si l'on donne à ce paramètre deux valeurs successives c et $c + \Delta c$, les courbes représentées par les équations $F(x, y, c) = 0$, $F(x, y, c + \Delta c) = 0$, se couperont en un point (x, y) , pour lequel on aura $F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c) = 0$ et par suite (2)
$$\frac{F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c)}{\Delta c} = 0$$
. Si Δc diminue indéfiniment, les coordonnées du point (x, y) qui ne cessent pas de satisfaire aux équations (1) et (2) vérifieront, à la limite, les équations (3) $F(x, y, c) = 0$, $\frac{dF}{dc} = 0$. On obtiendra donc le point limite M de l'intersection de la courbe (1) et de la courbe infiniment voisine, en résolvant les

équations (3). Si maintenant on élimine c entre ces équations, on aura le lieu des points M , c'est-à-dire le lieu des intersections successives des courbes représentées par l'équation (1).“

Der Beweis für die Behauptung, daß der (geometrische) Ort der Punkte M die Umhüllungslinie des Kurvensystems M sei, ist recht klar, dagegen leidet die vorstehende Erklärung selbst an zwei Ungenauigkeiten. Einmal werden sich die Kurven, die durch die Gleichung (1) dargestellt werden, nicht immer schneiden, und andererseits ist auch die Elimination des Parameters c nicht immer möglich. Richtiger entwickelt daher Sohnke in seiner Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung (bearbeitet von Dr. H. Amstein) den Begriff der Umhüllungslinien, indem er sagt: „Wird in der Gleichung einer ebenen Kurve $U = f(x, y, \alpha) = 0$ der Parameter α variabel gedacht, so entspricht dieser Gleichung eine ganze Schaar von Kurven. Zwei Kurven der Schaar, welche benachbarten Werten von α entsprechen, werden sich im allgemeinen schneiden. Für die Schnittpunkte bestehen gleichzeitig die Gleichungen $U = 0, \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$. Die Elimination von

α aus diesen Gleichungen, sofern dieselbe möglich ist, ergibt eine Relation zwischen x und y , $F(x, y) = 0$, welche unabhängig von dem speziellen Werte von α ist und somit die Gleichung derjenigen Kurve darstellt, in welcher sämtliche Schnittpunkte benachbarter Kurven der Schaar liegen. Diese Kurve $F(x, y) = 0$ wird die einhüllende Kurve oder Enveloppe, die Kurvenschaar $U = 0$ dagegen die eingehüllte (enveloppée) genannt.“

Offenbar ist diese Definition korrekter als die von Sturm, aber es hätte für die Gleichung U der veränderlichen Kurve eine allgemeinere Form gewählt werden können, denn es werden meistens zwei veränderliche Parameter in derselben enthalten sein; wenn diese auch durch eine besondere Relation unter sich verbunden sind und der eine durch den anderen ersetzt werden kann, so wird in manchen Fällen eine solche Substitution doch recht schwierig, in anderen gar nicht ausführbar sein. Wählt man also für die Gleichung der ebenen Kurve die Form $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$, in welcher α und β variabel sind, so wird die Umhüllungslinie bestimmt durch die beiden Gleichungen $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ und $\frac{\partial f(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$. Ist es aber möglich, aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der Relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ die Größen α und β zu eliminieren, so ergibt sich eine einzige Gleichung zwischen x und y , welche die Umhüllungslinie darstellt. Entstehung und Wesen der Umhüllungslinien dürfte hiermit hinreichend klar sein; sie entstehen bei der Bewegung einer anderen Kurve, wenn die unmittelbar benachbarten Lagen, welche die bewegte Kurve nach und nach einnimmt, sich schneiden, und die Umhüllungslinie selbst ist nichts anderes als der planimetrische, resp. geometrische Ort der Schnittpunkte, in welchen sich je zwei benachbarte Individuen der gesamten Kurvenschaar treffen. —

A) Gleichung der Umhüllungslinie für den allgemeinen Fall, daß die gegebene Kurve C , auf welcher sich der Mittelpunkt des veränderlichen Kreises bewegt, eine Kurve zweiter Ordnung ist.

Jede Kurve zweiter Ordnung wird dargestellt durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Die Zahl der Kurven, welche diese Gleichung in sich begreift, ist indes eine sehr beschränkte; die Form derselben ist bedingt durch die Werte der Koeffizienten $a, b, \dots, f$ und deren Beziehungen zu einander. Diese Werte können bald positiv, bald negativ, bald gleich Null sein. Im Falle a, b, c gleichzeitig gleich Null, die anderen Koeffizienten aber wenigstens zum Teil von Null verschieden sind, ist auch die Gerade in obiger Gleichung enthalten. Von diesem Falle abgesehen, würde die Gleichung, wenn man noch den Aus-

druck $acf - ac^2 - cd^2 - fb^2 + 2bed = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$ kurz mit Δ bezeichnet, folgende

Fälle umfassen:

Bedeutung.	Bedingungen.
1) Ohne geometrische Bedeutung	$ac - b^2 > 0, \Delta \leq 0, \frac{\Delta}{a} > 0;$
	$ac - b^2 = 0, \Delta = 0, a \leq 0, af - d^2 > 0;$
	$ac - b^2 = 0, \Delta = 0, c \leq 0, cf - e^2 > 0.$
2) Ein Punkt,	wenn $ac - b^2 > 0, \Delta = 0;$
3) Eine doppelte Gerade, "	$ac - b^2 = 0, \Delta = 0, a \leq 0, af - d^2 = 0.$
4) Zwei parallele Geraden, "	$ac - b^2 = 0, \Delta = 0, a \leq 0, af - d^2 < 0;$
	$ac - b^2 = 0, \Delta = 0, c \leq 0, cf - e^2 < 0.$
5) Zwei sich schneidende Geraden	" $ac - b^2 < 0, \Delta = 0.$
6) Eine Ellipse (bez. einen Kreis)	" $ac - b^2 < \leq 0, \frac{\Delta}{a} < 0.$
7) Eine Parabel	" $ac - b^2 = 0, \Delta \leq 0.$
8) Eine Hyperbel	" $ac - b^2 < 0, \Delta \leq 0.$

Es sind mithin nur vier eigentliche Linien zweiter Ordnung in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades enthalten, nämlich der Kreis, die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel, welche meistens mit dem Namen Kegelschnitte bezeichnet werden, weil sie zuerst in den Durchschnittsebenen eines Kreiskegels (schon von den Alten) erkannt wurden. Diese vier Kurven aber, die bei den folgenden Untersuchungen zunächst in Betracht gezogen sind, lassen sich durch eine einfachere Gleichung ausdrücken. Wählt man nämlich einen Kurvenpunkt zum Anfangspunkt eines Parallelkoordinatensystems, den durch den Punkt gehenden Diameter als Abscissenaxe und die durch ihn an die Kurve gelegte Tangente als Ordinatenaxe, so stellt bekanntlich die Gleichung: $y^2 = 2mx + nx^2$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $n < 0$, $n = 0$ oder $n > 0$ ist. Um aber die Gleichung der Umhüllungslinie in möglichst einfacher Gestalt zu erhalten, ist es am zweckmäßigsten, die Hauptaxe der Kurven, d. h. diejenige Axe, welche die Brennpunkte enthält, zur X-axe zu nehmen, so daß der Koordinatenwinkel ein Rechter wird. Dann ist der Parameter $2m$ der Hauptaxe, die gleich $2a$ sein möge, während die Nebenaxe gleich $2b$ ist, gleich $2\frac{b^2}{a}$; d. h. $2m$ ist die durch einen

Brennpunkt gehende, zur Hauptaxe senkrechte Sehne; n aber ist gleich $\frac{m}{a} = \frac{b^2}{a^2}$. Indes empfiehlt es sich im vorliegenden Falle, statt dieses Koordinatensystems ein anderes zu wählen, dessen Axen denen des ersteren parallel sind, und dessen Anfangspunkt der Punkt P ist. Auf dieses System bezogen mögen die Koordinaten des Kurvenmittelpunktes p, q , also die des Scheitelpunktes $(p - a)$ und q sein; dann wird allgemein die Gleichung einer der vier Kurven, auf welcher der Mittelpunkt des veränderlichen Kreises liegen soll, wenn man die Koordinaten irgend eines Kurvenpunktes mit ξ, η bezeichnet, die Form haben:

$$(1) (\eta - q)^2 = 2m(\xi - p + a) + n(\xi - p + a)^2.$$

Die Gleichung eines Kreises mit den Mittelpunktskoordinaten ξ, η und dem Radius R ist, wenn man die laufenden Koordinaten eines Peripheriepunktes mit x, y bezeichnet:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2 = 0.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist aber $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, daher ist die Gleichung des in Rede stehenden veränderlichen Kreises einfacher:

$$(2) x^2 - 2\xi x + y^2 - 2\eta y = 0.$$

Aus (1) folgt: $2(\eta - q)d\eta = 2m d\xi + 2n(\xi - p + a)d\xi$,

mithin ist $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{m + n(\xi - p + a)}{\eta - q}$;

aus (2) aber folgt: $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{x}{y}$.

Es ist also $\frac{m + n(\xi - p + a)}{\eta - q} = -\frac{x}{y}$ und folglich

$$\eta - q = -\frac{y}{x} [m + n(\xi - p + a)].$$

Setzt man diesen Wert von $\eta - q$ in Gleichung (1) ein, so ergibt sich leicht:

$$\xi - p + a = -\frac{m}{n} \left(1 \mp x \sqrt{\frac{1}{x^2 - ny^2}} \right) \text{ und daher ist:}$$

$$\eta - q = \mp my \sqrt{\frac{1}{x^2 - ny^2}}.$$

Substituiert man nun die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werte für ξ und η in Gleichung (2), so geht dieselbe über in:

$$(3a) x^2 - 2px + 2ax + 2\frac{m}{n}x + y^2 - 2qy = (\pm) 2\frac{m}{n} \sqrt{x^2 - ny^2},$$

oder einfacher (3b) $(x^2 - 2px + 2ax + 2\frac{m}{n}x + y^2 - 2qy)^2 - 4\frac{m^2}{n^2}(x^2 - ny^2) = 0$.

Jede dieser beiden Gleichungen (3a) und (3b) stellt für dieselben Werte der Koeffizienten m, n u. s. w. ein und dieselbe Kurve dar, die Umhüllungsline des durch Gleichung (2) bestimmten Systems von Kreisen.

Es ist leicht einzusehen, daß wirklich jeder zum System (2) gehörige Kreis die Kurve (3a), bez. (3b), oder umgekehrt, berührt; denn betrachtet man drei aufeinanderfolgende

Individuen dieses Systems, A, B, C, so fallen offenbar die Punkte, in denen B von A und C geschnitten wird, an der Grenze zusammen, so daß die Gerade, welche die beiden Schnittpunkte mit einander verbindet, an der Grenze eine Tangente der Kurve B wird, weil sie nunmehr zwei unmittelbar benachbarte Punkte von B verbindet. Da aber die Kurve (3a), (3b) auch durch diese Schnittpunkte hindurchgeht, so ist die erwähnte Gerade auch Tangente der Kurve (3), weil sie ja auch zwei aufeinanderfolgende Punkte dieser Kurve verbindet. Mithin hat B mit (3) eine gemeinschaftliche Tangente, d. h. beide Kurven berühren sich; da B aber jede beliebige Lage im System (2) haben kann, so wird auch jede durch (2) dargestellte Kurve die durch (3) dargestellte berühren.

Gleichung (3) stellt also ganz allgemein die Umhüllungslinie eines Systems von Kreisen dar, deren Zentrum auf einem ebenen Kreiskegelschnitte liegt, während ihre Peripherie durch einen und denselben festen Punkt geht.

Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten.

Ist Punkt P der Pol und bezeichnet man den Radius vektor eines Kurvenpunktes mit ρ , den Winkel, den derselbe mit der positiven Richtung der X-axe, die nunmehr zur Polaxe wird, bildet, mit φ , so ist $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Durch Substitution dieser Werte in Gleichung (3b) ergibt sich:

$$\rho^2 \left[\left(\rho - 2p \cos \varphi + 2a \cos \varphi + 2 \frac{m}{n} \cos \varphi - 2q \sin \varphi \right)^2 - 4 \frac{m^2}{n^2} (\cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi) \right] = 0$$

und hieraus entweder $\rho = 0$, d. h. der Pol P, oder

$$(4) \quad \rho = 2 \left[\left(p - a - \frac{m}{n} \right) \cos \varphi + q \sin \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi} \right];$$

Dieses ist die gesuchte allgemeine Gleichung.

Diskussion.

Gleichung (3) zeigt zunächst, daß die Umhüllungslinie im allgemeinen eine Kurve 4. Ordnung ist, und nur in dem Falle, wo der leitende Kegelschnitt eine Parabel ist, reduziert sie sich auf den dritten Grad. Da (3) die Unbekannten x und y in geraden und ungeraden Potenzen enthält, so hat die Kurve gegen keine der Koordinatenachsen eine symmetrische Lage, wird aber von jeder Axe, da (3) sowohl in Bezug auf x als auf y vom vierten Grade ist, im allgemeinen in vier Punkten durchschnitten, wie denn jede Linie erster Ordnung die Kurve in vier Punkten, eine Linie zweiter Ordnung dieselbe in acht, eine Linie n . Ordnung dieselbe in $4n$ Punkten durchschneiden kann. Die Punkte, in welchen die Kurve von den Axen geschnitten wird, ergeben sich aus den Gleichungen: $(x^2 - 2px + 2ax + 2 \frac{m}{n}x)^2 - 4 \frac{m^2}{n^2}x^2 = 0$ und $(y^2 - 2qy)^2 + 4 \frac{m^2}{n}y^2$, welche zeigen, daß auf jeder Axe vier Kurvenpunkte liegen können. Einfacher ergeben sich dieselben aus Gleichung (4). Für

$\varphi = 0$ wird $\rho = 2 \left(p - a - \frac{m}{n} \pm \frac{m}{n} \right)$, und für $\varphi = \pi$ ist $\rho = -2 \left(p - a - \frac{m}{n} \pm \frac{m}{n} \right)$. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ erhält man $\rho = q \pm \frac{m}{n} \sqrt{-n}$ oder $\rho = - \left(q \pm \frac{m}{n} \sqrt{-n} \right)$. Bei diesen

Werten von ρ ist jedoch zu berücksichtigen, daß dieselben, da ρ eine absolute GröÙe ist, dasselbe Zeichen, etwa das positive haben müssen. Die letzteren Werte von ρ werden komplex, also die Schnittpunkte auf der Y-Axe imaginär, wenn n positiv, d. h. wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist. Aus (4) folgt weiter, daß jedem Werte von φ im allgemeinen zwei verschiedene Werte von ρ entsprechen, daß die Wertepaare von ρ , welche den Winkeln φ und $(-\varphi)$ entsprechen, nicht einander gleich sind, was mit den Folgerungen aus (3) übereinstimmt. Sind die Werte von m, n, p, q, a endlich und von Null verschieden, so ist auch der Werth von ρ endlich, und dies ist der Fall, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse (Kreis) oder Hyperbel mit endlichen Axen ist; werden aber die Werte dieser GröÙen unendlich groß oder wird $n = 0$, so kann auch ρ unendlich groß werden, und dies ist der Fall, wenn die Axen der genannten Kurven unendlich groß werden, oder wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist. Während also die Umhüllungslinie eine geschlossene Kurve ist, wenn die leitende Kurve eine Ellipse (Kreis) oder Hyperbel ist, erstreckt sie sich ins Unendliche, wenn die leitende Kurve eine Parabel oder eine Gerade ist. Da die Gestalt der Umhüllungslinie und ihre Eigenschaften demnach von den GröÙen m, n, p, q, a , namentlich von n abhängen, so ist es zweckmäßiger, die weiteren Untersuchungen auf bestimmte Werte dieser GröÙen zu basieren.

Spezielle Fälle.

Setzt man an Stelle von m und n die ihnen gleichen Werte $\frac{b^2}{a}$ und $\frac{b^2}{a^2}$ und nimmt man zunächst den Wert von n negativ, also gleich $-\frac{b^2}{a^2}$, so geht Gleichung (3b) über in:

$$(5) \quad (x^2 - 2px + y^2 - 2qy)^2 - 4(a^2x^2 + b^2y^2) = 0.$$

Dieses ist die Gleichung der Umhüllungslinie, wenn die leitende Kurve eine Ellipse ist.

Wird $a = b$, so geht (5) über in:

$$(6) \quad (x^2 - 2px + y^2 - 2qy)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

und dies ist die Gleichung der Umhüllungslinie, wenn die leitende Kurve ein Kreis ist.

Vertauscht man in (5) b^2 mit $-b^2$, so erhält man:

$$(7) \quad (x^2 - 2px + y^2 - 2qy)^2 - 4(a^2x^2 - b^2y^2) = 0,$$

d. h. die Gleichung der Umhüllungslinie, wenn die leitende Kurve eine Hyperbel ist.

Wenn endlich die leitende Kurve eine Parabel ist, so ergibt sich als Gleichung der Umhüllungslinie:

$$(8) \quad x(x^2 - 2px + y^2 - 2qy) + \frac{b^2}{a}y^2 = 0.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten verwandeln sich die Gleichungen (5) bis (8) bezüglich in:

$$(9) \quad \rho = 2(p \cos \varphi + q \sin \varphi \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi});$$

$$(10) \quad \rho = 2(p \cos \varphi + q \sin \varphi \pm a);$$

$$(11) \quad \rho = 2(p \cos \varphi + q \sin \varphi \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi});$$

$$(12) \quad \rho = 2(p \cos \varphi + q \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \sin \varphi \tan \varphi).$$

Von diesen Gleichungen haben (6) und (10) die einfachste Form; die ihnen entsprechenden Kurven gehören in die Reihe der cyklischen Kurven; als besondere Fälle um-

fassen sie die Schnecke (limaçon) von Pascal und die Cardioide. Die Gleichungen (5) und (9) stellen für besondere Werte der Koeffizienten ebenfalls Schneckenkurven dar, begreifen andererseits spezielle Formen der Cassini'schen Kurve in sich ein. Mit der letzteren sind auch die durch (7) und (11) dargestellten Kurven verwandt, zu denen im besondern die Lemniskate gehört. Die Gleichungen (8) und (12) endlich umfassen als besondere Kurven das (allgemeinere) Folium von Descartes und die sogen. Cissoide des Diocles.

Den vier Paaren von Gleichungen entsprechend zerfallen die weiteren Untersuchungen in vier Abschnitte, und zwar behandelt der erste derselben die Gleichungen (6) und (10), der zweite (5) und (9), der dritte (7) und (11), der vierte (8) und (12).

Erster Abschnitt.

Der gegebene Kegelschnitt ist ein Kreis.

Die beiden Gleichungen (6) und (10), welche die Umhüllungslinie darstellen, lassen sich in diesem Falle noch etwas vereinfachen, indem man eine der Axen, etwa die X-axe durch das Zentrum des gegebenen Kreises legt. Dann wird $q = 0$ und die Gleichungen (6) und (10) gehen über in:

$$\begin{aligned} (6a) \quad & (x^2 - 2px + y^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0 \\ \text{oder } & (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)(px + a^2) + 4p^2x^2 = 0. \\ (10a) \quad & \rho = 2(p \cos \varphi \pm a). \end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen ist ersichtlich, daß die Umhüllungslinie nunmehr symmetrisch zur X-axe liegt und von dieser in zwei kongruente Teile zerlegt wird; denn (6a) enthält y nur noch in geraden Potenzen, und wenn x und y der Gleichung genügen, so wird sie auch durch x und $(-y)$ befriedigt. Gleichung (10a) aber zeigt, daß zwei Leitstrahlen, welche symmetrisch zur X-axe liegen, also mit ihr die Winkel φ und $(-\varphi)$ bilden, einander gleich sind, da $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ ist.

Behufs weiterer Untersuchung der Kurve ist Gleichung (10a) die geeignetste, in welcher auch, unbeschadet der Richtigkeit der Resultate, nur ein Vorzeichen von a in Betracht gezogen werden darf, etwa das positive.

Satz 1. Die Summe zweier Leitstrahlen, welche einen Winkel von 180° mit einander bilden, ist konstant, nämlich gleich $4a$.

Denn ist der eine Radius $\rho = 2(p \cos \varphi + a)$, so ist der entgegengesetzte $\rho' = 2(-p \cos \varphi + a)$; also $\rho + \rho' = 4a$.

Satz 2. Die Summe der Rechtecke, gebildet aus 2 Paaren entgegengesetzter Leitstrahlen, ist konstant, nämlich gleich $4(2a^2 - p^2)$.

Denn ist das eine Paar Leitstrahlen $\rho = 2(p \cos \varphi + a)$ und $\rho' = 2(-p \cos \varphi + a)$, so ist das andere Paar, welches auf ersterem senkrecht steht, bezüglich $\rho_1 = 2(-p \sin \varphi + a)$ und $\rho'_1 = 2(p \sin \varphi + a)$; also $\rho \cdot \rho' = 4(-p^2 \cos^2 \varphi + a^2)$, $\rho_1 \cdot \rho'_1 = 4(-p^2 \sin^2 \varphi + a^2)$ und $\rho \cdot \rho' + \rho_1 \cdot \rho'_1 = 4(2a^2 - p^2)$.

Zusatz. Verbindet man die Endpunkte der im Satz 2 bezeichneten Leitstrahlen der Reihe nach mit einander, so hat das entstandene Viereck einen konstanten Inhalt; denn derselbe ist offenbar gleich $\frac{1}{2}(\rho + \rho')(\rho_1 + \rho'_1) = 8a^2$.

Satz 3. Die Summe der Quadrate zweier aufeinander senkrecht stehender Paare entgegengesetzter Leitstrahlen ist konstant, nämlich gleich $8(2a^2 + p^2)$. Denn ist wieder das

eine Paar Radien ρ und ρ' , das andere ρ_1 und ρ'_1 , so ist

$$\rho^2 = 4(p^2 \cos^2 \varphi + a^2 + 2pa \cos \varphi); \quad \rho'^2 = 4(p^2 \cos^2 \varphi + a^2 - 2pa \cos \varphi);$$

$$\rho_1^2 = 4(p^2 \sin^2 \varphi + a^2 - 2pa \sin \varphi); \quad \rho'_1{}^2 = 4(p^2 \sin^2 \varphi + a^2 + 2pa \sin \varphi);$$

also $\rho^2 + \rho'^2 + \rho_1^2 + \rho'_1{}^2 = 8(a^2 + p^2)$.

Anmerkung. Wenn die Kurve eine Schleife besitzt, wie Fig. 1 zeigt, so fällt, wenn ein Radius vector die Schleife durchschneidet, der entgegengesetzte auf diesen und muß mit dem negativen Zeichen in Rechnung gebracht werden.

Konstruktion der Umhüllungszeichen durch Punkte.

Erste Methode. Da $\rho = 2p \cos \varphi \pm 2a$ ist, so beschreibe man mit $2p$ und $2a$ als Radien Kreise um P, ziehe durch P einen Strahl, der die X-axe unter dem Winkel φ schneidet; bilde $2p \cos \varphi$ und mache den Strahl gleich $2p \cos \varphi \pm 2a$. Die so bestimmten Punkte gehören der Umhüllungslinie an. Man ersieht aus der Gleichung für ρ leicht, daß, wenn $2p \cos \varphi > 2a$ ist, auf ein und demselben Strahle zwei Kurvenpunkte liegen; ferner daß in diesem Falle sowohl $2p \cos \varphi - 2a$, als auch $2p \cos \varphi + 2a$ einmal den Wert 0 erreicht, daß also die Kurve zweimal durch den Koordinatenanfangspunkt geht und daher eine Schleife bildet (Fig. 1). Ist $p = a$, d. h. liegt P auf der Peripherie des festen Kreises C, so wird $2p \cos \varphi \pm 2a$ nur für die Werte $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gleich Null, für alle anderen Werte von φ ist $2p \cos \varphi - 2a < 0$, daher liegen nur noch auf dem Strahle, der mit der X-axe zusammenfällt, zwei Kurvenpunkte, die Schleife schrumpft in einen Punkt zusammen (Fig. 2). Ist endlich $p < a$, d. h. liegt P innerhalb des Kreises C, so kann $2p \cos \varphi \pm 2a$ nicht mehr gleich Null werden, die Kurve geht also nicht mehr durch den Koordinatenanfangspunkt, auf jedem Strahle liegt nur noch ein Kurvenpunkt (Fig. 3 u. 4).

Zweite Methode. Legt man an den Kreis C zwei parallele Tangenten, so schneiden dieselben auf der durch P gezogenen Geraden, welche mit ihnen rechte Winkel bildet, Stücke ab, welche beziehungsweise (von P aus gerechnet) gleich $p \cos \varphi \pm a$ sind. Das Weitere ergibt sich von selbst.

Dritte Methode. Eine sehr einfache Konstruktion ergibt sich durch Einführung von Bipolarkoordinaten. Wie der Name sagt, giebt es in diesem Koordinatensystem zwei Pole, und ein Kurvenpunkt wird entweder durch seine Entfernungen von den beiden Polen oder durch die Winkel bestimmt, welche die ihm zugehörigen Leitstrahlen mit der Polaxe bilden. Wählt man im vorliegenden Falle als zweiten Pol den Mittelpunkt des festen Kreises C und bezeichnet die Entfernung eines Kurvenpunktes K von demselben mit ρ_1 , so ist nach dem Carnot'schen Lehrsatz:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + p^2 - 2p\rho \cos \varphi, \text{ wenn in dem Dreiecke KPC } \angle KPC = \varphi \text{ gesetzt wird;}$$

setzt man $\rho = 2p \cos \varphi \pm 2a$, so wird $\rho_1 = \pm \sqrt{p^2 + 4a^2 \pm 4pa \cos \varphi}$, d. h. ρ_1 ist gleich der dritten Seite eines Dreiecks, dessen beide andere Seiten bezügl. p und $2a$ sind und den $\angle \pi - \varphi$ oder φ einschließen; oder ρ_1 ist der Radius vector des Kreises, der mit dem Radius $2a$ um P beschrieben ist und dessen Pol auf der durch P gehenden Axe in der Entfernung $+p$ oder $-p$ von P liegt. Nimmt man daher auf der negativen X-axe einen Punkt C_1 in der Entfernung p von P an, beschreibt um P einen Kreis mit dem Radius $2a$ und zieht von P aus einen Strahl, welcher diesen Kreis im Punkte A trifft, so ist stets

$AC_1 = \rho_1$. Beschreibt man also um C mit AC_1 einen Kreis, welcher den Strahl in K schneidet, so ist K ein Punkt der Umhüllungsline. Dieselbe kann demnach durch die Bewegung eines Punktes in folgender Weise entstehen: Nimmt man auf der einen von zwei in P sich schneidenden Geraden zwei Punkte C und C_1 in der symmetrischen Entfernung p, auf der anderen einen Punkt A in der Entfernung 2a von P an, so wird bei der Drehung der letzteren um P ein Punkt K derselben, welcher von C dieselbe Entfernung beibehält, welche der Punkt A von C_1 besitzt, die Umhüllungsline beschreiben.

Die Gleichungen für die Tangente und Normale.

Sind X, Y die laufenden Koordinaten einer durch den Punkt (x, y), beziehungsweise (φ, ρ) gelegten Tangente, so ist die Gleichung der Tangente: (13) $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$,

$$\text{oder: } Y \frac{\partial f}{\partial y} + X \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ der Normale: (14) } Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x),$$

$$\text{oder: } Y \frac{df}{dx} - X \frac{df}{dy} = y \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dy}.$$

Nun ist $f = (x^2 - 2px + y^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$ (Gleich. 6a), also

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x - p)(x^2 - 2px + y^2) - 8a^2x = 4x(x^2 + y^2) - 4p(3x^2 + y^2) - 8x(a^2 - p^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 - 2px + y^2) - 8a^2y = 4y(x^2 + y^2) - 8pxy - 8a^2y,$$

und nach dem Euler'schen Satze über homogene Funktionen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -4[p x(x^2 + y^2) + 2a^2(x^2 + y^2) - 2p^2x^2].$$

Unter Berücksichtigung dieser Werte von $\frac{\partial f}{\partial x}$ u. s. w. verwandelt sich die Gleichung der Tangente in:

$$(15) \quad Y y [x^2 - 2px + y^2 - 2a^2] + X [x(x^2 + y^2) - p(3x^2 + y^2) - 2x(a^2 - p^2)] + (x^2 + y^2)(px + 2a^2) - 2p^2x^2 = 0$$

und die Gleichung der Normale in:

$$(16) \quad Y [x(x^2 + y^2) - p(3x^2 + y^2) - 2x(a^2 - p^2)] - X y [y^2 - 2px + y^2 - 2a^2] + p y (x^2 - 2px + y^2) = 0.$$

Einfacher und namentlich auch brauchbarer für die Konstruktion der Tangente gestalten sich die vorstehenden Gleichungen, wenn man statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y des Berührungspunktes die Polarkoordinaten einführt. Nun ist

$$x = \rho \cos \varphi = 2(p \cos \varphi \pm a) \cos \varphi \text{ und } y = \rho \sin \varphi = 2(p \cos \varphi \pm a) \sin \varphi,$$

daraus folgt $\frac{dx}{d\varphi} = -2(p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi)$, $\frac{dy}{d\varphi} = 2(p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi)$ und

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi}{p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi} = \frac{(\rho - a) \cos \varphi - p}{(\rho - a) \sin \varphi}$$

Hiernach wird die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = -\frac{p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi}{p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi} (X - x), \text{ oder nach gehöriger Reduktion}$$

$$Y (p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi) + X (p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi) - \frac{1}{2} \rho^2 = 0;$$

setzt man aber $p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi = 2 (p \cos \varphi \pm a) \sin \varphi \pm a \sin \varphi = (\rho \pm a) \sin \varphi$,
 ebenso $p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi = 2 (p \cos \varphi \pm a) \cos \varphi \mp a \cos \varphi - p = (\rho \mp a) \cos \varphi - p$,
 so wird die Gleichung der Tangente, wenn man nur ein Zeichen von a in Betracht zieht:

$$(18) \quad Y = - \frac{(\rho - a) \cos \varphi - p}{(\rho - a) \sin \varphi} X + \frac{\frac{1}{2} \rho^2}{(\rho - a) \sin \varphi}$$

und die Gleichung der Normale:

$$Y (p \cos 2\varphi - a \cos \varphi) - X (p \sin 2\varphi + a \sin \varphi) + \rho p \sin \varphi = 0, \text{ oder}$$

$$(19) \quad Y = \frac{(\rho - a) \sin \varphi}{(\rho - a) \cos \varphi - p} X - \frac{\rho p \sin \varphi}{(\rho - a) \cos \varphi - p}.$$

Die Länge der begrenzten Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale.

Bezeichnet man die begrenzte Tangente kurz mit T und entsprechend die anderen Größen mit N , St und Sn , so werden dieselben durch folgende Gleichungen bestimmt;

$$(20) \quad T = y \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2};$$

$$(21) \quad N = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}; \quad (22) \quad St = y \frac{dx}{dy}; \quad (23) \quad Sn = y \frac{dy}{dx}.$$

Unter Benutzung von Polarkoordinaten wird dann im vorliegenden Falle:

$$(24) \quad T = \frac{\rho \sin \varphi \sqrt{p^2 + a^2 + 2ap \cos \varphi}}{(\rho - a) \cos \varphi - p}; \quad (25) \quad N = \frac{\rho \sqrt{p^2 + a^2 + 2ap \cos \varphi}}{(\rho - a)};$$

$$(26) \quad St = - \frac{\rho (\rho - a) \sin^2 \varphi}{(\rho - a) \cos \varphi - p}; \quad (27) \quad Sn = - \frac{\rho [(\rho - a) \cos \varphi - p]}{(\rho - a)}.$$

Bestimmung der Polartangente und -normale, der Polarsubtangente und Polarsubnormale.

Polartangente und -normale sind diejenigen Strecken, welche die im Pole auf dem zum Berührungspunkte der Tangente gezogenen Leitstrahle ρ errichtete Senkrechte auf Tangente und Normale abschneidet; die auf dieser Senkrechten selbst von der Tangente und Normale gebildeten Abschnitte werden Polarsubtangente und -normale genannt. Bezeichnet man nun den Winkel, welchen die Tangente mit dem Berührungsstrahle ρ auf der Seite von ρ bildet, welchen der positiven X -axe zugekehrt ist, mit ψ , den Winkel aber, welchen die Tangente mit der positiven Richtung der X -axe bildet, mit μ , die Polartangente u. s. w. mit Pt , Pn , Pst und Psn , so ist:

$$(28) \quad Pt = \frac{\rho}{\cos \psi}; \quad (29) \quad Pn = \frac{\rho}{\sin \psi}; \quad (30) \quad Pst = \rho \tan \psi; \quad (31) \quad Psn = \rho \cot \psi.$$

$$\text{Ferner ist } \mu = \psi + \varphi, \text{ also } \tan \psi = \tan (\mu - \varphi) = \frac{\tan \mu - \tan \varphi}{1 + \tan \mu \tan \varphi}.$$

Anderseits ist $\tan \mu = \frac{dy}{dx} = -\frac{p \cos 2\varphi + a \cos \varphi}{p \sin 2\varphi + a \sin \varphi}$ und daher

$$(32) \quad \tan \phi = -\frac{p \cos \varphi + a}{p \sin \varphi} = -\frac{\rho}{2p \sin \varphi} = \rho \frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$(33) \quad \sin \phi = \frac{\rho}{2\sqrt{p^2 + a^2 + 2pa \cos \varphi}}, \quad (34) \quad \cos \phi = \frac{p \sin \varphi}{\sqrt{p^2 + a^2 + 2pa \cos \varphi}}.$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen verwandeln sich die Gleichungen (28) bis (31) in:

$$(35) \quad P_t = \frac{\rho \sqrt{p^2 + a^2 + 2pa \cos \varphi}}{p \sin \varphi}; \quad (36) \quad P_n = 2 \sqrt{p^2 + a^2 + 2pa \cos \varphi};$$

$$(37) \quad P_{st} = -\frac{\rho^2}{2p \sin \varphi}; \quad (38) \quad P_{sn} = -2p \sin \varphi.$$

Konstruktion der Tangente.

Eine einfache Methode, die Tangente in irgend einem Punkte Q (φ, ρ) der Kurve zu konstruieren, ergibt sich aus den Formeln (18) und (19). Aus der ersten läßt sich leicht der Winkel μ bestimmen, aus der zweiten der $\angle \nu$, den die Normale mit der positiven X-axe bildet. Schneidet man nämlich von dem Leitstrahle PQ = ρ von Q aus ein Stück $a = QD$ ab, zieht DE senkrecht zu PX und verbindet C mit D, so ist $DE = (\rho - a) \sin \varphi$, $CE = (\rho - a) \cos \varphi - p$; also $\tan CDE = \frac{(\rho - a) \cos \varphi - p}{(\rho - a) \sin \varphi}$; da aber

$\tan \mu = -\frac{(\rho - a) \cos \varphi - p}{(\rho - a) \sin \varphi}$ ist, so ist $\angle CDE = \pi - \mu$. Schneidet also die Tangente

die X-axe in G, so ist $\angle QGP = CDE$. Anderseits ist $\tan DCE = \frac{(\rho - a) \sin \varphi}{(\rho - a) \cos \varphi - p}$, folglich ist $\angle DCE = \nu$ und CD die Richtung der Normale. Zieht man daher QF parallel DC und QG $\perp$ QF, so ist QG die Tangente im Punkte Q.

Dieselbe liefse sich mit Hülfe derselben Gleichungen unschwer konstruieren, wenn man die Ausdrücke $\frac{1/2 \rho^2}{(\rho - a) \sin \varphi}$ oder $\frac{\rho p \sin \varphi}{(\rho - a) \cos \varphi - p}$, d. h. die Strecken, welche die Tangente, bez. die Normale auf der Y-axe abschneiden, aus den Proportionen $t: \rho = 1/2 \rho: (\rho - a) \sin \varphi$, oder $n: \rho \sin \varphi = p: [(\rho - a) \cos \varphi - p]$ herleitete. Indes sind diese Konstruktionen sowohl, wie diejenigen, welche sich auf die Gleichungen (24) bis (27), (32) bis (34) ferner (35) und (37) stützen, weniger einfach, dagegen bieten die Gleichungen (36) und (38), namentlich die letztere, ein sehr einfaches Mittel zur Konstruktion der Tangente. Um aus (38) die Polarsubnormale zu erhalten, beschreibe man um C mit dem Radius p einen Kreis und errichte in P auf PQ die Senkrechte; trifft dieselbe den Kreis in H, so ist PH die Polarsubnormale, also PQ die Polarnormale; denn verbindet man H noch mit I, so ist $\angle PIH = \varphi$, also $PH = PI \sin \varphi$, oder da $PI = 2p$ und $\angle PIH$ bezüglich seiner Schenkel dem $\angle \varphi$ entgegengesetzt ist, $PH = -2p \sin \varphi$.

Endlich beruht noch eine Methode auf der Eigenschaft der Umhüllungslinie, daß sie in jedem Punkte mit demjenigen eingehüllten Kreise, welcher durch jenen Punkt hindurchgeht, eine gemeinschaftliche Tangente hat. Dieser Kreis aber ist leicht zu bestimmen;

denn sein Mittelpunkt liegt einerseits auf der Peripherie von C, anderseits auf der Mittelsenkrechten von P Q.

Anmerkung. Da die Polarnormale und -subnormale ρ bestimmen, so läßt sich auch mit Hilfe dieser beiden Größen die Kurve punktweise konstruieren.

Bestimmung der Tangenten, welche sich von einem Punkte (k, l) in der Ebene der Umhüllungslinie an dieselbe legen lassen.

Ersetzt man in Gleichung (18) ρ durch $2(p \cos \varphi + a)$ und X, Y durch k, l, so wird jede Gerade, welche durch den Punkt (k, l) hindurchgeht und die Umhüllungslinie berührt, dargestellt durch die Gleichung:

$$(39) \quad k(p \cos 2\varphi + a \cos \varphi) + l(p \sin 2\varphi + a \sin \varphi) - 2(p \cos \varphi + a)^2 = 0.$$

Ersetzt man weiter noch $\sin \varphi$ durch $\cos \varphi$, so folgt als Gleichung der Tangente:

$$(40) \quad 4p^2(k+1-p)(k-1+p) \cos^3 \varphi + 4ap(k^2 - 5kp + 4p^2 - l^2) \cos^2 \varphi + [(k^2 + l^2)(a^2 - 4p^2) + 4p(6a^2p - 4a^2k + kp^2)] \cos^2 \varphi - 2a(k^2p - 4kp^2 + 2a^2k - 8a^2p + 2l^2p) \cos \varphi + (kp + 2a^2)^2 - a^2l^2 = 0.$$

Im allgemeinen ergeben sich aus dieser Gleichung für die Unbekannte $\cos \varphi$ vier verschiedene Werte, d. h. im allgemeinen lassen sich vom Punkte (k, l) vier Tangenten an die Kurve legen.

Die ausgezeichneten Punkte der Umhüllungslinie.

Ausgezeichnete Punkte einer Kurve überhaupt sind alle solche, welche irgend eine besondere Eigentümlichkeit besitzen; dahin gehören z. B. diejenigen, welche von den Axen, oder den Polen etc. die (absolut oder relativ) größte oder kleinste Entfernung haben, ferner diejenigen, in denen die Kurve mehrere Tangenten besitzt, in denen sie eine Inflexion hat, in denen die Krümmung am stärksten oder schwächsten ist, in denen die begrenzten Tangenten, Normalen etc. ihre größten oder kleinsten Werte erreichen u. s. w.

1). Diejenigen Punkte, welche von den Axen die größte oder kleinste Entfernung haben, sind im allgemeinen dadurch bestimmt, daß die in denselben an die Kurve gelegten Tangenten den Axen parallel sind; also muß der $\angle p$, den die Tangente mit der X-axe bildet, einerseits gleich 0° oder 180° , anderseits gleich 90° oder 270° und daher $\tan p = 0$ oder $= \pm \infty$ sein. Nun ist $\tan p = \frac{dy}{dx}$; also muß im vorliegenden Falle $-\frac{p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi}{p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi} = 0$ oder $= \pm \infty$ sein. Für die Punkte, welche von der X-axe die größte oder kleinste Entfernung haben, muß daher $p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi = 0$, und für diejenigen, welche von der X-axe die größte oder kleinste Entfernung haben, muß $p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi = 0$ sein. Aus $p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi = 0$ folgt: $\cos \varphi = [\mp a \pm \sqrt{a^2 + 8p^2}] : 4p$, oder $\cos \varphi = \pm [\sqrt{a^2 + 8p^2} \mp a] : 4p$. Da der absolute Wert von $\cos \varphi$ nicht größer als 1 sein kann, so muß $\sqrt{a^2 + 8p^2} \mp a \leq 4p$ sein. Für endliche Werte von a und p ist aber stets $\sqrt{a^2 + 8p^2} - a \leq 4p$, dagegen ist nur dann $\sqrt{a^2 + 8p^2} + a \leq 4p$, wenn $p \geq a$ ist; nur im letzteren Falle besitzt daher die Kurve auf einer Seite der X-axe zwei Punkte von der angegebenen Bedeutung. Die Leitstrahlen dieser Punkte haben bezüglich die Länge: $(\sqrt{a^2 + 8p^2} + 3a) : 2$ und $(\sqrt{a^2 + 8p^2} - 3a) : 2$; die rechtwinkligen Koordinaten des ersten Punktes sind mithin:

$$x_1 = (\sqrt{a^2 + 8p^2} + 3a) (\sqrt{a^2 + 8p^2} - a) : 8p; y_1 = (\sqrt{a^2 + 8p^2} + 3a) \sqrt{8p^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 8p^2}} : 8p$$

und die des zweiten:

$$x_2 = (\sqrt{a^2 + 8p^2} - 3a) (\sqrt{a^2 + 8p^2} + a) : 8p; y_2 = (\sqrt{a^2 + 8p^2} - 3a) \sqrt{8p^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + 8p^2}} : 8p.$$

Daraus folgt, wenn man die betr. Leitstrahlen kurz mit ρ_1 und ρ_2 bezeichnet:

$$\rho_1 \rho_2 = 2(p^2 - a^2); x_1 x_2 = (p^2 - a^2) \text{ und } y_1 y_2 = (p^2 - a^2)^{3/2} : p.$$

Bemerkenswert ist noch die Beziehung $\rho_1 - \rho_2 = 3a$.

Um zu erkennen, ob den Werten von y ein Maximum oder Minimum entspricht, genügt es, den Wert von $\frac{d^2 y}{d\varphi^2}$ oder der folgenden Differentialquotienten zu bestimmen.

$$\text{Da } y = p \sin 2\varphi + 2a \sin \varphi \text{ ist, so ist: } \frac{dy}{d\varphi} = 2(p \cos 2\varphi \pm a \cos \varphi);$$

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = -2(2p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi) = -2 \sin \varphi (4p \cos \varphi \pm a).$$

Ersetzt man in der letzteren Formel $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ durch die gefundenen Werte, so wird

$$\text{entweder } \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = -\sqrt{a^2 + 8p^2} \sqrt{8p^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 8p^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = -\sqrt{a^2 + 8p^2} \sqrt{8p^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + 8p^2}}.$$

Der erste Ausdruck ist < 0 , daher entspricht dem ersten Werte von $\cos \varphi$ stets ein Maximum von y ; der zweite Wert von $\frac{d^2 y}{d\varphi^2}$ ist nur dann < 0 , wenn $p > a$, so daß auch dem zweiten Werte von $\cos \varphi$ ein Maximum von y entspricht. Für $p = a$ wird $\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = 0$. Bildet man daher $\frac{d^3 y}{d\varphi^3} = -2(8p \cos^2 \varphi (-) a \cos \varphi - 4p)$ und setzt an die Stelle von $\cos \varphi$ den Wert $(\sqrt{a^2 + 8p^2} + a) : 4p$, so wird $\frac{d^3 y}{d\varphi^3} = -3a(a + \sqrt{a^2 + 8p^2}) : 2p$.

Da dieser Ausdruck für $p = a$ nicht verschwindet, so entspricht dem betr. Werte von $\cos \varphi$ weder ein Maximum noch ein Minimum von y .

Für diejenigen Punkte, welche von der Y-axis die größte, resp. kleinste Entfernung haben, muß $\frac{dx}{dy} = 0$ sein, d. h. $p \sin 2\varphi \pm a \sin \varphi = 0$. Daraus folgt, daß entweder $\sin \varphi = 0$, also $\varphi = k\pi$, wo $k = 0, 1, 2 \dots$ ist, oder daß $2p \cos \varphi \pm a = 0$, also $\cos \varphi = \mp \frac{a}{2p}$ sein muß. Die zugehörigen Werte von ρ sind beziehungsweise: $2(p \pm a)$, $2(-p \pm a)$ und a .

Die beiden ersten Punkte liegen also auf der X-axis, und da für $\varphi = k\pi$ der Wert von $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, so schneidet die Kurve die X-axis in diesen Punkten rechtwinklig. Dem dritten Werte von $\cos \varphi$ entspricht nur dann ein reeller Punkt, wenn $p \leq \frac{1}{2}a$ ist, und seine rechtwinkligen Koordinaten sind: $x = -\frac{a^2}{2p}$, $y = \pm \frac{a}{2p} \sqrt{4p^2 - a^2}$.

Setzt man auch hier die Werte von $\cos \varphi$ in die Gleichungen für $\frac{d^2 x}{d\varphi^2}$, $\frac{d^3 x}{d\varphi^3}$ etc. ein, so erkennt man leicht, ob die ihnen entsprechenden Werte von x Maxima oder Minima sind. Es ist aber $x = 2(p \cos^2 \varphi + a \cos \varphi)$, also $\frac{dx}{d\varphi} = -2(p \sin 2\varphi + a \sin \varphi)$; $\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = -2(2p \cos 2\varphi + a \cos \varphi)$; $\frac{d^3 x}{d\varphi^3} = 2(4p \sin 2\varphi + a \sin \varphi)$, etc. Setzt man $\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = -2(4p \cos^2 \varphi + a \cos \varphi - 2p)$, so wird für $\cos \varphi = 0$ der Wert von $\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = -2(2p + a)$; also ist der Wert von x ein Maximum. Für $\varphi = 180^\circ$ ist $p = 2(-p \cos 0 + a)$, und dementsprechend $\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = 2(2p - a)$; daher ist x ein Minimum für $\varphi = 180^\circ$, so lange $p > \frac{1}{2}a$ ist; wird aber $p < \frac{1}{2}a$, so ist x wieder ein Maximum. Für $p = \frac{1}{2}a$ wird $\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = 0$, ebenso $\frac{d^3 x}{d\varphi^3} = 0$, dagegen wird $\frac{d^4 x}{d\varphi^4} = 2(-8p \cos 2\varphi + a \cos \varphi) < 0$, und folglich ist auch in diesem Falle x ein Maximum. Desgleichen erreicht x einen Maximalwert für $\cos \varphi = -\frac{a}{2p}$.

2) Inflexionspunkte. Dieselben sind bestimmt durch die Gleichungen $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, oder $\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = 0$. Nun ist $\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = \frac{2p^2 + a^2 + 3pa \cos \varphi}{(p \sin 2\varphi + a \sin \varphi)^2}$; also muß entweder $2p^2 + a^2 + 3pa \cos \varphi = 0$, oder $p \sin 2\varphi + a \sin \varphi = 0$ sein. Aus der ersten Bedingung folgt $\cos \varphi = -\frac{2p^2 + a^2}{3pa}$ und hieraus, daß $a \geq p \geq \frac{1}{2}a$ sein muß; da $\frac{d^3 y}{dx^3}$ in dem Intervalle von $p = a$ bis $p = \frac{1}{2}a$ nicht verschwindet, so entspricht dem Werte von $\cos \varphi = -\frac{2p^2 + a^2}{3pa}$ in der That ein Inflexionspunkt; an den Grenzen $a = p$ und $p = \frac{1}{2}a$ wird $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{(2p \cos \varphi + a) 3pa \sin^2 \varphi + 2(2p^2 + a^2 + 3pa \cos \varphi)(2p \cos 2\varphi + a \cos \varphi)}{(p \sin 2\varphi + a \sin \varphi)^3} = \frac{0}{0}$. Ebenso ist $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{0}{0}$, $\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{0}{0}$ u. s. w.; die Kurve hat daher nur einen Inflexionspunkt, wenn $a > p > \frac{1}{2}a$ ist. Der Radius vektor dieses Punktes ist $= 4(a^2 - p^2) : 3a$, die rechtwinkligen Koordinaten sind: $x = -4(a^2 - p^2)(2p^2 + a^2) : 9a^2 p$, $y = \pm 4(a^2 - p^2) \sqrt{(a^2 - p^2)(4p^2 - a^2)} : 9a^2 p$. Aus der zweiten Bedingungsgleichung würde $\sin \varphi = 0$ oder $\cos \varphi = -\frac{a}{2p}$ folgen. Da sowohl für den Wert von $\sin \varphi = 0$, als auch von $\cos \varphi = -\frac{a}{2p}$ die Differentialquotienten $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ u. s. w. unbestimmt sind, so sind die entsprechenden Punkte keine Inflexionspunkte.

3). Mehrfache Punkte. Schneiden sich mehrere Zweige einer Kurve in einem Punkte, so heißt derselbe ein mehrfacher. Offenbar besitzt die Kurve in einem solchen

Punkte ebenso viele Tangenten, wie Kurvenzweige durch denselben hindurchgehen, und da jede Tangente bestimmt wird durch den Wert, den $\frac{dy}{dx}$ in dem Berührungspunkte (x, y) annimmt, so hängt die Existenz von mehrfachen Punkten bei einer Kurve im allgemeinen davon ab, daß $\frac{dy}{dx}$ für ein und dasselbe Wertepaar von x und y mehrere Werte besitzt.

Dieses aber ist der Fall, wenn außer $f=0$ auch $\frac{df}{dx}=0$ und $\frac{df}{dy}=0$, beziehungsweise $\frac{d^2f}{dx^2}=0$, $\frac{d^2f}{dx dy}=0$ und $\frac{d^2f}{dy^2}=0$, kurz bei einem n fachen Punkte $\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}=0$ u. s. w. durch dasselbe Wertepaar von x und y befriedigt werden. Im vorliegenden Falle, wo

$f=(x^2-2px+y^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0$, ist $\frac{df}{dx}=4(x^2-2px+y^2)(x-p)-8a^2x$

und $\frac{df}{dy}=4y(x^2-2px+y^2)-8a^2y$. Nun wird aber $\frac{df}{dy}=0$, wenn entweder $y_1=0$,

oder $y_2=\pm\sqrt{2a^2+2px-x^2}$ ist. Substituiert man den ersten Wert von y in $\frac{df}{dx}=0$,

so ergeben sich für x die Werte: $x_1=0$, $x_2=(3p+\sqrt{p^2+8a^2}):2$ und $x_3=(3p-\sqrt{p^2+8a^2}):2$. Dagegen liefern die beiden anderen Werte von y keine entsprechenden Werte von x ; daher werden die beiden letzten Bedingungen $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$

gleichzeitig nur erfüllt, wenn 1) $x=0$, $y=0$; 2) $x=(3p+\sqrt{p^2+8a^2}):2$, $y=0$;

3) $x=(3p-\sqrt{p^2+8a^2}):2$, $y=0$ ist. Die beiden letzten Wertepaare erfüllen aber nicht die Kurvengleichung $f=0$, daher kann nur der Punkt $(x=0, y=0)$, d. h. der Koordinatenanfangspunkt ein mehrfacher Punkt, und zwar zunächst ein Doppelpunkt sein.

Von den Bedingungen $\frac{d^2f}{dx^2}=0$, $\frac{d^2f}{dx dy}=0$ und $\frac{d^2f}{dy^2}=0$ wird nur die zweite durch die

Werte $x=0$, $y=0$ erfüllt, daher besitzt die Kurve nur einen Doppelpunkt. Der Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ergibt sich für $x=0$, $y=0$ am bequemsten aus

(17): $\frac{dy}{dx} = -\frac{p \cos 2\varphi + a \cos \varphi}{p \sin 2\varphi + a \sin \varphi}$. Beachtet man nämlich, daß, wenn $x=0$ und $y=0$

auch $\rho=0$ ist, so muß, da $\rho=2(p \cos \varphi + a)$ ist, $\cos \varphi = -\frac{a}{p}$ und daher $\frac{dy}{dx} = \mp$

$\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1}$ sein. Ist also $p > a$, so giebt es im genannten Punkte zwei reelle und

verschiedene Tangenten, welche symmetrisch zur X-axe liegen, ist $p=a$, so sind die beiden Tangen noch reell, fallen aber mit der X-axe zusammen, und der Punkt ist somit ein Rückkehrpunkt oder eine Spitze; ist $p < a$, so werden die Tangenten imaginär, der Punkt ist mithin ein isolierter oder konjugierter (Einsiedler).

4) Die Krümmung. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkte $(x, y = \rho, \varphi)$ wird entweder durch den Kontingenzwinkel oder den Krümmungskreis dieses Punktes

gemessen. Denkt man sich den Punkt (x, y) mit dem unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Punkte desselben Kurvenzweiges verbunden, so sind die Verbindungslinien selbst zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Tangenten der Kurve, und der Winkel, den die im selben Sinne genommenen Richtungen dieser Tangenten, oder, was dasselbe ist, die zugehörigen Normalen mit einander bilden, ist es, den man Kontingenzwinkel nennt. Denkt man sich aber durch die drei erwähnten Punkte einen Kreis gelegt, so heißt dieser Kreis der Krümmungskreis des Punktes (x, y) , sein Radius Krümmungsradius etc. Offenbar ist nun die Krümmung im Punkte (x, y) um so stärker, je größer der Kontingenzwinkel ist, und umgekehrt; ebenso, je kleiner der Krümmungskreis ist, und umgekehrt. Bildet nun die eine der Tangenten mit der X-axe den φ , die benachbarte den $\varphi + d\varphi$, so ist der Kontingenzwinkel $= d\mu$. Da aber

$d\mu = \cos^2 \mu \cdot d \tan \mu$ und $\tan \mu = -\frac{p \cos 2\varphi + a \cos \varphi}{p \sin 2\varphi + a \sin \varphi}$ ist, so ergibt sich:

$$(41) \quad d\mu = \frac{a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi}{a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi} \cdot d\varphi. \quad \text{Hieraus folgt}$$

$$(42) \quad \frac{d(d\mu)}{d\varphi} = \frac{ap \sin \varphi (p^2 - a^2)}{(a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)^2}; \quad \text{ferner}$$

$$(43) \quad \frac{d^2(d\mu)}{d\varphi^2} = \frac{ap(p^2 - a^2)(4ap + a^2 \cos \varphi + p^2 \cos \varphi - 2ap \cos^2 \varphi)}{(a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)^3}.$$

Für die extremen Werte von $d\mu$ muß $\frac{d(d\mu)}{d\varphi} = 0$, also, wenn $p \geq a$ ist, $\sin \varphi = 0$ sein; mithin hat die Kurve die stärkste oder schwächste Krümmung in den Punkten, in welchen sie die X-axe durchschneidet. Aus $\sin \varphi = 0$ folgt $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180^\circ$. Ist $p > a$, so ist für den einen Schnittpunkt, der durch $\rho = 2(p \cos \varphi + a)$ bestimmt ist, $\frac{d^2(d\mu)}{d\varphi^2} > 0$, also ist der Kontingenzwinkel und die Krümmung ein Minimum; für den anderen Schnittpunkt aber, der durch $\rho = 2(p \cos \varphi - a)$ bestimmt wird, ist $\frac{d^2(d\mu)}{d\varphi^2} < 0$, folglich ist die Krümmung in diesem Punkte am stärksten. Gerade umgekehrt verhält sich die Kurve in den beiden Punkten, wenn $p < a$. Ist $p = a$, so sind sämtliche Differentialquotienten von $d\mu$ für $\varphi = 0$ selbst gleich Null, dagegen gleich $\frac{0}{0}$, wenn $\varphi = 180^\circ$ ist. Für $\varphi = 0$ tritt daher weder ein Maximum noch ein Minimum der Krümmung ein, für $\varphi = 180^\circ$ aber besitzt die Kurve eine Spitze. Dieselben Resultate ergeben sich bei Betrachtung des Krümmungskreises. Bezeichnet man den Radius desselben mit R und das Kurvenelement zwischen den benachbarten Punkten mit ds , so ist: $R = \frac{ds}{d\mu}$. Für rechtwinklige Koordinaten ist somit

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{und für Polarkoordinaten} \quad R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}$$

Die letztere Formel liefert bei der vorliegenden Kurve:

$$(44): R = \frac{2(a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)^{3/2}}{a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi} \quad [\text{cf. Gleichung (41)}].$$

oder indem man $a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi = \frac{1}{4} Pn^2$ setzt:

$$(45) \quad R = \frac{Pn^3}{Pn^3 + 4p(p + a \cos \varphi)}$$

Aus (44) folgt:

$$(46) \quad \frac{dR}{d\varphi} = -6ap^2 \frac{\sin \varphi (p + a \cos \varphi) (a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)^{1/2}}{(a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi)^2} \quad \text{und}$$

$$(47) \quad \frac{d^2 R}{d\varphi^2} = -6ap^2 \frac{\{[a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi][(a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)(a \cos 2\varphi + p \cos \varphi) - ap \sin^2 \varphi (p + a \cos \varphi)] + 6ap \sin^2 \varphi (p + a \cos \varphi)(a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)\}}{(a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi)^3 (a^2 + p^2 + 2ap \cos \varphi)^{1/2}}$$

Nach (46) ergeben sich die größten oder kleinsten Werte von R, wenn

$$1) \sin \varphi = 0; \quad 2) \cos \varphi = -\frac{p}{a} \quad \text{und} \quad 3) \cos \varphi = -\frac{a^2 + p^2}{2ap} \text{ ist.}$$

Die dritte Bedingung wird nur erfüllt, wenn $a = p$ ist; dann wird $\cos \varphi = -1$, also $\varphi = 180^\circ$, ein Fall, der in der ersten Bedingung enthalten ist. Soll 2) $\cos \varphi = -\frac{p}{a}$ werden, so muß $p \leq a$ sein. Der Fall $p = a$ ist wieder in der ersten Bedingung enthalten, und es fragt sich nur, wie sich die Kurve im Punkte $\cos \varphi = -\frac{p}{a}$ verhält, wenn $p < a$ ist. Setzt man den Wert von $\cos \varphi$ in (47), so ergibt sich $\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = \frac{6p}{(a^2 - p^2)^{1/2}}$.

Dieselbe Zweideutigkeit zeigt sich, wenn man die folgenden Differentialquotienten zu Hülfe nimmt. Die erste Bedingung zeigt, daß die Kurve in ihren Schnittpunkten mit der X-axe ihre stärkste oder schwächste Krümmung hat, wie dies schon mit Hülfe des Kontingenzwinkels gezeigt wurde.

Die Evolute

einer Kurve überhaupt ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte; letztere aber werden gebildet durch die Schnittpunkte der aufeinanderfolgenden Normalen der Kurve, so daß die Normalen der gegebenen Kurve Tangenten der Evolute sind; daher der Name Evolute (evolvere), weil die Normalen sich wälzend auf derselben bewegen. Die Evolute (frz. développée) ist demnach die Umhüllungslinie aller Normalen einer Kurve, welche letztere auch, weil die Normalen der Evolute sich wälzend auf ihr fortbewegen, Evolvente (développante) genannt wird. Bezeichnet man die Koordinaten irgend eines Punktes der Evolute mit X und Y, so ist, wenn x, y oder ρ, φ die Koordinaten des Berührungspunktes der Evolvente sind,

$$X = x - \frac{dy}{dx} \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \quad Y = y - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \quad \text{oder}$$

$$X = \rho \cos \varphi - \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right] \left[\rho \cos \varphi + \sin \varphi \frac{d\rho}{d\varphi} \right]}{\rho^2 + 2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}; \quad Y = \rho \sin \varphi - \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right] \left[\rho \sin \varphi - \cos \varphi \frac{d\rho}{d\varphi} \right]}{\rho^2 + 2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}$$

Unter Benutzung der beiden letzten Formeln ergibt sich im vorliegenden Falle:

$$X = 2p \frac{(p \cos \varphi + a)^2 + p(p + a \cos \varphi)(1 - \cos^2 \varphi)}{a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi},$$

$$Y = 2ap^2 \frac{\sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi)}{a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi}.$$

Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt nach einem andern Punkte der X-Axe, welcher von ersterem die Entfernung $+2p$ hat, und bezeichnet die Koordinaten eines Punktes der Evolute in Bezug auf das neue Axensystem mit X' und Y' , so ist

$$X' = X - 2p = -2p^2 \frac{(p + a \cos^3 \varphi)}{a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi}.$$

$$Y' = Y = 2ap^2 \frac{\sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi)}{a^2 + 2p^2 + 3ap \cos \varphi}.$$

Ist $p = 0$, so wird auch $R = 0$, $X = 0$ und $Y = 0$, die Evolute ist ein Punkt, die Evolvente selbst ein Kreis; ist $p = a$, so wird $X' = -\frac{2}{3}p(1 - \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$ und

$$Y' = \frac{2}{3}p \sin \varphi (1 - \cos \varphi). \quad \text{In diesem Falle ist also die Evolute der Evolvente ähnlich;}$$

denn bezieht man die Evolvente auf ein neues Axensystem, dessen Anfangspunkt in Bezug auf das ursprüngliche System die Koordinaten $(-2p, 0)$ hat, so wird:

$x' = x + 2p = 2(p \cos \varphi + a) \cos \varphi + 2p$, oder wenn $p = a$ ist, $x' = 2p(1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$ und $y' = y = 2p \sin \varphi (1 + \cos \varphi)$. Setzt man aber in den Ausdrücken für X' und Y' an

Stelle von φ den Winkel $\pi + \varphi'$, so wird $Y' = -\frac{2}{3}p(1 + \cos \varphi' + \cos^2 \varphi')$ und

$$Y' = -\frac{2}{3}p \sin \varphi' (1 + \cos \varphi'). \quad \text{Evolute und Evolvente haben also eine gerade entgegengesetzte Lage (cf. Fig. 2), und entsprechende Dimensionen beider Kurven verhalten sich}$$

wie 1:3. Ist $p = \frac{1}{2}a$, so ist unter derselben Voraussetzung: $X' = -\frac{1}{6}p \frac{1 - 2 \cos^3 \varphi'}{1 - \cos \varphi'}$

und $Y' = -\frac{2}{6}p \sin \varphi' (1 + \cos \varphi')$; die entsprechenden Ordinaten beider Kurven verhalten

sich also wie 1:6, das Verhältniß der Abscissen dagegen ist ein wechselndes; so wird für $\varphi = 180^\circ$: $x' = 0$, dagegen $X' = \infty$. In jedem Falle wird aber die Evolute gerade so wie die Evolvente durch die X-Axe in zwei kongruente Teile geteilt.

Rektifikation und Quadratur.

Um die Länge einer gegebenen Kurve oder eines begrenzten Teiles derselben zu bestimmen, geht man von den kleinsten Teilchen derselben, den Kurvenelementen, aus. Ist ein solches $= ds$, so ist bei rechtwinkligen Koordinaten stets: $ds^2 = dx^2$

Fig. I.

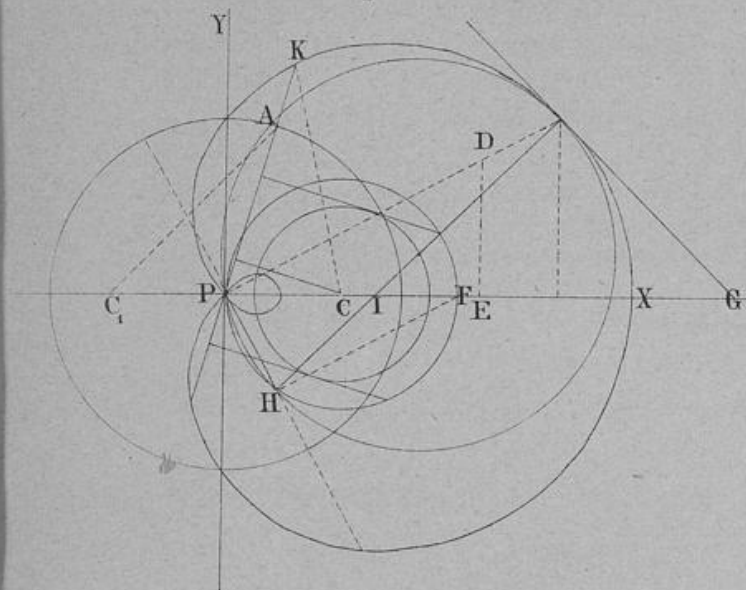


Fig. II.

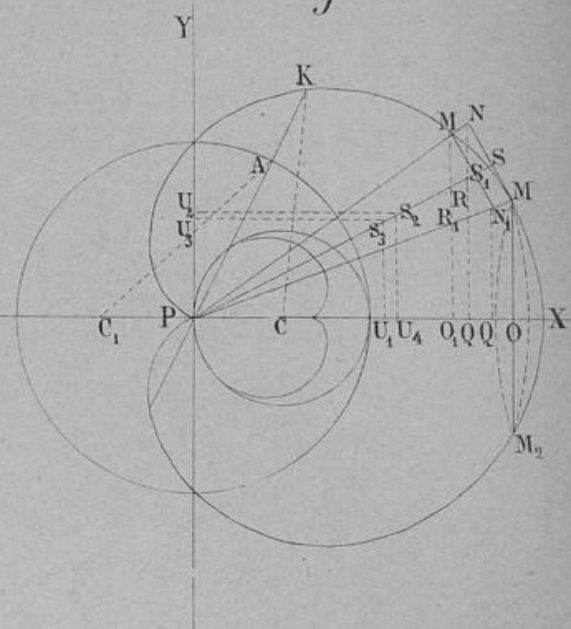


Fig. III.

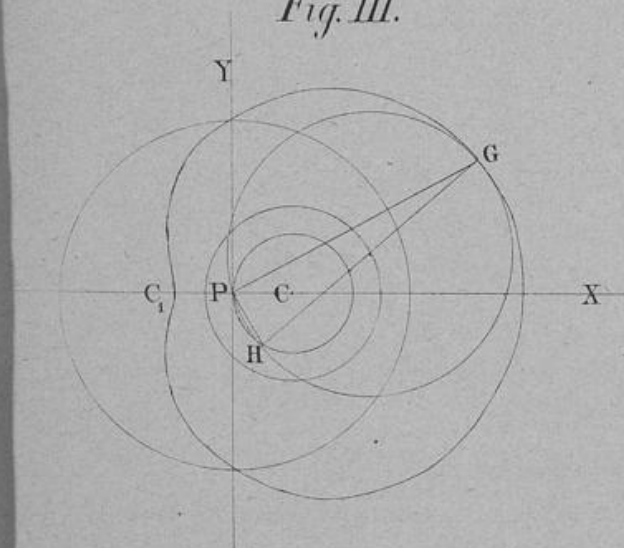
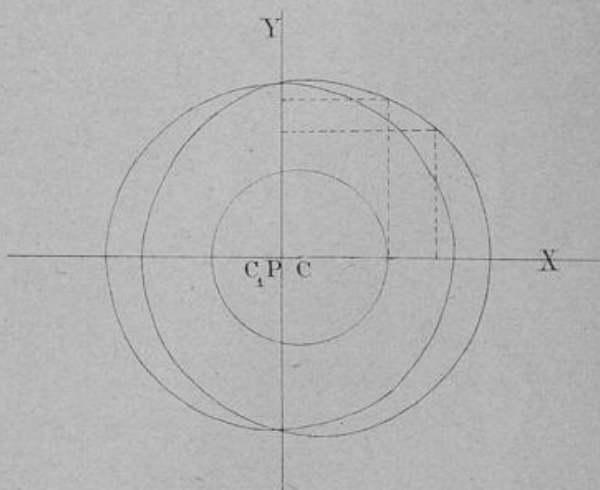
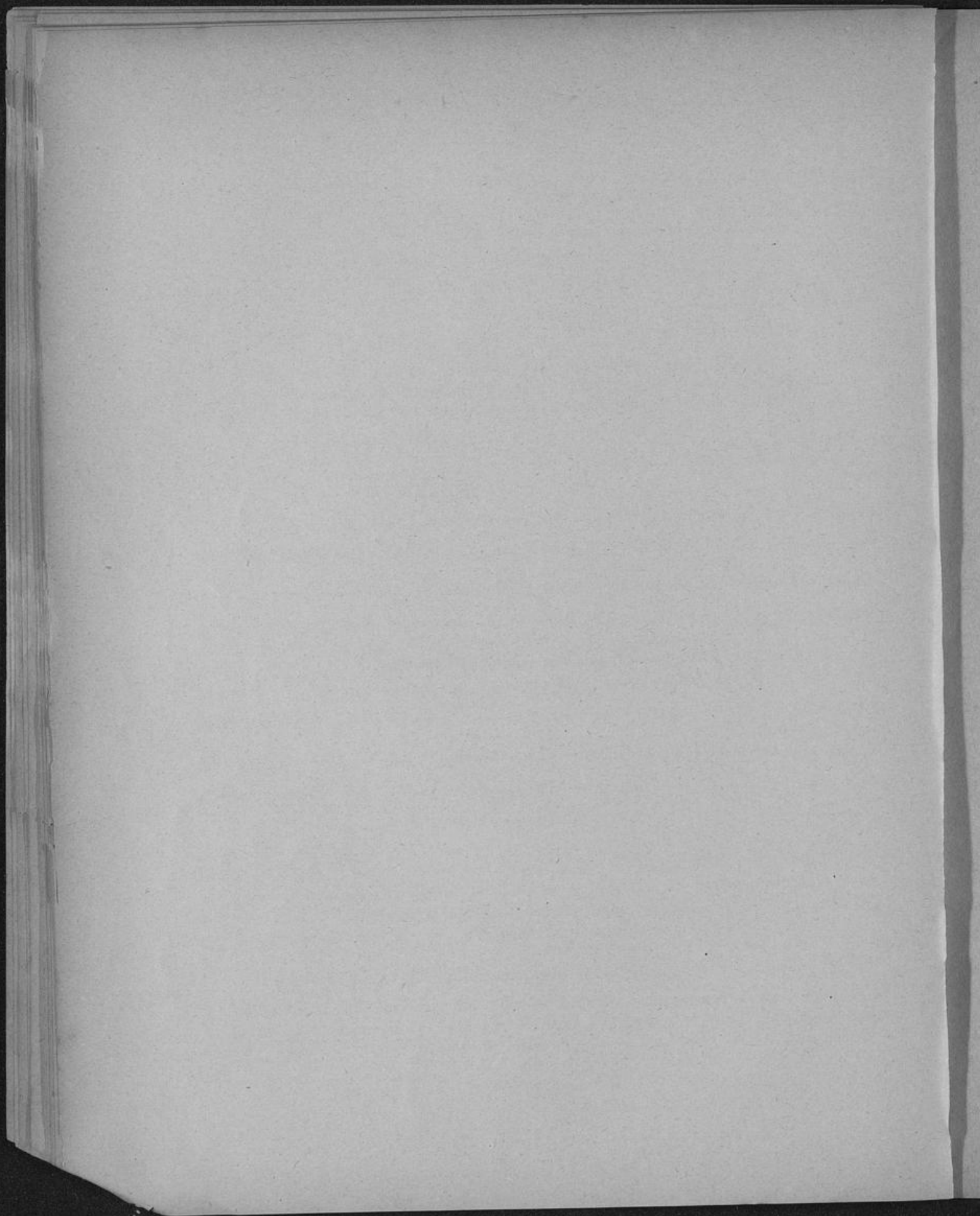


Fig. IV.





$+ dy^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx^2 = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right] dy^2$ und daher ein Bogen s , welcher von den Abscissen x' , x'' , beziehungsweise den Ordinaten y' , y'' begrenzt wird, gleich der Summe aller zwischen diesen Grenzen liegenden Kurvenelemente:

$$s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad \text{oder} \quad s = \int_{y'}^{y''} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy.$$

Ist die Kurve auf Polarkoordinaten bezogen und wird das Kurvenelement ds von den Strahlen ρ und $\rho + d\rho$, welche den Winkel $d\varphi$ einschließen, begrenzt, so ist ds Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $d\rho$ und $\rho \sin d\varphi$, oder $d\rho$ und $\rho d\varphi$, da $\sin d\varphi = d\varphi$ ist; daher ist $ds = \sqrt{(\rho d\varphi)^2 + (d\rho)^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} d\varphi$. Folglich ist

der Bogen s , welcher von den Leitstrahlen ρ' und ρ'' begrenzt wird: $s = \int_{\rho'}^{\rho''} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} d\varphi$,
oder da ρ' , ρ'' durch die betreffenden Winkel φ' , φ'' bestimmt werden:

$$s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} d\varphi.$$

Im vorliegenden Falle ist nun:

$$\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} = 2 \sqrt{p^2 + a^2 + 2ap \cos \varphi} = 2 \sqrt{(a+p)^2 - 4ap \sin^2 \frac{\varphi}{2}} =$$

$$2(a+p) \sqrt{1 - \frac{4ap}{(a+p)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \text{also}$$

$$(48): s = 2(a+p) \int_{\rho'}^{\rho''} d\varphi \sqrt{1 - \frac{4ap}{(a+p)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 4(a+p) \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \frac{4ap}{(a+p)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Da $4ap \leq (a+p)^2$, so ist das Integral im allgemeinen ein elliptisches, welches nur in den speziellen Fällen, wo $p=a$, oder $p=0$ ist, in ein einfaches cyclometrisches übergeht.

Im ersten Falle wird $s = 8a \int_{\varphi'}^{\varphi''} \cos \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} = 8a \left(\sin \frac{\varphi''}{2} - \sin \frac{\varphi'}{2} \right) + C$; da aber

für $\varphi'' = \varphi' = 0$ auch $s = 0$ wird, so ist $C = 0$ und daher $s = 8a \left(\sin \frac{\varphi''}{2} - \sin \frac{\varphi'}{2} \right)$.

Setzt man die untere Grenze $\varphi' = 0$, so wird $s = 8a \sin \frac{\varphi''}{2} = 8a \sin \frac{\varphi}{2}$. Für $\varphi = 180^\circ$ ergibt sich der halbe Umfang der Umhüllungslinie $= 8a$, mithin ist der ganze Umfang $= 16a$. Der in den ersten Quadranten fallende Bogen ist $= 4a\sqrt{2}$, der in den zweiten

fallende $= 4a(2 - \sqrt{2})$. Ist $p = 0$, so wird $\varphi = 2a\varphi$, der ganze Umfang $= 4a\pi$, d. h. die Umhüllungslinie ist ein Kreis mit dem Radius $2a$. Mit Ausnahme dieser beiden Fälle läßt sich aber ein Bogen der Umhüllungslinie nur auf den einer Ellipse zurückführen. Um diese Ellipse kennen zu lernen, braucht man nur das vorstehende Integral mit demjenigen einer bekannten Ellipse zu vergleichen. Sind z. B. die Axen einer Ellipse $2c$ und $2d$, ihre Exzentrizität $e = \sqrt{c^2 - d^2} : c$, so ist irgend ein Bogen

$$s = c \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \text{ Setzt man daher } c = 4(a+p) \text{ und } e^2 = \frac{4ap}{(a+p)^2} = (c^2 - d^2) : c^2,$$

so ist $d = \pm 4(a-p)$, wo die Zeichen so zu wählen sind, daß d positiv wird. Demnach ist der ganze Umfang der Umhüllungslinie gleich dem halben Umfange einer Ellipse, deren Axen bezüglich $8(a+p)$ und $\pm 8(a-p)$ sind. Es ist leicht einzusehen, daß die beiden speziellen Fälle in dem allgemeinen Resultate enthalten sind. Ein Bogen s zwischen den Grenzen $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = \varphi$ hat allgemein die Länge:

$$s = 4(a+p) \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} e^4 \int \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int \sin^6 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^8 \int \sin^8 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} e^{10} \int \sin^{10} \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} - \dots \right], \text{ wo } e \text{ kurz für}$$

$2\sqrt{ap} : (a+p)$ gesetzt worden ist. Nun ist aber:

$$\int \sin^m \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{m} \cos \frac{\varphi}{2} \left[\sin^{m-1} \frac{\varphi}{2} + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} \frac{\varphi}{2} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \sin^{m-5} \frac{\varphi}{2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4) \dots 4 \cdot 2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{(m-1)(m-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\varphi}{m} \right].$$

Daher ist für einen speziellen Wert von φ der entsprechende Bogen s unschwer zu berechnen, und es dürfte von geringem Interesse sein, eine solche Rechnung hier auszuführen oder einige Resultate mitzuteilen.

Um den Inhalt der von einer Kurve umschlossenen ebenen Fläche zu bestimmen, denkt man sich die Fläche entweder durch Parallele zu den Koordinatenaxen in unendlich schmale Streifen von der Länge y und der Breite dx , beziehungsweise von der Länge x und der Breite dy , also von dem Inhalte $y dx \sin \omega$ oder $x dy \sin \omega$, wenn ω der Axenwinkel ist, oder — bei Polarkoordinaten — durch Leitstrahlen in unendlich kleine Sektoren zerlegt. Der Inhalt eines solchen Sektors ist, wenn der von den Leitstrahlen ρ und $\rho + d\rho$ eingeschlossene Winkel $= d\varphi$ ist, $= \frac{1}{2} \rho (\rho + d\rho) \sin d\varphi = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi$ und daher der Inhalt eines von den Ordinaten y', y'' oder den Abscissen x', x'' , oder den Leitstrahlen ρ', ρ'' begrenzten Flächenstückes:

$$J_1 = \sin \omega \int_{x'}^{x''} y dx; \quad J_2 = \sin \omega \int_{y'}^{y''} x dy; \quad J_3 = \frac{1}{2} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \rho^2 d\varphi.$$

Mit Hilfe der letzten Formel ergibt sich im vorliegenden Falle:

$$J = 2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} (p \cos \varphi + a)^2 d\varphi = (p^2 + 2a^2) \varphi + p \sin \varphi (p \cos \varphi + 4a) + C.$$

Für $\varphi'' = \varphi' = 0$ wird $J = C$; da aber für diese Grenzen $J = 0$ ist, so muß auch $C = 0$ sein. Nimmt man als Grenze $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \pi$, so ergibt sich der Inhalt der halben Fläche $= (p^2 + 2a^2) \pi$; mithin ist der Inhalt der ganzen Fläche $= 2(p^2 + 2a^2) \pi$. Hat die Kurve eine Schleife, so besteht die Gesamt-Fläche aus zwei Teilen, von denen der eine (der von der Schleife begrenzte Teil) auf dem anderen liegt. Um den halben Inhalt jedes einzelnen Teiles zu bestimmen, hat man das Integral einmal zwischen den Grenzen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \arccos(-\frac{a}{p})$ und anderseits von $\varphi = \arccos(-\frac{a}{p})$ bis $\varphi = \pi$ zu nehmen. Dann ergibt sich:

$$i_1 = (p^2 + 2a^2) \arccos(-\frac{a}{p}) + 3a \sqrt{p^2 - a^2}$$

$$i_2 = (p^2 + 2a^2) \left[\pi - \arccos(-\frac{a}{p}) \right] - 3a \sqrt{p^2 - a^2}.$$

Innerhalb der Grenzen $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = \frac{1}{2}\pi$ liegt ein Flächenstück, dessen Inhalt $= \frac{1}{2}(p^2 + 2a^2)\pi + 4ap$ ist, während der innerhalb der Grenzen $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi'' = \pi$ liegende Flächenteil den Inhalt $\frac{1}{2}(p^2 + 2a^2)\pi - 4ap$ hat; der Unterschied beider Teile ist also konstant gleich dem achtfachen Rechtecke ap .

Komplanation und Kubatur.

Dreht sich eine ebene Kurve um eine in ihrer Ebene liegende (gerade) Linie als Axe, so beschreibt sie die Oberfläche eines sogenannten Rotationskörpers, dessen Gestalt und Größe einerseits von der gegebenen Kurve, anderseits von der Lage der Drehaxe zu derselben abhängt.

Wählt man eine der Koordinatenachsen zur Drehaxe, so ist für schiefwinklige Koordinaten mit dem Axenwinkel ω und für die X-axe als Drehaxe das Differential der Oberfläche:

$$dO = 2\pi \frac{dy + \frac{dy}{\sin \omega}}{2} \sin \omega ds, \text{ also } O = 2\pi \sin \omega \int \frac{2y + \frac{dy}{\sin \omega}}{2} ds$$

und das Differential des Volumens:

$$dV = \pi y^2 \sin^2 \omega (dx - dy \cos \omega), \text{ also } V = \pi \sin^2 \omega \int y^2 (dx - dy \cos \omega).$$

Ist $\omega = 90^\circ$, so folgt, indem man noch dy als eine im Vergleich zu y verschwindend kleine Größe vernachlässigt:

$$O = 2\pi \int x ds \text{ und } V = \pi \int y^2 dy.$$

Rotiert die Kurve um die Y-axe, so ergibt sich für rechtwinkl. Koordinaten

$$O' = 2\pi \int y ds \text{ und } V' = \pi \int x^2 dx.$$

Setzt man auch hier $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, so wird

$$O = 2\pi \int \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi, \quad O' = 2\pi \int \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V = \pi \int \rho^2 \sin^2 \varphi (-\rho \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi d\rho); \quad V' = \pi \int \rho^2 \cos^2 \varphi (\rho \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi d\rho).$$

Für $\rho = 2(p \cos \varphi + a)$ und $\frac{4ap}{(a+p)^2} = e$ wird dann

$$O = 32(a+p)\pi \left\{ (a+p) \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 2p \int \sin^3 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right\},$$

$$O' = 16(a+p)\pi \left\{ (a+p) \int d\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 2(a+2p) \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + 4p \int \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right\},$$

$$V = 8\pi \int [2p^3 \cos^5 \varphi + 5ap^2 \cos^4 \varphi + 2p(2a^2 - p^2) \cos^3 \varphi + a(a^2 - 5p^2) \cos^2 \varphi - 4a^2 p \cos \varphi - a^3] \sin \varphi d\varphi = 8\pi \left[-\frac{1}{3} p^3 \cos^6 \varphi - a p^2 \cos^5 \varphi - \frac{1}{2} p(2a^2 - p^2) \cos^4 \varphi - \frac{1}{3} a(a^2 - 5p^2) \cos^3 \varphi + 2a^2 p \cos^2 \varphi + a^3 \cos \varphi - \frac{1}{6} (4a^3 + 6a^2 p + 4ap^2 + p^3) \right],$$

$$V' = 8\pi \int [2p^3 \cos^6 \varphi + 5ap^2 \cos^5 \varphi + p(4a^2 - p^2) \cos^4 \varphi + a(a^2 - 2p^2) \cos^3 \varphi - a^2 p \cos^2 \varphi] d\varphi = \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{6} p^3 \sin 6\varphi + a p^2 \sin 5\varphi + p(2a^2 + p^2) \sin 4\varphi + \frac{1}{3} a(4a^2 + 17p^2) \sin 3\varphi + \frac{1}{2} p(24a^2 + 7p^2) \sin 2\varphi + 2a(6a^2 + 13p^2) \sin \varphi + 4p(4a^2 + p^2) \varphi \right].$$

Unter Anwendung der Guldin'schen Regel erhält man auch

$$V = \frac{2}{3} \pi \int \rho^3 \sin \varphi d\varphi; \quad V' = \frac{2}{3} \pi \int \rho^3 \cos \varphi d\varphi, \quad \text{mithin im vorliegenden Falle}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi [p^3(1 - \cos^4 \varphi) + 4p^2 a(1 - \cos^3 \varphi) + 6p a^2(1 - \cos^2 \varphi) + 4a^3(1 - \cos \varphi)],$$

$$V' = \frac{16}{3} \pi \left[\frac{p^3}{2^3} \left(\frac{1}{4} \sin 4\varphi + 2 \sin 2\varphi + 3\varphi \right) + \frac{3p^2 a}{2^2} \left(\frac{1}{3} \sin 3\varphi + 3 \sin \varphi \right) + \frac{3p a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \varphi \right) + a^3 \sin \varphi \right].$$

Um den zur Verfügung gestellten Raum nicht zu überschreiten, mußten die bei der Untersuchung der Rotationskörper gefundenen Resultate auf vorstehende wenige Angaben beschränkt, die nähere Untersuchung der Einzelkörper aber, sowie die Entwicklung der Oberflächenintegrale und die Begründung der Formeln, auf welche Fig. II hindeutet, unterdrückt werden.

Der genauere Nachweis über die benutzte Literatur erfolgt im 2. Teile.