Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Neunten Realschule zu Berlin. Ostern 1902.

Rechenblätter.

Von

Dr. Hermann Fürle,
Oberlehrer.

Mit 3 Tafeln.

BERLIN 1902.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1902. Programm Nr. 131.

Als ich mir auf meine „Rechenblätter", welche jetzt bei Mayer & Müller in Berlin im Erscheinen begriffen sind, Gebrauchsmusterschutz geben liefs, glaubte ich, dafs sich aufser mir niemand mit der Herstellung solcher mechanischer Rechenvorrichtungen beschäftige. Erst nachher wurde mir bekannt, dafs es schon eine ziemlich ausgedehnte Litteratur über diesen Gegenstand giebt, insbesondere wurde ich von befreundeter Seite auf den ausführlichen Traité de nomographie von d'Ocagne aufmerksam gemacht, der in umfassender Weise dieses Gebiet behandelt. Wenn also wegen jener früheren Veröffentlichungen und namentlich wegen der letzgenannten Arbeit ein grofser Teil der Ergebnisse, zu denen ich gelangt war, jetzt nicht mehr neu ist, so haben meine Untersuchungen doch noch mancherlei besonderes, sowohl in der Auffassung und Behandlung des Stoffes, als auch besonders in den praktischen Ergebnissen. Ich bin daher der Ansicht, dafs ich trotz der voraufgegangenen fremden Veröffentlichungen mit der Bekanntmachung meiner Resultate nicht zurückzuhalten brauche.

§ 1. Erweiterung des Koordinatenbegriffes.

Um die folgenden Rechnungen und Betrachtungen von einem speziellen Koordinatensystem unabhängig und als allgemein gültig hinzustellen, soll zunächst eine allgemeinere Fassung des Begriffes „Koordinaten" gegeben werden durch die Einführung der „Bestimmungsgröfse eines geometrischen Ortes".

In der Geometrie versteht man unter einem „geometrischen Orte" die Gesamtheit aller Punkte, die eine gewisse Bedingung erfüllen. Ein solcher geometrischer Ort stellt im Raume in der Regel eine Fläche und in der Ebene eine Linie dar. Ist nun das Grundgebilde, auf welches sich der geometrische Ort bezieht, vollständig gegeben, so hängt die Gestalt des geometrischen Ortes nur noch von einer einzigen Veränderlichen ab, die ich „Bestimmungsgröfse des geometrischen Ortes" nenne. Ist beispielsweise ein fester Punkt gegeben, so ist auch der geometrische Ort aller Punkte, die von ihm gleichen Abstand haben, bekannt, sobald die Gröfse u dieses Abstandes bestimmt ist. Oder, wenn das Grundgebilde, auf welches der geometrische Ort bezogen wird, durch 2 feste Punkte gebildet wird, so ist die Lage aller derjenigen Punkte bekannt, für welche die Summe der Entfernungen von den beiden festen Punkten konstant ist, sobald die Gröfse u jener Konstanten bestimmt ist. Ändern sich die Bestimmungsgröfsen u, so bekommt man im Falle des ersten Beispiels andere und andere koncentrische Kreise und beim zweiten Beispiel andere und andere konfokale Ellipsen.

Es seien nun u und v Bestimmungsgröſsen von 2 irgendwie definierten geometrischen Örtern. Ein bestimmtes u definiert dann eine bestimmte Kurve, ein bestimmtes v eine zweite bestimmte Kurve; beide schneiden sich im allgemeinen; wählt man ein anderes Wertepaar, so ergiebt sich ein anderer Schnittpunkt, u. s. f. Solange über die Gröſsenbeziehungen zwischen u und v nichts angegeben wird, solange läſst sich auch nichts über die Wanderung des Schnittpunktes der beiden durch u und v charakterisierten geometrischen Örter aussagen. Sobald aber eine Beziehung zwischen u, v festgesetzt ist, so ändert sich auch die Lage der Schnittpunkte der beiden Örter gesetzmäſsig, d. h. der Schnittpunkt beschreibt eine Kurve.

Wenn man nun der Beziehung zwischen u, v noch eine von u, v unabhängige Zahl α zuordnet, so ergiebt sich für ein bestimmtes α eine bestimmte Kurve, längs deren die Schnittpunkte der beiden geometrischen Örter wandern; für ein anderes α entsteht auch eine andere Kurve. Die Gesamtheit aller Kurven, welche zu den unzählig vielen α gehören, wird als eine Kurvenschar bezeichnet.

Hiernach läſst sich jede Gleichung $f(u, v; \alpha) = 0$, worin α von u, v unabhängig ist, geometrisch als eine Schar von Schnittkurven zweier geometrischer Örter deuten, wobei natürlich das Aussehen der Schar verschieden ausfällt, je nachdem man die geometrischen Örter, deren Bestimmungsgröſsen u, v sind, wählt. Die Gröſse α spielt die Rolle des Parameters der Schar. Ist $f(u, v; \alpha)$ nur von einem Parameter u abhängig, kommt dagegen v in $f = 0$ nicht vor, so stellt diese Gleichung nicht mehr eine Schar von Schnittkurven zweier geometrischer Örter vor, sondern sie ist die Definitionsgleichung des einen geometrischen Ortes selbst, dessen Bestimmungsgröſse u war. Wegen des veränderlichen Parameters α aber stellt auch sie eine Schar von Kurven vor. Ist z. B. der geometrische Ort ein Kreis um einen Punkt A mit dem Radius u, so stellt $f \equiv u - \alpha = 0$ eine Schar koncentrischer Kreise um A mit dem Radius α vor.

Die üblichen rechtwinkligen Koordinaten stellen sich bei dieser Betrachtung als ein ganz spezieller Fall unserer Bestimmungsgröſse geometrischer Örter dar. Die Grundgebilde, auf die sich hier die geometrischen Örter beziehen, sind die Koordinatenaxen, die geometrischen Örter sind die Parallelen zu den Axen, die Bestimmungsgröſsen die Ordinate und die Abscisse. Wenn wir im folgenden gelegentlich die rechtwinkligen Koordinaten verwenden, so sollen dafür ohne weiteren Hinweis auf das besondere Koordinatensystem die Buchstaben x, y verwendet werden, während für die allgemeinen Koordinaten immer u, v gebraucht werden.

§ 2. Rechenblätter für die Beziehung zwischen 2 Zahlen.

Der Zweck der „Rechenblätter" ist, statt gegebener arithmetischer Beziehungen zwischen Gröſsen gewisse geometrische Beziehungen zu gewinnen, die dazu dienen, mit Hilfe des Auges mühelos Ergebnisse zu erhalten, die sonst nur durch rechnerisches Denken bekommen werden könnten. Zu diesem Ende sind auf den Rechenblättern Kurvenscharen oder Teile von solchen konstruiert, in denen die Zahlengröſsen, mit denen zu rechnen wäre, durch die veränderlichen Parameter der Scharen vertreten werden. Jeder einzelnen Kurve ist der ihr zukommende Parameter als Index angefügt. So sei z. B. eine Kurvenschar konstruiert, die durch die Gleichung $f_1(u_1 v_1; \alpha_1) = 0$ gekennzeichnet

ist. Zu diesem Behufe mufs ein geometrischer Ort definiert werden, dessen Bestimmungsgröfse u_1 ist, und ein zweiter geometrischer Ort mit der Bestimmungsgröfse v_1; dann mufs für ein willkürlich gewähltes α die Kurve $f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0$ konstruiert und mit dem Index versehen werden, der ihrem Parameter gleich ist. Nun werden dem α nach und nach andere und andere Werte beigelegt, die zugehörigen Kurven konstruiert und ihnen als Indices die ihnen zukommenden Werte von α_1 angeschrieben.

In derselben Weise kann man eine zweite Kurvenschar $f_2(u_2, v_2; \alpha_2) = 0$ bilden, in der α_2 einen neuen Parameter und u_2, v_2 die Bestimmungsgröfsen zweier neuer geom. Örter bedeuten. Eine arithmetische Beziehung zwischen den Gröfsen α_1, α_2 kann nun mit Hilfe der beiden Scharen f_1, f_2 geometrisch wiedergegeben werden, wenn man noch 3 Gleichungen zwischen den 4 Bestimmungsgröfsen u_1, v_1, u_2, v_2 hinzufügt. Dann hat man nämlich 5 Gleichungen zwischen diesen 4 Zahlen, so dafs die 4 Bestimmungsgröfsen eliminiert werden können. Das Resultat der Elimination ist dann eine Gleichung zwischen den Zahlen α_1 und α_2. Die hinzuzunehmenden 3 Gleichungen zwischen u_1, v_1, u_2, v_2 müssen aber so beschaffen sein, dafs sie eine geometrische Deutung zulassen.

Zum besseren Verständnis mag ein Beispiel gegeben werden, welches zwar keinen praktischen Wert besitzt, aber zur Erklärung der in Betracht kommenden Verhältnisse ganz geeignet ist; z. B. bedeute in Figur 1 u_1 den Abstand eines Punktes von einer Geraden l und v_1 den Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf dieser Geraden l liegt; u_2 sei der Radius eines Kreises um einen festen Punkt A, v_2 der Radius eines Kreises um einen festen Punkt B. Dann stellt $f_1(u_1, v_1; \alpha_1) \equiv v_1^2 - u_1^2 - \alpha_1^2 = 0$ eine Schar von Senkrechten auf l im Abstand α_1 und $f_2(u_2, v_2; \alpha_2) \equiv \sqrt{u_2^2 - \alpha_2^2} + \sqrt{v_2^2 - \alpha_2^2} - m$ eine Schar von Parallelen zu AB vor. Je nach den 3 hinzuzufügenden Bedingungen zwischen den Koordinaten gestaltet sich die gegenseitige Abhängigkeit von α_1, α_2 verschieden. Wählt man $u_2 = v_2$; $v_1 = u_1\sqrt{2}$; $v_1 = v_2$, so entsteht durch Elimination von u_1, u_2, v_1, v_2 aus den vorhandenen 5 Gleichungen die Beziehung $\frac{m^2}{4} + \alpha_2^2 = 2\alpha_1^2$. Geometrisch wird nun zu einem gegebenen α_1 das zugehörige α_2 in folgender Weise ermittelt: $u_2 = v_2$ stellt das Mittellot auf AB vor; $f_2 = 0$ aber eine Schar Wagerechter; der Komplex beider Gleichungen also die Schnittfigur, d. h. eine Skala für α_2 auf dem Mittellot von AB. $v = u\sqrt{2}$ stellt eine gegen l unter 45° gezogene Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius v_1 vor. Der Gleichung $f_1 = 0$ entsprach aber eine Schar von Loten auf l. Die Vereinigung beider Gleichungen wird durch eine Skala für α_1 auf der schrägen Linie $v = u\sqrt{2}$ repräsentiert. Auf dieser Skala sucht man den mit α_1 bezeichneten Punkt auf und beschreibt mit dem zugehörigen v_1 den Kreis um B. Derselbe schneidet die Skala für α_2 in einem Punkte; der Index dieses Punktes ist die Zahl α_2, welche sich für den gewählten Wert α_1 aus $\frac{m^2}{4} + \alpha_2^2 = 2\alpha_1^2$ ergeben würde.

Diese spezielle Betrachtung läfst sich leicht verallgemeinern:

Angenommen, es seien f_1 und f_2 festgewählt und die drei hinzuzunehmenden Gleichungen $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$ zwischen den 4 Gröfsen $u_1, v_1; u_2, v_2$ so bestimmt, dafs die Elimination dieser Gröfsen aus den 5 Gleichungen auf die Gleichung $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ führt. Dann kann man aus $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$ 3 neue Gleichungen bilden, in

denen 3 der Bestimmungsgröfsen durch die 4. ausgedrückt werden: z. B. $u_1 = N_1(v_2)$; $v_1 = N_2(v_2)$; $u_2 = N_3(v_2)$. Die beiden ersten dieser Gleichungen stellen nach Elimination von v_2 eine Gleichung zwischen u_1, v_1, also eine Kurve für den Punkt P_1 mit den Koordinaten u_1, v_1 dar. Die Gleichung $u_2 = N_3(v_2)$ ist die Gleichung einer Kurve, deren Punkte P_2 die Koordinaten u_2, v_2 haben. Die erste dieser beiden Kurven schneidet die Schar $f_1 = 0$ und die zweite Kurve dagegen die Schar $f_2 = 0$ in gewissen Punkten. Diese Punkte sind die einzigen Stellen der Kurvenscharen f_1 und f_2, die in Betracht kommen. Es brauchen darum die Kurven der Scharen nicht vollständig ausgezeichnet, sondern von ihnen nur die Schnittpunkte mit den beiden vorgenannten Kurven angegeben zu werden. Fügt man diesen Schnittpunkten dann die Indices bei, die den vollständigen Kurven zukämen, so entstehen auf den beiden in Rede stehenden Kurven Skalen, deren Punkte in gewisser geometrischer Abhängigkeit von einander stehen. Welcher Art diese Beziehung ist, hängt von der Form der Funktionen f_1, f_2, M_1, M_2, M_3 ab. Beispielsweise kann diese Form so gewählt sein, dafs der Punkt P_2 immer auf derselben Wagerechten liegt wie der Punkt P_1, oder dafs der Abstand beider Punkte konstant ist, oder am einfachsten, dafs P_1 und P_2 immer zusammenfallen.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie sich jede vorgeschriebene Beziehung zwischen 2 Veränderlichen $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ durch 2 Skalen geometrisch wiedergeben läfst:

Entweder nehme man die Form der beiden Funktionen f_1 und f_2 und die Form zweier der Funktionen M z. B. M_1 und M_2 als fest gewählt und M_3 als unbekannt an. Dann kann man aus diesen 4 Gleichungen und der gegebenen Gleichung $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ die α_1, α_2 und zwei der Bestimmungsgröfsen z. B. u_1, v_1 eliminieren und erhält dann eine Gleichung zwischen u_2, v_2. Das ist dann die fehlende Gleichung $M_3 = 0$.

Oder, man wählt eine der Funktionen f, z. B. $f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0$ und alle 3 Funktionen $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$ fest und eliminiert aus ihnen und $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ drei der Bestimmungsgröfsen und α_1. Die Eliminationsresultante giebt eine Beziehung zwischen α_2 und der 4. Bestimmungsgröfse. Auf diese Weise erhält man die fehlende Beziehung $f_2 = 0$, die hier nur von einer Bestimmungsgröfse abhängig wird. Um eine möglichst einfache geometrische Darstellung der Beziehung zwischen α_1 und α_2 zu bekommen, mufs man die Form der M so einfach als möglich wählen. Am bequemsten setzt man $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$ und definiert u_1 und u_2 als Bestimmungsgröfsen desselben geometrischen Ortes und v_1 und v_2 ebenfalls als Bestimmungsgröfsen eines und desselben Ortes. Ferner kann man die dritte Funktion M so wählen, dafs die beiden Skalen denselben Träger bekommen. Dann kann man auf der einen Seite dieser Linie die α_1-Teilung und auf der andern Seite die entsprechenden Punkte der α_2-Skala auftragen.

§ 3. Rechenblätter für die Beziehung zwischen 3 Zahlen.

Um eine zahlenmäfsige Abhängigkeit dreier Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch eine geometrische Abhängigkeit zu ersetzen, ist es nötig, zu den beiden betrachteten Kurvenscharen $f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0$, $f_2(u_2, v_2; \alpha_2) = 0$ noch eine dritte Schar $f_3(u_3, v_3; \alpha_3) = 0$ hinzuzunehmen, worin u_3, v_3 die Bestimmungsgröfsen zweier neuer geometrischer Örter sind. Zu diesen 3 Gleichungen zwischen den 6 Bestimmungsgröfsen müssen aber noch weitere

4 Gleichungen zwischen $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$ hinzukommen, damit es möglich wird, durch Elimination dieser Gröfsen eine Beziehung zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu erhalten.

Es soll zunächst gezeigt werden, dafs es, unabhängig von der geometrischen Bedeutung der $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$, auf mannigfache Weise möglich ist, jede vorgeschriebene Gleichung $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ in die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ und 4 Gleichungen $M_1 = 0$ $M_2 = 0$ $M_3 = 0$ $M_4 = 0$ zwischeu den 6 Bestimmungsgröfsen zu zerlegen:

Es ist zu diesem Zwecke zu zeigen, dafs man 6 der 7 Funktionen f, M beliebig annehmen und dann die Form der siebenten Funktion mit Hilfe der gegebenen Gleichung $F = 0$ ermitteln kann:

Sind zunächst die 3 Funktionen f fest angenommen, so kann man aus ihnen und $F = 0$ die drei α eliminieren. Aus der Eliminationsgleichung und den 3 angenommenen Funktionen M folgt aber durch Elimination von 3 Bestimmungsgröfsen eine Gleichung zwischen den 3 übrigen Bestimmungsgröfsen. Diese Gleichung ist dann die vierte Gleichung $M = 0$.

Sind dagegen 2 Funktionen f, z. B. $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ und die 4 Funktionen M fest gewählt, so kann man aus ihnen und $F = 0$: α_1, α_2 und $u_1, v_1; u_2, v_2$ eliminieren. Die resultierende Gleichung zwischen u_3, v_3, α_3 ist die gesuchte Gleichung $f_3 = 0$.

Da unter den 4 Funktionen M immer 3 ganz beliebig gewählt werden können, so ist es auch gestattet anzunehmen, dafs eine oder 2 oder 3 von ihnen feste Kurven definieren.

Ist z. B. $M_1(u_1, v_1) = 0$, so stellt diese Gleichung eine Kurve vor, deren Punkte die Koordinaten u_1, v_1 haben. Diese Kurve schneidet aus den Kurven der Schar $f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0$ einzelne Punkte aus. Durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen $M_1 = 0$ und $f_1 = 0$ ist also jetzt eine Skala für α_1 festgelegt.

Ist noch $M_2(u_2, v_2) = 0$, so bestimmt sie in Gemeinschaft mit $f_2(u_2, v_2; \alpha_2) = 0$ eine Skala für α_2.

Ist auch noch eine dritte Funktion M_3 von der Gestalt, dafs sie einen Zusammenhang zwischen u_3, v_3 giebt, so sind $M_3(u_3, v_3) = 0$ und $f_3(u_3, v_3; \alpha_3) = 0$ zusammen die Gleichungen einer Skala für α_3.

Nebenher sei bemerkt, dafs die Konstruktion einer durch $f(u, v; \alpha) = 0$ und $M(u, v) = 0$ definierten Skala für α am einfachsten wird, wenn man u und v als Funktionen von α ausdrückt: $u = U(\alpha)$; $v = V(\alpha)$ und dann das jedem α entsprechende Wertepaar u, v berechnet und an der hierdurch bestimmten Stelle das α anschreibt.

Jede Skala entsteht durch die Schnitte einer Kurvenschar und einer festen Kurve; ihre Definition erfordert also je eine Gleichung $f = 0$ und $M = 0$. Nach diesen Erörterungen läfst sich also der arithmetische Zusammenhang zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ geometrisch wiedergeben durch

1) 3 Kurvenscharen und 4 Bedingungen,
2) 2 Kurvenscharen, 1 Skala und 3 Bedingungen,
3) 1 Kurvenschar, 2 Skalen und 2 Bedingungen,
4) 3 Skalen und 1 Bedingung.

Wenn nur die Schnittpunkte angegeben werden, in denen eine vollständig gezeichnete Kurvenschar von einer zweiten Schar getroffen wird, so entsteht eine Schar von Skalen.

Je nach der Beschaffenheit der Bedingungen werden die nach diesem Schema konstruierten Rechenblätter mehr oder weniger kompliziert. Am vorteilhaftesten gestaltet man die Bedingungen derartig, dafs sie sich geometrisch mit Hilfe eines Lineals, eines Zirkels oder einer beweglichen Figur von konstanter Gestalt verwirklichen lassen. Diese Figur wird dann zweckmäfsig auf einem besondern Blatte aus durchsichtigem Stoffe, z. B. Glas, Glimmer, Celluloid aufgetragen, so dafs sie über dem eigentlichen Rechenblatte verschoben werden kann.

1. Beispielshalber kann man bei Rechenblättern mit 3 Kurvenscharen die hierzu gehörigen 4 Bedingungen M etwa dadurch ausdrücken, dafs verlangt wird, die 3 Punkte $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, $u_3 v_3$ sollen ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a bilden (= 3 Bedingungen), und der Schwerpunkt des Dreiecks soll stets auf einer festen Kurve liegen. (Figur 2.) Sind dann α_1 und α_2 gegeben und wird α_3 gesucht, so lege man das gleichseitige Dreieck mit seinem Schwerpunkte auf die feste Kurve und mit einer Ecke auf die Kurve α_1 und verschiebe es dann so lange, bis noch eine 2. Ecke auf die mit dem Index α_2 versehene Kurve fällt. Die 3. Ecke bestimmt in der 3. Schar eine Kurve mit dem Index α_3. α_3 ist die gesuchte Zahl.

Aus der zahllosen Menge von Möglichkeiten für die Wahl der 4 Bedingungen bekommt man in der Regel ein sehr bequem anzuwendendes Rechenblatt, wenn man bestimmt, dafs die u_1, u_2, u_3 Bestimmungsgröfsen desselben Ortes und v_1, v_2, v_3 Bestimmungsgröfsen eines zweiten Ortes vorstellen sollen und dafs $u_1 = u_2 = u_3$ und $v_1 = v_2 = v_3$ sein soll. Dann fallen die 3 Punkte u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 zusammen. Mit diesem Blatte wird dann α_3 aus α_1 und α_2 in der Weise gefunden, dafs man die Kurve α_1 bis zu ihrem Schnittpunkte mit der Kurve α_2 verfolgt und die durch denselben Punkt gehende Kurve α_3 aufsucht. Ihr Index ist die gesuchte Zahl. (Figur 3.)

2. Bei Rechenblättern mit 2 Kurvenscharen, 1 Skala und 3 geometrisch zu verwirklichenden Bedingungen mag aus der Menge der möglichen Wahlen folgende bequem anzuwendende Anordnung hervorgehoben werden:

P_1 und P_2 sollen zusammenfallen ($u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$) und P_3 soll auf einem beweglichen Kreise von festem Radius liegen. Man legt, um mit diesem Blatte α_3 aus α_1 und α_2 zu bestimmen, den festen Kreis aus durchsichtigem Stoffe mit seinem Mittelpunkt auf den Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_3; dann geht die Peripherie des Kreises durch die mit α_3 bezeichneten Punkte der Skala. (Figur 4.)

3. Bei Rechenblättern mit 1 Kurvenschar, 2 festen Skalen und 2 Bedingungen empfiehlt es sich, die Bedingungen so zu wählen, dafs ihnen genügt wird durch 2 bewegliche Kreise mit den Radien r_1 und r_2. (Figur 5.) Die Mittelpunkte dieser Kreise legt man auf die Skalenpunkte α_1 und α_2. Dann schneiden sich die beiden beweglichen Kreise in 2 Punkten, und die durch diese Punkte gehenden Kurven der Schar tragen als Index die gesuchten Zahlen α_3.

Noch bequemer ist es, auch noch $r_1 = r_2$ zu nehmen (Figur 6); dann nämlich sind α_1 und α_2 gleichweit von dem Schnittpunkte der beiden Kreise entfernt, liegen also auf einem Kreise vom Radius $r_1 = r_2$ um den gesuchten Punkt. Man braucht in

diesem Falle also bloſs einen einzigen Kreis, den man dann so legt, daſs seine Peripherie durch die beiden Skalenpunkte α_1 und α_2 hindurchgeht. Der Mittelpunkt des Kreises bestimmt dann die Kurve α_3.

4. Bei Rechenblättern mit 3 Skalen und 1 Bedingung wählt man am bequemsten die Bedingung, daſs die 3 Punkte, welche die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ repräsentieren, in gerader Linie oder auf einem beweglichen Kreise vom konstanten Radius liegen. (Figur 7 a u. b.)

§ 4. Rechenblätter für n-Veränderliche.

Wie man den Zusammenhang von 2 Variablen durch 2 Kurvenscharen und den von 3 Veränderlichen durch 3 Kurvenscharen darstellen konnte, so ist es auch möglich, Rechenblätter mit n Kurvenscharen zur Veranschaulichung der Abhängigkeit von n Gröſsen zu konstruieren. Um das einzusehen, genügt folgende theoretische Betrachtung:

Es seien n Kurvenscharen durch die n Gleichungen

$$f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0; \quad f_2(u_2, v_2; \alpha_2) = 0 \ldots; \quad f_n(u_n, v_n; \alpha_n) = 0$$

definiert. Um hieraus eine Beziehung zwischen den n Gröſsen α herleiten zu können, fehlen noch $n + 1$ Gleichungen zwischen den Bestimmungsgröſsen u, v. Dieselben seien $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, ... $M_{n+1} = 0$. Wenn dann $F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0$ vorgeschrieben ist, so läſst sich stets eine solche Wahl der Funktionen f und M treffen, daſs sie in ihrer Gesamtheit die Gleichung $F = 0$ zu ersetzen imstande sind:

Ähnlich wie früher seien zunächst die n Funktionen f und die n Funktionen M_1, $M_2 \ldots M_n$ festgewählt, so läſst sich ermitteln, wie die fehlende Funktion M_{n+1} beschaffen sein muſs: Aus $F = 0$, den n Gleichungen $f = 0$ und den n Gleichungen $M = 0$, im ganzen also aus $2n + 1$ Gleichungen können die n Zahlen α und noch n der Bestimmingsgröſsen u, v eliminiert werden. Die Eliminationsgleichung umfaſst die n übrigen Bestimmungsgröſsen und ist identisch mit der unbekannten Funktion $M_{n+1} = 0$.

Wählt man aber zuerst alle $n + 1$ Bedingungsgleichungen $M = 0$ und $n - 1$ der Scharengleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ... $f_{n-1} = 0$ fest und sucht dann die Form der letzten Gleichung $f_n = 0$, so kann man aus den $2n + 1$ bekannten Gleichungen $n + 1$ Bestimmungsgröſsen und die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ eliminieren. In der Eliminationsgleichung kommen dann die andern $n - 1$ Bestimmungsgröſsen u, v und der Parameter α_n vor. Nun sollte aber die gesuchte Gleichung eine Kurvenschar kennzeichnen, also von der Form $f_n(u_n, v_n; \alpha_n) = 0$ sein, während eben herausgekommen war, daſs die erhaltene Gleichung $n - 1$ Koordinaten umfaſste. Es ist also nicht allgemein möglich, bei beliebiger Wahl der erforderlichen $n + 1$ Bedingungsgleichungen die n Kurvenscharen $f_1 = 0 \ldots f_n = 0$ zu bilden.

Wenn man aber die n Funktionen f zuerst und dann erst n Funktionen M festlegt, so ist es, wie gezeigt, immer möglich, die fehlende Bedingungsgleichung $M_{n+1} = 0$ zu finden.

Ist $n = 3$, so ist $n - 1 = 2$; dann ist es, entsprechend dem Resultate des vorigen § immer möglich, $F = 0$ mit den 7 Gleichungen $f = 0$ und $M = 0$ in Übereinstimmung zu bringen, ob man nun alle f oder alle M zuerst festwählt.

Sind einzelne der Bedingungen M so beschaffen, daſs sie in der Ebene der Zeichnung festliegende Kurven definieren, ist also z. B. $M_1(u_1, v_1) = 0$, $M_2(u_2, v_2) = 0, \ldots$

$M_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) = 0$, so stellen diese Kurven gemeinsam mit den entsprechenden Scharen $f_1, f_2 \ldots f_\lambda$ λ Skalen vor. In diesem Falle giebt also das Rechenblatt den durch $F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0$ charakterisierten Zusammenhang der n Zahlen α durch $n - \lambda$ Kurvenscharen, λ Skalen und $n + 1 - \lambda$ Bedingungen wieder.

Die Darstellung von $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist hiernach möglich (da $n = 3$): entweder durch

3 Scharen,	0 Skalen	und 4	Bedingungen,	oder durch
2 „	1 Skala	und 3	„	„ „
1 Schar	2 Skalen	und 2	„	„ „
0 Scharen	3 „	und 1	Bedingung,	was mit den früheren Resultaten übereinstimmt.

Bei 4 Veränderlichen sind (da $n = 4$) Rechenblätter möglich mit

4 Scharen,	0 Skalen	und 5	Bedingungen	oder mit
3 „	1 Skala	und 4	„	„ „
2 „	2 „	und 3	„	„ „
1 Schar	3 „	und 2	„	„ „
0 Scharen	4 „	und 1	Bedingung.	

5 Veränderliche sind durch Rechenblätter zu behandeln, die entweder (da $n = 5$)

5 Scharen,	0 Skalen	und 6	Bedingungen	oder
4 „	1 Skala	und 5	„	„
3 „	2 Skalen	und 4	„	„
2 „	3 „	und 3	„	„
1 Schar	4 „	und 2	„	„
0 Scharen	5 „	und 1	Bedingung.	

Die Rechenblätter für 6 Veränderliche enthalten entweder

6 Kurvenscharen,	0 Skalen	und 7	Bedingungen	oder
5 „	1 Skala	und 6	„	„
4 „	2 Skalen	und 5	„	„
3 „	3 „	und 4	„	„
2 „	4 „	und 3	„	„
1 Kurvenschar	5 „	und 2	„	„
0 Kurvenscharen	6 „	und 1	Bedingung.	

Wenn man als Bedingungen blofs zuläfst: gerade Linien, Kreise von konstantem Radius und das Zusammenfallen von Punkten, so lassen sich die möglichen Typen von Rechenblättern mit 4, 5 oder 6 Parametern durch die Figuren 8 bis 25 schematisch veranschaulichen.

§ 5. Typen für Rechenblätter mit 4 Variablen.

Die Figuren 8 bis 12 der ersten Tafel sind die Schemata von möglichen Rechenblättern mit 4 Veränderlichen. Das Rechenblatt in Figur 8 enthält 4 Kurvenscharen α und einen beweglichen Kreis. Als die willkürlichen 5 Bedingungen, welche hinzugenommen werden müssen,

sind gewählt: Die Punkte u_1, v_1 und u_2, v_2 fallen zusammen, ebenso u_3, v_3 und u_4, v_4 fallen zusammen, u_4, v_4 liegt auf einem Kreise mit konstantem Radius um den Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_2. α_4 wird aus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gefunden, indem man den Mittelpunkt des beweglichen Kreises auf den Schnittpunkt der Kurven α_1, α_2 legt und den Index α_4 derjenigen Kurven der 4. Schar abliest, welche durch den Schnittpunkt des festen Kreises und der Kurve α_3 geht.

Figur 9 enthält je eine Schar von Kurven für die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, eine Skala für α_3 und die 4 Bedingungen: $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, Entfernung $\overline{u_1, v_1 \,..\, u_4, v_4} = r$, Entfernung $\overline{u_3, v_3 \,..\, u_4, v_4} = r$.

Zur Ermittelung von α_4 legt man durch den Schnittpunkt der Kurven α_1, α_2 und den Skalenpunkt α_3 den beweglichen Kreis. Sein Mittelpunkt fällt auf eine Kurve der dritten Schar; ihr Index ist das gesuchte α_4. (Figur 9.)

In Fig. 10 sind α_1 und α_2 die Parameter von Kurvenscharen, α_3 und α_4 sind Indices zweier Skalen. Die 3 Bedingungen, welche erfüllt sind, lassen sich kurz in dem Satze zusammenfassen: der Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_2, der Skalenpunkt α_3 und der gesuchte Skalenpunkt α_4 liegen auf einer Geraden.

Gearbeitet wird mit diesem Blatte in der Weise, dafs man den Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_2 aufsucht, durch ihn und den Punkt α_3 der Skala eine Gerade (am besten eine auf einem durchsichtigen Celluloidlinial angebrachte Längsmarke) legt und abliest, welches der Index α_4 des Punktes ist, in dem die Gerade die 2. Skala trifft.

Figur 11 enthält die Kurvenschar α_1 und die drei Skalen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Erfüllt sind die Bedingungen, dafs die 3 Punkte u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 in gerader Linie liegen und dafs Punkt u_4, v_4 von u_1, v_1 den Abstand r hat. Die gerade Linie kann durch ein Lineal, der konstante Abstand durch einen beweglichen Kreis ersetzt werden.

Um α_4 zu finden, wird das Lineal durch die Skalenpunkte α_2, α_3 gelegt und der Schnittpunkt M mit Kurve α_1 gemerkt. Der um diesen Schnittpunkt gelegte Kreis geht durch den Punkt α_4 der letzten Skala.

Enthält wie in Figur 12 das Rechenblatt 4 Skalen, so ist durch die 3 Skalenpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ein Dreieck bestimmt. Die erforderliche eine Bedingungsgleichung mufs so beschaffen sein, dafs sie über die gegenseitigen Lage des gesuchten Skalenpunktes α_4 und des Dreiecks eine Bestimmung trifft. Z. B. kann eine Festsetzung über die Entfernung des Punktes α_4 von einem im Dreiecke festen Punkt, wie dem Schnittpunkt der Höhen, der Schwerlinien, der Winkelhalbierenden, der Mittellote getroffen werden. Hierbei müfste aber auf dem Rechenblatte gezeichnet werden. Soll das vermieden werden, so kann man auch mit einem beweglichen Kreise in folgender Weise auskommen. (Figur 12.) Sind α_1 und α_2 auf ihren Skalen fixiert, so lege man den beweglichen Kreis mit seiner Peripherie durch diese Punkte und merke die Lage M seines Mittelpunktes. Durch diesen Mittelpunkt M und den Skalenpunkt α_3 lege man denselben Kreis und lese die Zahl α_4 an dem Punkte der 4. Skala ab, durch den der Kreis geht.

Wenn als Bedingung angenommen wird, dafs die Geraden $\alpha_1 \alpha_2$ und $\alpha_3 \alpha_4$ sich stets auf einer festen Linie l schneiden, so erhält man ein Rechenblatt, dessen Anwendung aus Figur 12 b leicht ersichtlich wird.

§ 6. Typen für die Rechenblätter mit 5 Variablen.

1. Fall. (Figur 13.) Das Rechenblatt besteht aus 5 Scharen von Kurven. Die 6 Bedingungen können durch die Forderung gegeben werden, dafs Punkt u_1, v_1 mit Punkt u_2, v_2 und Punkt u_3, v_3 mit Punkt u_4, v_4 zusammenfällt, Punkt u_5, v_5 aber von ihnen denselben Abstand r haben soll.

α_5 sei die gesuchte Zahl. Um sie aufzufinden, wird der bewegliche Kreis vom Radius r durch die beiden Schnittpunkte α_1, α_2 und α_3, α_4 gelegt. Er bestimmt dann durch die Lage seines Mittelpunktes den Index α_5 einer Kurve der 5. Schar.

2. Fall. (Figur 14.) Das Rechenblatt ist aus 4 Kurvenscharen für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und 1 Skala für α_5 zusammengesetzt. Die 5 Bedingungen lassen sich in die (scheinbar) eine zusammenziehen: Die Schnittpunkte α_1, α_2 und α_3, α_4 sollen mit dem Skalenpunkte α_5 auf einer beweglichen Linie, z. B. einer Geraden liegen. Die Anwendung dieses Blattes zur Ermittelung von α_5 besteht dann einfach darin, dafs man die Punkte α_1, α_2 und α_3, α_4 durch eine Gerade verbindet und den Index α_5 des Punktes bestimmt, in dem sie die Skala schneidet.

3. Fall. (Figur 15.) 3 Kurvenscharen repräsentieren die Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$; 2 Skalen die Variablen α_3, α_5.

Als die 4 Bedingungen können gewählt werden: $u_1 = u_2$; $v_1 = v_2$; die Punkte u_1, v_1; u_3, v_3; u_4, v_4 sollen in gerader Linie, Punkt u_5, v_5 auf einem Kreise mit r um u_4, v_4 liegen.

Bei diesem Blatte wird zur Bestimmung der Unbekannten α_5 der Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_2 mit dem Skalenpunkte α_3 durch eine Gerade verbunden. Auf ihren Schnittpunkt mit der Kurve α_4 wird der Mittelpunkt des Kreises vom Radius r gelegt und dann an der Skala für α_5 abgelesen, welches der Index α_5 des Schnittpunktes der Skala und des Kreises ist.

4. Fall. (Figur 16a.) Auf dem Rechenblatte sind 2 Kurvenscharen für α_1, α_2 und 3 Skalen für $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ aufgetragen. Es können dann noch 3 Bedingungen zwischen den Koordinaten der Kurven- und Skalenpunkte beliebig gewählt werden. Es kann angenommen werden, dafs $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$ ist. Es bleibt dann noch eine beliebig festzusetzende Bedingung für die Lage des Skalenpunktes α_5 zu dem Dreieck mit den Ecken α_1, α_2; α_3; α_4 übrig. Für sie kann ähnlich wie in Figur 12a des vorigen Paragraphen ein beweglicher Kreis vom Radius r angenommen werden, der so gelegt wird, dafs auf seiner Peripherie der Schnittpunkt der Kurve α_1 mit der Kurve α_2 sowie der Skalenpunkt α_3 liegen. Der Mittelpunkt M des Kreises wird gemerkt und durch ihn und α_4 ein zweiter Kreis (am besten vom selben Radius) gelegt, der die letzte Skala in dem mit α_5 bezeichneten Punkte schneidet.

Bequem wäre es auch, wenn statt des 2. Kreises, der durch M und α_4 geht, ein dem ersten konzentrischer Kreis verwendet werden könnte, der durch α_4 geht, und dessen Peripherie die letzte Skala in α_5 schneidet. Ein solcher 2. Kreis mit veränderlichem Radius liefse sich leicht herstellen, wenn das durchsichtige Blatt, auf dem der erste Kreis aufgezeichnet wäre, nicht blofs diesen, sondern gleich eine Schar konzentrischer,

mit ihrem Radius als Index numerierter Kreise trüge. Davon soll hier aber abgesehen werden, weil in den früheren allgemeinen Erörterungen stillschweigend angenommen war, dafs die Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten u, v keine veränderlichen Parameter enthalten sollten. Ein dem in Figur 12 b geschilderten Rechenblatt ähnliches wird durch Figur 16 b veranschaulicht.

5. Fall. (Figur 17.) Eine Schar α_1 und 4 Skalen α_2, α_3, α_4, α_5 bilden das Rechenblatt; Bedingungen dürfen nur 2 vorhanden sein. Es kann angenommen werden: 1) die 3 Punkte u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 liegen auf einer Geraden, 2) die Punkte u_1, v_1; u_4, v_4; u_5, v_5 dagegen auf einem Kreise von konstantem Radius. Als Art der Verwendung dieses Blattes ergiebt sich folgende: Zunächst werden α_2 und α_3 durch ein Lineal verbunden und dann wird festgestellt, in welchem Punkte die Kurve α_1 von dieser Geraden geschnitten wird. Darauf wird durch den gefundenen Schnittpunkt und den Skalenpunkt α_4 der bewegliche Kreis gelegt und sein Schnittpunkt α_5 mit der letzten Skala abgelesen.

6. Fall. (Figur 18.) 5 Skalen bilden das Rechenblatt. Als die einzige zu erfüllende Bedingung kann gewählt werden: Der Schnittpunkt der Geraden $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ und $\overline{\alpha_3 \alpha_4}$ soll Mittelpunkt eines beweglichen Kreises sein, von dessen Peripherie die fünfte Skala in α_5 geschnitten wird.

Zur Bestimmung von α_5 aus α_1, α_2, α_3, α_4 legt man durch die Skalenpunkte α_1, α_2 und durch die Skalenpunkte α_3, α_4 die beiden Geraden, fixiert ihren Schnittpunkt und legt auf ihn den Mittelpunkt des beweglichen Kreises. Dieser schneidet die 5. Skala in α_5.

§ 7. Typen für Rechenblätter mit 6 Variablen.

1. Fall. (Figur 19.) Das Rechenblatt enthält 6 Kurvenscharen. Die 7 Bedingungen können so gewählt werden, dafs die Schnittpunkte α_1, α_2; α_3, α_4; α_5, α_6 auf einer Geraden liegen.

α_6 wird mit einem solchen Blatte gefunden, indem man die Schnittpunkte α_1, α_2 und α_3, α_4 aufsucht, sie durch eine Gerade verbindet und diese bis zum Schnitte mit der Kurve α_5 verlängert. Durch denselben Punkt geht dann eine Kurve, welche die gesuchte Zahl als Index trägt.

2. Fall. (Figur 20.) 5 Kurvenscharen für α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, 1 Skala für α_6.

Als Bedingungen können festgesetzt werden: Die Schnittpunkte α_1, α_2 und α_3, α_4 liegen mit u_5, v_5 auf derselben Geraden, und u_6, v_6 hat von u_5, v_5 konstanten Abstand.

Man hat hier die Punkte α_1, α_2 und α_3, α_4 durch eine Gerade zu verbinden, diese bis zur Kurve α_5 zu verlängern und auf den Schnittpunkt den Mittelpunkt eines festen Kreises zu verschieben, der mit seiner Peripherie die Skala in Punkten mit dem Index α_6 schneidet.

3. Fall. (Figur 21.) 4 Scharen für α_1, α_2, α_3, α_4, 2 Skalen für α_5, α_6.

Die Bedingungen können so gewählt werden, dafs die Schnittpunkte α_1, α_2 und α_3 α_4 auf der Peripherie eines beweglichen Kreises liegen und der Mittelpunkt desselben mit u_5, v_5 und u_6, v_6 in eine gerade Linie fällt.

Zur Ermittelung von α_6 legt man den beweglichen Kreis mit seiner Peripherie durch die Schnittpunkte α_1, α_2 und α_3, α_4 und verbindet dann den Mittelpunkt M des

Kreises durch eine Gerade mit α_5. Auf der anderen Skala schneidet diese Gerade den Punkt α_6 aus.

4. Fall. (Figur 22.) 3 Scharen und 3 Skalen.

Man kann die Bedingungen so festsetzen, dafs folgendes Verfahren zur Ermittelung von α_6 angewendet werden kann: Der Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_2 wird mit dem Skalenpunkte α_4 durch eine Gerade verbunden, von der die Kurve α_3 in einem gewissen Punkte getroffen wird. Legt man nun einen beweglichen Kreis durch diesen Punkt und den Skalenpunkt α_5, so giebt der Kreis auf der letzten Skala den Punkt α_6 an.

5. Fall. (Figur 23.) 2 Scharen und 4 Skalen.

Man kann in diesem Falle über die Bedingungen so verfügen, dafs man folgendes Verfahren zur Auffindung von α_6 einschlagen kann: Der Schnittpunkt der Kurven α_1 und α_2 wird mit dem Skalenpunkt α_3 durch eine Gerade verbunden; ebenso wird durch α_4 und α_5 eine Gerade gelegt. Auf den Schnittpunkt M beider Geraden wird der Mittelpunkt eines beweglichen Kreises gelegt, und dann abgelesen, welches der Index α_6 des Punktes ist, in dem der Kreis die letzte Skala schneidet.

6. Fall. (Figur 24.) 1 Schar und 5 Skalen.

In der Figur 24 sind die Bedingungen derart angenommen, dafs die Verbindungslinien der Skalenpunkte α_2, α_3 und α_4, α_5 sich in einem Punkte P schneiden und dafs durch ihn und den Schnittpunkt der Geraden $\overline{\alpha_2, \alpha_3}$ mit der Kurve α_1 ein beweglicher Kreis gelegt ist, auf dessen Umfang auch der Skalenpunkt α_6 liegt.

7. Fall. 6 Skalen.

Die einzige Bedingung, welche zwischen den 6 Skalenpunkten bestehen mufs, ist in Figur 25 die, dafs der Schnittpunkt P der Geraden $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ und $\overline{\alpha_3 \alpha_4}$ mit den Punkten α_5 und α_6 in gerader Linie liegt. Man hat hier zur Auffindung der Unbekannten α_6 die Gerade zwischen den Skalenpunkten α_1 und α_2, und die Gerade zwischen den Skalenpunkten α_3 und α_4 zu ziehen, ihren Schnittpunkt zu markieren und ihn mit dem Punkte α_5 durch eine Gerade zu verbinden. Diese Gerade giebt dann auf der 6. Skala das gesuchte α_6 an.

In ähnlicher Weise hätte man vorzugehen, um Rechenblätter mit 7, 8 oder mehr Variablen herzustellen. Auf die nähere Ausführung mufs hier aber wegen Raummangels verzichtet werden.

§ 8. Beispiele für Rechenblätter mit 3 Kurvenscharen.

Die bisherigen Ergebnisse erfahren ganz wesentliche Änderungen und die, namentlich bei zahlreichen Variablen, oft ziemlich verwickelte Anwendung der Recheublätter wird mitunter erheblich vereinfacht, wenn in den, die Nebenbedingungen verwirklichenden beweglichen Figuren von konstanter Gestalt auch noch Kurvenscharen und Skalen zuzugelassen werden. Für die arithmetische Gestalt der Nebenbedingungen bedeuten aber solche beweglichen Scharen und Skalen nichts anderes, als dafs in den, früher M genannten, Funktionen zwischen den Koordinaten auch noch veränderliche Parameter vorkommen. Die hierdurch hervorgerufenen Abweichungen von unseren früheren Resultaten können aber an dieser Stelle nicht mehr behandelt werden.

Im folgenden sollen nur noch einige Skizzen von Rechenblättern, die meines Wissens bisher noch nicht veröffentlicht sind, und die sich auf die Abhängigkeit von

3 Veränderlichen beziehen, kurz besprochen werden. Bei der Auswahl der Beispiele ist maſsgebend gewesen, daſs sie die voraufgegangenen Erörterungen über allgemeine Koordinaten illustrieren, daſs sie zeigen sollen, wie sich in Wirklichkeit ein nach den früheren Angaben konstruiertes Rechenblatt ausnimmt, wie sich eine und dieselbe Beziehung zwischen 3 Variablen in mannigfaltiger Weise durch Rechenblätter wiedergeben läſst.

Die sämtlichen Rechenblätter auf Tafel 2 bestehen aus 3 Scharen von Kurven, meist geraden Linien. Krummlinige Scharen kommen vor in Figur 6, 7, 8, 13.

In Figur 6 ist die Lage eines Punktes $\mathfrak{P}_1$ der Kreisschar um Q bestimmt durch seinen Abstand u_1 von Q und den Winkel v_1, den eine von $\mathfrak{P}_1$ nach Q gezogene Gerade mit der Wagerechten RQ bildet; ein Punkt $\mathfrak{P}_2$ der Strahlenschar durch Q ist durch die entsprechenden Koordinaten u_2, v_2 bestimmt. Die beiden geometrischen Örter für einen Punkt $\mathfrak{P}_3$ der Kurvenschar um R sind: seine Entfernung u_3 von R und der Winkel $\mathfrak{P}_3 Q R = v_3$. Die 3 Gleichungen der Kurvenscharen lauten:

$$f_1 \equiv u_1 - \lambda_1 \alpha_1 = 0; \quad f_2 \equiv v_2 - \lambda_2 \alpha_2 = 0; \quad f_3 \equiv u_2 - \lambda_3 \alpha_3 = 0.$$

Die Nebenbedingungen, die von den Koordinaten erfüllt werden müssen, sind hier, wie bei allen Skizzen der Tafel, so gewählt, daſs die 3 zusammengehörigen Kurven $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch denselben Punkt gehen. Das ist hier der Fall, wenn $u_1 = u_2$; $v_1 = v_2 = v_3$. Damit als Eliminationsresultat herauskomme: $\alpha_3^2 = 1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 \cos \alpha_2$, besteht die besondere Bedingung $u_3^2 = 1 + u_1^2 - 2 u_1 \cos v_2$.

Dieses Blatt kann dazu dienen, aus 2 Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die 3. Seite zu berechnen. Ein ganz ähnlich aussehendes Rechenblatt ergiebt sich für die Lösung der quad. Gleichung, wenn man

$$\alpha_3^2 = 1 + \beta_3^2 \text{ und } \cos \alpha_2 = \beta_2$$

einführt.

In den Figuren 8 und 13 ist angenommen, daſs ein Punkt der Kreisschar durch seinen Radius u_1 und durch den Winkel v_1, den der Radius mit einem festen Durchmesser bildet, bestimmt ist. Dieselben geometrischen Örter gelten für einen Punkt der Strahlenschar. Die geometrischen Örter für die Punkte der Wagerechten sind der Abstand u_2 von dem festen Durchmesser und der Winkel, den die nach dem Kreismittelpunkt gezogene Gerade mit dem festen Durchmesser bildet.

Die Kurvenscharen sind gemeinsam definiert durch

$$u_1 = \lambda_1 f_1(\alpha_1); \quad u_2 = \lambda_2 f_2(\alpha_2); \quad \sin v_3 = \lambda_2 f_3(\alpha_3).$$

Die gemeinsamen Nebenbedingungen sind $u_1 = u_3$, $u_2 = u_1 \sin v_3$; $v_1 = v_2 = v_3$. Die beiden Figuren skizzieren also den Zusammenhang $\lambda_2 f_2(\alpha_2) = \lambda_1 f_1(\alpha_1) \cdot \lambda_3 f_3(\alpha_3)$, und zwar ist in Figur 8: $f_1 = \alpha_1$; $f_2 = \lg \alpha_2$; $f_3 = \lg \alpha_3$, so daſs $\alpha_2 = \alpha_3^{\alpha_1}$ wird, bei entsprechender Wahl der Gröſsen λ.

Bei Figur 13, wo $f_1 = \lg \alpha_1$; $f_2 = \lg \alpha_2$; $f_3 = \alpha_3$ ist, wird die Beziehung $\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_3}$ dargestellt.

In den Figuren 9, 10, 11, 14, 16 wird derselbe Zusammenhang $f_2(\alpha_2) = f_1(\alpha_1) \cdot f_3(\alpha_3)$ durch 3 Scharen gerader Linien repräsentiert. Punkte der wagerechten Linien und des Strahlenbüschels werden durch ihre Abstände u_2, u_3 von der festen Wagerechten und durch die Winkel v_1, v_2 bestimmt, welche die von den Punkten nach dem Scheitel des

Büschels gezogenen Strahlen mit der festen Wagerechten bilden, die Punkte der senkrechten Schar dagegen durch denselben Winkel v_1 und den Abstand u_1 von der senkrechten Axe bestimmt. Übereinstimmend kann für alle diese Rechenblätter gesetzt werden $u_1 = \lambda_1 f_1(\alpha_1)$; $u_2 = \lambda_2 f_2(\alpha_2)$, $\operatorname{tg} v_3 = \lambda_3 f_3(\alpha_3)$; $u_2 = u_1 \operatorname{tg} v_1$; $u_3 = u_2$; $v_1 = v_2 = v_3$. Speziell ist in 9 $u_1 = \lambda_1 \alpha_1$; $u_2 = \lambda_2 \lg \alpha_2$; $\operatorname{tg} v_3 = \lambda_3 \lg \alpha_3$, also $\alpha_2 = \alpha_3^{\alpha_1}$

10 $u_1 = \lambda_1 \lg \alpha_1$; $u_2 = \lambda_2 \lg \alpha_2$; $\operatorname{tg} v_3 = \lambda_3 \alpha_3$, „ $\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_3}$

11 $u_1 = \lambda \sqrt{\alpha_1}$; $u_2 = \lambda_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}$; $\operatorname{tg} v_3 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}$, „ $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$

14 $u_1 = \lambda_1 \lg \alpha_1$; $u_2 = \lg \alpha_2$; $\operatorname{tg} v_3 = \lambda_3 \alpha_3$; mithin $\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_3}$, also ähnlich wie 10;

16 $u_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}$; $u_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$; $\lg v_3 = \frac{\lambda_3}{\alpha_3}$, also $\alpha_2 = \alpha_1 \alpha_3$.

In allen übrigen Skizzen auf Tafel 1 sind rechtwinklige Koordinaten zu Grunde gelegt, und als Nebenbedingungen: $x_1 = x_2 = x_3$, $y_1 = y_2 = y_3$ angenommen.

Figur 15 charakterisiert die Beziehung $\alpha_2 = \sqrt[\alpha_3]{\alpha_1}$ durch die drei Scharen

$$x_1 + y_1 = \lambda_1 \lg \alpha_1; \quad y_2 = \lambda_2 \lg \alpha_2; \quad y_3 = x_3 \cdot \frac{\lambda_3}{\alpha_3 - 1}.$$

Vermöge der Parallelen zu den Strahlen des Büschels (α_1) ist es möglich, auch aus Zahlen, die nicht mehr unmittelbar auf dem Blatte vorhanden sind, die Wurzeln zu ziehen.

In ähnlicher Weise wird in Figur 12 die Beziehung $\alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_1}$ durch die Scharen

$$x_1 = -\lambda_1 \lg \alpha_1; \quad y_2 = \lambda_2 \lg \lg \alpha_2; \quad -x_3 + y_3 = \lambda_3 \lg \lg \alpha_1$$

dargestellt.

Bei Figur 7 ist $x_1 = \alpha_1$; $x_2 = \alpha_2$; $\frac{x_3^{y_3} - 1}{x_3 - 1} = \alpha_3$ gewählt. Diese Figur ist also eine Darstellung der Beziehung $(\alpha_1^{\alpha_2} - 1) = \alpha_3 \cdot (\alpha_1 - 1)$.

In Figur 1—5 ist gemeinsam $x_1 = \alpha_1$; $y_2 = \alpha_2$; $x_1 = x_2 = x_3$, $y_1 = y_2 = y_3$ gewählt.

Fig. 1 behandelt die kubische Gleichung $\alpha_3^3 + \alpha_3^2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 = 0$,
also ist die 3. Schar durch $\alpha_3^3 + \alpha_3^2 + x_3 \alpha_3 + y_3 = 0$ definiert.

Fig. 2 behandelt die kubische Gleichung $\alpha_3^3 + \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_3 + \alpha_2 = 0$,
also ist die 3. Schar durch $\alpha_3^3 + x_3 \alpha_3^2 + \alpha_3 + y_3 = 0$ definiert.

Fig. 3 behandelt die kubische Gleichung $\alpha_3^3 + \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 + 1 = 0$,
also ist die 3. Schar durch $\alpha_3^3 + x_3 \alpha_3^2 + y_3 \alpha_3 + 1 = 0$ definiert.

Fig. 4 behandelt die kubische Gleichung $\alpha_3^3 + \cdot + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 = 0$,
also ist die 3. Schar durch $\alpha_3^3 + x_3 \alpha_3 + y_3 = 0$. definiert.

Fig. 5 behandelt die quadratische Gleichung $\alpha_3^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 = 0$,
also ist die 3. Schar durch $\alpha_3^2 + x_3 \alpha_3 + y_3 = 0$. definiert.

Auf Tafel 3 wird in Figur 6 die quadratische Gleichung durch die beiden Scharen $x_1 = -\lambda_1 \alpha_1$; $x_2^2 + y_2^2 = r^2 - \lambda_2 \alpha_2$ und die Skala $x_3 = \lambda_3 \alpha_3$ dargestellt. Die erforderlichen Nebenbedingungen sind: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ und $(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = r^2$. Mit diesem Blatte wird die Gleichung $\alpha_3^2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 = \alpha_2$ gelöst, indem man einen beweglichen Kreis von Radius r, der dem in der Figur stark ausgezogenen Kreis kongruent ist, mit seinem Mittelpunkt auf den Schnittpunkt des Kreises α_2 und der Geraden α_1 legt. Seine Peripherie geht dann durch die Punkte α_3 der Skala.

Dieses Rechenblatt kann auch (ohne die Schar der Geraden) zum Multiplizieren und Dividieren gebraucht werden. Legt man den Kreis nämlich mit seiner Peripherie durch die Punkte α_3 und β_3 der Skala, so fällt der Mittelpunkt des beweglichen Kreises auf einen festen Kreis, dessen Index $= \pm \alpha_3 \cdot \beta_3$ ist, je nachdem α_3 und β_3 auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes der Skala liegen.

In diesem Falle hat man es also mit einem Rechenblatte zu thun, das aus einer Schar und 2 Skalen auf demselben Träger besteht.

Figur 7 behandelt die Beziehung $\alpha_1 = \alpha_2 \cdot \alpha_3$ mit Hilfe der Schar $x_1 = \lambda_1 \lg \alpha_1$ und der beiden Skalen auf gemeinsamem Träger $x_2 = \lambda_1 \lg \alpha_2$, $y_2 = 0$; $x_3 = \lambda_3 \lg \alpha_3$, $y_3 = 0$. Bedingungen sind $(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 = r^2$ und $(x_3 - x_1)^2 + y_1^2 = r^2$.

Man multipliziert mit diesem Blatte, indem man um die Skalenpunkte α_2 und α_3 Kreise mit gleichem Radius beschreibt und den Index α_1, der Geraden abliest, auf die der Schnittpunkt beider (oder der Mittelpunkt eines beweglichen Kreises durch α_2, α_3) fällt. Eine andere Art, das Produkt $\alpha_2 \alpha_1$ zu bilden, besteht darin, dafs man um den Punkt $\frac{1}{\alpha_2}$ mit beliebigem Radius einen Kreis beschreibt, der die Gerade α_1 in einem Punkte P schneidet und dann mit demselben Radius um P den Kreis schlägt, der die andere Skala in einem Punkte α_3 trifft. Dann ist $\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2$.

Ähnlich wird dividiert. Die übrigen Skizzen der Tafel 2 sind Rechenblätter mit 3 Skalen, bei denen die Nebenbedingung diejenige ist, dafs die drei zusammengehörigen Skalenpunkte auf einer Geraden liegen. Aus gegebenen Werten α_1, α_2 wird α_3 also gefunden, indem man α_1 und α_2 durch ein Lineal verbindet und zusieht, durch welchen Punkt α_3 der 3. Skala es geht.

Auf solche Rechenblätter wird man durch die Betrachtung geführt, dafs man einem Rechenblatte mit 3 Scharen gerader Linien einen beliebigen Kegelschnitt zuordnen und alle Geraden dann als Polaren in Bezug auf diesen Kegelschnitt ansehen kann. Jeder Polare entspricht dann ein bestimmter Pol; zeichnet man nun zu sämtlichen Polaren die Pole, so entstehen 3 Skalen und drei durch einen Punkt gehenden Polaren entsprechen dann drei in gerader Linie liegende Pole.

In schiefwinkligen Koordinaten lautet die Bedingung, dafs 3 Punkte in gerader Linie liegen: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Sind nun zwei der Skalen geradlinig, so kann man sie als Axen ansehen, für

den Fall, dafs sie sich schneiden. Man kann dann setzen $x_2 = 0$, $y_1 = 0$ und erhält als Nebenbedingung $\frac{x_3}{x_1} + \frac{y_3}{x_2} = 1$, so dafs die darzustellende Beziehung lautet:

$$\frac{\lambda_1 f_3(\alpha_3)}{\lambda_1 f_1(\alpha_1)} + \frac{\mu_3 g_3(\alpha_3)}{\mu_2 g_2(\alpha_2)} = 1.$$

Sind aber die beiden geradlinigen Skalen parallel, so darf man sie nicht mehr zu Koordinatenaxen wählen; man kann sie aber einer Axe parallel legen und $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$ setzen. Man erhält dann als Nebenbedingung

$$x_1 \cdot \frac{b_2 - y_3}{x_3} + x_2 \cdot \frac{y_3 - b_1}{x_3} + b_1 - b_2 = 0 \text{ und als darzustellende Gleichung}$$

$$\lambda_1 f_1(\alpha_1) \cdot \frac{b_2 - \mu_3 g_3(\alpha_3)}{\lambda_3 f_3(\alpha_3)} + \lambda_2 f_2(\alpha_2) \cdot \frac{\mu_3 g_3(\alpha_3) - b_1}{\lambda_3 f_3(\alpha_3)} + b_1 - b_2 = 0.$$

Nach der ersten Art ist die kubische Gleichung $\alpha_3^3 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 + 1 = 0$ in Figur 1, nach der zweiten Art in Figur 2 behandelt.

Wenn noch die 3. Skala geradlinig und gleichzeitig einer der beiden andern Skalen parallel ist, so ergeben sich viele sehr interessante logarithmische und nicht logarithmische Rechenblätter, namentlich für Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung, auf deren theorethische Erörterung hier nicht eingegangen werden kann.

In Figur 3 ist die Gleichung $\alpha_1 = \alpha_2 \alpha_3$ durch die Skalen $x_1 = \lambda_1 \alpha_1$, $y_1 = b$; $x_2 = 0$, $y_2 = \frac{b}{1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \alpha_2}$; $x_3 = -\lambda_3 \alpha_3$, $y_3 = 0$ behandelt, worin schiefwinklige Koordinaten angenommen sind. Um mit diesem Blatte z. B. $2 \cdot 4$ zu finden, müfste man den Punkt 2 der oberen Skala mit dem Punkt 4 der mittleren durch eine Gerade verbinden, die dann durch den Punkt 8 der unteren Skala geht. Wenn man aber $3 \cdot 4$ aufsuchen wollte, so würde das Produkt, weil > 10, nicht mehr auf der aufgezeichneten unteren Skala zu finden sein. Dafür ist noch eine Reihe anderer Mittellinien gezogen, die mit 1, 2, 3 . . . anfangen. Auf der mit 1 anfangenden sucht man 3 und verbindet diese 3 mit der oberen 4. Dann geht diese Linie durch den Punkt 2 der unteren Skala. Die an die mittlere Skala angeschriebene 1 ist dann nur vor die gefundene 2 zu setzen, um das gesuchte Produkt 12 zu finden. ähnlich mufs man verfahren, um $6 \cdot 9$ zu finden. Auf der mit 5 beginnenden Skala sucht man die 6 auf und verbindet sie mit der oberen 9. Dann geht diese Linie durch Punkt 4 der unteren Linie. Die vorgesetzte 5 giebt dann 54. Das ist ein sehr bequemes Rechenblatt, das gröfsere Genauigkeit bietet, als der gewöhnliche Rechenstab.

Figur 4 behandelt die Gleichung $\alpha_1 = \alpha_2^{\alpha_3}$, worin die α_1 auf der unteren Wagerechten, die α_2 auf der Senkrechten und die α_3 auf der oberen Wagerechten abgelesen werden.

Figur 5. Vermöge der wagerechten Skala $x_1 = \frac{\lambda_1}{\lg \alpha_1}$, der senkrechten $y_2 = \frac{\mu_2}{\lg \alpha_2}$ und der schrägen $x_3 = y_3 = \frac{\lambda_3}{\lg \alpha_3}$ wird die Beziehung $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3$ behandelt.

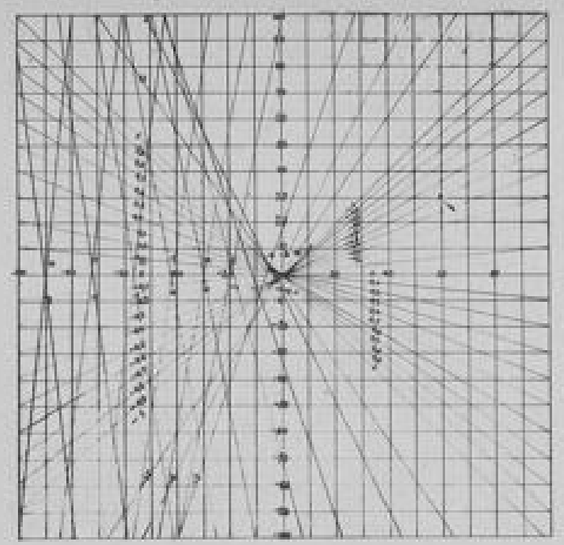
Die Figuren 6, 7, 8 geben Rechenblätter für das harmonische, arithmetische und geometrische Mittel. Das Mittel wird immer an der mittleren Skala abgelesen.

In Figur 1 würden die wagerechten und senkrechten Skalen in die Unendlichkeit gehen. Sie sind in der Zeichnung bei ± 2 abgebrochen. Dafür ist von hier ab eine ganz beliebige Teilung vorgenommen, und dann sind auf den Axen senkrechte Skalen konstruiert. Soll man die Gerade $\overline{\alpha_2 \alpha_1}$ ziehen, wo α_1 nicht mehr auf dem Blatte vorhanden ist, so geht man von dem auf der beliebigen Teilung als α_1 bezeichneten Punkt aus die dort errichtete Skala entlang, bis man zum Punkt α_2 kommt. Diesen verbindet man nun mit dem Punkte α_2 der Hauptskala, so ist die Richtung der Geraden $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ bestimmt. In der Zeichnung ist die beliebige Teilung so gewählt, dafs auf allen neuen Skalen, die in den willkürlich Punkten α_1 errichtet wurden, die mit α_2 bezeichneten Punkte in eine gerade Linie fallen, dann entstehen die vier Strahlenbüschel mit dem Centrum ± 2.

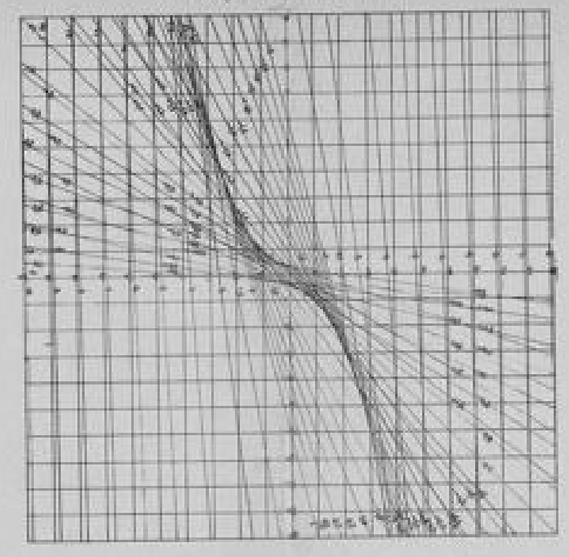
Alle weiteren Ausführungen müssen unterbleiben, weil es wegen der grofsen Kosten, welche schon die Vervielfältigung meiner Handzeichnungen verursacht, nicht angängig ist, die Munifizenz der Stadt Berlin auch noch bei den Ausgaben für die Druckkosten übermäfsig in Anspruch zu nehmen.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

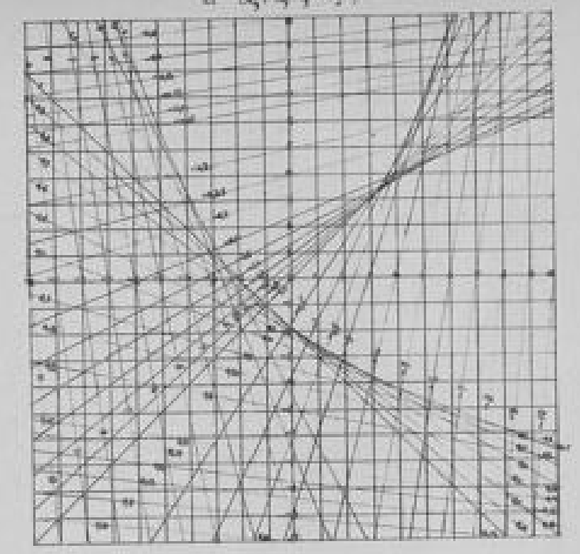
1 $\alpha_1^2+\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2=0$



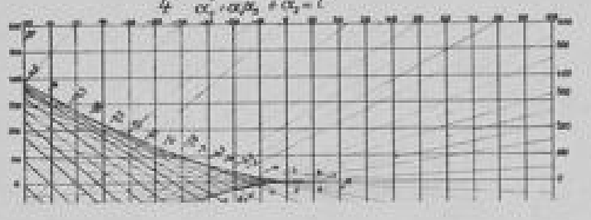
2 $\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2+\alpha_2=0$



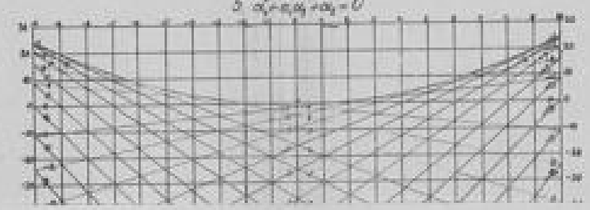
3 $\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2+1=0$



4 $\alpha_1^2+\alpha\beta_2+\alpha_2=0$



5 $\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2=0$



6 $\alpha_1^2+1-2\alpha_1\cos\alpha_2=\alpha_0^2$