

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der 9. Realschule
zu Berlin. Ostern 1910.

Ein Rechenblatt

zur

Auflösung der Gleichung vierten Grades mit Hilfe des Zirkels.

Von

Prof. Dr. Hermann Fürle,
Oberlehrer.

Mit einer Tafel.

BERLIN.

Weidmannsche Buchhandlung.
1910.

1910. Programm Nr. 165.



96e
52 (1910)

1056



§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug aus einer schon seit Jahren fertigen ausführlicheren Abhandlung; ihre Drucklegung war aber bisher unterblieben, weil ich nachträglich erfahren hatte, daß bereits im Jahre 1890 A. Adler in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins die Auflösung der Gleichung 4. Grades mittels einer bezifferten Parabel entwickelt hatte. Da meine Arbeit indessen auch die Verwendbarkeit der anderen Kegelschnitte für diesen selben Zweck zeigt und auch sonst manches Neue und von Adler Abweichende bietet, so glaube ich sie nicht ganz unterdrücken zu müssen, sondern, wo sich jetzt die Gelegenheit zur Veröffentlichung in unserem Jahresbericht bietet, stark verkürzt herausgeben zu dürfen.

Wenn x und y Kartesische Koordinaten und t einen veränderlichen Parameter bedeutet, so ist durch die Gleichungen

$$x = \frac{mt^2 + m_1t + m_2}{nt^2 + n_1t + n_2} \text{ und } y = \frac{pt^2 + p_1t + p_2}{nt^2 + n_1t + n_2} \quad 1)$$

ein Kegelschnitt gekennzeichnet. Schreibt man an jeden Kurvenpunkt den Wert des zugehörigen Parameters, so entsteht ein sogenannter „bezifferter“ Kegelschnitt.

Schneidet man diesen Kegelschnitt durch einen Kreis, so kann man die Parameter an den Schnittpunkten berechnen, wenn man in die Kreisgleichung statt der Koordinaten der Schnittpunkte die Werte 1) einführt. Es ergibt sich dann zur Bestimmung der betreffenden Parameter eine Gleichung vierten Grades für t .

Die Auflösung dieser Gleichung vierten Grades ist in diesem Falle aber auch einfach auf graphischem Wege möglich, indem man die an den Schnittpunkten angeschriebenen Werte der Parameter abliest.

Die Koeffizienten der ermittelten Gleichung vierten Grades in t hängen außer von den festen Konstanten in 1) auch noch von den Koordinaten α, β des Mittelpunktes und dem Radius r des Kreises ab. Da diese drei Stücke leicht veränderlich gemacht werden können, so sind mit Hilfe des veränderlichen Kreises und des festen Kegelschnittes eine große Menge von Gleichungen vierten Grades graphisch zu lösen. Es liegt nun die Frage nahe, ob es stets möglich ist, die Bestimmungsstücke des Schnittkreises so zu wählen, daß sich durch das angegebene Verfahren überhaupt jede beliebige vorgelegte Gleichung vierten Grades graphisch lösen läßt.

Zunächst zeigt eine einfache Überlegung, daß die Wurzeln einer beliebigen Gleichung vierten Grades im allgemeinen nicht ohne weiteres als Parameter der Schnittpunkte eines festen Kegelschnittes mit einem veränderlichen Kreis abgelesen werden können. Denn eine gegebene Gleichung vierten Grades enthält vier unabhängige Koeffizienten, der Kreis bietet aber nur drei willkürliche Bestimmungsstücke, aus denen sich die vier Koeffizienten der Parametergleichung zusammensetzen. Die verfügbaren drei Bestimmungsstücke müßten also, wenn die zu lösende Gleichung und die Parametergleichung identisch sein würden, vier Gleichungen genügen. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall.

Wir werden aber im folgenden sehen, daß es stets möglich ist, wenn auch nicht die Wurzeln der zu lösenden Gleichung selbst, so doch ein Vielfaches der Wurzeln als Parameter abzulesen.

§ 2. Koordinatentransformation.

Um die weiteren Entwicklungen übersichtlich zu gestalten, ist es nötig, durch Umlegung der Koordinatenachsen und besondere Wahl des Nullpunktes der t -Zählung die Anzahl der Konstanten in 1) nach Möglichkeit zu verringern:

Man hat hierbei zu unterscheiden, ob der Nenner in t vom zweiten Grade oder bloß linear in t oder konstant ist.

$$A) n \geq 0.$$

Dividiert man in 1) die Glieder in den Zählern einzeln durch den Nenner, so sieht man, daß x und y lineare ganze Funktionen von

$$\frac{t^2}{nt^2 + n_1t + n_2} = \mu; \quad \frac{t}{nt^2 + n_1t + n_2} = \nu; \quad \frac{1}{nt^2 + n_1t + n_2} = \xi \quad 2)$$

sind:

$$x = m\mu + m_1\nu + m_2\xi \text{ und } y = p\mu + p_1\nu + p_2\xi, \quad 3)$$

und daß zwischen den μ, ν, ξ die Beziehung besteht

$$n\mu + n_1\nu + n_2\xi = 1. \quad 4)$$

Drückt man aus 4) μ durch ν und ξ aus und setzt diesen Wert in 3) ein, so ergeben sich x und y als lineare ganze Funktionen von ν und ξ , die als Transformationsgleichungen aufgefaßt werden können, durch welche man das Koordinatensystem der x, y in das System der ν, ξ umwandelt.

Die ursprüngliche Gleichung des Kegelschnittes 1) ist nun sehr leicht in eine Gleichung zwischen ν und ξ umzubilden. Nach 2) ist nämlich

$$\mu \cdot \xi = \nu^2.$$

Hieraus aber ergibt sich, vorausgesetzt, daß n von Null verschieden ist, mit Rücksicht auf 4):

$$\frac{1 - n_1\nu - n_2\xi}{n} \cdot \xi = \nu^2,$$

oder nach einfacher Umformung

$$\left(n\nu + \frac{n_1}{2}\xi\right)^2 = n\xi - \frac{4n \cdot n_2 - n_1^2}{4} \cdot \xi^2. \quad 5)$$

Setzt man nun

$$n\nu + \frac{n_1}{2}\xi = \eta \quad 6)$$

und

$$\frac{4n \cdot n_2 - n_1^2}{4} = k, \quad 7)$$

so stellt

$$\eta^2 = n\xi - k\xi^2 \quad 8)$$

die Scheitelgleichung des Kegelschnittes vor, mit nur zwei Konstanten. Aus ihr geht hervor, daß für $k=0$ der Kegelschnitt eine Parabel, für $k>0$ eine Ellipse, für $k<0$ eine Hyperbel ist.

Nun soll noch der Anfangspunkt der t -Zählung verlegt werden:

Nach 2) und 6) ist

$$\eta = \frac{nt + \frac{n_1}{2}}{nt^2 + n_1t + n_2}, \text{ d. i. } = \frac{nt + \frac{n_1}{2}}{\frac{1}{n} \left(\left(nt + \frac{n_1}{2} \right)^2 + nn_2 - \frac{n_1^2}{4} \right)}.$$

Wird nun

$$nt + \frac{n_1}{2} = \tau \quad 9)$$

gesetzt, so lauten die Parametergleichungen für die neuen Koordinaten ξ, η

$$\eta = \frac{n\tau}{\tau^2 + k}, \quad \xi = \frac{n}{\tau^2 + k}. \quad 10)$$

Diese Umformung setzte voraus, daß in 1) der Koeffizient n des ersten Gliedes im Nenner von Null verschieden war.

B) $n=0$.

Fehlt dagegen das Glied t^2 im Nenner von 1), so schreibe man den Nenner $n_1t + n_2 = n_1 \left(t + \frac{n_2}{n_1} \right)$ und setze

$$t + \frac{n_2}{n_1} = \tau \quad 11)$$

in die Gleichungen 1) ein. Man erhält dann

$$x = m'\tau + m_1' + \frac{m_2'}{\tau} \text{ und } y = p'\tau + p_1' + \frac{p_2'\tau}{\tau}.$$

Führt man nun

$$\xi = f \cdot \tau \text{ und } \eta = \frac{g}{\tau} \quad 12)$$

ein, so werden x und y lineare ganze Funktionen von ξ, η

$$\text{und } \xi\eta = fg; \quad 13)$$

und wenn man dann ξ und η als neue Koordinaten ansieht, so stellt 12) und 13) eine Hyperbel mit nur einer Konstanten fg vor. Da die Kurvengleichung 13) nur von dem Werte des Produktes fg abhängt, so ändert sich die Gestalt der Hyperbel auch nicht, wenn man in den Gleichungen 12) $g=f$ setzt, und deshalb soll für die Folge der Einfachheit halber $f=g$ angenommen werden. Die Voraussetzung für diese Transformation war die, daß im Nenner zwar t^2 nicht vorkommt, aber n_1 von Null verschieden ist.

C) Würde außer n auch $n_1 = 0$ sein, so könnte man

$$u = t^2, \quad v = t$$

setzen, so daß sich x und y als lineare ganze Funktionen von u und v ergeben. Gelten dann u, v als neue Koordinaten, so geht der Kegelschnitt 1) über in die Parabel $v^2 = u$. Das ist aber keine wesentliche Änderung gegen 8) bzw. 10). Denn dort wird für $n_2 = n_1 = 0$ auch $k = 0$, und an Stelle des jetzigen t steht $\frac{1}{t}$. Der Fall $n_1 = n = 0$ braucht also nicht besonders betrachtet zu werden. Für jede der beiden Transformationen 10) und 12) muß jetzt die weitere Untersuchung besonders geführt werden.

§ 4. Die Ablesungen an Ellipse und Hyperbel $\eta^2 = n\xi - k\xi^2$.

Der Kegelschnitt 10) werde nun durch den Kreis

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = r^2$$

geschnitten. Die Parameter der Schnittpunkte ergeben sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{n}{\tau^2 + k} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{n\tau}{\tau^2 + k} - \beta\right)^2 = r^2, \quad 14)$$

die nach Potenzen von τ geordnet lautet:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\tau^4 - 2\beta n\tau^2 + (n^2 - 2n\alpha + 2k(\alpha^2 + \beta^2 - r^2))\tau^2 - 2k\beta n\tau + n^2 - 2kn\alpha k^2(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0. \quad 14')$$

Sind die α, β, r, n, k gegeben, und ist der bezifferte Kegelschnitt 10) aufgezeichnet, so lassen sich die Wurzeln der Gleichung 14') als Parameter der Schnittpunkte beider Kurven ablesen.

Es soll jetzt versucht werden, durch zweckmäßige Verfügung über α, β, r die Gleichung 14') mit einer beliebig vorgelegten Gleichung

$$c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0 \quad 15)$$

in Übereinstimmung zu bringen.

Dazu werde

$$z = \lambda\tau \quad 16)$$

gesetzt und 15) mit ε multipliziert. Über die λ und ε soll dann so verfügt werden, daß die 5 Koeffizienten von 14') mit den 5 Koeffizienten der umgewandelten Gleichung 15)

identisch werden. Das liefert dann für die 5 Unbekannten $\alpha, \beta, \nu, \lambda, \varepsilon$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - r^2 &= \varepsilon c_4 \lambda^4 \\ -2\beta n &= \varepsilon c_3 \lambda^3 \\ n^2 - 2n\alpha + 2k(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) &= \varepsilon c_2 \lambda^2 \\ -2k\beta n &= \varepsilon c_1 \lambda \\ n^2 - 2kn\alpha + k^2(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) &= \varepsilon c_0. \end{aligned} \quad 17)$$

Für die Proportionalitätsfaktoren ε und λ sind die beiden Werte $0, \infty$ auszuschließen, wenn für $z = \lambda \tau$ ein bestimmter Zahlwert sich ergeben soll.

Aus den Gleichungen 17) erhält man, wenn k nicht $= 0$, der Kegelschnitt 10) also keine Parabel ist,

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{c_1}{k c_3}; \quad N = \frac{c_1^2}{c_3^2} \cdot c_4 - \frac{c_1}{c_3} \cdot c_2 + c_0; \quad \varepsilon = \frac{n^2 (1-k)}{N} \\ \alpha &= \frac{n}{2k} \frac{(2-k) \frac{c_1^2}{c_3^2} \cdot c_4 - \frac{c_1}{c_3} c_2 + k c_0}{N}; \quad \beta = -\frac{n \cdot (1-k)}{2k \cdot N} \cdot c_1 \cdot \sqrt{\frac{c_1}{k c_3}} \\ r^2 &= -\frac{n^2 (1-k)}{k^2 N} \cdot \frac{c_1^2}{c_3^2} \cdot c_4 + \alpha^2 + \beta^2. \end{aligned} \right\} 18)$$

Die GröÙe N kann graphisch gefunden werden: Man verbindet den Punkt c_3 der x-Achse mit dem Punkt c_1 der y-Achse und zieht zur Verbindungslinie die Parallele durch $x = c_2$; diese schneidet dann auf der y-Achse das Stück $\frac{c_1}{c_3} \cdot c_2$ ab.

Auf der Parallele errichtet man im oberen Endpunkte das Lot bis zum Schnitte mit der x-Achse, verbindet den Schnittpunkt mit dem Punkte c_2 der y-Achse und legt zur letzten Verbindungslinie die Parallele durch den Punkt c_4 der y-Achse. Dann wird auf der x-Achse das Stück $\frac{c_1^2}{c_3^2} \cdot c_4$ abgetrennt.

λ^2 muß eine positive GröÙe sein, da für die graphische Lösung imaginäre Werte λ unbrauchbar sind. Daraus folgt, daß, wenn c_1 und c_3 gleiches Zeichen haben, k positiv gewählt, die Ablesungen von τ also an einer Ellipse gemacht werden müssen.

Haben dagegen c_1 und c_3 verschiedenes Zeichen, so müssen die Ablesungen von τ an einer Hyperbel gemacht werden, weil hier k negativ genommen werden muß. Das Rechenblatt muß also beide Kegelschnitte enthalten, wenn es für beliebige Vorzeichen von c_1 und c_3 brauchbar sein soll.

Welchen Wert man dem k im Falle einer Hyperbel beilegt, ist gleichgültig. Wenn es sich aber um eine Ellipse handelt, so darf k nicht $= 1$ genommen werden, weil in diesem Falle ε verschwindet, wenn nicht etwa gleichzeitig $N = 0$ ist. Der Fall $N = 0$ wird in § 7 besonders untersucht werden. Auch für $k = 0$ verlieren die Formeln 18) ihre Geltung. Hierüber wird im nächsten § gehandelt werden.

Am einfachsten gestalten sich für den Fall einer Ellipse die Formeln 15), wenn man $k=2$ wählt. Dann wird namentlich der Ausdruck für α bequemer.

Über n kann bei allen 3 Kurvenarten ohne jede Einschränkung frei verfügt werden.

Für $c_3=0$ wird $\lambda=\infty$, wenn nicht etwa zugleich $c_1=0$ ist. Wenn aber $c_1=c_3=0$ ist, so wird λ unbestimmt, d. h. hier willkürlich. Die Gleichung vierten Grades wird dann eine quadratische in z^2 und man bekommt aus 19)

$$\lambda = \text{willkürlich}; N = c_4 k^2 \lambda^4 - c_2 k \lambda^2 + c_0; \epsilon = \frac{n^2 (1-k)}{N}; \alpha = \frac{n}{2} \cdot \frac{(2-k) k c_4 \lambda^4 - c_2 \lambda^2 + c_0}{N};$$

$$\beta = 0; r^2 = - \frac{n^2 (1-k) c_0 \lambda^4}{N} + \alpha^2. \quad 18')$$

§ 5. Die Ablesungen an der Parabel $\eta^2 = n\xi$.

Wenn der Kegelschnitt 10) eine Parabel vorstellt, so ist $k=0$ zu setzen.

Für diesen Fall werden die Formeln 18) unbrauchbar, weil in ihnen die verschwindende Größe k im Nenner als Faktor steht, aber λ nicht $=\infty$ werden darf. Zunächst ersieht man aus der vierten der Gleichungen 17), daß $k=0$ die Bedingung nach sich zieht, daß der Koeffizient c_1 in 15) nicht vorkommt. Dann aber kann λ beliebig groß genommen werden. Für die übrigen Unbekannten ergeben sich viel einfachere Werte als in 18). Man bekommt:

$$\epsilon = \frac{n^2}{c_0}; \alpha = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{c_2 \lambda^2}{c_0} \right); \beta = - \frac{n}{2} \cdot \frac{c_3}{c_0} \cdot \lambda^2; r^2 = \frac{n^2}{4} \left\{ \left(1 - \frac{c_2}{c_0} \lambda^2 \right)^2 + \frac{c_3^2}{c_0^2} \lambda^4 - \frac{4 c_4}{c_0} \lambda^4 \right\}. \quad 19)$$

Ist in der Gleichung 15) nicht c_1 sondern $c_3=0$, so unterwerfe man sie der Substitution $z = \frac{1}{z'}$. Dann erhält man eine Gleichung, in der die erste Potenz der Unbekannten fehlt, sodaß sie nach diesem Paragraphen behandelt werden kann. Eine Auflösung nach den Formeln 18) ist nicht möglich.

§ 6. Die Ablesungen an der Hyperbel $\xi \cdot \eta = f^2$.

Es sei wieder die Gleichung zu lösen:

$$c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0. \quad 15)$$

Man forme sie gleichfalls durch

$$z = \lambda \tau$$

$$\text{um in} \quad c_4 \lambda^4 \tau^4 + c_3 \lambda^3 \tau^3 + c_2 \lambda^2 \tau^2 + c_1 \lambda \tau + c_0 = 0, \quad 15')$$

multipliziere sie mit einer Unbekannten ϵ und suche sie identisch zu machen mit der Gleichung für die Parameter der Schnittpunkte

$$\text{der Hyperbel} \quad \xi = f\tau, \eta = \frac{f}{\tau}$$

$$\text{und des Kreises } (\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = r^2.$$

Zur Bestimmung der τ erhält man die Gleichung:

$$f^2 \tau^4 - 2 f \alpha \tau^3 + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) \tau^2 - 2 \beta \tau + f^2 = 0. \quad 20)$$

Durch Gleichsetzen der entsprechenden Koeffizienten von 15') und 19) entstehen die Bestimmungsgleichungen

$$\varepsilon \lambda^4 c_4 = f^2; \quad \varepsilon \lambda^3 c_3 = -2 f \alpha; \quad \varepsilon \lambda^2 c_2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2; \quad \varepsilon \lambda c_1 = -2 f \beta; \quad \varepsilon c_0 = f^2. \quad 21)$$

Hieraus ergeben sich die Werte

$$\varepsilon = \frac{f^2}{c_0}; \quad \lambda^4 = \frac{c_0}{c_4}; \quad \alpha = -\frac{f}{2} \cdot \frac{c_3}{c_0} \sqrt{\left(\frac{c_0}{c_4}\right)^3}; \quad \beta = -\frac{f}{2} \cdot \frac{c_1}{c_0} \cdot \sqrt{\frac{c_0}{c_4}}; \quad 22)$$

$$r^2 = \frac{f^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_0 c_4}} \left\{ \frac{c_3^2}{c^4} + \frac{c_1^2}{c_0} - 4 c_2 \right\}.$$

Die Formeln lehren, daß die Ablesungen an dieser Hyperbel nur gemacht werden können, wenn c_0 und c_4 gleiches Vorzeichen haben und von Null verschieden sind, weil nur unter dieser Voraussetzung λ , α , β , r reell und endlich werden.

Während bei den Kegelschnitten in § 4 die Formeln 18) für den Fall versagten, daß in der Gleichung 15) das Glied mit der ersten Potenz der Unbekannten fehlte, so daß in diesem Falle die Ablesung an der Parabel des § 5 gemacht werden mußte, tritt diese Schwierigkeit hier nicht ein. Im Gegenteil vereinfachen sich die Formeln 21) ganz wesentlich.

Wenn gleichzeitig c_1 und c_3 verschwinden, so wird Gleichung 15) in z^2 quadratisch. Man erhält

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad r^2 = -\frac{f^2 c_2}{\sqrt{c_0 c_4}}.$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{c_0 c_4}$ ist so zu wählen, daß r^2 positiv wird.

Der Vergleich der Formeln 18) und 21) zeigt, daß sich in 21) die ε , λ , α , β , r einfacher ergeben, also die Benutzung der Hyperbel $\xi \eta = f^2$ zur Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades viel bequemer ist als die Ablesung an dem Kegelschnitt des § 4. Die Anwendung der Hyperbel $\xi \eta = f^2$ ist aber beschränkter, weil mit ihr nur solche Gleichungen ihre Lösung finden, bei denen c_0 und c_4 gleiches Zeichen haben.

§ 7. Ablesungen an dem Kreise $\eta^2 = n\xi - \xi^2$.

Die Formeln 18) versagten, wenn c_1 oder c_3 verschwanden; sie werden aber auch unbrauchbar, wenn zwischen den Koeffizienten die Beziehung besteht, daß der Nenner N von ε verschwindet, wenn also

$$c_2 = \frac{c_4 c_1}{c_3} + \frac{c_0 c_3}{c_1} \quad 23)$$

wird.

Die Gleichung 15) hat dann das Aussehen

$$c_4 z^4 + c_3 z^3 + \frac{c_1 c_4 z^2}{c_3} + \frac{c_0 c_3}{c_1} z^2 + c_1 z + c_0 = 0.$$

Hierin vertausche man das zweite und dritte Glied und nehme aus je zwei Gliedern den gemeinsamen Faktor heraus:

$$\frac{c_4 z^2}{c_3} (c_3 z^2 + c_1) + \frac{c_3 z^2}{c_1} (c_1 z + c_0) + c_1 z + c_0 = 0$$

oder

$$\frac{c_4 z^2}{c_3} (c_3 z^2 + c_1) + \frac{(c_1 z + c_0)}{c_1} (c_3 z^2 + c_1) = 0$$

$$(c_3 z^2 + c_1) \left(\frac{c_4 z^2}{c_3} + z + \frac{c_0}{c_1} \right) = 0,$$

$$(c_3 z^2 + c_1) \left(c_4 z^2 + c_3 z + \frac{c_0 c_3}{c_1} \right) = 0. \quad 24)$$

$N=0$ besagt also, daß Gleichung 15) in zwei quadratische Gleichungen degeneriert.

Ist nun $N=0$, so bleibt ε nur endlich, wenn zugleich $1-k=0$ ist. Dann aber stellt der Kegelschnitt 8) einen Kreis vor:

$$\xi = \frac{n\tau}{\tau^2 + 1}, \quad \eta = \frac{n}{\tau^2 + 1},$$

und die Gleichung für die Parameter an den Schnittpunkten mit dem veränderlichen Kreise lautet

$$(n - \alpha(\tau^2 + 1))^2 + (n\tau - \beta(\tau^2 + 1))^2 = r^2(\tau^2 + 1)^2,$$

die sich in

$$(\tau^2 + 1)((\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\tau^2 - 2n\beta\tau + (n - \alpha)^2 + \beta^2 - r^2) = 0 \quad 25)$$

spalten läßt. Sie muß mit der aus 24) entstehenden Gleichung

$$\varepsilon(c_3\lambda^2\tau^2 + c_1)(c_4\lambda^2\tau^2 + c_3\lambda\tau + \frac{c_0c_3}{c_1}) = 0 \quad 26)$$

identisch werden.

Die Gleichsetzung der beiden ersten Faktoren in 25) und 26) bietet kein weiteres Interesse, da τ nach 24) imaginär wird, und bei der graphischen Auflösung von Gleichungen nur die reellen Wurzeln gesucht werden. Es muß daher sein:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = \varepsilon c_4 \lambda^2; \quad -2n\beta = \varepsilon c_3 \lambda, \quad (n - \alpha)^2 + \beta^2 - r^2 = \frac{\varepsilon c_0 c_3}{c_1}. \quad 27)$$

Hieraus folgt, daß ε und λ willkürlich angenommen werden können und α , β , r die Werte erhalten:

$$\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\varepsilon}{2n} \left(c_4 \lambda^2 - \frac{c_0 c_3}{c_1} \right); \quad \beta = -\frac{\varepsilon}{2n} c_3 \lambda; \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon c_4 \lambda^2. \quad 28)$$

Bequeme Formeln ergeben sich aus 28) für $\varepsilon = 2n$ und $\lambda = 1$, nämlich:

$$\alpha = \frac{n}{2} + c_4 - \frac{c_0 c_3}{c_1}; \quad \beta = c_3; \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c_4. \quad 29)$$

§ 8. Die Verwendung des Rechenblattes zur Lösung kubischer Gleichungen.

A. Die zur Lösung gestellte Gleichung vierten Grades wird zu einer kubischen Gleichung, wenn c_4 oder c_0 verschwindet. Wenn $c_4 = 0$ zu setzen ist, so ergeben sich für die Ablesung an der Ellipse, bezw. Hyperbel $\eta^2 = n\xi - k\xi^2$ des § 4 folgende aus 18) hervorgehende Formeln

$$\lambda^2 = \frac{c_1}{k c_3}; N = -\frac{c_1}{c_3} c_2 + c_0; \varepsilon = \frac{n^2 (1-k)}{N};$$

$$\alpha = \frac{n}{2k} \cdot \frac{-\frac{c_1 c_2}{c_3} + k c_0}{N}; \beta = \frac{n}{2k} \cdot \frac{1-k}{N} \cdot c_1 \sqrt{\frac{c_1}{k c_3}}; r^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad 30)$$

r wird also der Abstand des Koordinatenanfanges vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises. Für $c_0 = 0$ erhält man aus 18) ebenfalls etwas einfachere Formeln für die gesuchten Stücke.

B. Für die Ablesungen der Wurzeln der kubischen Gleichung an der Parabel $\eta^2 = n\xi$ des § 5 erhält man aus 19) für $c_4 = 0$:

$$\lambda \text{ bleibt willkürlich; } \varepsilon = \frac{n^2}{2}; \alpha = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{c_2 \lambda^2}{c_0}\right); \beta = -\frac{n}{2} \cdot \frac{c_3}{c_0} \lambda^3; r^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad 31)$$

Für $c_0 = 0$ versagen die Formeln 19). Hier kann man sich indessen dadurch helfen, daß man vor Beginn der Rechnung die Gleichung 15) durch $z = \frac{1}{z'}$ transformiert.

C. Bei der Hyperbel $\xi\eta = f^2$ des § 6 werden die Formeln 21) für $c_4 = 0$ unbrauchbar. Denn die erste der Gleichungen 21) verlangt, daß $f = 0$ wird. Das zieht aber nach sich, daß c_3, c_1 und c_0 auch verschwinden müssen. Die kubische Gleichung würde sich also auf $c_2 z^2 = 0$ reduzieren. So bleibt also zunächst die Hyperbel $\xi\eta = f^2$ zur unmittelbaren Auflösung der kubischen Gleichung außer Betracht.

Trotzdem kann man sie durch einen Kunstgriff bequem zu diesem Zwecke verwenden:

Lautet nämlich die gegebene kubische Gleichung

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad 32)$$

so verwandle man sie durch Multiplikation mit $z + p$ in eine Gleichung vierten Grades

$$a_3 z^4 + (a_2 + p a_3) z^3 + (a_1 + p a_2) z^2 + (a_0 + p a_1) z + p a_0 = 0. \quad 33)$$

Für sie erhält man aus den Formeln 22):

$$\varepsilon = \frac{f^2}{p a_0}; \lambda^4 = \frac{p a_0}{a_3}; \alpha = -\frac{f}{2} \frac{a_2 + p a_3}{p a_0} \sqrt[4]{\frac{p a_0}{a_3}}; \beta = -\frac{f}{2} \frac{a_0 + p a_1}{p a_0} \sqrt[4]{\frac{p a_0}{a_3}}; \quad 34)$$

$$r^2 = \frac{f^2}{4} \frac{1}{\sqrt{p a_0 a_3}} \left\{ \frac{(a_2 + p a_3)^2}{a_3} + \frac{(a_0 + p a_1)^2}{p a_0} - 4(a_1 + p a_2) \right\}.$$

Hierbei ist das Vorzeichen der beliebigen Zahl p so zu wählen, daß $p a_0$ und a_3 dasselbe Zeichen erhalten. Am einfachsten werden diese Formeln für $p = \pm 1$.

§ 9. Das Ablesen der vierten Wurzel.

A. Für die Wurzel der Gleichung $z^4 + c_0 = 0$ findet man durch Ablesen an dem Kegelschnitte des § 4 gemäß den Formeln 18') die Bestimmungsstücke:

$$\lambda = \text{willkürlich}; N = k^2 \lambda^4 + c_0; \alpha = \frac{n(2-k)k\lambda^4 + c_0}{2N}; \beta = 0; r^2 = \alpha^2 - \frac{n^2(1-k)\lambda^4}{N}. \quad 35)$$

Am bequemsten wählt man $\lambda = 1$.

B. Beim Kreise des § 7 sind die Bestimmungsstücke aus 35) für $k = 1$ abzuleiten.

$$\lambda = \text{willkürlich}; N = \lambda^4 + c_0; \alpha = \frac{n}{2}; \beta = 0; r = \frac{n}{2}. \quad 36)$$

Der hierdurch bestimmte bewegliche Kreis ist mit dem festen Kreise identisch. Das zeigt, daß in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des § 7 der feste Kreis nur zur Auflösung quadratischer Gleichungen brauchbar ist.

C. Für die Ablesung an der Parabel $\eta^2 = n\xi$ liefern die Formeln 19):

$$\alpha = \frac{n}{2}; \beta = 0; r^2 = \alpha^2 - \frac{n^2 \lambda^4}{c_0} = \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{4\lambda^4}{c_0}\right); \quad 37)$$

ist beliebig, am besten $= 1$, zu wählen.

D. Die Hyperbel des § 6 gestattet die Ablesung der vierten Wurzel nicht, weil die Formeln 22) voraussetzen, daß c_0 positiv sei; und das ist hier nicht der Fall.

§ 10. Das Ablesen der Kubikwurzel.

A. Die Gleichung $z^3 = a$ kann mit Hilfe des Kegelschnittes in § 4 nach den Formeln 18) nicht direkt gelöst werden. Man kann sie aber ähnlich wie in 33) erweitern und dann nach 18) lösen. Man findet

$$\lambda^3 = -\frac{a}{kp}; N = \left(\frac{a}{p}\right)^3 - p a; \alpha = \frac{n}{2k} \cdot \frac{(2-k)\left(\frac{a}{p}\right)^3 - k p a}{N}; \beta = \frac{n(1-k)}{2kN} \sqrt{-\frac{a^3}{pk}};$$

$$r^2 = -\frac{n^2(1-k)}{k^2 N^2} \left(\frac{a}{p}\right)^2 + \alpha^2 + \beta^2. \quad 38)$$

Aber auch diese Formeln sind nicht bequem genug.

B. Die Parabel liefert, da $k = 0$, $c_4 = c_2 = c_1 = 0$, $c_3 = 1$ und $c_0 = -a$ ist, nach 19)

$$\alpha = \frac{n}{2}; \beta = +\frac{n}{2} \cdot \frac{\lambda^3}{a}; r^2 = \frac{n^2}{4} \left(1 + \left(\frac{\lambda^3}{a}\right)^2\right) = \alpha^2 + \beta^2. \quad 39)$$

λ ist willkürlich.

C. Die Ablesung am Kreise ist unstatthaft, weil die Bedingung 23) nicht erfüllt wird.

D. Um die Hyperbel des § 6 anwenden zu können, muß man wieder die Gleichung 32) in die Form 33) bringen. Da $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ und $a_0 = -a$ ist, so wird nach 34)

$$\alpha = \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt[4]{-p^3 a^3}; \quad \beta = -\frac{f}{2} \cdot \frac{1}{p} \sqrt[4]{-p a}; \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad 40)$$

Diese Formeln gestalten sich sehr einfach, wenn $-p a = 1$ gesetzt wird:

$$\alpha = \frac{f}{2a}; \quad \beta = \frac{f}{2} \cdot a; \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad 40')$$

Hieraus ersieht man, daß α , β der Mittelpunkt des Strahles vom Koordinatenanfang nach demjenigen Kurvenpunkt ist, der den Parameter $\frac{1}{a}$ trägt. Dieser Kurvenpunkt ist leicht zu finden, da er in Bezug auf die Hyperbelaxe symmetrisch zum Kurvenpunkte mit dem Parameter a liegt.

§ 10. Die Verwendung des Rechenblattes zur Auflösung quadratischer Gleichungen.

Auf quadratische Gleichungen wird man geführt durch Spezialisieren zweier Koeffizienten der allgemeinen Gleichung vierten Grades. Man hat folgende Fälle zu betrachten:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 = 0 \\ \text{II.} \quad & c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z = 0 \\ \text{III.} \quad & c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0. \end{aligned}$$

I. a) Im Falle I besteht zwischen den Koeffizienten die Bedingung 23), welche erfordert, daß $k = 1$ gesetzt werde, der allgemeine Kegelschnitt 8) also in einen Kreis degeneriere. Die Ablesung am Kreise ist aber schon im § 7 erledigt durch die Formeln 28) und 29).

b) Bei der Parabel, also bei $k = 0$, fordert die fünfte der Gleichungen 17), weil ja $c_0 = 0$, daß $n = 0$ sein müßte, was aber nicht zutrifft. Die Parabel bleibt also hier unbenutzbar.

c) Auch mit der Hyperbel $\xi\eta = f^2$ ist die Gleichung I nicht zu lösen, weil nach 22) c_0 nicht 0 sein darf.

II. Der Fall II wird durch den § 8 erledigt, da die Gleichung II eine kubische Gleichung ist, deren konstantes Glied $= 0$ ist.

a) Nach § 8 A ist für den Kegelschnitt 8) in § 4, ($k \geq 1$):

$$\lambda^2 = \frac{c_1}{k c_3}; \quad N = -\frac{c_1}{c_3} c_2; \quad \varepsilon = \frac{n^2 (1-k)}{N}; \quad \alpha = \frac{n}{2k}; \quad \beta = \frac{n}{2k} \cdot \frac{1-k}{N} \cdot c_1 \sqrt{\frac{c_1}{k c_3}}. \quad 41)$$

b) Die Anwendung der Parabel mit Hilfe der Formeln 31) ist ausgeschlossen, weil $c_0 = 0$ zu nehmen ist.

c) In gleicher Weise kann auch die Hyperbel $\xi\eta = f^2$ nicht benutzt werden, weil $c_0 = 0$ ist. Auch der Umweg über die Formeln 33) und 34) führt nicht zum Ziele.

III. a) Im Falle III ist die Bedingung 23) erfüllt; k ist also $= 1$, die Ableitung kann nicht am allgemeinen Kegelschnitt 8), sondern muß am festen Kreise geschehen. Durch Vertauschung von c_4, c_3, c_2 mit c_1, c_1, c_0 folgt aus 28), bezw. 29):

$$\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\varepsilon}{2n} (c_2 \lambda^2 - c_0); \quad \beta = -\frac{\varepsilon}{2n} c_1 \lambda; \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon c_2 \lambda^2. \quad 28')$$

ε und λ willkürlich.

und für $\varepsilon = 2n$; $\lambda = 1$:

$$\alpha = \frac{n}{2} + c_2 - c_0; \quad \beta = c_1; \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c_2. \quad 29')$$

b) Die Parabel liefert nach 19)

$$\lambda = \text{beliebig}; \quad \varepsilon = \frac{n^2}{c_0}; \quad \alpha = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{c_2}{c_0} \lambda^2\right); \quad \beta = 0; \quad r = \alpha. \quad 42)$$

c) Die Hyperbel des § 6 ist wegen $c_4 = 0$ unbrauchbar.

IV. Eine andere Art der Lösung der quadratischen Gleichung mit Hilfe des beweglichen Kreises beruht auf der Überlegung, daß der Kegelschnitt 8) für $n = k = 1$ entartet in die eine Gerade $\eta = 0$; d. i. aber die x -Achse. Setzt man $\xi = \tau$ und sind die Parameter der Schnittpunkte des Kreises mit der x -Achse die Wurzeln der Gleichung $\tau^2 + c_1 \tau + c_0 = 0$, so muß $(\tau - \alpha)^2 + \beta^2 = r^2$ identisch mit ihr werden. Das geschieht, wenn

$$-2\alpha = c_1 \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c_0$$

ist. Also ist

$$\alpha = -\frac{c_1}{2} \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{c_1^2}{4} c_0 - c_0 + \beta^2. \quad 43)$$

Hierin ist β willkürlich.

§ 11. Die Benutzung des Rechenblattes in Verbindung mit einer beweglichen Geraden.

Anhangsweise sei noch darauf hingewiesen, wie sich das Rechenblatt gebrauchen läßt zur Lösung quadratischer Gleichungen, wenn an Stelle des beweglichen Kreises ein Lineal benutzt wird, welches die Schnittpunkte einer beweglichen Geraden mit den festen Kurven des Blattes bestimmt.

Die zu lösende Gleichung sei

$$c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0 \quad 44)$$

und die Gleichung der veränderlichen Geraden

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \quad 45)$$

A. Es sollen zuerst die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitte 8) bzw. 10) behandelt werden. Man erhält

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{n}{\tau^2 + k} + \frac{1}{q} \cdot \frac{n\tau}{\tau^2 + k} = 1$$

oder

$$\tau^2 - \frac{n}{q} \cdot \tau + k - \frac{n}{p} = 0. \quad 46)$$

Setzt man wie früher $z = \lambda \tau$ und multipliziert 44) mit ε , so wird die umgeformte Gleichung 44) mit 46) identisch, wenn

$$1 = \varepsilon \lambda^2 c_2; \quad -\frac{n}{q} = \varepsilon \lambda c_1; \quad k - \frac{n}{p} = \varepsilon c_0 \quad 47)$$

ist. Hieraus ergibt sich

$$\lambda \text{ bleibt willkürlich; } \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2 c_2}; \quad q = -\frac{n \lambda c_2}{c_1}; \quad p = \frac{n \lambda^2 c_2}{(k \lambda^2 c_2 - c_0)}. \quad 48)$$

Da p und q die Stücke sind, welche die Gerade 45) aus den Koordinatenachsen ausschneidet, so ist jetzt die Gerade konstruierbar und ihre Schnittpunkte mit 8) können abgelesen werden.

Ist $p = \infty$, so läuft die schneidende Gerade der x -Achse parallel. Dazu ist erforderlich, daß λ so gewählt wird, daß $\lambda^2 = \frac{c_0}{k c_2}$ wird.

$q = \infty$ tritt ein, oder die schneidende Gerade ist der y -Achse parallel, wenn in 44) die erste Potenz der Unbekannten nicht auftritt.

Die abgelesenen Parameter werden sofort die Wurzeln von 44), wenn $\lambda = 1$ gesetzt wird.

Die Formeln 48) gelten für alle in der Gleichung 8) enthaltenen Arten von Kegelschnitten. Sie werden am einfachsten für $k = 0$, also für die Parabel.

In diesem Falle erhält man, wenn $\lambda = 1$ gesetzt wird,

$$q = -\frac{n c_2}{c_1}; \quad p = -\frac{n c_2}{c_0}. \quad 49)$$

Diese Werte 49) von p und q sind aber ohne Rechnung mit Hilfe des Koordinatennetzes bestimmbar:

Man bestimmt den Punkt, in dem die Parallele $\eta = c_2$ zur x -Achse durch den Strahl vom Koordinatenanfang nach dem Punkte n, c_1 geschnitten wird. Die x -Koordinate des Schnittpunktes ist, abgesehen vom Vorzeichen, das gesuchte q . Ähnlich wird p gefunden als x -Koordinate des Schnittpunktes der Geraden c_2 mit dem Strahle vom Koordinatenanfang nach dem Punkte n, c_0 .

B. Für den Schnitt der Geraden 45) mit der Hyperbel 12) erhält man

$$\frac{f \cdot \tau}{p} + \frac{f}{q \tau} = 1.$$

Die Übereinstimmung mit 44) für $z = \lambda \tau$ wird erzielt, wenn bei beliebigem λ

$$\varepsilon = -\frac{1}{\lambda c_1}; \quad p = -\frac{f c_1}{\lambda c_2}; \quad q = -\frac{f \lambda c_1}{c_0} \quad 50)$$

angenommen wird. Die abgelesenen Parameter sind sogleich die Wurzeln von 45), wenn $\lambda = 1$ gewählt ist.

Dann können auch wieder die p, q am Rechenblatt selbst gefunden werden. Es ist, abgesehen vom Vorzeichen, p die x -Koordinate des Schnittpunktes der Geraden $\eta = c_1$ mit dem Strahl $0,0 - f, c_2$.

q ist dagegen die x -Koordinate des Schnittpunktes von $\eta = c_1$ mit dem Strahl $0,0 - f, c_0$.

§ 12. Über die Zeichnung.

In der anliegenden Skizze des behandelten Rechenblattes sind für die Konstanten der zur x-Achse symmetrisch liegenden Kegelschnitte $\eta^2 = n\xi - k\xi^2$ folgende Werte gewählt:

bei der Hyperbel: $n = 20$; $k = -1$;

„ „ Parabel: $n = 20$; $k = 0$;

„ „ Ellipse: $n = 20$; $k = 2$;

„ dem Kreise: $n = 20$; $k = 1$.

Bei der Hyperpel $\eta\xi = f^2$, welche die Koordinatenachse zu Asymptote hat, ist $f = 2$ genommen.

Die Skizze ist nicht bis in die Einzelheiten ausgeführt, weil sie nicht eigentlich Rechenzwecken dienen, sondern bloß eine ungefähre Übersicht über die in Betracht kommenden Zahlenverhältnisse geben soll. Für diesen Zweck genügt eine photographische Verkleinerung meiner Handzeichnung. Für die Bedürfnisse des wirklichen Rechnens behalte ich mir die weitere Ausgestaltung und Herausgabe des Originals vor.

Indessen dürfte auch schon die unvollkommene Skizze mitunter genügen, um die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades einigermaßen genau zu bestimmen, wenn man daneben noch die Wurzeln derjenigen Gleichung mit Hilfe des Rechenblattes ermittelt, deren Wurzeln die reziproken Werte zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Der Vergleich der Wurzeln mit ihren reziproken Werten liefert einen brauchbaren Anhalt für das Urteil über die Genauigkeit der Ablesungen.





