

Die Aufgabe der vorliegenden Zeilen soll es sein, eine Einteilung der algebraischen Oberflächen nach einem unseres Wissens bisher noch nicht verfolgten Prinzip zu versuchen, welches, wie es uns scheinen will, alle algebraischen Oberflächen in durchgreifender und übersichtlicher Weise ordnet, und welches um deswillen vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürfte. Die erste Anregung zur Aufstellung dieses Prinzips haben wir durch das analoge Verfahren von älteren Geometern* bei der Einteilung algebraischer, ebener Kurven erhalten. Diese haben die algebraischen Plankurven nach den Zweigen geordnet, welche sich in das Unendliche erstrecken. Es liegt daher die Idee nicht fern, auch die algebraischen Oberflächen nach den Blättern, Fächern oder Regeln zu klassifizieren, welche sich in das Unendliche ausdehnen. Wir haben diesen Gedanken aufgenommen, und es sollen nun die folgenden Paragraphen zeigen, wie auf diesem Wege die algebraischen Flächen wirklich vollständig einteilbar sind, und zwar wird im ersten Paragraphen das Einteilungsprinzip für die Oberflächen n -ter Ordnung allgemein entwickelt werden, während in den übrigen Paragraphen dasselbe eine Anwendung auf die Oberflächen der ersten Ordnungen finden soll.

§ 1.

Entwicklung des Einteilungsprinzips für die Oberflächen n -ter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer algebraischen Oberfläche n -ter Ordnung sei in der Form gegeben:

$$1) \quad t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \dots + t_2 + t_1 + t_0 = 0,$$

wobei t_n die Vereinigung aller derjenigen Glieder bedeutet, in denen die Koordinaten x, y, z eines Oberflächenpunktes, bezogen auf ein Raumparallelsystem, in der n -ten Dimension vorkommen. Um zu erfahren, ob die durch die Gleichung 1) dargestellte Oberfläche ins Unendliche strebt, oder ob sie auf den endlichen Raum beschränkt ist, führen wir folgende Werte ein:

$$2) \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y = r \cos \varphi \sin \vartheta, \\ z = r \sin \varphi; \end{cases}$$

in diesem Gleichungssysteme ist unter r die Verbindungslinie des Oberflächenpunktes (x, y, z) mit dem Koordinatenanfangspunkte zu verstehen, φ bedeutet den Neigungswinkel dieses Strahles gegen die xy -Ebene und ϑ ist der Winkel, welcher von der x -Achse und der Projektion des Radius auf die xy -Ebene eingeschlossen wird. Nach Einsetzung dieser Werte teilen wir die ganze Gleichung durch r^n

*) Vergleiche besonders: Newton, enumeratio linearum tertii ordinis. 1704.

Euler, introductio in analysin infinitorum. 1748.

Cramer, introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. 1750.

und setzen schließlich $r = \infty$. Es verschwinden dann alle Glieder bis auf diejenigen, welche von t_n herühren. Die übrig bleibende Gleichung ist der analytische Ausdruck für diejenige Kurve, welche die Oberfläche n -ter Ordnung aus einer Kugelfläche ausschneidet, deren Radius unendlich groß ist, also etwa aus dem scheinbaren Himmelsgewölbe. Wird die zuletzt gefundene Gleichung durch $\cos^n \varphi$ dividiert, so kann ihr folgende Gestalt gegeben werden:

$$3) \quad \operatorname{tg}^n \varphi + \operatorname{tg}^{n-1} \varphi f_1(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \operatorname{tg}^{n-2} \varphi f_2(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \dots + \operatorname{tg}^2 \varphi f_{n-2}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \operatorname{tg} \varphi f_{n-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + f_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = 0;$$

hierin stellt $f_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ eine homogene Funktion von $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$ in der n -ten Dimension dar.

Ist n eine ungerade Zahl, so wird sich $\operatorname{tg} \varphi$ mindestens einmal reell durch $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$ ausdrücken lassen, die Oberfläche wird mindestens eine reelle Kurve aus der Fläche der unendlich großen Kugel ausschneiden, oder mit anderen Worten, jede algebraische Oberfläche einer ungeradzahligten Ordnung wird sich mindestens mit einem Blatte oder Fache ins Unendliche ausdehnen. Wenn dagegen der Grad der Gleichung 3) eine gerade Zahl ist, so wird sich $\operatorname{tg} \varphi$ nicht immer reell durch $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$ darstellen lassen; die Kurve, welche eine solche Fläche aus der Oberfläche der unendlich großen Kugel ausschneidet, kann imaginär, sie kann aber auch reell sein; mithin werden hier Flächen vorhanden sein, welche auf den endlichen Raum beschränkt sind, und solche, welche ins Unendliche hinausstreben. Denken wir uns nun alle Punkte der Kurve, welche die Oberfläche n -ter Ordnung aus der Fläche der unendlich großen Kugel herauserschneidet, mit dem Anfangspunkte der Koordinaten geradlinig verbunden, so entsteht ein Kegel n -ter Ordnung, welcher reell sein wird, wenn die ausgeschnittene Kugelflächenkurve reell ist, und welcher imaginär sein wird, wenn die ausgeschnittene Kugelflächenkurve imaginär ist. Auf alle Fälle wird es einen solchen Kegel n -ter Ordnung geben, mag er nun reell, oder mag er imaginär sein. Nach der Beschaffenheit dieses Kegels, welcher aus der Oberfläche der unendlich großen Kugel dieselbe Kurve wie die Oberfläche n -ter Ordnung ausschneidet, werden sich alle algebraischen Oberflächen in durchgreifender und übersichtlicher Weise klassifizieren lassen.

Um die Gleichung dieses Kegels n -ter Ordnung zu finden, multiplizieren wir die Gleichung 3) mit $r^n \cos^n \varphi$ und setzen die Werte für $r \cos \varphi \cos \vartheta$, $r \cos \varphi \sin \vartheta$ und $r \sin \varphi$ aus dem Gleichungssystem 2) rückwärts wieder ein; es ergibt sich so:

$$4) \quad z^n + z^{n-1} f_1(x, y) + z^{n-2} f_2(x, y) + \dots + z^2 f_{n-2}(x, y) + z f_{n-1}(x, y) + f_n(x, y) = 0,$$

wobei $f_n(x, y)$ eine homogene Funktion n -ten Grades von x, y bedeutet.

Läßt sich diese Gleichung 4) in rationale Faktoren niederen Grades, von denen jeder in Bezug auf x, y, z homogen sein muß, nicht zerlegen, so stellt sie einen eigentlichen Kegel n -ter Ordnung dar, welcher in Kegel niederer Ordnungen nicht zerfallbar ist. Wenn aber eine solche Zerlegung möglich ist, so wird sie repräsentieren können:

- einen unzerlegbaren Kegel $(n-1)$ ter Ordnung und einen solchen 1. Ordnung,
- einen unzerlegbaren Kegel $(n-2)$ ter Ordnung und einen solchen 2. Ordnung,
- einen unzerlegbaren Kegel $(n-2)$ ter Ordnung und zwei Kegel 1. Ordnung u. s. w.

Darum werden sich auch die Oberflächen n -ter Ordnung in solche Gebilde einteilen lassen, bei denen die zugehörige Kegelformel n -ter Ordnung darstellt:

- A) einen unzerlegbaren Kegel n -ter Ordnung,
- B) einen unzerlegbaren Kegel $(n-1)$ ter Ordnung und einen Kegel 1. Ordnung,

- C) einen unzerlegbaren Regel $(n-2)$ ter Ordnung und einen solchen 2. Ordnung,
 D) einen unzerlegbaren Regel $(n-2)$ ter Ordnung und zwei Regel 1. Ordnung,
 E) einen unzerlegbaren Regel $(n-3)$ ter Ordnung und einen solchen 3. Ordnung,
 F) einen unzerlegbaren Regel $(n-3)$ ter Ordnung, einen solchen zweiter Ordnung und einen Regel 1. Ordnung,
 G) einen unzerlegbaren Regel $(n-3)$ ter Ordnung und drei Regel 1. Ordnung
 u. j. f. bis
 Z) n Regel erster Ordnung.

Obwohl der durch die Gleichung 4) ausgedrückte Regel n -ter Ordnung derselben Kurve wie die durch die Gleichung 1) dargestellte Oberfläche n -ter Ordnung zustrebt, welche diese aus der Oberfläche der unendlich großen Kugel ausschneidet, so darf dieser Regel im allgemeinen doch nicht als Asymptotenregel für die Oberfläche n -ter Ordnung angesehen werden, da die Spitze desselben irgendwo im endlichen Raume liegen kann, aber nicht notwendiger Weise im Anfangspunkte der Koordinaten liegen muß; er wird aber parallele Lage zum Asymptotenregel der Oberfläche n -ter Ordnung haben, und darum wird seine Form mit der des Asymptotenregels übereinstimmen.

Wir gehen jetzt dazu über, das entwickelte Einteilungsprinzip auf die Oberflächen der ersten Ordnungen anzuwenden.

§ 2.

Einteilung der Oberflächen 1. und 2. Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer Oberfläche 1. Ordnung lautet:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_0 = 0.$$

Setzen wir, wie oben angegeben:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y = r \cos \varphi \sin \vartheta, \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$$

teilen hierauf die Gleichung durch r und lassen r über alle Grenzen wachsen, so resultiert als Gleichung derjenigen Linie, welche die Fläche 1. Ordnung aus der Oberfläche der unendlich großen Kugel herauserschneidet:

$$a_1 \cos \varphi \cos \vartheta + a_2 \cos \varphi \sin \vartheta + a_3 \sin \varphi = 0.$$

Denken wir uns jetzt alle Punkte dieser Kurve mit dem Anfangspunkte der Koordinaten geradlinig verbunden, so entsteht der Regel 1. Ordnung, dessen Gleichung dadurch gefunden wird, daß wir die zuletzt gefundene Gleichung mit r multiplizieren und für $r \cos \varphi \cos \vartheta$, $r \cos \varphi \sin \vartheta$ und $r \sin \varphi$ die früheren Werte einsetzen. Auf diese Weise wird als Regelgleichung 1. Ordnung erhalten:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0.$$

Sie stellt eine Ebene dar, welche sich vermittelt Drehung des Koordinatensystems durch: $X = 0$ ausdrücken läßt. In diesem neuen System wird die Gleichung unserer gegebenen Oberfläche 1. Ordnung: $X + a_0 = 0$ heißen. Durch Verschiebung des Anfangspunktes der Koordinaten auf der x -Achse um die Strecke a_0 wird sich die Gleichung der gegebenen Fläche schließlich auf: $\xi = 0$ zurückführen lassen. Hieraus erhellt, daß es nur eine einzige Oberflächenart der 1. Ordnung, nämlich die Ebene giebt. —

Die allgemeine Gleichung der Flächen 2. Ordnung kann in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$1) a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + a_{22} y^2 + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 + 2(a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z) + a_{00} = 0.$$

Verfahren wir ähnlich wie vorher, so lautet die Gleichung des Kegels 2. Ordnung, nach welchem wir die Flächen 2. Ordnung klassifizieren:

$$2) a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + a_{22} y^2 + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 = 0, \text{ oder}$$

$$z = \frac{-(a_{31}x + a_{23}y) \pm \sqrt{(a_{31}^2 - a_{33}a_{11})x^2 + 2(a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33})xy + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})y^2}}{a_{33}}$$

Ist der Radikand ein vollkommenes Quadrat, was der Fall sein wird, wenn

$$-(a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{31}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{23}a_{31})$$

verschieden von Null ist, so wird der durch die Gleichung 2) ausgedrückte Kegel unzerlegbar sein. Ist dagegen der Radikand ein vollkommenes Quadrat, was stattfindet, wenn

$$a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{31}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0$$

ist, so wird sich die Kegelformel 2) in zwei imaginäre oder reelle Faktoren vom ersten Grade zergliedern lassen, oder mit anderen Worten, die Gleichung 2) wird zwei imaginäre oder reelle Ebenen darstellen. Darum werden die Oberflächen 2. Ordnung in zwei Geschlechter eingeteilt werden können:

das Geschlecht A) wird diejenigen Flächen enthalten, bei denen die Gleichung 2) einen unzerlegbaren, elliptischen Kegel repräsentiert, und

das Geschlecht B) wird solche Flächen umfassen, bei denen die Gleichung 2) zwei Ebenen darstellt.

Um die Kegelformel 2) auf ihre einfachste Form zu bringen, drehen wir das Koordinatensystem, so daß die Koeffizienten von xy , yz und zx verschwinden. Die so umgeformte Kegelformel möge heißen:

$$3) LX^2 + MY^2 + NZ^2 = 0.$$

Sind alle drei Koeffizienten von X^2 , Y^2 , Z^2 von Null verschieden, so ist der durch die Gleichung 3) ausgedrückte Kegel unzerlegbar; wenn aber ein oder zwei Koeffizienten verschwinden, so ist der Kegel in Ebenen zerlegbar.

Zum Geschlecht A) gehören zwei Kegel:

$$I) A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 = 0; \text{ der imaginäre, elliptische Kegel, von dem nur der Scheitel: } X=Y=Z=0, \text{ reell ist, und}$$

$$II) A^2X^2 + B^2Y^2 - C^2Z^2 = 0; \text{ der reelle, elliptische Kegel.}$$

In der Kegelformel I) haben alle drei Koeffizienten gleiches Vorzeichen, in der Gleichung II) nicht.

Das Geschlecht B) enthält drei Kegel:

$$III) A^2X^2 + B^2Y^2 = 0; \text{ zwei imaginäre Ebenen, bei denen nur die Schnittkante: } X=Y=0, \text{ reell ist,}$$

$$IV) A^2X^2 - B^2Y^2 = 0; \text{ zwei reelle Ebenen, welche verschieden von einander sind, und}$$

$$V) X^2 = 0, \text{ zwei reelle, zusammenfallende Ebenen.}$$

In der Gleichung III) ist ein Koeffizient z. B. der von Z^2 gleich Null, die anderen beiden haben gleiches Vorzeichen; bei IV) ist ein Koeffizient Null, die anderen beiden besitzen ungleiches Vorzeichen, und bei V) sind zwei Koeffizienten z. B. die von Y^2 und Z^2 gleich Null.

Deswegen lassen sich alle Oberflächen 2. Ordnung in fünf Familien ordnen. Die allgemeine Gleichung der ersten Familie wird lauten:

$$A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 + 2(DX + EY + FZ) + G = 0,$$

welche durch Verlegung des Anfangspunktes der Koordinaten in:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 + h = 0,$$

übergeht. Durch entsprechende Umbildung wird die Gleichung der zweiten Familie heißen:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 + h = 0,$$

die der dritten wird sein:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + 2c\zeta + h = 0,$$

die der vierten:

$$a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 + 2c\zeta + h = 0$$

und die der fünften:

$$\xi^2 + 2a\eta + h = 0.$$

Die erste Familie umfaßt:

- 1) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 + k^2 = 0$; das imaginäre Ellipsoid, welches keinen reellen Punkt hat;
- 2) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 - k^2 = 0$; das reelle Ellipsoid, und
- 3) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = 0$; den imaginären, elliptischen Kegel, von dem nur die Spitze reell ist.

Die zweite Familie enthält:

- 4) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 + k^2 = 0$; das zweifache Hyperboloid;
- 5) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 - k^2 = 0$; das einfache Hyperboloid, und
- 6) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 = 0$; den reellen, elliptischen Kegel.

Die dritte Familie wird gebildet:

- 7) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + 2c\zeta = 0$; von dem elliptischen Paraboloid;
- 8) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + k^2 = 0$; von dem imaginären, elliptischen Cylinder, welcher keinen reellen Punkt besitzt,
- 9) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - k^2 = 0$; von dem reellen, elliptischen Cylinder, und
- 10) $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = 0$; von zwei imaginären Ebenen, welche sich schneiden und bei denen nur die Schnittkante reell ist.

Zur vierten Familie gehören:

- 11) $a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 + 2c\zeta = 0$; das hyperbolische Paraboloid;
- 12) $a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 + h = 0$; der hyperbolische Cylinder, und
- 13) $a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 = 0$; zwei reelle Ebenen, welche sich schneiden.

Der fünften Familie sind zugeordnet:

- 14) $\xi^2 + 2a\eta = 0$; der parabolische Cylinder;
- 15) $\xi^2 + k^2 = 0$; zwei imaginäre Parallelebenen, welche keine reellen Punkte haben;
- 16) $\xi^2 - k^2 = 0$; zwei reelle Parallelebenen, welche getrennt von einander liegen, und
- 17) $\xi^2 = 0$; zwei reelle, zusammenfallende Parallelebenen.

Obwohl die räumlichen Gebilde 1), 8) und 15) in Wirklichkeit nicht darstellbar sind, so dürfen sie bei der Aufzählung ebenso wenig weggelassen werden wie die imaginären Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Im ganzen giebt es also $(2^2 + 1)$ Oberflächen 2. Ordnung; die drei ersten sind auf den endlichen Raum beschränkt; die übrigen erstrecken sich bis in das Unendliche.

§ 3.

Klassifikation der Oberflächen 3. Ordnung nach der Beschaffenheit des kubischen Kegels.
Transformation der kubischen Kegelform auf die einfachste Form.

Die allgemeine Gleichung der Oberflächen 3. Ordnung lautet:

$$1) \ a_{111} x^3 + 3a_{112} x^2 y + 3a_{113} x^2 z + 3a_{122} x y^2 + 6a_{123} x y z + 3a_{133} x z^2 + a_{222} y^3 + 3a_{223} y^2 z + 3a_{233} y z^2 + a_{333} z^3 + 3(a_{011} x^2 + 2a_{012} x y + 2a_{013} x z + a_{022} y^2 + 2a_{023} y z + a_{033} z^2) + 3(a_{001} x + a_{002} y + a_{003} z) + a_{000} = 0.$$

Benutzen wir auch hier das in § 1 erwähnte Verfahren, so werden sich alle kubischen Oberflächen nach der Beschaffenheit des Kegels einteilen lassen, welcher durch die Gleichung:

$$2) \ a_{111} x^3 + 3a_{112} x^2 y + 3a_{113} x^2 z + 3a_{122} x y^2 + 6a_{123} x y z + 3a_{133} x z^2 + a_{222} y^3 + 3a_{223} y^2 z + 3a_{233} y z^2 + a_{333} z^3 = 0$$

dargestellt wird. Offenbar sind hier drei Fälle möglich. Die Gleichung 2) ist entweder in Faktoren niederen Grades nicht zerlegbar, oder sie ist in zwei Faktoren zerlegbar, von denen der eine in Bezug auf x, y, z homogen und vom zweiten Grade, der andere vom ersten Grade ist, oder endlich sie ist in drei lineare Faktoren zerlegbar. Darum lassen sich alle Oberflächen 3. Ordnung in drei Geschlechter klassifizieren:

Das Geschlecht A enthält diejenigen Flächen, bei denen die Gleichung 2) einen unzerlegbaren Kegel 3. Ordnung darstellt;

das Geschlecht B umfaßt solche Flächen, bei denen die Gleichung 2) einen unzerlegbaren Kegel 2. Ordnung und eine Ebene repräsentiert, und

das Geschlecht C begreift solche Flächen in sich, bei denen die Gleichung 2) drei Ebenen ausdrückt.

Um zu erfahren, wenn der durch die Gleichung 2) dargestellte Kegel in Kegel niederen Grades zerfällt, schneiden wir ihn durch die Ebene

$$3) \ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

und untersuchen die Projektion dieses Schnittes in der yz -Ebene. Als Gleichung dieser Projektion wird erhalten:

$$4) \ y^3(a_{111}\beta^3 - 3a_{112}\alpha\beta^2 + 3a_{122}\alpha^2\beta - a_{222}\alpha^3) + 3y^2z(a_{111}\beta^2\gamma - 2a_{112}\alpha\beta\gamma - a_{113}\alpha\beta^2 + a_{122}\gamma\alpha^2 + 2a_{123}\alpha^2\beta - a_{223}\alpha^3) + 3yz^2(a_{111}\beta\gamma^2 - a_{112}\gamma^2\alpha - 2a_{113}\alpha\beta\gamma + 2a_{123}\gamma\alpha^2 + a_{133}\alpha^2\beta - a_{233}\alpha^3) + z^3(a_{111}\gamma^3 - 3a_{113}\gamma^2\alpha + 3a_{133}\gamma\alpha^2 - a_{333}\alpha^3) = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Ebene 3) den kubischen Kegel 2) im allgemeinen in drei geraden Linien schneidet; sie lehrt aber auch, daß dieser kubische Kegel in Kegel niederen Grades zerfällt, wenn solche Werte für α, β, γ gefunden werden können, welche gleichzeitig die Gleichungen:

$$5) \ \begin{cases} a_{111}\beta^3 - 3a_{112}\alpha\beta^2 + 3a_{122}\alpha^2\beta - a_{222}\alpha^3 = 0, \\ a_{111}\beta^2\gamma - 2a_{112}\alpha\beta\gamma - a_{113}\alpha\beta^2 + a_{122}\gamma\alpha^2 + 2a_{123}\alpha^2\beta - a_{223}\alpha^3 = 0, \\ a_{111}\beta\gamma^2 - a_{112}\gamma^2\alpha - 2a_{113}\alpha\beta\gamma + 2a_{123}\gamma\alpha^2 + a_{133}\alpha^2\beta - a_{233}\alpha^3 = 0, \\ a_{111}\gamma^3 - 3a_{113}\gamma^2\alpha + 3a_{133}\gamma\alpha^2 - a_{333}\alpha^3 = 0, \end{cases}$$

befriedigen. Können dagegen keine Werte für α, β, γ gefunden werden, die dem Gleichungssysteme 5) gleichzeitig Genüge leisten, so ist der kubische Kegel in Kegel niederen Grades nicht zerfallbar, er ist ein eigentlicher Kegel 3. Ordnung. Wir beginnen mit der Betrachtung des letzteren.

Um die Gleichung dieses unzerlegbaren Kegels auf die einfachste Form zu bringen, wählen wir die schneidende Ebene 3) so, daß der Kegel in drei zusammenfallenden, geraden Linien geschnitten wird. Dies findet statt, wenn die linke Seite der Gleichung 4) zu einem vollkommenen Kubus gemacht wird.

Die Bedingungen hierfür sind:

$$6) \begin{cases} (a_{111}\beta^2\gamma - 2a_{112}\alpha\beta\gamma - a_{113}\alpha\beta^2 + a_{122}\gamma\alpha^2 + 2a_{123}\alpha^2\beta - a_{223}\alpha^3)^3 = \\ = (a_{111}\beta^3 - 3a_{112}\alpha\beta^2 + 3a_{122}\alpha^2\beta - a_{222}\alpha^3)^2 \cdot (a_{111}\gamma^3 - 3a_{113}\gamma^2\alpha + 3a_{133}\gamma\alpha^2 - a_{333}\alpha^3) \\ (a_{111}\beta\gamma^2 - a_{112}\gamma^2\alpha - 2a_{113}\alpha\beta\gamma + 2a_{123}\gamma\alpha^2 + a_{133}\alpha^2\beta - a_{233}\alpha^3)^3 = \\ = (a_{111}\beta^3 - 3a_{112}\alpha\beta^2 + 3a_{122}\alpha^2\beta - a_{222}\alpha^3) \cdot (a_{111}\gamma^3 - 3a_{113}\gamma^2\alpha + 3a_{133}\gamma\alpha^2 - a_{333}\alpha^3)^2. \end{cases}$$

Denken wir uns diese dreifach berührende Ebene bestimmt, so wählen wir ein neues Koordinatensystem von solcher Art, daß die dreifach berührende Ebene $\overline{yz}$ -Ebene und die dreifache Tangentenfante $\overline{z}$ -Achse wird. Die so umgestaltete Gleichung läßt sich dann in folgender Form schreiben:

$$7) (AX + BY + CZ)^2 \cdot X + (DX + EY) \cdot (FX^2 + 2GXY + HY^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist für die Interpretation im allgemeinen die empfehlenswerteste, auf welche sich der unzerlegbare, kubische Kegel zurückführen läßt, wenn nur rechtwinkelige Koordinatenachsen angewendet werden; sie wird aber durch Anwendung schiefwinkliger Achsen noch wesentlich vereinfacht. Denn wird gesetzt:

$$8) \begin{cases} X = X' \sin \omega, \\ Y = X' \cos \omega + Y', \text{ wobei } \operatorname{tg} \omega = -\frac{E}{D} \text{ ist,} \end{cases}$$

so verwandelt sich die Gleichung 7) in:

$$9) (A'X' + B'Y' + C'Z)^2 \cdot X' + Y' (F'X'^2 + 2G'X'Y' + H'Y'^2) = 0,$$

und wenn nun weiter:

$$10) \begin{cases} X' = \xi \sin \psi, \\ Y' = \eta \sin \chi, \\ Z = \xi \cos \psi + \eta \cos \chi + \zeta, \end{cases}$$

gewählt wird, wobei die Beziehungen gelten:

$$11) \begin{cases} \operatorname{tg} \psi = -\frac{C'}{A'}, \\ \operatorname{tg} \chi = -\frac{C'}{B'}, \end{cases}$$

so erscheint die kubische Kegelsgleichung in ihrer einfachsten Form:

$$12) (a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2) \cdot \eta + h\zeta^2 \cdot \xi = 0.$$

Gehe wir nun zur Erörterung dieser Gleichung übergehen, möge ein Beispiel in bestimmten Zahlen den Gang der Transformation veranschaulichen. Die Gleichung eines Kegels 3. Ordnung in rechtwinkligen Koordinaten möge heißen:

$$14x^3 + 3.5x^2y - 3.30x^2z - 3.6xy^2 - 6.2xyz + 3.4xz^2 + 43y^3 - 3.2y^2z - 3.24yz^2 + 8z^3 = 0.$$

Die Bedingungen dafür, daß die Ebene: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, den Kegel in drei zusammenfallenden, geraden Linien berührt, sind:

$$\begin{cases} (14\beta^2\gamma - 10\alpha\beta\gamma + 30\alpha\beta^2 - 6\gamma\alpha^2 - 4\alpha^2\beta + 2\alpha^3)^3 = \\ = (14\beta^3 - 15\alpha\beta^2 - 18\alpha^2\beta - 43\alpha^3)^2 \cdot (14\gamma^3 + 90\gamma^2\alpha + 12\gamma\alpha^2 - 8\alpha^3), \\ (14\beta\gamma^2 - 5\gamma^2\alpha + 60\alpha\beta\gamma - 4\gamma\alpha^2 + 4\alpha^2\beta + 24\alpha^3)^3 = \\ = (14\beta^3 - 15\alpha\beta^2 - 18\alpha^2\beta - 43\alpha^3) \cdot (14\gamma^3 + 90\gamma^2\alpha + 12\gamma\alpha^2 - 8\alpha^3)^2. \end{cases}$$

Diese beiden Bedingungsgleichungen werden befriedigt durch:

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha, \\ \gamma = -2\alpha; \end{cases}$$

darum ist: $x + 2y - 2z = 0$, eine dreifach berührende Ebene in der Kante:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

Wird jetzt diese Kante zur neuen z -Achse und die dreifach berührende Ebene zur neuen yz -Ebene gewählt, so entsteht:

$$(3X^2 - Y^2) \cdot Y + 4Z^2 \cdot X = 0,$$

eine Gleichung, welche einer weiteren Umbildung nicht mehr bedarf.

Häufig gelingt die Bestimmung der dreifach berührenden Ebene nicht so leicht; durch ein- oder zweimalige Drehung des Koordinatensystems um die x -, beziehentlich um die z -Achse lassen sich aber die Koeffizienten von z^3 und yz^2 zum Verschwinden bringen, wodurch die Bedingungsgleichungen 6) sehr bedeutend vereinfacht werden.

§ 4.

Von den fünf unzerlegbaren Regeln 3. Ordnung.

Wir gehen nun zur Untersuchung der Gleichung:

$$(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2) \cdot \eta + h\xi^2 \cdot \xi = 0$$

über. Schreiben wir sie in folgender Weise:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{-(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2) \cdot \eta}{h\xi}},$$

so erhellt, daß die $\xi\eta$ -Ebene durch die Mitten derjenigen Sehnen geht, welche zur ξ -Achse parallel gezogen sind; die $\xi\eta$ -Ebene ist daher Durchmesserene.

Um die Gestalt der verschiedenen, unzerlegbaren, kubischen Regel zu bestimmen, welche durch die eben angeführte Gleichung dargestellt werden, bedienen wir uns einer Hilfskugel, welche konzentrisch zum Regel liegt und den Radius 1 besitzt. Kugel und Regel werden sich in einer gewissen Kurve schneiden, deren Form von der Beschaffenheit des Aggregats: $(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2) \cdot \eta$, abhängt; folgende Fälle werden hier zu unterscheiden sein:

$$1) [\xi^2 + 2m\xi\eta + (m^2 + n^2) \cdot \eta^2] \cdot \eta + h\xi^2 \xi = 0;$$

die von ξ freien Glieder bestehen aus einem reellen und zwei komplexen Faktoren; ein derartiger Regel schneidet aus der Hilfskugel eine Schlangenlinie heraus, welche in sich zurückläuft; siehe Figur 1, Tafel I; mithin besteht dieser kubische Regel aus einem Blatte.

$$2) (\eta + m\xi)(\eta + n\xi) \cdot \eta + h\xi^2 \xi = 0;$$

die von ξ freien Glieder bestehen aus drei reellen Faktoren, welche verschieden von einander sind; ein solcher Regel schneidet aus der Hilfskugel außer einer Schlangenlinie noch zwei Cilinien heraus, welche diametral gegenüber liegen; siehe Figur 2, Tafel I; daher wird dieser kubische Regel zweiblättrig sein.

$$3) (\eta + m^2\xi) \cdot \eta^2 + k^2 \cdot \xi^2 \cdot \xi = 0;$$

die von ξ freien Glieder bestehen aus zwei reellen, gleichen und einem reellen, ungleichen Faktor; die Vorzeichen der Koeffizienten von $\xi\eta^2$ und $\xi\xi^2$ sind einander gleich. Die Hilfskugel hat mit einem

derartigen Regel eine Schlangenlinie und zwei Einzelpunkte gemeinsam, welche einander diametral gegenüberliegen, siehe Figur 3, Tafel I; daher besteht der kubische Regel aus einem Blatte mit schlangenförmiger Basis und aus einer Einkante.

$$4) (\eta - m^2 \cdot \xi) \cdot \eta^2 + k^2 \zeta^2 \cdot \xi = 0;$$

die von ζ freien Glieder zerfallen in zwei reelle, gleiche und einen reellen, ungleichen Faktor; die Vorzeichen der Koeffizienten von $\xi \eta^2$ und $\xi \zeta^2$ sind nicht gleich. Der Regel schneidet aus der Hilfskugel eine verschleifte Linie heraus, die in sich zurückläuft; siehe Figur 4, Tafel I; darum ist dieser kubische Regel auch verschleift und besitzt eine Doppellante.

$$5) \eta^3 + h \zeta^2 \xi = 0;$$

die von ζ freien Glieder sind in drei reelle, gleiche Faktoren zerlegbar. Der Regel hat mit der Hilfskugel eine Kurve gemeinsam, welche in sich zurückläuft und welche zwei diametral gegenüberliegende Rückkehrpunkte besitzt; siehe Figur 5, Tafel I; daher ist dieser kubische Regel einblättrig und hat eine Rückfante.

Es wird nicht überflüssig erscheinen, einige numerische Beispiele einzufügen; der Einfachheit wegen möge das ξ, η, ζ -Koordinatensystem rechtwinkelig vorausgesetzt werden.

1. Beispiel.

$$4 (\xi^2 + \eta^2) \cdot \eta - \zeta^2 \xi = 0.$$

Wird hier

$$\begin{cases} \xi = \cos \varphi \cdot \cos \vartheta, \\ \eta = \cos \varphi \cdot \sin \vartheta, \\ \zeta = \sin \varphi, \end{cases}$$

gewählt, so entsteht als Gleichung derjenigen Linie, welche der gegebene, kubische Regel aus der Hilfskugel mit dem Radius 1 herauschneidet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm 2 \sqrt{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Damit wir die Form dieser Schnittkurve kennen lernen, entwerfen wir uns eine kleine Tafel und lassen ϑ in Intervallen von 5 zu 5 Graden fortschreiten; die Werte von φ , welche den einzelnen ϑ entsprechen, geben wir auf ganze Grade abgerundet an, welche Genauigkeit unserem Zwecke vollständig genügt; die sphärischen Koordinaten der ausgezeichneten Punkte rechnen wir bis auf ganze Sekunden.

Sist ϑ	so wird φ
90°	± 90° Wendung
85	± 82
80	± 78
75	± 75
70	± 73
65	± 71
60	± 69
55	± 67
50	± 65
45	± 63
40	± 61
35	± 59
30	± 57
25	± 54
21° 28' 15"	51° 26' 10" Wendung
20°	± 50°
15	± 46
10	± 40
5	± 31
0°	0°

Für negative ϑ ist φ imaginär. Die Gleichungen für die Wendungstangentenebenen sind:

$$\begin{cases} \xi = 0, \\ \zeta = +\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{3(2\sqrt{3}-3)} \cdot [\xi \sqrt{2\sqrt{3}-3} + 3 \cdot \eta], \\ \zeta = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{3(2\sqrt{3}-3)} \cdot [\xi \sqrt{2\sqrt{3}-3} + 3 \cdot \eta]. \end{cases}$$

Denken wir uns nun jeden Punkt der Schnittkurve auf der Kugel mit dem Zentrum verbunden, so entsteht der gesuchte, kubische Regel.

Als 2. Beispiel wählen wir das aus dem vorhergehenden Paragraphen:

$$(3\xi^2 - \eta^2)\eta + 4\xi^2 \cdot \xi = 0.$$

Die Gleichung der gemeinsamen Linie von Regel und Hilfskugel mit dem Radius 1 ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin(\vartheta - 60) \cdot \sin(\vartheta + 60)}$$

ϑ	φ	ϑ	φ
90°	± 90° Wendung	— 15°	± 23° Wendung
85	± 59	— 20	± 26
80	± 48	— 25	± 27
75	± 40	— 30	± 28
70	± 31	— 35	± 28° 30'
68° 31' 45"	± 28° 30' 28" Wendung	— 40	± 28°
65°	± 21°	— 45	± 27
60	0°	— 50	± 24
59° 59' 59"	} imaginär	— 55	± 19
: : :		— 60	0
0° 0' 1"		— 60° 0' 1"	} imaginär.
0°	0°	: : :	
— 5°	± 14°	— 89° 59' 59"	
— 10	± 20	— 90°	± 90°

Die Gleichungen für die Wendungstangentenebenen sind:

$$\begin{cases} \xi = 0, \\ \zeta = +\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{3+2\sqrt{3}} \cdot [\xi \sqrt{3+2\sqrt{3}} - \eta \sqrt{3}], \\ \zeta = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{3+2\sqrt{3}} \cdot [\xi \sqrt{3+2\sqrt{3}} - \eta \sqrt{3}]. \end{cases}$$

3. Beispiel.

$$(\xi - \eta \sqrt{3}) \cdot \eta^2 + 2\zeta^2 \cdot \xi = 0.$$

Die Gleichung der Schnittkurve von Regel und Hilfskegel lautet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sin \vartheta \sqrt{\frac{\sin(\vartheta - 30^\circ)}{\cos \vartheta}}$$

ϑ	φ	ϑ	φ
90°	$\pm 90^\circ$ Wendung	37° 35' 21''	$\pm 13^\circ 59' 2''$ Wendung
85	± 72	35°	$\pm 11^\circ$
80	± 64	30	0°
75	± 58	29° 59' 59''	} imaginär.
70	± 52	: : :	
65	± 47	0° 0' 1''	
60	± 41	0°	0° Einzelpunkt
55	± 35	- 0° 0' 1''	} imaginär
50	± 29	: : :	
45	± 23	- 89° 59' 59''	
40	± 17	- 90°	$\pm 90^\circ$

Die Gleichungen der Wendungstangentenebenen sind:

$$\begin{cases} \xi = 0, \\ \zeta = + \sqrt{2} \left[\frac{4}{9} \xi - \eta \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \\ \zeta = - \sqrt{2} \left[\frac{4}{9} \xi - \eta \frac{\sqrt{3}}{2} \right]. \end{cases}$$

4. Beispiel.

$$(\xi + \eta \sqrt{3}) \cdot \eta^2 - 2\zeta^2 \cdot \xi = 0;$$

Die Gleichung der Schnittkurve von Regel und Hilfskegel heißt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sin \vartheta \sqrt{\frac{\sin(\vartheta + 30^\circ)}{\cos \vartheta}}$$

ϑ	φ	ϑ	φ
90°	$\pm 90^\circ$ Wendung	15°	$\pm 12^\circ$ Wendung
85	± 73	10	± 8
80	± 66	5	± 4
75	± 62	0	0° Knotenpunkt
70	± 58	- 5	∓ 3
65	± 54	- 10	∓ 6
60	± 51	- 15	$\mp 7^\circ 38'$
55	± 47	- 20	$\mp 8^\circ 22'$
50	± 43	- 25	$\mp 7^\circ 28'$
45	± 40	- 30	0°
40	± 35	- 30° 0' 1''	} imaginär.
35	± 31	: : :	
30	± 27	- 89° 59' 59''	
25	± 22	- 90°	$\mp 90^\circ$
20	± 17		

Die Gleichung der Wendungstangentenebene ist: $\xi = 0$; die beiden anderen dreifach berührenden Ebenen gehen durch die Knotenante; ihre Gleichungen lauten:

$$\begin{cases} \eta = + \zeta \sqrt{2}, \\ \eta = - \zeta \sqrt{2}. \end{cases}$$

5. Beispiel.

$$\eta^5 - \zeta^2 \cdot \xi = 0.$$

Die Gleichung der Schnittlinie von Kegel und Hilfskegel ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sin \vartheta \sqrt{\operatorname{tg} \vartheta}$$

ϑ	φ	ϑ	φ
90°	± 90° Wendung	30°	± 21° Wendung
85	± 73	25	± 16
80	± 67	20	± 12
75	± 62	15	± 8
70	± 57	10	± 4
65	± 53	5	± 1
60	± 49	0	0° Rückkehrpunkt
55	± 44	— 0° 0' 1''	} imaginär.
50	± 40	: : :	
45	± 35	— 89° 59' 59''	
40	± 30	— 90°	± 90°
35	± 26		

Die Gleichung der Wendungstangentenebene heißt: $\xi = 0$; die übrigen dreifach berührenden Ebenen fallen zusammen; sie gehen durch die Rückkehrkante; ihre Gleichung ist: $\zeta^2 = 0$.

§ 5.

Einteilung der Oberflächen 3. Ordnung in Familien.

Wir hatten in § 3 kennen gelernt, daß die Oberflächen 3. Ordnung in drei Geschlechter zerfallen. Das Geschlecht A umfaßt solche Gebilde, bei denen die Gleichung 2) in § 3 einen unzerlegbaren, kubischen Kegel darstellt. Da es nun nach dem vorhergehenden Paragraphen fünf verschiedenartige, kubische Kegel giebt, so kann dieses Geschlecht in fünf Familien gegliedert werden. Es bleibt nun noch übrig, auch die Geschlechter B und C in Familien zu teilen. Ohne Schwierigkeit ergibt sich folgende Anordnung: Das Geschlecht B wird von vier Familien gebildet; hierher gehören alle die Oberflächen 3. Ordnung, bei denen die zugehörige, kubische Kegelgleichung repräsentiert:

$$1) \xi(a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) = 0;$$

einen unzerlegbaren, elliptischen, imaginären Kegel und eine Ebene;

$$2) \xi(a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2) = 0;$$

einen unzerlegbaren, elliptischen, reellen Kegel und eine Ebene, welche den Kegel in zwei imaginären Kanten schneidet;

$$3) \xi(a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2) = 0;$$

einen unzerlegbaren, elliptischen, reellen Kegel und eine Ebene, welche den Kegel in zwei reellen, verschiedenen Kanten durchdringt;

$$4) \xi(a \xi^2 + b \eta^2 + 2c \zeta \xi) = 0;$$

einen unzerlegbaren, elliptischen, reellen Kegel und eine Ebene, welche den Kegel in zwei zusammenfallenden, reellen Kanten berührt.

Das Geschlecht C enthält sechs Familien, denen solche kubische Oberflächen zugeordnet sind, bei denen die zugehörige Regelgleichung darstellt:

$$1) (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2) \zeta = 0;$$

eine reelle und zwei imaginäre Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt nicht in der reellen Ebene;

$$2) (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2) \cdot \xi = 0;$$

eine reelle und zwei imaginäre Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen befindet sich in der reellen Ebene;

$$3) (a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2) \cdot \zeta = 0;$$

drei reelle Ebenen, welche sich in drei verschiedenen, reellen Kanten schneiden;

$$4) (a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2) \cdot \xi = 0;$$

drei reelle Ebenen, welche verschieden von einander sind und sich in einer einzigen Kante schneiden;

$$5) \xi^2 \cdot \eta = 0;$$

drei reelle Ebenen, von denen zwei zusammenfallen;

$$6) \xi^3 = 0;$$

drei reelle zusammenfallende Ebenen.

Im ganzen können also alle Oberflächen 3. Ordnung in 15 Familien geteilt werden.

Es sollen nun hier nicht alle Arten aufgezählt werden, welche den einzelnen Familien angehören — damit könnte ein ganzer Band ausgefüllt werden — nur von einer Familie mögen ihre Arten durchgegangen werden, und zwar von derjenigen, bei welcher die Glieder der 3. Dimension für sich betrachtet drei zusammenfallende, reelle Ebenen darstellen.

§ 6.

Aufzählung derjenigen besonderen Flächen 3. Ordnung, deren Glieder der 3. Dimension sich auf x^3 zurückführen lassen.

Die allgemeine Gleichung solcher kubischer Flächen, bei denen sich die Glieder der 3. Dimension auf x^3 reduzieren lassen, wird die Form haben:

$$1) x^3 + 3[a_{011}x^2 + 2a_{012}xy + 2a_{013}xz + a_{022}y^2 + 2a_{023}yz + a_{033}z^2] + 3[a_{001}x + a_{002}y + a_{003}z] + a_{000} = 0,$$

wobei das Koordinatensystem rechtwinkelig vorausgesetzt werden darf.

Wir transformieren jetzt so, daß

$$2) \begin{cases} x = X, \\ y = Y \cos \alpha - Z \sin \alpha, \\ z = Y \sin \alpha + Z \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{2a_{023}}{a_{022} - a_{033}}, \end{cases}$$

ist; es verschwindet alsdann der Koeffizient von YZ . Die neue Gleichung heiße:

$$3) X^3 + 3[b_{011}X^2 + 2b_{012}XY + 2b_{013}XZ + b_{022}Y^2 + b_{033}Z^2] + 3[b_{001}X + b_{002}Y + b_{003}Z] + b_{000} = 0,$$

und wenn nun

$$4) \begin{cases} X = X' \sin \beta, \\ Y = X' \cos \beta \cos \gamma + Y', \\ Z = X' \cos \beta \sin \gamma + Z', \end{cases}$$

gesetzt wird, wobei β von Null verschieden sein muß, so entsteht:

$$5) X'^2 \sin^2 \beta + 3 X'^2 [b_{011} \sin^2 \beta + 2b_{012} \sin \beta \cos \beta \cos \gamma + 2b_{013} \sin \beta \cos \beta \sin \gamma + b_{022} \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + b_{033} \cos^2 \beta \sin^2 \gamma] + 6 X' Y' [b_{012} \sin \beta + b_{022} \cos \beta \cos \gamma] + 6 X' Z' [b_{013} \sin \beta + b_{033} \cos \beta \sin \gamma] + 3b_{022} Y'^2 + 3b_{033} Z'^2 + 3X' [b_{001} \sin \beta + b_{002} \cos \beta \cos \gamma + b_{003} \cos \beta \sin \gamma] + 3b_{002} Y' + 3b_{003} Z' + b_{000} = 0.$$

Sind sowohl b_{022} als auch b_{033} verschieden von Null, so bestimmen wir β und γ so, daß die Koeffizienten von $X' Y'$ und $X' Z'$ verschwinden; es bleibt dann eine Gleichung von folgender Gestalt übrig:

$$6) X'^3 + A X'^2 + B X' + C + D (Y' + \mu)^2 + E (Z' + \nu)^2 = 0,$$

welche durch Verschiebung des Koordinatenanfanges entweder in:

$$A) \xi (\xi^2 + 2a \xi + b) = h^2 \eta^2 + k^2 \zeta^2,$$

oder in:

$$B) \xi (\xi^2 + 2a \xi + b) = h^2 \eta^2 - k^2 \zeta^2,$$

übergeht. Die Lage der η - und ζ -Achse kann hierbei rechtwinkelig angenommen werden, dagegen ist die ξ -Achse zur $\eta\zeta$ -Ebene im allgemeinen geneigt. Die Gleichung A umfaßt solche Oberflächen, bei denen die Schnitte, welche parallel zur $\eta\zeta$ -Ebene geführt werden, Ellipsen, beziehentlich Punkte sind; während die Gleichung B diejenigen Flächen enthält, bei denen die Ebenen, welche zur $\eta\zeta$ -Ebene parallel gelegt sind, Hyperbeln oder zwei sich schneidende, gerade Linien als Schnittkurven liefern.

Fehlen ein oder mehrere Koeffizienten in der Gleichung 3), so lauten die in entsprechender Weise umgestalteten Gleichungen:

$$C) \begin{cases} \xi^3 + a = b \eta^2 + c \zeta \xi, \\ \xi^3 = b \eta^2 + c \zeta, \\ \xi^3 = b \xi \eta + c \zeta; \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} \xi (\xi^2 + 2a \xi + b) = c \eta^2, \\ \xi^3 + a = b \xi \eta, \\ \xi^3 = b \eta; \end{cases}$$

$$E) \xi (\xi^2 + 2a \xi + b) = 0.$$

Das System der Gleichungen C ist im allgemeinen auf ein solches Koordinatensystem bezogen, bei welchem alle Achsen schief zu einander stehen. Die durch dieses System dargestellten Flächen sind so beschaffen, daß die Ebenen, welche parallel zur $\eta\zeta$ -Ebene verlaufen, Parabeln, beziehentlich gerade Linien als Schnittkurven geben. Das System D liefert Cylinder und die Gleichung E umfaßt parallele Ebenen.

Bei den Gebilden, welche durch A und B analytisch ausgedrückt werden, ist unmittelbar ersichtlich, daß die ξ -Achse der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen, beziehentlich der Hyperbeln ist, welche entstehen, wenn diese Flächen parallel zur $\eta\zeta$ -Ebene geschnitten werden. Jede Ebene, welche durch die ξ -Ebene geht, ist Durchmesserebene.

Bei den ersten beiden Gleichungen des Systems C ist die $\xi\zeta$ -Ebene Durchmesserebene; die dritte Art im System C hat keine Durchmesserebene. Die einzelnen Formen in den verschiedenen Systemen richten sich nach dem Aggregat, das nur ξ oder constante Größen enthält, da dasselbe in zwei imaginäre und einen reellen Faktor, in drei ungleiche, reelle Faktoren, in zwei gleiche und einen ungleichen, reellen

Faktor oder in drei gleiche, reelle Faktoren zerlegbar sein kann. Darum ergeben sich folgende 27 besondere Arten:

Zur A-Form gehören:

$$1) \xi[\xi^2 + 2a\xi + a^2 + b^2] = h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die linke Seite der Gleichung besteht aus 2 imaginären und einem reellen Faktor. Die Oberfläche liegt zwischen: $\xi=0$ und $\xi=+\infty$; für $\xi=0$, ist: $\eta=\zeta=0$; wächst ξ , so entstehen Ellipsen, die stetig größer werden. Ebenen, welche die Fläche parallel zur $\xi\eta$ - oder $\xi\zeta$ -Ebene schneiden, liefern Schnittkurven, die Newton in seinem oben angeführten Werke mit Nr. 71 bezeichnet hat. Hieraus erhellt, daß die Fläche Glockenform hat. Siehe Figur 1, Tafel II.

$$2) \xi(\xi+a)(\xi+b) = h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die linke Seite besteht aus drei ungleichen, reellen Faktoren. Die Fläche liegt zwischen: $-a \leq \xi \leq -b$; vorausgesetzt, daß $a > b$ ist, und zwischen: $0 \leq \xi \leq +\infty$. Schnitte, welche parallel zur $\xi\eta$ - oder $\xi\zeta$ -Ebene liegen, liefern Kurven, die bei Newton die Nummern 67, 69 und 71 haben. Die Oberfläche besitzt außer der Glockenform noch eine Eiform, welche von der ersten getrennt liegt. Siehe Figur 2, Tafel II.

$$3) \xi(\xi+a^2)^2 = h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die linke Seite hat für sich betrachtet zwei gleiche, reelle und eine ungleiche Wurzel, und zwar sind die beiden kleineren Wurzeln einander gleich. Ebenen parallel zur $\xi\eta$ - oder $\xi\zeta$ -Ebene geben Kurven, siehe Newton: 69, 71. Die Oberfläche kann als eine besondere Art der vorhergehenden angesehen werden, in welcher die Eiform in einen Einzelpunkt zusammengekrumpft ist. Siehe Figur 3, Tafel II.

$$4) \xi^2(\xi+a^2) = h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die beiden größeren Wurzeln der linken Seite sind einander gleich. Ebenen, parallel zur $\xi\eta$ - oder $\xi\zeta$ -Ebene, liefern Kurven, welche bei Newton mit Nr. 68, 67, 69, 71 bezeichnet sind. Auch diese Fläche kann als eine besondere Art der zweiten Fläche betrachtet werden, in welcher die Eiform mit der Glockenform durch einen Knotenpunkt verbunden ist. Siehe Figur 4, Tafel II.

$$5) \xi^3 = h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die linke Seite besteht aus drei gleichen, reellen Faktoren. Ebenen, welche zur $\xi\eta$ - oder $\xi\zeta$ -Ebene parallel verlaufen, geben die Newtonischen Kurven Nr. 70, 71. Die Glockenform ist zugespitzt, der Punkt: $\xi=\eta=\zeta=0$, ist ein Rückkehrpunkt. Siehe Figur 5, Tafel II.

Die zur B-Form gehörigen Flächen sind:

$$6) \xi(\xi^2 + 2a\xi + a^2 + b^2) = -h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die linke Seite der Gleichung hat für sich betrachtet zwei komplexe und eine reelle Wurzel. Die Ebene: $\xi=0$, giebt als Schnittkurve zwei gerade Linien, welche sich im Anfangspunkte der Koordinaten schneiden. Ebenen, welche parallel zur $\eta\zeta$ -Ebene liegen, geben Hyperbeln, die auf der positiven ξ -Achsenseite entgegengesetzte Lage zu denen haben, welche sich auf der negativen ξ -Achsenseite befinden. Ebenen, parallel zur $\xi\eta$ -Ebene, schneiden die Oberfläche in der Newtonischen Kurve 71. Siehe Figur 1, Tafel III.

$$7) \xi(\xi+a)(\xi+b) = -h^2\eta^2 + k^2\zeta^2;$$

die linke Seite hat drei reelle, ungleiche Wurzeln. Die Ebenen: $\xi=-a$, $\xi=-b$, $\xi=0$, schneiden die Fläche in zwei geraden Linien, deren Schnittpunkte auf der ξ -Achse liegen; alle übrigen Ebenen, welche zu den eben genannten parallel verlaufen, liefern Hyperbeln, deren Lagen wechseln, wenn die

Schnittenebene in ihrer stetigen Folge durch ein Linienpaar hindurchgegangen ist. Ebenen, welche zur $\xi\eta$ -Ebene parallel liegen, schneiden aus der Oberfläche Kurven heraus, die Newton mit Nr. 67, 68 und 71 bezeichnet hat. Siehe Figur 2, Tafel III.

$$8) \xi(\xi + a^2)^2 = -h^2 \eta^2 + k^2 \zeta^2;$$

die linke Seite hat drei reelle Wurzeln, von denen die beiden kleineren einander gleich sind. Die Ebenen: $\xi = -a^2$, $\xi = 0$, geben gerade Linienpaare; solche, welche zu diesen parallel verlaufen, liefern Hyperbeln mit abwechselnden Lagen. Die $\xi\eta$ -Ebene schneidet die Oberfläche in der Newtonischen Kurve 68, Parallelebenen zu derselben in der Newtonischen Kurve 71. Siehe Figur 3, Tafel III.

$$9) \xi^2(\xi + a^2) = -h^2 \eta^2 + k^2 \zeta^2;$$

die linke Seite hat drei reelle Wurzeln, von denen die beiden größeren gleich sind. Die Ebenen: $\xi = 0$ und $\xi = -a^2$, geben zwei sich schneidende, gerade Linien; Parallelebenen zu ihnen liefern Hyperbeln in abwechselnden Lagen. Eine Ebene, welche in der $\xi\eta$ -Ebene liegt und von derselben aus parallel mit sich selbst stetig verschoben wird, giebt der Reihe nach die Newtonischen Kurven 69, 67, 68, 71 als Schnittlinien. Siehe Figur 4, Tafel III.

$$10) \xi^3 = -h^2 \eta^2 + k^2 \zeta^2;$$

die linke Seite besteht aus drei reellen, gleichen Faktoren. Nur die Ebene: $\xi = 0$, liefert ein sich schneidendes, gerades Linienpaar; die anderen Parallelebenen geben Hyperbeln, welche auf der positiven ξ -Achsen- und entgegengesetzte Lage zu denen haben, die auf der negativen ξ -Achsen- und liegen. Die Ebene: $\xi = 0$, schneidet aus der Fläche die Newtonische Kurve 70 heraus; die übrigen Ebenen, welche zur $\xi\eta$ -Ebene parallel verlaufen, geben die Newtonische Kurve 71. Siehe Figur 5, Tafel III.

Das System C umfaßt:

$$11) \xi^3 = a^2 \eta^2 + b \zeta \xi - c^2;$$

das konstante Glied und der Koeffizient von η^2 haben ungleiches Vorzeichen. Die Ebene: $\xi = 0$, schneidet die Fläche in den beiden Parallellinien: $\eta = +\frac{c}{a}$ und $\eta = -\frac{c}{a}$; jede andere Ebene, welche parallel zur $\eta\zeta$ -Ebene verläuft, liefert Parabeln, und zwar liegen die Scheitel derselben auf der positiven ξ -Achsen- und entgegengesetzter Richtung wie die auf der negativen ξ -Achsen- und. Ebenen, parallel zur $\xi\eta$ -Ebene, geben die Newtonischen Kurven 71, 68 und 67 als Schnittlinien. Die Ebenen: $\eta = +\frac{c}{a}$ und $\eta = -\frac{c}{a}$ schneiden aus der Fläche eine Parabel und eine gerade Linie heraus; alle übrigen Ebenen, welche parallel zu denselben sind, liefern die Newtonische Linie 66. Siehe Figur 1, Tafel IV.

$$12) \xi^3 = a^2 \eta^2 + b \zeta \xi + c^2;$$

das konstante Glied und der Koeffizient von η^2 haben gleiches Vorzeichen. Ebenen, welche zur $\eta\zeta$ -Ebene parallel verlaufen, geben Parabeln in abwechselnden Lagen auf der positiven und negativen ξ -Achsen- und. Die Ebene: $\xi = 0$, schneidet die Oberfläche in zwei imaginären Parallellinien-Ebenen, parallel zur $\xi\eta$ -Ebene, geben die Newtonischen Kurven 71, 69, 67, und diejenigen, welche zur $\zeta\xi$ -Ebene parallel liegen, liefern die Newtonische Kurve 66. Siehe Figur 2, Tafel IV.

$$13) \xi^3 = a\eta^2 + b\zeta\xi;$$

das konstante Glied ist Null. Die Ebene: $\xi = 0$, hat mit der Oberfläche zwei zusammenfallende, gerade Linien gemeinsam; alle übrigen Parallelebenen schneiden Parabeln in abwechselnden Lagen auf der positiven und negativen ξ -Achsen- und heraus. Ebenen, parallel zur $\xi\eta$ -Ebene, geben die Newtonischen Linien 71,

70 und 67. Die Ebene: $\eta = 0$, liefert eine Parabel und eine gerade Linie; die übrigen Parallelebenen geben die Newtonische Kurve 66. Siehe Figur 3, Tafel IV.

$$14) \xi^3 = a\eta^2 + b\zeta;$$

Ebenen, welche parallel zur $\eta\zeta$ -Ebene verlaufen, schneiden Parabeln heraus, deren Scheitel alle nach ein und derselben Richtung zu liegen. Für: $\zeta = 0$, erscheint die Newtonische Linie 70, und für ζ gleich einer anderen beliebigen Konstanten entsteht die Newtonische Kurve 71. Ebenen, parallel zur $\xi\zeta$ -Ebene, geben die Kurve 72 bei Newton. Siehe Figur 4, Tafel IV.

$$15) \xi^3 = a\xi\eta + b\zeta;$$

die Ebene: $\xi = 0$, liefert die η -Achse als Schnittlinie; Parallelebenen zur $\eta\zeta$ -Ebene schneiden gerade Linien heraus, deren Neigungswinkel zur $\xi\eta$ -Ebene um so geringer ist, je näher die schneidende Ebene der $\eta\zeta$ -Ebene liegt. Ist der Neigungswinkel auf der positiven ξ -Achsen-Seite spitz, so ist er auf der negativen ξ -Achsen-Seite stumpf und umgekehrt. Die Ebene: $\zeta = 0$, giebt eine Parabel und eine gerade Linie; Parallelebenen zur $\xi\eta$ -Ebene liefern die Newtonische Kurve 66. Ebenen, welche zur $\xi\zeta$ -Ebene parallel verlaufen, schneiden die Newtonische Linie 72 heraus. Siehe Figur 5, Tafel IV.

Zur D-Form gehören:

$$16) \xi(\xi^2 + 2a\xi + a^2 + b^2) = c^2\eta^2;$$

ein Cylinder, welcher die Newtonische Kurve 71 zur Basis hat;

$$17) \xi(\xi + a)(\xi + b) = c^2\eta^2;$$

ein Cylinder, welcher die Newtonische Kurve 67 zur Grundlinie hat;

$$18) \xi(\xi + a^2)^2 = c^2\eta^2;$$

ein Cylinder, welcher die Newtonische Linie 69 zur Basis hat;

$$19) \xi^2(\xi + a^2) = c^2\eta^2;$$

ein Cylinder, welcher die Newtonische Kurve 68 zur Grundlinie hat;

$$20) \xi^3 = c^2\eta^2;$$

ein Cylinder mit der Newtonischen Linie 70 als Basis;

$$21) \xi^3 = a\xi\eta + b;$$

ein Cylinder mit der Newtonischen Linie 66 als Basis;

$$22) \xi(\xi^2 - a\eta) = 0;$$

ein parabolischer Cylinder und eine Ebene, welche den parabolischen Cylinder in einer geraden Linie schneidet;

$$23) \xi^3 = a\eta;$$

ein Cylinder mit der Newtonischen Linie 72 als Basis.

Das System E enthält:

$$24) \xi(\xi^2 + 2a\xi + a^2 + b^2) = 0;$$

eine reelle und zwei imaginäre Parallelebenen;

$$25) \xi(\xi + a)(\xi + b) = 0;$$

drei reelle Parallelebenen, welche verschieden von einander sind;

$$26) \xi^2(\xi + a) = 0;$$

drei reelle Parallelebenen, von denen zwei zusammenfallen;

$$27) \xi^2 = 0;$$

drei zusammenfallende, reelle Parallelebenen. Ganz ähnlich können die Oberflächen 3. Ordnung aufgezählt werden, die den anderen Familien zugeordnet sind.

§ 7.

Einteilung der Flächen 4. Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer Fläche 4. Ordnung läßt sich in der folgenden Gestalt schreiben:

$$1) \left[\begin{aligned} &a_{1111} x^4 + 4a_{1112} x^3 y + 4a_{1113} x^3 z + 6a_{1122} x^2 y^2 + 12a_{1123} x^2 y z + 6a_{1133} x^2 z^2 + \\ &\quad + 4a_{1222} x y^3 + 12a_{1223} x y^2 z + 12a_{1233} x y z^2 + 4a_{1333} x z^3 + a_{2222} y^4 + \\ &\quad + 4a_{2223} y^3 z + 6a_{2233} y^2 z^2 + 4a_{2333} y z^3 + a_{3333} z^4 \end{aligned} \right] + \\ + 4 \left[\begin{aligned} &a_{0111} x^3 + 3a_{0112} x^2 y + 3a_{0113} x^2 z + 3a_{0122} x y^2 + 6a_{0123} x y z + 3a_{0133} x z^2 + \\ &\quad + a_{0222} y^3 + 3a_{0223} y^2 z + 3a_{0233} y z^2 + a_{0333} z^3 \end{aligned} \right] + \\ + 6 [a_{0011} x^2 + 2a_{0012} x y + 2a_{0013} x z + a_{0022} y^2 + 2a_{0023} y z + a_{0033} z^2] + \\ + 4 [a_{0001} x + a_{0002} y + a_{0003} z] + a_{0000} = 0.$$

Nach den in § 1 entwickelten Gründen führen wir ein:

$$2) \begin{cases} x = r \cos \varphi \cdot \cos \vartheta, \\ y = r \cos \varphi \cdot \sin \vartheta, \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$$

hierauf teilen wir die ganze Gleichung durch r^4 , lassen r bis ins Unendliche wachsen und multiplizieren die übrig bleibende Gleichung mit dem allgemeinen Werte r^4 . Die Regelmäßigkeit, welche so entsteht und nach deren Beschaffenheit wir die Flächen 4. Ordnung zergliedern, heißt:

$$3) a_{1111} x^4 + 4a_{1112} x^3 y + 4a_{1113} x^3 z + 6a_{1122} x^2 y^2 + 12a_{1123} x^2 y z + 6a_{1133} x^2 z^2 + 4a_{1222} x y^3 + \\ + 12a_{1223} x y^2 z + 12a_{1233} x y z^2 + 4a_{1333} x z^3 + a_{2222} y^4 + 4a_{2223} y^3 z + 6a_{2233} y^2 z^2 + \\ + 4a_{2333} y z^3 + a_{3333} z^4 = 0.$$

Offenbar werden alle biquadratischen Flächen in fünf Geschlechter zerfallen:

Das Geschlecht A umfaßt solche Flächen, bei denen die Gleichung 3) einen eigentlichen Regel 4. Ordnung darstellt, welcher in Regel niederer Ordnungen nicht zerlegt werden kann;

das Geschlecht B wird diejenigen Flächen enthalten, bei denen die Gleichung 3) einen unzerlegbaren, kubischen Regel und eine Ebene verjüngt;

zum Geschlecht C werden solche Flächen gehören, bei denen die Gleichung 3) zwei unzerlegbare Regel 2. Ordnung veranschaulicht;

dem Geschlecht D werden diejenigen Gebilde zugeordnet sein, bei denen die Gleichung 3) der analytische Ausdruck für einen unzerlegbaren Regel 2. Ordnung und zwei Ebenen ist;

das Geschlecht E wird diejenigen Flächen in sich schließen, bei denen die Gleichung 3) vier Ebenen repräsentiert.

Wir zergliedern die besonderen Gestalten des eigentlichen, unzerlegbaren Kegels 4. Ordnung hier nicht, da wir dieses interessante Gebilde einer besonderen Abhandlung würdig erachten; wohl aber mögen die einzelnen Familien der übrigen Geschlechter aufgezählt werden.

Das Geschlecht B

umfaßt solche Flächen, bei denen die Gleichung 3) darstellt:

- 1) den kubischen Regel 1) in § 4 und eine Ebene, welche den Regel in einer reellen und zwei imaginären Kanten schneidet;
- 2) den kubischen Regel 1) und eine Ebene, welche den Regel in drei reellen, verschiedenen Kanten trifft;
- 3) den kubischen Regel 1) und eine Ebene, welche den Regel in zwei zusammenfallenden und in einer von denselben verschiedenen Kante schneidet;
- 4) den kubischen Regel 1) und eine Ebene, die den Regel in drei zusammenfallenden Kanten berührt;
- 5) den kubischen Regel 2) in § 4 und eine Ebene, welche den Regel in einer reellen und zwei imaginären Kanten trifft;
- 6) den kubischen Regel 2) und eine Ebene, welche den Teil des Regels, dessen Basis schlangenförmig ist, in drei verschiedenen, reellen Kanten durchdringt;
- 7) den kubischen Regel 2) und eine Ebene, die den Regel mit der eiförmigen Grundlinie in zwei verschiedenen, reellen Kanten und den Teil mit der schlangenförmigen Basis in einer reellen Kante durchsetzt;
- 8) den kubischen Regel 2) und eine Ebene, die den Regel mit der schlangenförmigen Grundlinie in zwei zusammenfallenden und in einer von ihnen verschiedenen, reellen Kante trifft;
- 9) den kubischen Regel 2) und eine Ebene, welche den Regel mit der eiförmigen Basis in zwei zusammenfallenden Kanten und den mit der schlangenförmigen Grundlinie in einer reellen Kante schneidet;
- 10) den kubischen Regel 2) und eine Ebene, welche den Regel in drei zusammenfallenden Kanten berührt;
- 11) den kubischen Regel 3) in § 4 und eine Ebene, die mit dem Regel eine reelle und zwei imaginäre Kanten gemeinsam hat;
- 12) den kubischen Regel 3) und eine Ebene, die denselben in drei reellen, verschiedenen Kanten durchdringt;
- 13) den kubischen Regel 3) und eine Ebene, die den Regel mit der schlangenförmigen Basis in zwei zusammenfallenden und in einer von ihnen verschiedenen Kante trifft;
- 14) den kubischen Regel 3) und eine Ebene, welche durch die Einzelkante geht und den Regel mit der schlangenförmigen Grundlinie in einer reellen Kante schneidet;
- 15) den kubischen Regel 3) und eine Ebene, die denselben in drei zusammenfallenden Kanten berührt;
- 16) den kubischen Regel 4) in § 4 und eine Ebene, welche mit demselben eine reelle und zwei imaginäre Kanten gemeinsam hat;
- 17) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, welche nur das große Blatt, aber nicht den verschlungenen Teil in drei reellen, verschiedenen Kanten durchsetzt;
- 18) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, die den verschlungenen Teil in zwei verschiedenen, reellen Kanten und das große Blatt in einer reellen Kante durchdringt;
- 19) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, die nur das große Blatt in zwei zusammenfallenden und in einer von ihnen verschiedenen Kante schneidet;

- 20) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, die den verschlungenen Teil in zwei zusammenfallenden Kanten und das große Blatt in einer reellen Kante trifft;
- 21) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, welche durch die Knotenkaute geht und das große Blatt in einer andern Kante durchsetzt;
- 22) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, welche durch die Knotenkaute geht und den verschlungenen Teil in einer andern Kante durchdringt;
- 23) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, die denselben längs der Knotenkaute dreifach berührt;
- 24) den kubischen Regel 4) und eine Ebene, welche denselben in der Wendungskante dreifach berührt;
- 25) den kubischen Regel 5) in § 4 und eine Ebene, welche mit demselben eine reelle und zwei imaginäre Kanten gemeinsam hat;
- 26) den kubischen Regel 5) und eine Ebene, die denselben in drei reellen, verschiedenen Kanten durchsetzt;
- 27) den kubischen Regel 5) und eine Ebene, welche nicht durch die Rückkehrkaute geht, den Regel sonst aber in zwei zusammenfallenden und in einer von ihnen verschiedenen Kante durchdringt;
- 28) den kubischen Regel 5) und eine Ebene, welche durch die Rückkehrkaute geht und außerdem noch eine andere Kante mit dem Regel gemeinsam hat;
- 29) den kubischen Regel 5) und eine Ebene, welche nur durch die Rückkehrkaute geht;
- 30) den kubischen Regel 5) und eine Ebene, welche denselben in der Wendungskante dreifach berührt.

Das Geschlecht C

enthält solche Flächen, bei denen die Gleichung 3) verfinnlicht:

- 1) zwei imaginäre, elliptische Regel, welche verschieden von einander sind;
- 2) zwei zusammenfallende, imaginäre, elliptische Regel;
- 3) einen imaginären und einen reellen, elliptischen Regel;
- 4) zwei reelle, elliptische Regel, welche in einander liegen und keine reelle Kante mit einander gemeinsam haben;
- 5) zwei reelle, elliptische Regel, welche auseinander liegen und keine reelle Kante gemeinsam haben;
- 6) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in zwei reellen, verschiedenen Kanten und in zwei imaginären Kanten schneiden;
- 7) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in zwei zusammenfallenden, reellen Kanten von innen berühren, sonst aber keine andere reelle Kante gemeinsam haben;
- 8) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in zwei zusammenfallenden, reellen Kanten von außen berühren;
- 9) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in vier reellen, verschiedenen Kanten durchdringen;
- 10) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in zwei reellen, verschiedenen Kanten durchsetzen und in zwei andern reellen, zusammenfallenden Kanten berühren;
- 11) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in zwei verschiedenen, reellen Kanten berühren;
- 12) zwei reelle, elliptische Regel, die drei zusammenfallende Kanten gemeinsam haben und sich außerdem in einer andern Kante schneiden;
- 13) zwei reelle, elliptische Regel, welche sich in vier zusammenfallenden, reellen Kanten berühren;
- 14) zwei zusammenfallende, reelle, elliptische Regel.

Das Geschlecht D

umschließt alle die Oberflächen, bei denen die Gleichung 3) veranschaulicht:

- 1) einen imaginären Regel 2. Ordnung und zwei imaginäre Ebenen;
- 2) einen imaginären Regel 2. Ordnung und zwei reelle, verschiedene Ebenen;
- 3) einen imaginären Regel 2. Ordnung und zwei zusammenfallende, reelle Ebenen;
- 4) einen reellen, elliptischen Regel und zwei imaginäre Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt innerhalb des Regelmantels;
- 5) einen reellen, elliptischen Regel und zwei imaginäre Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt außerhalb des Regelmantels;
- 6) einen reellen, elliptischen Regel und zwei imaginäre Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt im Regelmantel;
- 7) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen, welche mit dem Regel keine reelle Kante gemeinsam haben;
- 8) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die eine Ebene schneidet den Regel in zwei imaginären Kanten; die andere Ebene durchstößt den Regel in zwei reellen, verschiedenen Kanten;
- 9) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die eine Ebene hat mit dem Regel zwei imaginäre Kanten gemeinsam; die andere Ebene berührt den Regel in zwei reellen, zusammenfallenden Kanten;
- 10) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen, welche den Regel in vier verschiedenen, reellen Kanten durchdringen; die Schnittkante der Ebenen liegt innerhalb des Regelmantels;
- 11) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen, welche den Regel in vier verschiedenen, reellen Kanten schneiden; die Schnittkante der Ebenen liegt außerhalb des Regelmantels;
- 12) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die Schnittkante der letzteren liegt auf dem Regelmantel; außerdem durchdringen die Ebenen den Regel noch in zwei andern reellen, verschiedenen Kanten;
- 13) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die eine Ebene schneidet den Regel in zwei verschiedenen, reellen Kanten; die andere Ebene berührt ihn in zwei zusammenfallenden, reellen Kanten, welche von den ersten verschieden sind;
- 14) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die eine Ebene schneidet den Regel in zwei reellen, verschiedenen Kanten; die andere Ebene berührt ihn in zwei zusammenfallenden Kanten, welche mit einer der erstgenannten zusammentreffen;
- 15) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, verschiedene Ebenen; jede Ebene berührt den Regel in zwei reellen, zusammenfallenden Kanten; die beiden Berührungskanten sind verschieden von einander;
- 16) einen reellen, elliptischen Regel und zwei reelle, zusammenfallende Ebenen, welche mit dem Regel keine reelle Kante gemeinsam haben;

- 17) einen reellen, elliptischen Kegel und zwei reelle, zusammenfallende Ebenen, welche den Kegel in zwei reellen, verschiedenen Kanten durchdringen;
- 18) einen reellen, elliptischen Kegel und zwei reelle, zusammenfallende Ebenen, welche den Kegel berühren.

Das Geschlecht E

begreift solche Flächen in sich, bei denen die Gleichung 3) repräsentiert:

- 1) zwei imaginäre, verschiedene Ebenenpaare; die reelle Schnittkante der konjugiert komplexen Ebenen fallen nicht zusammen;
- 2) zwei imaginäre, verschiedene Ebenenpaare; die reelle Schnittkante der konjugiert komplexen Ebenen fallen zusammen;
- 3) zwei imaginäre, zusammenfallende Ebenenpaare;
- 4) ein imaginäres Ebenenpaar und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt auf keiner der reellen Ebenen;
- 5) ein imaginäres Ebenenpaar und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt auf der einen reellen Ebene, aber nicht in der Schnittkante der Ebenen;
- 6) ein imaginäres Ebenenpaar und zwei reelle, verschiedene Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen fällt mit der Schnittkante der reellen Ebenen zusammen;
- 7) ein imaginäres Ebenenpaar und zwei zusammenfallende, reelle Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt nicht auf den zusammenfallenden, reellen Ebenen;
- 8) ein imaginäres Ebenenpaar und zwei zusammenfallende, reelle Ebenen; die reelle Schnittkante der imaginären Ebenen liegt auf den reellen, zusammenfallenden Ebenen;
- 9) vier reelle, verschiedene Ebenen, welche sich in sechs reellen, verschiedenen Kanten schneiden;
- 10) vier reelle, verschiedene Ebenen; drei derselben haben eine Schnittkante gemeinsam; die vierte Ebene schneidet die übrigen in drei reellen, verschiedenen Kanten;
- 11) vier reelle, verschiedene Ebenen, welche sich in einer einzigen Kante schneiden;
- 12) zwei reelle, verschiedene Ebenen und zwei andere, reelle, zusammenfallende Ebenen; die Schnittkante der ersten beiden Ebenen liegt nicht auf den zusammenfallenden Ebenen;
- 13) zwei reelle, verschiedene Ebenen und zwei andere, reelle, zusammenfallende Ebenen; die Schnittkante der ersten beiden Ebenen liegt auf den zusammenfallenden Ebenen;
- 14) zwei zusammenfallende, reelle Ebenen und zwei andere zusammenfallende, reelle Ebenen;
- 15) drei zusammenfallende, reelle Ebenen und eine andere reelle Ebene;
- 16) vier reelle, zusammenfallende Ebenen.

§ 8.

Einteilung der Flächen 5. Ordnung in Geschlechter.

Die Flächen 5. Ordnung werden in sieben Geschlechter eingeteilt werden können, je nachdem die Vereinigung aller Glieder der 5. Dimension darstellt:

- A) einen unzerlegbaren Kegel 5. Ordnung;
- B) einen unzerlegbaren Kegel 4. Ordnung und eine Ebene;

- C) einen unzerlegbaren Regel 3. Ordnung und einen solchen der 2. Ordnung;
- D) einen unzerlegbaren Regel 3. Ordnung und zwei Ebenen;
- E) zwei unzerlegbare Regel 2. Ordnung und eine Ebene;
- F) einen unzerlegbaren Regel 2. Ordnung und drei Ebenen;
- G) fünf Ebenen.

§ 9.

Einteilung der Flächen 6. Ordnung in Geschlechter.

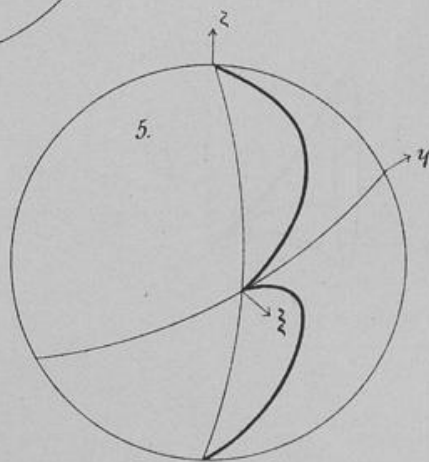
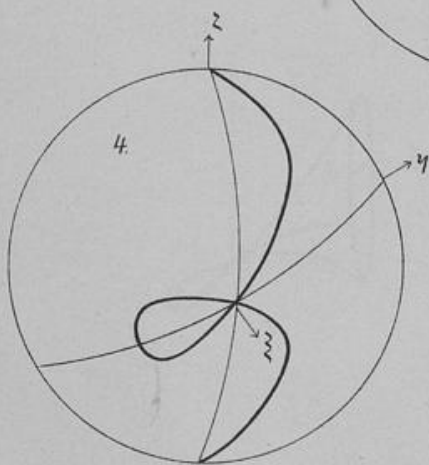
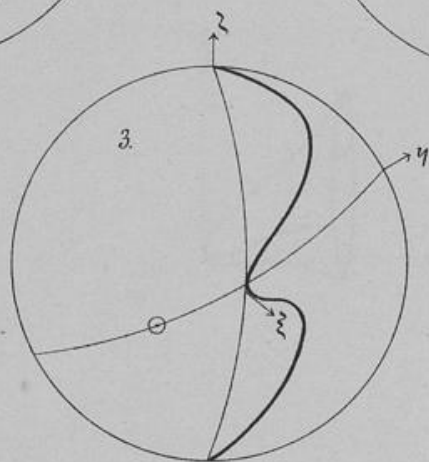
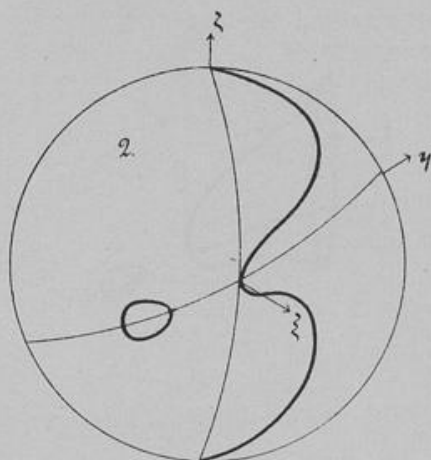
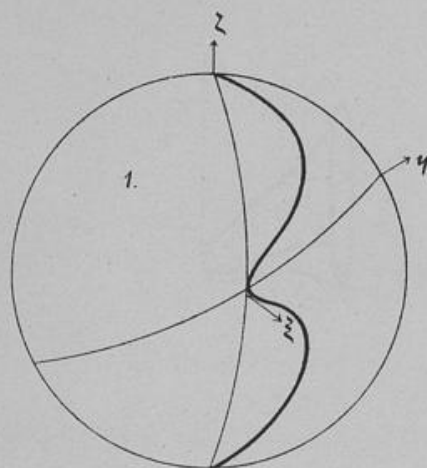
Die Flächen 6. Ordnung werden sich in elf Geschlechter klassifizieren lassen, da die Vereinigung aller Glieder der 6. Dimension repräsentieren kann:

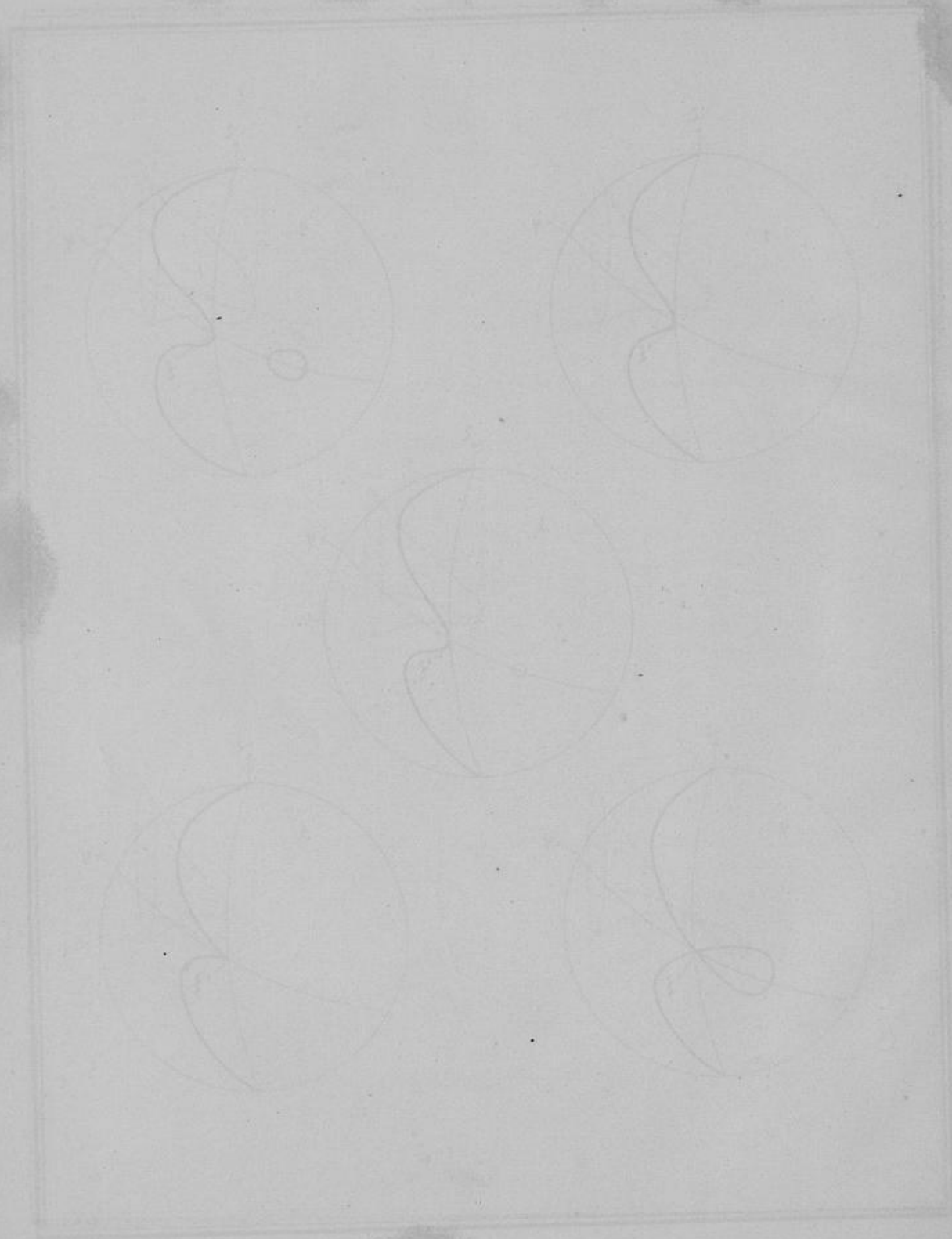
- A) einen unzerlegbaren Regel 6. Ordnung;
- B) einen unzerlegbaren Regel 5. Ordnung und eine Ebene;
- C) einen unzerlegbaren Regel 4. Ordnung und einen solchen der 2. Ordnung;
- D) einen unzerlegbaren Regel 4. Ordnung und zwei Ebenen;
- E) zwei unzerlegbare Regel 3. Ordnung;
- F) einen unzerlegbaren Regel 3. Ordnung, einen solchen der 2. Ordnung und eine Ebene;
- G) einen unzerlegbaren Regel 3. Ordnung und drei Ebenen;
- H) drei unzerlegbare Regel 2. Ordnung;
- I) zwei unzerlegbare Regel 2. Ordnung und zwei Ebenen;
- K) einen unzerlegbaren Regel 2. Ordnung und vier Ebenen;
- L) sechs Ebenen.

In ähnlicher Weise werden sich auch die Oberflächen höherer Ordnungen einteilen lassen.

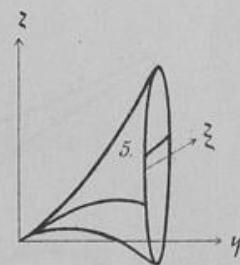
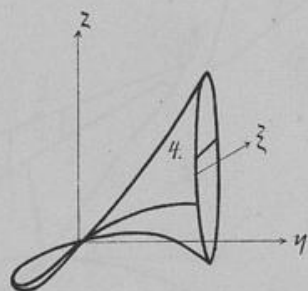
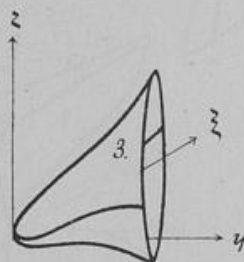
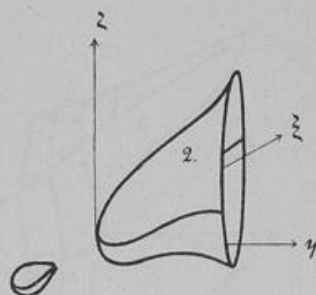
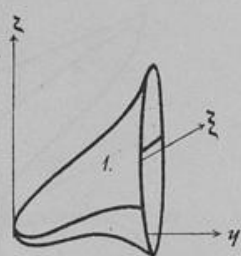


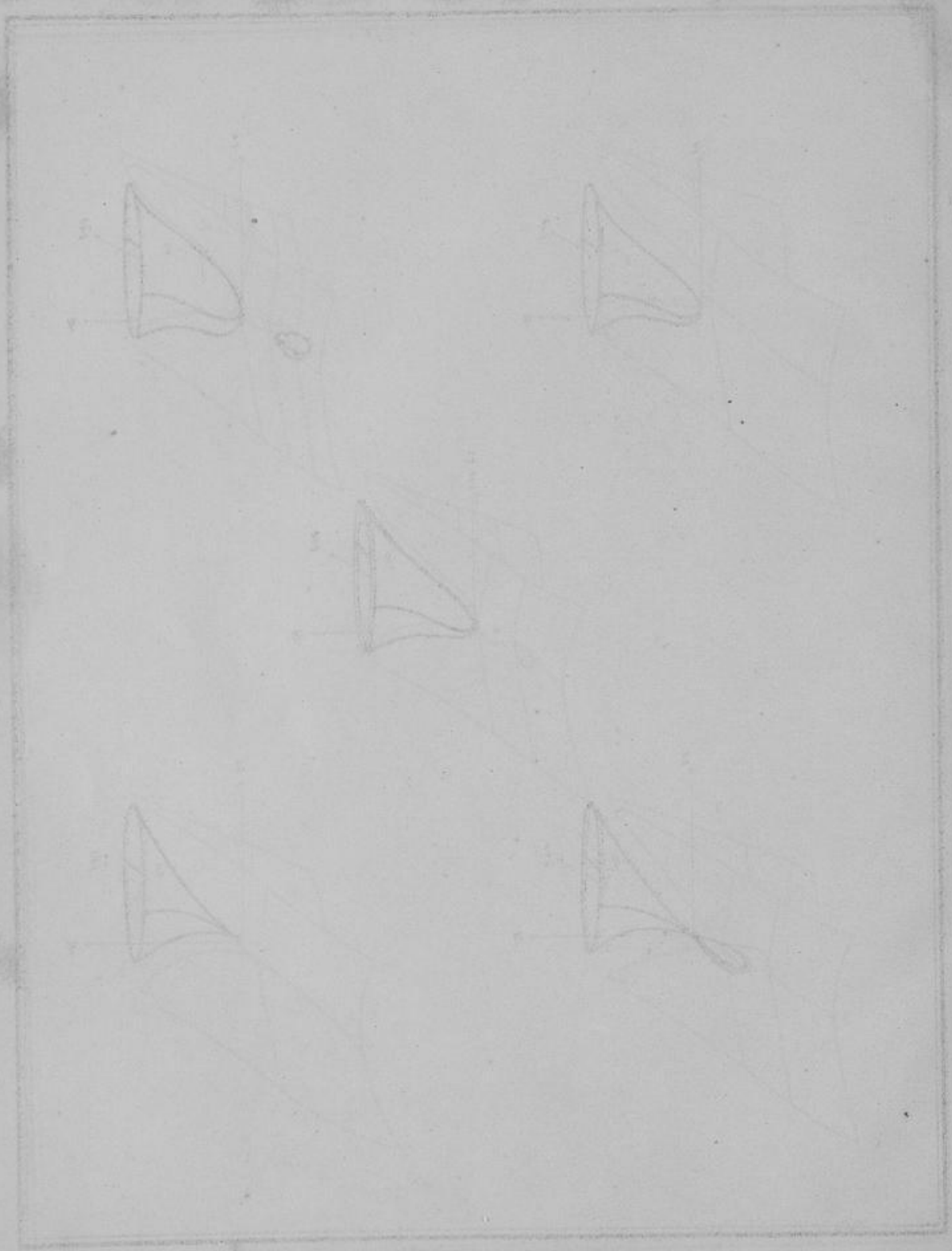
I.

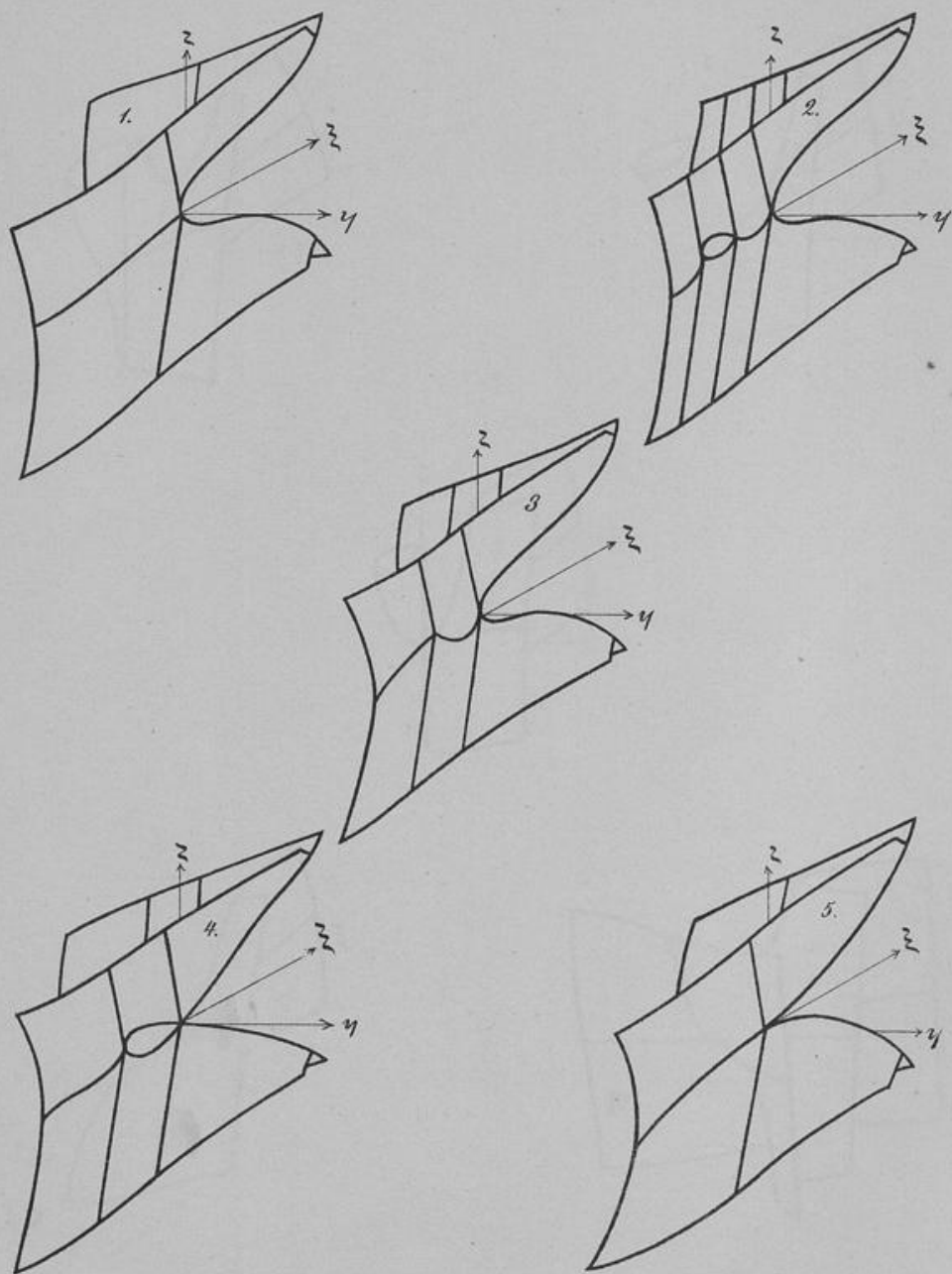


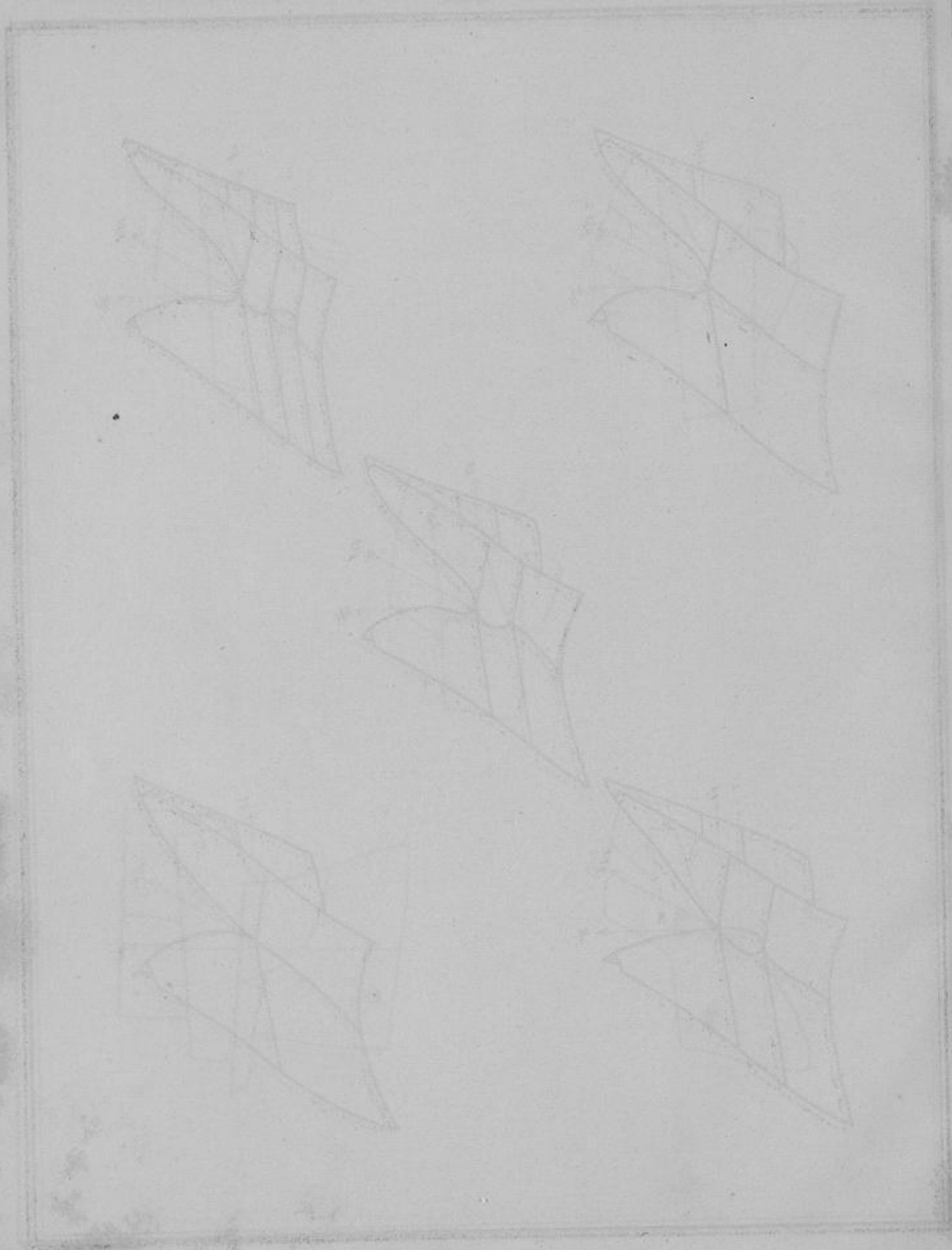


III.









IV.

