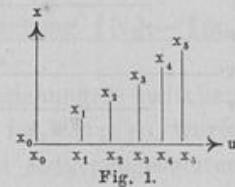


§ 1. Allgemeine Beziehungen zwischen den Skalen.

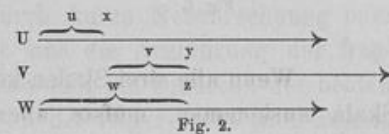
Im vorigen Jahresberichte der 9. Realschule zu Berlin habe ich den Anfang einer kleinen Arbeit über die Verwendung des Rechenstabes zur Auflösung von Gleichungen 2., 3. und 4. Grades erscheinen lassen, und in diesem Berichte sollte die Fortsetzung folgen. Inzwischen aber habe ich erkannt, daß die dort gestellte Aufgabe allgemeiner und bequemer behandelt werden kann, als ich damals sah, und habe nun meine Arbeit dementsprechend umgestaltet.

Wenn aus zwei Variablen x, y eine dritte GröÙe z berechnet werden soll, so daß z die Gleichung erfüllt $z = F(x, y)$, dann ist es unter Umständen möglich, für jede beliebige Kombination der x, y den Zahlenwert von z mechanisch zu finden. Wenn nämlich in $z = F(x, y)$ die Veränderlichen sich so trennen lassen, daß der Zusammenhang zwischen ihnen auch durch $f(x) + g(y) = h(z)$ gegeben wird, dann kann man an einem Rechenschieber mit drei Skalen zu jedem Wertpaare x, y das betreffende z ablesen. Die drei Skalen werden in folgender Weise konstruiert:

Man denke die der Gleichung $f(x) = u$ entsprechende Kurve mit den Abscissen u und den Ordinaten x aufgezeichnet und an dem Fußpunkte jeder Ordinate x (also an der Stelle u) ihre Länge in Zahlen hingeschrieben. Wählt man unter den unzähligen Ordinaten x solche $x_0, x_1, x_2 \dots$ aus, daß die Längen je zwei aufeinanderfolgender sich um gleichviel unterscheiden, dann liegen ihre Fußpunkte im allgemeinen nicht gleichweit von einander; sondern die auf der Abscissenaxe aufgeschriebenen Zahlen $x_0, x_1, x_2 \dots$ werden um so dichter an einander stehen, je steiler die Kurve ist. Die auf diese Weise auf der u -Axe entstandene Teilung besagt, daß die auf der Skala befindliche Zahl x vom Anfang der Teilung den Abstand $u = f(x)$ besitzt.



In derselben Weise entwerfe man nun die Skalen $v = g(x)$ und $w = h(z)$. Diese drei Skalen — sie mögen im Folgenden kurz mit U, V, W bezeichnet werden — seien nun parallel gelegt, und zwar so, daß zunächst die Anfangspunkte der Teilungen von U und W zusammenfallen, V aber gegen U und W verschoben werden kann. Stellt man dann den Anfang von V unter die Zahl x von U und den Läufer — ein mit einer langen senkrechten



Marke versehenes Glasfensterchen, das über den Skalen verschoben werden kann — über den Teilstrich y auf V , so weist der Läuferstrich auf die gesuchte Zahl z von W . Denn, da aus der Figur unmittelbar ersichtlich wird, daß $u + v = w$ ist, so ergibt sich in der That, wie verlangt, $f(x) + g(y) = h(z)$.

Es bedarf wohl nur des Hinweises, daß durch einfache Wiederholung des eben entwickelten Verfahrens die Zahl z ermittelt wird, welche die Gleichung erfüllt: $h(z) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots$

Mit diesem selben Stabe ist nun zugleich auch die Ermittlung einer anderen GröÙe z möglich, die mit x , y durch die Gleichung $f(x) - g(y) = h(z)$ zusammenhängt.

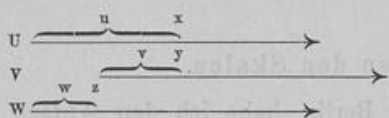


Fig. 3.

Man stelle zu diesem Zwecke x von U und y von V zusammen, dann steht der Anfang V-Teilung über dem z der Skala W. Da hier gemäß der Figur 3 $u - v = w$ ist, so ist wirklich, wie behauptet, $f(x) - g(y) = h(z)$.

Ebenso kann man mit einem die drei Skalen enthaltenden Rechenstabe x aus y , z und y aus x , z berechnen.

Soll x zunächst gemäß der Gleichung $f(x) = h(z) - g(y)$ bestimmt werden, so stelle man, wie in Figur 2 veranschaulicht, y von V über z von W; der Anfang von V weist auf das verlangte x der Skala U.

Wenn aber das gesuchte x die Gleichung befriedigen soll: $f(x) = h(z) + g(y)$, so stelle man, wie in Figur 3 den Anfang von V über das z von W und verschiebe den Läufer auf die Zahl y von V. Auf U liest man dann unter dem Läuferstriche x ab.

Bei den bisherigen Berechnungen von x und z war es angängig, die Skalen U und W auf einem einzigen Brette unveränderlich gegen einander anzubringen. Wenn aber y aus x , z berechnet werden soll, muß auch W gegen U verstellbar sein, oder was auf dasselbe hinauskommt, es muß eine mit V fest verbundene Skala W' , die mit W kongruent ist, hinzugenommen werden.

Heißt die zu erfüllende Gleichung $g(y) = h(z) - f(x)$, so stelle man (Fig. 4) die Teilstriche x von U und z von W' unter einander, so zeigt der Anfang von U auf das gewünschte y von V.

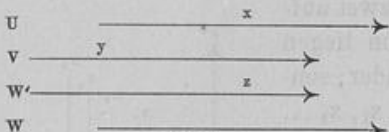


Fig. 4.

Zur Ermittlung von y aus $g(y) = h(z) + f(x)$ rückt man den Anfang von V unter x von U und stellt den Läufer auf y von V. Auf W' steht dann unter dem Läuferstriche die Zahl z . (Fig. 5.)

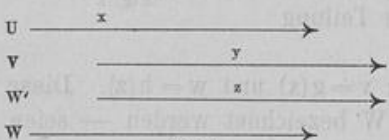


Fig. 5.

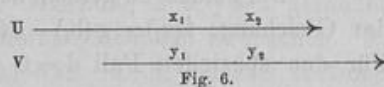
In den bisher betrachteten Fällen wurden zur Ermittlung der gesuchten Zahlen drei Skalen benutzt. Wenn aber zwei Skalen, z. B. U und W mit einander übereinstimmen, so kann die eine Skala W in Fortfall kommen, weil die Ablesung, die eigentlich an W gemacht werden sollte, ebenso gut an der kongruenten Skala U vorgenommen werden kann.

Wenn alle drei Skalen kongruent sind, so könnte man zur Not mit einer einzigen Skala auskommen, müßte aber einen Zirkel zu Hilfe nehmen. Wenn nämlich aus $f(x) \pm f(y) = f(z)$ das z berechnet werden soll, so spanne man den Zirkel soweit, daß die eine Spitze auf dem Anfang der Skala, die andere Spitze auf y steht, und trage die eingesperrte Strecke zu beiden Seiten von x ab. Die dadurch bestimmten Zahlen der Skala sind die beiden gesuchten GröÙen.

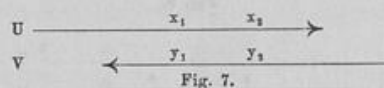
Außer zur Berechnung der Zahl z aus x , y kann der Stab auch benutzt werden,

um reelle Wurzeln gewisser Gleichungen zu ermitteln. Dazu ist es zuerst erforderlich, die Beziehung zu kennen, die zwischen je zwei Paaren unter einander stehender Zahlen der Skalen U, V bei irgend einer Verschiebung des Stabes stattfindet. Dabei wird zu unterscheiden sein, welche Richtung die beiden Skalen gegen einander haben, d. h. ob die u, v wie bisher in gleicher Richtung wachsen (was natürlich nicht ausschließt, daß die x und y unter sich in verschiedener Richtung zunehmen können), oder ob die eine der beiden Skalen umgedreht an die andere gelegt ist, so daß jetzt die u, v in verschiedenem Sinne sich ändern. Hier und in den folgenden Figuren soll die Richtung des Wachstums der u, v durch einen Pfeil angedeutet werden. Die beiden auf U betrachteten Zahlen seien x_1, x_2 , die bei irgend einer Verschiebung des Stabes darunter erscheinenden Zahlen von V dagegen y_1, y_2 . Wenn aber an Stelle der Veränderlichen x, y gewisse fest zu wählende Größen zu setzen sein werden, so sollen für diese die Bezeichnungen a, b (wenn notwendig mit Hinzufügung der betreffenden Indices) gelten.

Bei gleichgerichteten Skalen (Fig. 6) haben die Teilstriche x_1 und x_2 vom Beginn der Skala U die Entfernungen u_1 und u_2 , ihr gegenseitiger Abstand ist daher $= u_2 - u_1$ oder, da nach dem Bildungsgesetze dieser Skala $u = f(x)$ ist, auch $= f(x_2) - f(x_1)$. Ebenso haben die Zahlen y_1 und y_2 auf V von einander den Abstand $g(y_2) - g(y_1)$. Weil aber y_1 unter x_1 und y_2 unter x_2 liegen sollten, so sind diese Abstände gleich, d. h. es ist bei gleichgerichteten Skalen $f(x_2) - f(x_1) = g(y_2) - g(y_1)$ oder in anderer Form: $f(x_1) - g(y_1) = f(x_2) - g(y_2)$.



Sind U und V nach entgegengesetzter Seite gerichtet (Fig. 7), so beträgt die Entfernung der Teilstriche x_1, x_2 wie vorher: $f(x_2) - f(x_1)$, dagegen die von y_1 und y_2 jetzt $= g(y_1) - g(y_2)$. Da beide Abstände gleich sind, so ergibt sich für verschieden gerichtete Skalen die Beziehung $f(x_2) - f(x_1) = g(y_1) - g(y_2)$ oder $f(x_1) + g(y_1) = f(x_2) + g(y_2)$.



Die beiden den Stellungen in Fig. 6. und 7. entsprechenden Beziehungen zwischen x_1, x_2, y_1, y_2 kann man in die Form zusammenziehen $f(x_1) \mp g(y_1) = f(x_2) \mp g(y_2)$, worin das Minuszeichen bei gleichgerichteten Skalen, das Pluszeichen bei entgegengesetzten Skalen gilt.

Wenn man nun zwei der vier Größen x_1, x_2, y_1, y_2 als gegeben betrachtet und zwischen den beiden andern eine neue Bedingung hinzufügt, so erhält man ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die neu hinzugenommene Bedingung muß indessen so beschaffen sein, daß ihre Erfüllung durch kurze Nebenrechnung oder im Kopfe leicht geschehen kann. Ganz bequem gestaltet sich die Ausführung der fraglichen Bedingung, wenn bloß verlangt wird, daß die Summe oder die Differenz der beiden Unbekannten vorgegebene GröÙe besitzt, worin dann der in der Regel recht interessante Spezialfall eingeschlossen ist, daß die beiden Unbekannten gleich werden.

Die Summe oder Differenz der beiden Unbekannten soll immer s oder d heißen. Die beiden Unbekannten können auf dem Stabe gegen einander eine vierfache Lage haben. Entweder sind sie beide Zahlen der Skala U, oder beide Zahlen von V, oder eine Unbekannte liegt auf U die andere auf V. Im letzten Falle ist dann wieder zu

unterscheiden, ob sie beide denselben Index haben, d. h. ob ihre Teilstriche zusammenfallen, oder ob sie mit verschiedenem Index versehen sind, d. h. ob sie über Kreuz liegen. Wir wollen jetzt diese Fälle einzeln durchgehen.

1) Liegen beide Unbekannten auf U, so sind y_1, y_2 die gegebenen Größen und mögen als solche b_1, b_2 heißen. (Fig. 8). Die gesuchten Zahlen x_1 und x_2 müssen dann die beiden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{l} \text{U} \quad \frac{x_1 \quad x_2}{\quad \quad \quad} \\ \text{V} \quad \frac{b_1 \quad b_2}{\quad \quad \quad} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} f(x_1) \mp g(b_1) = f(x_2) \mp g(b_2) \\ x_1 \pm x_2 = s. \end{array}$$

Fig. 8.

Um die x_1, x_2 zu finden, markiere man in irgend einer Weise die Zahlen b_1 und b_2 auf V und verschiebe U und V gegen einander so lange, bis über b_1, b_2 zwei Zahlen x_1, x_2 erscheinen, deren Summe oder Differenz $= s$ wird.

Die beiden so gefundenen Zahlen können auch aufgefaßt werden als zwei Wurzeln der Gleichung: $f(x_1) \mp g(b_1) = f(\pm(s - x_1)) \mp g(b_2)$ oder von $f(s \mp x_2) \mp g(b_1) = f(x_2) \mp g(b_2)$. Für den speziellen Fall $d = 0$ oder $x_1 = \mp x_2$ erhält man $f(x) \mp g(b_1) = f(\mp x) \mp g(b_2)$.

2) Ähnlich wird die Auffindung der Unbekannten, wenn sie beide auf V liegen. Dann sind $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ die gegebenen und y_1, y_2 die gesuchten Zahlen. Die Zahlen a_1, a_2 auf U werden markiert und U und V so lange verschoben, bis die Summe (Differenz) zweier unter a_1, a_2 erscheinender Zahlen $= s$ ist. (Fig. 9).

$$\begin{array}{l} \text{U} \quad \frac{a_1 \quad a_2}{\quad \quad \quad} \\ \text{V} \quad \frac{y_1 \quad y_2}{\quad \quad \quad} \end{array}$$

Fig. 9.

Genau so wie vorhin erledigt sich der Fall $y_1 = y_2$.

3) Sind x_1, y_1 die Unbekannten und $x_2, y_2 = a_2, b_2$ die gegebenen Größen, so kann man die Indices fortlassen, und die zu lösenden Gleichungen sind: $f(x) \mp g(y) = f(a) \mp g(b)$ und $x \pm y = s$. (Fig. 10).

$$\begin{array}{l} \text{U} \quad \frac{x \quad a}{\quad \quad \quad} \\ \text{V} \quad \frac{y \quad b}{\quad \quad \quad} \end{array}$$

Fig. 10.

Für $x = y$ ergibt sich: $f(x) \mp g(x) = f(a) \mp g(b)$.

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt in der Weise, daß man die Zahl a von U auf die Zahl b von V setzt, und den Läufer so lange verschiebt, bis er auf zwei Zahlen x, y von U und V weist, deren Summe (Differenz) $= s$ ist.

4) Liegen die Unbekannten auf verschiedenen Skalen und über Kreuz, so seien x_1, y_2 die Unbekannten und a_2, b_1 die gegebenen Zahlen.

Das Gleichungssystem, welches sich dann ergibt, $f(x_1) \mp g(b_1) = f(a_2) \mp g(y_2)$ und $x_1 \mp y_2 = s$ wird gelöst, indem man a_2 und b_1 markiert und U und V so lange gegenseitig verschiebt, bis über b_1 eine Zahl x und unter a_2 eine Zahl y erscheint, deren Summe (Differenz)

$$\begin{array}{l} \text{U} \quad \frac{x_1 \quad a_2}{\quad \quad \quad} \\ \text{V} \quad \frac{b_1 \quad y_2}{\quad \quad \quad} \end{array}$$

Fig. 11.

den vorgeschriebenen Wert s hat. Auch hier kann der Spezialfall $x_1 = y_2$ zur Lösung einer besonderen Aufgabe führen. Aus der Form der Gleichungen in 3) und 4) ergibt sich, daß in 4) diejenigen Gleichungen mit verschiedenen gerichteten Skalen gelöst werden, für welche nach 3) gleichgerichtete Skalen erforderlich sind, und umgekehrt.

Bisher war über die Natur der Funktionen f, g, h keinerlei beschränkende Annahme gemacht, sie waren ganz willkürlich. Im nächsten Paragraph sollen sie spezialisiert

und dann soll zunächst untersucht werden, wie sich in dem einzelnen Falle die bisher erlangten Ergebnisse im besonderen gestalten, und endlich, welche Formen die allgemein betrachteten Gleichungen, deren Lösung mit dem Rechenstabe möglich ist, bei dieser Spezialisierung annehmen.

§ 2. Spezielle Annahmen über die Bildungsgesetze der Skalen. Ein neuer Rechenstab.

Weil die Funktionen, welche die Bildungsgesetze der Skalen bestimmen, ganz beliebig gewählt werden können, so ist die Anzahl der möglichen Rechenschieber unbegrenzt. Je nach der Art der Rechnung, zu welcher das Werkzeug dienen soll, muß über die Funktionen verfügt werden:

1) Soll der Rechenschieber zum Addieren oder Subtrahieren verwendet werden, soll also aus zwei Zahlen x, y eine dritte gemäß der Gleichung $x \pm y = z$ gefunden werden, so ist die frühere Gleichung $f(x) + g(y) = h(z)$ hiermit identisch zu machen. Es ist also zu wählen: $u = f(x) = \varepsilon x$, $v = g(y) = \varepsilon y$, $w = h(z) = \varepsilon z$. D. h. die drei erforderlichen Skalen sind unter einander kongruent, können also nach den früheren allgemeinen Bemerkungen auf zwei beschränkt werden. Die Skalen enthalten hier lauter gleichweit von einander entfernte Striche. Die Zahl ε in $u = \varepsilon x$ ist willkürlich und giebt die Entfernungen an, welche die Zahl 1 der Skala vom Anfangspunkt hat. Setzt man diese Strecke gleich dem hundertsten Teile der Stablänge λ , so ist das Bildungsgesetz der kongruenten Skalen gegeben durch die Gleichung $u = \frac{\lambda x}{100}$. Additionen und Sub-

traktionen werden mit diesen Skalen ausgeführt, wie aus den Fig. 12, 13 ohne weitere Erläuterung deutlich wird.

Haben die Skalen U, V verschiedene Richtung, so ist (Fig. 14) $x - a = b - y$, oder $x + y = a + b$, d. h. die Summe zweier unter einander stehender Zahlen ist konstant; die Skalen in verschiedener Richtung können also zum Subtrahieren verwendet werden. Wenn x und y gleich werden, so ist $x = \frac{a+b}{2}$. Diese Stellung der Skalen kann also auch zum Halbieren Verwendung finden.

In der Folge soll dieses Skalenpaar, bei dem jede ihrer Zahlen zugleich die Länge ihres Abstandes vom Nullpunkt angiebt, mit L, L' und eine Zahl auf ihm mit l, l' bezeichnet werden.

2) Das Skalenpaar L, L' bezog sich auf Additionen oder Subtraktionen von ersten Potenzen. Es lassen sich aber auch Skalen bilden, die Summen oder Differenzen von n^{ten} Potenzen, deren Grundzahlen gegeben sind, abzulesen erlauben:

Soll $x^n + y^n = z$ die Gleichung sein, aus der z zu finden ist, so ergiebt die Vergleichung mit der allgemeinen Bedingung $f(x) + g(y) = h(z)$, daß hier $u = f(x) = \varepsilon x^n$, $v = g(y) = \varepsilon y^n$, $w = h(z) = \varepsilon z$ zu nehmen ist.

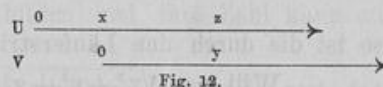


Fig. 12.

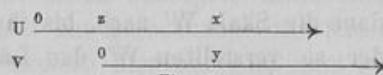


Fig. 13.

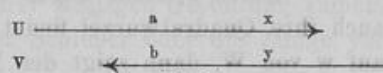


Fig. 14.

Was zunächst das letzte Bildungsgesetz $w = \varepsilon z$ angeht, so ist sofort ersichtlich, daß die durch dasselbe bedingte Skala mit den früheren L, L' identisch ist. Die Gesetze $u = \varepsilon x^n, v = \varepsilon y^n$ führen auf zwei unter sich kongruente Skalen. Die Zahl $x = \sqrt[n]{\frac{u}{\varepsilon}}$ steht auf ihnen an der Stelle u , oder besser umgekehrt: In der Entfernung u vom Nullpunkt steht die n^{te} Wurzel aus u . Genau so über L gestellt, daß die Nullpunkte zusammenfallen, würden die Zahlen der beiden letzten Skalen die n -Wurzeln aus den darunter stehenden Zahlen von L geben, oder die Zahlen von L liefern die n -Potenzen zu den darüber stehenden.

Im Folgenden werden die Fälle $n=2$ und $n=3$ näher betrachtet werden, und zwar werden zwei Skalen W, W' gebraucht werden, welche ($n=2$) zu den entsprechenden Zahlen 1 von L die Quadratwurzeln, und eine Skala C , welche ($n=3$) zu den Zahlen 1 von L die Kubikwurzeln liefert. Die Zahlen W, W' sollen w, w' , die von C : c heißen. Einheit der Strecke u ist bei W, W' , dieselbe wie bei L, L' , bei C aber 10mal so groß. Die Bildungsgesetze für W und W' lauten also $u = \frac{\lambda}{100} x^2$ und für C : $u = \frac{\lambda}{1000} x^3$. Wie man mit den Skalen W, W', L rechnet, veranschaulicht Fig. 15:

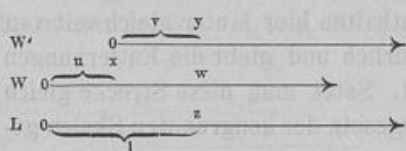


Fig. 15.

Man stellt 0 von W' über x von W und schiebt den Läufer auf y von W' , dann zeigt der Läuferstrich auf L die Zahl z an. Nach der Figur ist zunächst $u + v = 1$, also da $u = \frac{\lambda}{100} x^2, v = \frac{\lambda}{100} y^2$ und $1 = \frac{\lambda z}{100}$, $x^2 + y^2 = z$.

Weil nun aber über z von L $\sqrt{z} = w$ steht, so ist die durch den Läuferstrich auf W angezeigte Zahl $w = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Will man $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bilden, so bestimme man zuerst, wie soeben, $w = \sqrt{x^2 + y^2}$, lese aber w nicht ab, sondern halte diese Zahl bloß durch den Läuferstrich fest und ziehe dann die Skala W' nach, bis ihr Nullpunkt unter den Läuferstrich kommt, verschiebe auf der so verstellten W' den Läufer bis z . Auf W steht dann die gesuchte Zahl, ihr Quadrat wird durch die zugehörige Zahl 1 von L bestimmt.

Durch dieselbe Figur 15 wird klar, wie man die Differenz zweier Quadrate und auch ihre Quadratwurzel findet. Soll $\sqrt{w^2 - y^2}$ gebildet werden, so stelle man y von W' auf w von W , dann zeigt der Nullpunkt von W' auf die Zahl $x = \sqrt{w^2 - y^2}$ von W an, und unter x steht auf L die Differenz $w^2 - y^2$ selber.

Ganz ähnlich wird $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ und $\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$ berechnet.

Bequeme Verwendung findet dieses Verfahren außer in der Ausgleichungsrechnung bei mancherlei Aufgaben, z. B. bei der Ermittlung der Resultanten aus rechtwinkligen Komponenten, bei der Berechnung einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten, bei der Berechnung des irrationalen Teiles der Wurzel einer quadratischen Gleichung u. s. w.

Der Zusammenhang der Zahlen w und 1 auf den Skalen W und L , der nach dem Bildungsgesetze von W durch die Gleichung $w = \sqrt{1}$ gegeben ist, ist gut zu brauchen, um aus einer Zahl 1 die Quadratwurzel zu bestimmen, wenn 1 eine Zahl in der Nähe von 100 ist. Die Zahlen von W rücken nämlich um so weiter auseinander, je größer

sie werden. Diese Bemerkung ist um deswillen von Wichtigkeit, weil wir später eine andere Skala Q kennen lernen werden, bei der gerade das Umgekehrte stattfindet, dafs nämlich die aufzusuchenden Quadratwurzeln um so gedrängter liegen, also um so ungenauer zu bestimmen sind, je gröfser sie sind.

Legt man die Skala W' verkehrt gegen W, Fig. 16, so ist die Entfernung $\overline{yb}$ gleich der Entfernung $\overline{ax}$, also nach dem Bildungsgesetze der Skalen $y^2 - b^2 = a^2 - x^2$ oder $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, d. h. bei einer und derselben gegenseitigen Stellung der Skalen W, W' geben die untereinander liegenden Zahlen x, y die Katheten aller rechtwinkligen Dreiecke mit derselben Hypotenuse, oder sie verhalten sich zu einander wie sin und cos desselben Winkels.

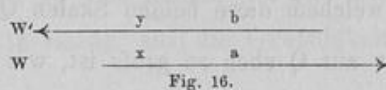


Fig. 16.

Die Skala C in Verbindung mit L wird gebraucht zur Auffindung von Kubikwurzeln zu den Zahlen 10 · 1, und zwar ist die von C angezeigte Zahl um so genauer, je gröfser sie ist. Sie ergänzt, wie wir später sehen werden, eine andere Skala K, bei der die Kubikwurzeln in der Nähe der 1 genauer zu finden sind.

3) Beim Multiplizieren und Dividieren sind in den zu behandelnden Gleichungen $x \cdot y = z$ oder $\frac{x}{y} = z$ die Variablen x, y zunächst noch nicht vorschriftsmäfsig getrennt.

Man kommt aber auf die erforderliche Form der Gleichung, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt: $\lg x \pm \lg y = \lg z$. Der Vergleich mit der allgemeinen Form ergibt, dafs $u = f(x) = \lambda \lg x$; $v = g(y) = \lambda \lg y$; $w = h(z) = \lambda \lg z$ zu setzen ist. Die drei Skalen sind also sämtlich nach demselben Gesetze zu bilden und ihre Zahl kann auf zwei beschränkt werden.

Skalen, die dieses logarithmische Bildungsgesetz befolgen, werden seit fast 300 Jahren zu den gewöhnlichen Rechenschiebern benutzt, deren wichtigste Anwendung zur schnellen Ermittlung von Produkten und Quotienten und zur Berechnung von vierten Proportionalen als genügend bekannt vorausgesetzt und deshalb hier nur ganz kurz besprochen werden soll.

Diese gewöhnlichen Rechenschieber bestehen in ihrer heutigen Gestaltung zumeist aus einem Lineal, in dessen Mitte ein zweites Lineal, der Schieber oder die Zunge verstellbar ist. Der untere Rand des festen Lineals trägt eine nach dem Gesetz $u = \lambda \lg x$ gebildete Skala, wobei λ die Länge des Lineals bedeutet. Am Anfang des Lineals ist also $u = 0$ und am Ende $u = \lambda$. Daher mufs die erste Zahl x, die auf der Skala angegeben ist, die Gleichung $0 = \lg x$, und die letzte Zahl die Gleichung $\lambda = \lambda \lg x$ erfüllen. Die an den Enden der Skala stehenden Zahlen sind daher 1 und 10. Die zwischen ihnen liegenden Zahlen rücken um so näher zusammen, je mehr sie sich der 10 nähern. Diese Skala soll bei uns N heifsen und eine Zahl auf ihr n. Mit dieser Skala stimmt genau eine auf dem unteren Schieberrand angebrachte Skala N' überein, deren Zahlen wir immer mit n' bezeichnen wollen.

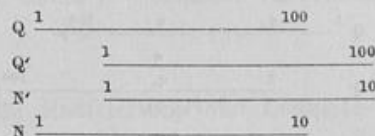


Fig. 17.

Wenn unsere frühere Skala L, welche lauter gleichweit von einander entfernte Teilstriche trägt, so geteilt ist, daß $u = \frac{1}{100} \lambda \lg l$ ist, während für das u der Skala N, $u = \lambda \lg n$ gilt, so geben die Zahlen l auf L die hundertfachen Logarithmen zu den Numeri n auf N.

Die meisten Rechenschieber tragen nun aber auch noch ein zweites Skalenpaar am oberen Rande sowohl des festen Stabes wie der verschiebbaren Zunge. Das Gesetz, nach welchem diese beiden Skalen Q, Q' gezeichnet sind, lautet $v = \frac{\lambda}{2} \lg q$. Wenn nun das v auf Q eben so groß ist, wie das u auf N, wenn also q und n untereinander stehende Zahlen von Q und N sind, dann muß $\frac{\lambda}{2} \lg q = \lambda \lg n$ oder $q = n^2$ sein, d. h. die Zahlen q auf Q sind die Quadrate zu den n auf N. Die Zahlen auf Q reichen daher von 1 bis 100; in der Mitte steht 10. Bei manchen Stäben reicht indes auch bei Q die Zählung nur bis 10 und beginnt hier von Neuem; die beiden Skalenhälften sind dann kongruent.

Zum Zwecke der Multiplikation und Division sind beide Paare Q, Q' und N, N' verwendbar; die Anwendung von N, N' giebt aber wegen der größeren Entfernung zweier Teilstriche auf N genauere Resultate.

Die Ermittlung von q aus $q = ab$ wird durch die Figur veranschaulicht. Denn da $u = \lambda \lg a$, $v = \lambda \lg b$, $w = \lambda \lg q$, so geht $u + v = w$ über in $\lg a + \lg b = \lg q$, oder $ab = q$.

Sind q, q₀ zwei Zahlen auf Q und stehen bei einer gewissen Verschiebung darunter die Zahlen q', q'₀ auf Q', so ist nach dem Bildungsgesetze der Skalen $\lg q - \lg q_0 = \lg q' - \lg q'_0$ oder $\frac{q}{q_0} = \frac{q'}{q'_0}$ oder $\frac{q}{q'} = \frac{q_0}{q'_0}$,

d. h. bei einer gewissen gegenseitigen Stellung von Stab und Schieber ist der Quotient zweier unter einander stehender Zahlen konstant. Die beiden Formen der Proportionen können in der durch die Fig. 19, 20, 21, 22 dargestellten Weise zur Division benutzt werden. Man stellt entweder Dividendus und Divisor übereinander und liest den Quotienten, wenn er größer als 1 ist, über der 1 von Q' an Q ab, Fig. 19, und, wenn er kleiner als 1, sein 100-faches über der 100 von Q' an Q. Oder man stellt (Fig. 21) die 1 oder (Fig. 22) die 100 von Q' unter den auf Q markierten Divisor q₀ und sieht unter dem auf derselben Skala zu nehmenden Divisor q nach, welche Zahl auf Q' angezeigt ist; dieselbe ist dann der Quotient selbst oder sein 100faches.

Wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden wird, kann das Skalenpaar Q und N' benutzt werden, um die Kubikwurzel zu gegebenen Zahlen zu finden. Wenn das Ver-

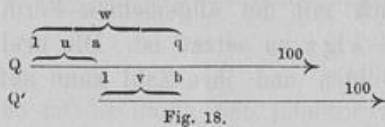


Fig. 18.

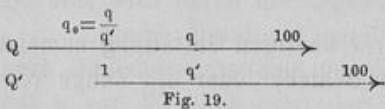


Fig. 19.

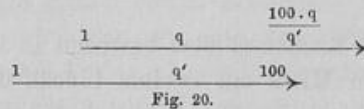


Fig. 20.

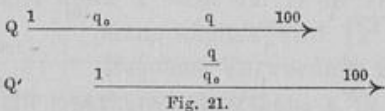


Fig. 21.

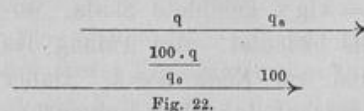


Fig. 22.

stellten Weise zur Division benutzt werden. Man stellt entweder Dividendus und Divisor übereinander und liest den Quotienten, wenn er größer als 1 ist, über der 1 von Q' an Q ab, Fig. 19, und, wenn er kleiner als 1, sein 100-faches über der 100 von Q' an Q.

fahren auch an sich einfach ist, so hat es doch das Unangenehme, daß zu diesem Behufe der Schieber verkehrt eingeführt werden muß, was im Laufe einer Rechnung, bei der man sonst nur mit gleichgerichteten Skalen arbeitet, etwas lästig ist. Um auch das Auffinden der Kubikwurzel durch direktes Ablesen bei gleichgerichteten Skalen zu ermöglichen, hat man nur nötig, eine Skala K nach dem Gesetze $u = \frac{\lambda}{3} \lg k$ hinzuzufügen. Ist nämlich die in gleicher Entfernung u vom Anfangspunkte auf N befindliche Zahl $= n$, so ist $\lg n = \frac{\lambda}{3} \lg k$, also $n^3 = k$, d. h. K gibt die Kuben zu den Zahlen auf N. Die Skala K und die frühere C ergänzen sich gegenseitig in Bezug auf die Genauigkeit der Ablesung.

4) Für die Zwecke der Potenzierung müssen die Skalen so eingerichtet sein, daß zu zwei Zahlen x, y auch sofort die Potenz $y^x = z$ abgelesen werden kann. Durch zweimaliges Logarithmieren kommt man auf die Form $\lg x + \lg \lg y = \lg \lg z$, welche die drei Variablen getrennt erhält. Die Übereinstimmung mit der allgemeinen Gleichung $f(x) + g(y) = h(z)$ wird erreicht, wenn man setzt $u = f(x) = \varepsilon \lg x$; $v = g(y) = \vartheta + \varepsilon \lg \lg y$; $w = h(z) = \vartheta + \varepsilon \lg \lg z$. Hieraus geht hervor, daß zum Zweck der Potenzierung mit einem Rechenschieber zwei Skalen notwendig sind, die eine — nach dem einfachen logarithmischen Gesetze ähnlich wie die N, Q, K gebildet, die andere — nach einem etwas komplizierteren Gesetze, in welchem die Konstante ε denselben Wert hat wie bei der zugehörigen logarithmischen Skala, der Größe ϑ dagegen je nach der Größe der Zahlen, welche man auf dem Schieber haben will, beliebige konstante von ε unabhängige Werte beigelegt werden können. Soll α die am Anfang dieser doppeltlogarithmischen Skala stehende Zahl sein, so ist, da $u = 0$ wird: $0 = \vartheta + \varepsilon \lg \lg \alpha$, also $u = -\varepsilon \lg \lg \alpha + \varepsilon \lg \lg z$. Diese doppeltlogarithmische Skala, welche besonders in der Zinseszinsrechnung Verwendung findet, soll mit Z, eine Zahl auf ihr mit z bezeichnet werden.

Was die Wahl von ε angeht, so wird man über sie so verfügen, daß möglichst hohe Potenzen abgelesen werden können. Wenn man $\varepsilon = \lambda$ wählen, also $u = \lambda \lg x$ setzen würde, so würde man auf die Skala N geführt, welche als höchste Zahl die 10 hat. Für $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ kommt man auf die Skala Q: $u = \frac{\lambda}{2} \lg x$, deren größte Zahl die 100 ist; für $\varepsilon = \frac{\lambda}{3}$ ergibt sich die Skala K: $u = \frac{\lambda}{3} \lg x$, bei der die Zahlen bis 1000 anwachsen; und diese Zahl $\varepsilon = \frac{\lambda}{3}$ wollen wir im Folgenden bei der Skala Z ebenfalls verwendet denken: $u = \vartheta + \frac{\lambda}{3} \lg \lg z = \frac{\lambda}{3} \lg \lg z - \frac{\lambda}{3} \lg \lg \alpha$.

Mit diesem Skalenpaare wird die Potenzierung, die Radizierung und Logarithmierung in folgender Weise vorgenommen:

Nach dem Bildungsgesetze ist $\frac{\lambda}{3} \lg k_0 - \frac{\lambda}{3} \lg k = \vartheta + \frac{\lambda}{3} \lg \lg z_0 - \left(\vartheta + \frac{\lambda}{3} \lg \lg z \right)$
 oder $\lg k_0 - \lg k = \lg \lg z_0 - \lg \lg z$ oder $\lg \frac{k_0}{k} = \lg \frac{\lg z_0}{\lg z}$
 oder $\frac{k_0}{k} = \frac{\lg z_0}{\lg z}$ oder $z^{\frac{k_0}{k}} = z_0$.

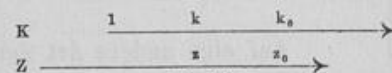
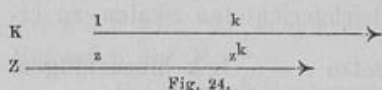
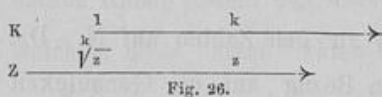


Fig. 23.

Hieraus folgt für $k=1$: $z^{k_0} = z_0$. Die Zahl z wird also auf die Potenz k_0 erhoben, indem man die Zahl z von Z unter die Zahl 1 von K setzt und mit Hilfe des Läufers unter k_0 von K die gesuchte Zahl z_0 auf Z abliest. Fig. 24.

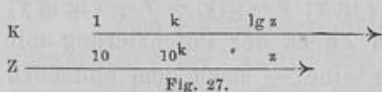


Für $k_0=1$ ergibt sich $z_0 = z^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{z}$. Man stellt (Fig. 25) k und z übereinander und liest unter

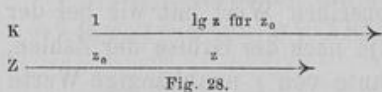


der 1 von K die Zahl $z_0 = \sqrt[k]{z}$ auf Z ab. Bei Potenzierungen und Radizierungen von echten Brüchen potenziert und radiziert man zunächst die reziproken Werte. Aus der Gleichung $z^{k_0} = z_0^k$ folgt für $k_0=1$:

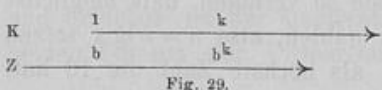
$k = \frac{\lg z}{\lg z_0}$ also für $z_0=10$: $k = \lg z$, d. h. stellt man die 10 von Z unter die 1 von K, so geben die Zahlen k die Logarithmen zu den Numeri z . Fig. 27.



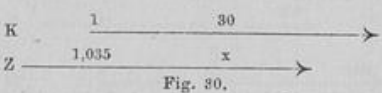
Die Formel $z_0^k = z$ läßt sich auch noch anders deuten, nämlich k ist der Logarithmus von z für die Basis z_0 . Will man diesen finden, so hat man nur nötig z_0 unter 1 von K zu stellen und nachzusehen, welche Zahl k über dem z von Z erscheint. Fig. 28.



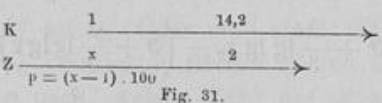
Dieses Verfahren kann benutzt werden, um von einem Logarithmensystem zum andern überzugehen. Sei z. B. k der Logarithmus einer Zahl für eine beliebige Basis b , und nun soll der Logarithmus derselben Zahl für die Basis z_0 gesucht werden. Man stelle nach Fig. 29 zunächst die 1 von K über b von Z und rücke den Läufer auf k , dann zeigt er auf Z die Zahl $z = b^k$ an. Diese Zahl merke man sich, stelle jetzt (Fig. 28) die 1 von K über z_0 von Z, und verschiebe den Läufer auf die gemerkte Zahl b^k , so steht darüber auf K der gesuchte Logarithmus für die Basis z_0 .



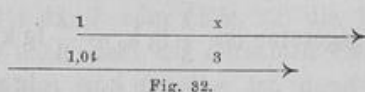
Das Skalenpaar K, Z findet seine vornehmlichste Anwendung in der Zinseszinsrechnung. Beispielsweise soll die Lösung einiger einfacher hierher gehöriger Aufgaben schematisch angedeutet werden.



a) Wie groß wird das Kapital 1, wenn es zu 3,5% 30 Jahre auf Zinseszins ausgeliehen ist? Fig. 30.



b) Zu wieviel Prozent ist das Kapital 1 ausgeliehen, wenn es sich durch Zinseszins in 14,2 Jahren verdoppelt? Fig. 31.

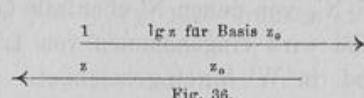
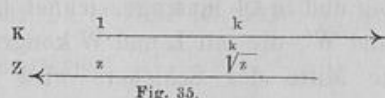
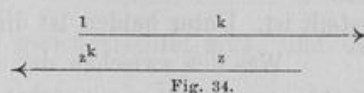
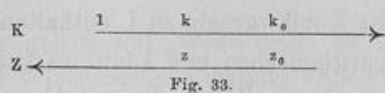


c) In wieviel Jahren verdreifacht sich ein Kapital bei 4% Zinseszinsen? Fig. 32.

Auf eine andere Art der Potenzierung und Radizierung wird man geführt, wenn die Skalen K und Z verschieden gerichtet sind. Sind k_0 , z_0 und k , z in diesem Falle

untereinander stehende Zahlen, so ist $\lg k_0 - \lg k = \lg \lg z - \lg \lg z_0$ oder $\frac{k_0}{k} = \frac{\lg z}{\lg z_0}$ oder $z^k = z_0^{k_0}$, d. h. wenn man z als Grundzahl und k als Exponenten ansieht, so ist z^k konstant.

Fig. 33. Wie groß diese Konstante, ergibt sich für $k_0 = 1$, nämlich gleich der unter der 1 von K stehenden Zahl z_0 . Man erhält daher als Schema für die Bildung von z^k die



Radizierung die Figur 35. Die zweite Art empfiehlt sich, wenn nach einander dieselbe Zahl auf verschiedene Potenzen erhoben oder aus ihr verschiedene Wurzeln gezogen werden sollen.

Ähnlich wie bei gleichgerichteten Skalen kann man bei entgegengesetzten Richtungen durch eine einzige Verschiebung des Stabes den Logarithmus für eine beliebige Basis finden. Fig. 36. Aus $z_0^{k_0} = z$ folgt, daß k_0 der Logarithmus von z für die Basis z_0 ist. Stellt man daher z unter 1, so steht unter k_0 die Zahl z_0 , für welche $z_0^{k_0} = z^1$ ist; d. h. aber über z_0 steht eine Zahl k_0 , welche der Logarithmus von z für die Basis z_0 ist. Will man also z. B. den natürlichen Logarithmus für z wissen, so stelle man z unter 1 und lese die Zahl ab, welche auf K über e von Z steht.

Unter Zugrundelegung der in diesem Paragraphen erörterten besonderen Bildungsgesetze hat der Verfasser einen Rechenstab konstruiert, der als eine Ergänzung und Erweiterung der bisher üblichen Rechenschieber aufzufassen sein soll. Zu den bisher schon verwendeten Skalen N, N', Q, Q' sind noch hinzugefügt die in den obigen Erörterungen als K, Z, L, L', W, W' und C bezeichneten Skalen. In der Anordnung der Skalen kann große Willkür herrschen. Der Verfasser hat es sich angelegen sein lassen, trotz der vermehrten Anzahl der Skalen die bisher übliche äußere Form des alten Instrumentes, vor allem den einzigen Schieber, beizubehalten. Dazu war es aber erforderlich, alle logarithmischen und die doppellogarithmische Skala nach einer und derselben Seite von Stab und Schieber und alle auf die Addition bezüglichen Skalen nach der andern Seite von Stab und Schieber zu weisen. Die vom Verfasser gewählte Anordnung ist folgende:

Am oberen Rande des Stabes befindet sich die Skala K, darunter die beiden Skalen Q und N. Diese beiden letzteren sind aber, um Platz zu sparen, nicht übereinander sondern ineinander gezeichnet. Damit sie sich aber gegenseitig nicht stören, ist die Skala N bunt und die Striche von Q etwas überragend gezeichnet. Diese Anordnung hat auch gegen die bis-

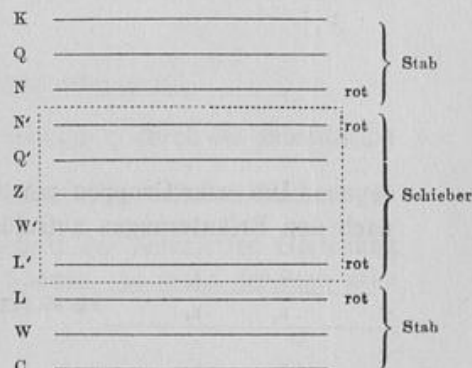


Fig. 37.

herigen Stäbe den Vorteil, daß sie das Ablesen der Quadratwurzel ohne Läufer gestattet. Der untere Teil des festen Stabes trägt an der dem Schieber zugekehrten Seite die beiden Skalen L und W, welche ähnlich wie Q und N in einander gezeichnet sind, und von denen die eine (L) zum Zwecke größerer Deutlichkeit wieder farbig hergestellt ist. Unter beiden ist die die Kubikwurzeln zu L enthaltende Skala C aufgetragen.

Was den zwischen den logarithmischen und Additionsskalen beweglichen Schieber angeht, so enthält er zunächst am oberen Rande die mit Q und N identischen Skalen Q', N', von denen N' ebenfalls farbig und in Q' hineingezeichnet ist. Der untere Schieberrand wird eingenommen von L' und W', die mit L und W kongruent sind. L' ist farbig und in W' hineingezeichnet. Die Mitte des Schiebers wird von der doppeltlogarithmischen Skala Z eingenommen.

Diese Anordnung der 11 Skalen ermöglicht es, die Breite des ganzen Instrumentes ungefähr ebenso groß zu lassen wie bei den üblichen Rechenschiebern und dabei doch die Übersichtlichkeit und Handlichkeit nicht zu beeinträchtigen. Ja, bei dem nach dieser Anordnung ausgeführten Stabe, der freilich, weil die einzelnen Skalenstriche ziemlich lang gezeichnet werden sollten, etwas breiter genommen wurde, als unbedingt nötig gewesen wäre, war sogar auf dem Schieber noch Platz für die Aufnahme zweier Skalen für die Tangenten und Sinus.

§ 3. Verwendung des Rechenstabes zur Lösung von Gleichungen.

Im letzten Teile des § 1 ist allgemein erörtert, welche vier Gruppen von Gleichungen sich mit Hilfe eines Skalenpaares lösen lassen. Hier soll nun untersucht werden, welcher Art die Gleichungen sind, die mit Hilfe des in § 2 besprochenen Rechenstabes lösbar sind, wenn man je zwei gegen einander verstellbare Skalen desselben als Repräsentanten des in § 1 durch das Bildungsgesetz $u = f(x)$, $v = g(y)$ charakterisierten Skalenpaares nimmt. Demnach wären folgende Zusammenstellungen von Skalen zu behandeln:

L'L; L'W; L'C; L'N; L'Q; L'K; LZ;
W'W; W'C; W'N; W'Q; W'K; WZ;
CN'; CQ'; CK; CZ;
NN'; N'Q; N'K; NZ;
QQ'; Q'K; QZ;
KZ.

Die vier Gruppen von Gleichungssystemen, welche in § 1 aufgestellt waren und nach den Erläuterungen aufzulösen sind, waren folgende:

A	$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ b_1 & b_2 \end{array}$	Fig. 38. $f(x_2) - f(x_1) = \pm (g(b_2) - g(b_1)); x_2 + x_1 = s$ oder $x_2 - x_1 = d$,
---	--	--

B	$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ y_1 & y_2 \end{array}$	Fig. 39. $g(y_2) - g(y_1) = \pm (f(a_2) - f(a_1)); y_2 + y_1 = s$ oder $y_2 - y_1 = d$,
---	--	--

$$f(x) \mp g(y) = f(a) \mp g(b); x + y = s \text{ oder } x - y = d,$$

Fig. 40. C

x	a
y	b

$$f(x_1) \pm g(y_2) = f(a_2) \pm g(b_1); x_1 + y_2 = s \text{ oder } x_1 - y_2 = d,$$

Fig. 41. D

x ₁	a ₂
b ₁	y ₂

worin das obere Zeichen gelten soll, wenn beide Skalen gleichgerichtet sind, und das untere Zeichen, wenn sie verschiedene Richtung haben.

1. Das Skalenpaar LL'. Hier ist $f(x) = \frac{\lambda}{100} x$, $g(y) = \frac{\lambda}{100} y$, also ergeben sich folgende vier Gleichungssysteme:

A. $x_2 - x_1 = \pm (b_2 - b_1)$; B. $y_2 - y_1 = \pm (a_2 - a_1)$; C. $x \mp y = a \mp b$; D. $x_1 \pm y_2 = a_2 \pm b_1$
 $x_2 - x_1 = s$ $y_2 + y_1 = s$ $x \pm y = \frac{s}{d}$ $x_1 \mp y_2 = \frac{s}{d}$

2. Das Paar L'W. $f(x) = \frac{\lambda}{100} x$; $g(y) = \frac{\lambda}{100} y^2$.

A. $x_2 - x_1 = \pm (b_2^2 - b_1^2)$; B. $y_2^2 - y_1^2 = \pm (a_2 - a_1)$; C. $x \mp y^2 = a \mp b^2$;
 $x_2 + x_1 = s$ $y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$ $x \pm y = \frac{s}{d}$
 D. $x_1 \pm y_2^2 = a_2 \pm b_1^2$
 $x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}$

Aus C und D folgt für $d = 0$:

E. $x \mp x^2 = a \mp b^2$; F. $x \pm x^2 = a_2 \pm b_1^2$.

3. Das Paar L'C. $f(x) = \frac{\lambda}{1000} \cdot 10x$; $g(y) = \frac{\lambda}{1000} y^3$.

A. $10x_2 - 10x_1 = \pm (b_2^3 - b_1^3)$; B. $y_2^3 - y_1^3 = \pm (a_2 - a_1)10$; C. $10x \mp y^3 = 10a \mp b^3$;
 $x_2 + x_1 = s$ $y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$ $x \pm y = \frac{s}{d}$
 D. $10x_1 \pm y_2^3 = 10a_2 \pm b_1^3$
 $x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}$

C und D ergeben für $d = 0$:

E. $10x \mp x^3 = 10a \mp b^3$; F. $10x \pm x^3 = 10a_2 \pm b_1^3$,

Auf die Formen E, F kann jede kubische Gleichung $z^3 \pm pz = \pm q$ durch die Substitution $z = x \sqrt[3]{\frac{p}{10}}$ gebracht werden. Da alle durch diese Substitution erforderlichen Rechnungen mit Hilfe der Skalen N, N', Q ausgeführt und die Wurzeln x der reduzierten Gleichung an der Skala L ohne Rechnung direkt abgelesen werden können, so giebt der Stab sehr bequem die reellen Wurzeln der kubischen Gleichung.

4. Das Paar L'N. $f(x) = \frac{\lambda}{100} x$; $g(y) = \lambda \lg y$.

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \frac{x_2 - x_1}{100} = \pm \lg \frac{b_2}{b_1}; & \text{B. } \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{(a_1 - a_2)}{100}}; & \text{C. } 10^{\pm \frac{x}{100}} \cdot y = 10^{\mp \frac{a}{100}} \cdot b; \\ x_2 + x_1 = s & y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} & x \pm y = \frac{s}{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{D. } 10^{\pm \frac{x_1}{100}} \cdot y_2 = 10^{\pm \frac{a_1}{100}} \cdot b_1 \\ x_1 \pm y_1 = \frac{s}{d}. \end{array}$$

Aus C und D folgt:

$$\text{E. } 10^{\mp \frac{x}{100}} \cdot x = 10^{\mp \frac{a}{100}} \cdot b, \text{ und F. } 10^{\pm \frac{x}{100}} \cdot x = 10^{\pm \frac{a_1}{100}} \cdot b_1.$$

$$5. \text{ Das Paar LQ. } f(x) = \frac{\lambda x}{100}; g(y) = \frac{\lambda}{2} \lg y.$$

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \frac{x_2 - x_1}{100} = \pm \frac{1}{2} \lg \frac{b_2}{b_1}; & \text{B. } \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{2(a_2 - a_1)}{100}}; & \text{C. } 10^{\mp \frac{2x}{100}} \cdot y = 10^{\mp \frac{2a}{100}} \cdot b; \\ x_2 + x_1 = s & y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} & x \pm y = \frac{s}{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{D. } 10^{\pm \frac{2x_1}{100}} \cdot y_2 = 10^{\pm \frac{2a_1}{100}} \cdot b_1. \\ x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}. \end{array}$$

Für $d=0$ folgt aus C und D:

$$\text{E. } 10^{\mp \frac{2x}{100}} \cdot x = 10^{\mp \frac{2a}{100}} \cdot b, \text{ und F. } 10^{\pm \frac{2x}{100}} \cdot x = 10^{\pm \frac{2a_1}{100}} \cdot b_1.$$

$$6. \text{ Das Paar L'K. } f(x) = \frac{\lambda x}{100}; g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg y.$$

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \frac{x_2 - x_1}{100} = \pm \frac{1}{3} \lg \frac{b_2}{b_1}; & \text{B. } \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{3(a_2 - a_1)}{100}}; & \text{C. } 10^{\mp \frac{3x}{100}} \cdot y = 10^{\mp \frac{3a}{100}} \cdot b; \\ x_2 + x_1 = s & y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} & x \pm y = \frac{s}{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{D. } 10^{\pm \frac{3x_1}{100}} \cdot y_2 = 10^{\pm \frac{3a_1}{100}} \cdot b_1. \\ x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}. \end{array}$$

C und D ergeben für $d=0$:

$$\text{E. } 10^{\mp \frac{3x}{100}} \cdot x = 10^{\mp \frac{3a}{100}} \cdot b, \text{ und F. } 10^{\pm \frac{3x}{100}} \cdot x = 10^{\pm \frac{3a_1}{100}} \cdot b_1.$$

$$7. \text{ Das Paar LZ. } f(x) = \frac{\lambda x}{100}, g(y) = \frac{1}{3} \lg \lg y + \vartheta.$$

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \frac{x_2 - x_1}{100} = \pm \frac{1}{3} \lg \frac{\lg b_2}{\lg b_1}; & \text{B. } y_2 = y_1 10^{\pm \frac{3(a_2 - a_1)}{100}}; & \text{C. } y 10^{\mp \frac{3x}{100}} = b 10^{\mp \frac{3a}{100}}; \\ x_2 + x_1 = s & y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} & x \pm y = \frac{s}{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{D. } y_2 10^{\pm \frac{3x_1}{100}} = b_1 10^{\pm \frac{3a_1}{100}}. \\ x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}. \end{array}$$

Spezielle Fälle ergeben sich aus C und D:

$$E. x^{10 \mp \frac{3x}{100}} = b^{10 \mp \frac{3a}{100}}; \quad F. x^{10 \pm \frac{3x}{100}} = b_1^{10 \pm \frac{3a_1}{100}}$$

$$8. \text{ Das Paar } W'W. \quad f(x) = \frac{\lambda x^2}{100}; \quad g(y) = \frac{\lambda y^2}{100}.$$

$$A. x_2^2 - x_1^2 = b_2^2 - b_1^2; \quad B. y_2^2 - y_1^2 = a_2^2 - a_1^2; \quad C. x^2 \mp y^2 = a^2 \mp b^2;$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \quad x \pm y = \frac{s}{d}$$

$$D. x_1^2 \pm y_2^2 = a_2^2 \pm b_1^2$$

$$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}.$$

Spezialfälle:

$$E. 2x^2 = a^2 + b^2; \quad F. 2x_1^2 = 2y_1^2 = a_2^2 + b_1^2.$$

$$9. \text{ Das Paar } W'C. \quad f(x) = \frac{\lambda 10 x^2}{1000}; \quad g(y) = \frac{\lambda y^3}{1000}.$$

Man erhält so folgende Gruppen lösbarer Gleichungen:

$$A. x_2^2 - x_1^2 = \pm \frac{1}{10} (b_2^3 - b_1^3); \quad B. (y_2^3 - y_1^3) = \pm (a_2^2 - a_1^2) 10;$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$$

$$C. x^2 \mp \frac{1}{10} y^3 = a^2 \mp \frac{1}{10} b^3; \quad D. x_1^2 \pm \frac{1}{10} y_2^3 = a_2^2 \pm \frac{1}{10} b_1^3$$

$$x \pm y = \frac{s}{d} \quad x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}$$

also, wenn die Unbekannten gleich werden sollen:

$$E. x^2 \mp \frac{1}{10} x^3 = a^2 \mp \frac{1}{10} b; \quad F. x^2 \pm \frac{1}{10} x^3 = a_2^2 \pm \frac{1}{10} b_1^3.$$

$$10. \text{ Das Paar } W'N. \quad f(x) = \frac{\lambda x^2}{100}; \quad g(y) = \lambda \lg y. \quad \text{Mithin:}$$

$$A. \frac{x_2^2 - x_1^2}{100} = \pm \lg \frac{b_2}{b_1}; \quad B. \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm (a_2^2 - a_1^2) \frac{1}{100}}; \quad C. 10^{\mp \frac{1}{100} x^2} \cdot y = 10^{\mp \frac{1}{100} a^2} \cdot b;$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \quad x \pm y = \frac{s}{d}$$

$$D. 10^{\pm \frac{1}{100} x_1^2} \cdot y_2 = 10^{\pm \frac{1}{100} a_2^2} \cdot b_1$$

$$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}.$$

Für $d=0$:

$$E. 10^{\mp \frac{1}{100} x^2} \cdot x = 10^{\mp \frac{1}{100} a^2} \cdot b; \quad F. 10^{\pm \frac{1}{100} x^2} \cdot x = 10^{\pm \frac{1}{100} a_2^2} \cdot b_1.$$

11. Das Paar W'Q. $f(x) = \frac{\lambda}{100} x^2$; $g(y) = \frac{\lambda}{2} \lg y$.

A. $\frac{x_2^2 - x_1^2}{100} = \pm \frac{1}{2} \lg \frac{b_2}{b_1}$; B. $\frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{2}{100} (a_2^2 - a_1^2)}$; C. $10^{\mp \frac{2x^2}{100}} \cdot y = 10^{\mp \frac{2a^2}{100}} \cdot b$;

$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$

$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$

$x \pm y = \frac{s}{d}$

D. $10^{\pm \frac{2x_1^2}{100}} \cdot y_2 = 10^{\pm \frac{2a_1^2}{100}} \cdot b_1$

$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}$.

Für $d=0$:

E. $10^{\mp \frac{2x^2}{100}} \cdot x = 10^{\mp \frac{2a^2}{100}} \cdot b$; F. $10^{\pm \frac{2x^2}{100}} \cdot x = 10^{\pm \frac{2a^2}{100}} \cdot b$.

12. Das Paar W'K. $f(x) = \frac{\lambda x^2}{100}$; $g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg y$.

A. $\frac{x_2^2 - x_1^2}{100} = \pm \frac{1}{3} \lg \frac{b_2}{b_1}$; B. $\frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{3}{100} (a_2^2 - a_1^2)}$; C. $10^{\mp \frac{3x^2}{100}} \cdot y = 10^{\mp \frac{3a^2}{100}} \cdot b$;

$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$

$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$

$x \pm y = \frac{s}{d}$

D. $10^{\pm \frac{3x_1^2}{100}} y_2 = 10^{\pm \frac{3a_1^2}{100}} b_1$.

$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}$.

E. $10^{\mp \frac{3x^2}{100}} \cdot x = 10^{\mp \frac{3a^2}{100}} \cdot b$; F. $10^{\pm \frac{3x^2}{100}} \cdot x = 10^{\pm \frac{3a^2}{100}} \cdot b$.

13. Das Paar WZ. $f(x) = \frac{\lambda x^2}{100}$; $g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg \lg y$.

A. $\frac{x_2^2 - x_1^2}{100} = \pm \frac{1}{3} \lg \lg \frac{b_2}{b_1}$; B. $y_2 = y_1 10^{\pm \frac{3}{100} (a_2^2 - a_1^2)}$; C. $y 10^{\mp \frac{3x^2}{100}} = b 10^{\mp \frac{3a^2}{100}}$;

$x_2 \pm x_1 = d$

$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$

$x \pm y = \frac{s}{d}$

D. $y_2 10^{\pm \frac{3x_1^2}{100}} = b_1 10^{\pm \frac{3a_1^2}{100}}$.

$y_2 \pm x_1 = d$.

E. $x 10^{\mp \frac{3x^2}{100}} = b 10^{\mp \frac{3a^2}{100}}$; F. $x 10^{\pm \frac{3x^2}{100}} = b 10^{\pm \frac{3a^2}{100}}$.

14. Das Paar CN'. $f(x) = \frac{\lambda x^3}{1000}$ und $g(y) = \lambda \lg y$.

$$\text{A. } \frac{x_2^3 - x_1^3}{1000} = \pm \lg \frac{b_2}{b_1}; \quad \text{B. } \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{1}{1000}(a_2^3 - a_1^3)}; \quad \text{C. } y \cdot 10^{\mp \frac{x^3}{1000}} = b \cdot 10^{\mp \frac{a^3}{1000}};$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \quad y \pm x = \frac{s}{d}$$

$$\text{D. } y_2 10^{\pm \frac{x_1^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{x_1^3}{1000}}.$$

$$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}.$$

$$\text{E. } x 10^{\mp \frac{x^3}{1000}} = b 10^{\mp \frac{a^3}{1000}}; \quad \text{F. } x 10^{\pm \frac{x^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{a_1^3}{1000}}.$$

$$15. \text{ Das Paar CQ. } f(x) = \frac{\lambda x^3}{1000}; \quad g(y) = \frac{\lambda}{2} \lg y.$$

$$\text{A. } \frac{x_2^3 - x_1^3}{1000} = \pm \frac{1}{2} \lg \frac{b_2}{b_1}; \quad \text{B. } \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{2(a_2^3 - a_1^3)}{1000}}; \quad \text{C. } y 10^{\pm \frac{2x^3}{1000}} = b \cdot 10^{\pm \frac{2a^3}{1000}};$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \quad y \pm x = \frac{s}{d}$$

$$\text{D. } y_2 \cdot 10^{\pm \frac{2x_1^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{2a_1^3}{1000}}.$$

$$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}.$$

$$\text{E. } x \cdot 10^{\mp \frac{2x^3}{1000}} = b 10^{\mp \frac{2a^3}{1000}}; \quad \text{F. } x 10^{\pm \frac{2x^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{2a_1^3}{1000}}.$$

$$16. \text{ Das Paar CK. } f(x) = \frac{\lambda x^3}{1000}; \quad g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg y.$$

$$\text{A. } \frac{x_2^3 - x_1^3}{1000} = \pm \frac{1}{3} \lg \frac{b_2}{b_1}; \quad \text{B. } \frac{y_2}{y_1} = 10^{\pm \frac{3(a_2^3 - a_1^3)}{1000}}; \quad \text{C. } y \cdot 10^{\mp \frac{3x^3}{1000}} = b 10^{\mp \frac{3a^3}{1000}};$$

$$x \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \quad y \pm x = \frac{s}{d}$$

$$\text{D. } y_2 10^{\pm \frac{3x_1^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{3a_1^3}{1000}}.$$

$$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}.$$

$$\text{E. } x 10^{\mp \frac{3x^3}{1000}} = b 10^{\mp \frac{3a^3}{1000}}; \quad \text{F. } x 10^{\pm \frac{3x^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{3a_1^3}{1000}}.$$

$$17. \text{ Das Paar CZ. } f(x) = \frac{\lambda x^3}{1000}; \quad g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg \lg y.$$

$$\text{A. } x_2^3 - x_1^3 = \pm \frac{1000}{3} \lg \frac{\lg b_2}{\lg b_1}; \quad \text{B. } y_2 = y_1 10^{\pm \frac{3(a_2^3 - a_1^3)}{1000}}; \quad \text{C. } y 10^{\mp \frac{3x^3}{1000}} = b 10^{\mp \frac{3a^3}{1000}};$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \quad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \quad y \pm x = \frac{s}{d}$$

$$D. y_2 10^{\pm \frac{3x_1^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{3a_1^3}{1000}}.$$

$$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}.$$

$$E. x 10^{\pm \frac{3x^3}{1000}} = b 10^{\pm \frac{3a^3}{1000}}; \quad F. x 10^{\pm \frac{3x^3}{1000}} = b_1 10^{\pm \frac{3a_1^3}{1000}}.$$

18. Das Paar N'N. $f(x) = \lambda \lg x$, $g(y) = \lambda \lg y$.

$$A. \frac{x_2}{x_1} = \frac{b_2}{b_1} \text{ oder } = \frac{b_1}{b_2}; \quad B. \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2}{a_1} \text{ oder } = \frac{a_1}{a_2}; \quad C. \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ oder } x \cdot y = ab;$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$$

$$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$$

$$x \pm y = \frac{s}{d}$$

$$D. x_1 \cdot y_2 = a_2 \cdot b_1 \text{ oder } \frac{x_1}{y_2} = \frac{a_2}{b_1}.$$

$$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}.$$

$$E. x^2 = ab; \quad F. x^2 = a_2 b_1.$$

19. Das Paar N'Q. $f(x) = \lambda \lg x$; $g(y) = \frac{\lambda}{2} \lg y$.

$$A. \frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}} \text{ oder } = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2}}; \quad B. \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \text{ oder } = \frac{a_1^2}{a_2^2}; \quad C. \frac{x^2}{y} = \frac{a^2}{b} \text{ oder } x^2 y = a^2 b;$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$$

$$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$$

$$x \pm y = \frac{s}{d}$$

$$D. x_1^2 \cdot y_2 = a_2^2 \cdot b_1 \text{ oder } \frac{x_1^2}{y_2} = \frac{a_2^2}{b_1}.$$

$$x_1 \pm y_1 = \frac{s}{d}.$$

$$E. x^3 = a^2 b; \quad F. x^3 = a_2^2 b_1.$$

20. Das Paar N'K. $f(x) = \lambda \lg x$; $g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg y$.

$$A. \frac{x_2}{x_1} = \sqrt[3]{\frac{b_2}{b_1}} \text{ oder } = \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}}; \quad B. \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \text{ oder } = \frac{a_1^3}{a_2^3}; \quad C. \frac{x^3}{y} = \frac{a^3}{b} \text{ oder } x^3 y = a^3 b;$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$$

$$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$$

$$x \pm y = \frac{s}{d}$$

$$D. x_1^3 \cdot y_2 = a_2^3 b_1 \text{ oder } \frac{x_1^3}{y_2} = \frac{a_2^3}{b_1}.$$

$$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}.$$

$$E. x^2 = \frac{a^3}{b} \text{ oder } x^4 = a^3 b; \quad F. x^4 = a_2^3 b_1 \text{ oder } x^2 = \frac{a_2^3}{b_1}.$$

21. Das Paar NZ. $f(x) = \lambda \lg x$; $g(y) = \vartheta + \frac{\lambda}{3} \lg \lg y$.

A. $\frac{x_2}{x_1} = \sqrt[3]{\frac{\lg b_2}{\lg b_1}}$ oder $= \sqrt[3]{\frac{\lg b_1}{\lg b_2}}$; B. $y_2^{a_1^3} = y_1^{a_2^3}$ oder $y_2^{a_2^3} = y_1^{a_1^3}$; C. $y^{x^3} = b^{a^3}$ oder $y^{\frac{1}{x^2}} = b^{\frac{1}{a^2}}$;

$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$

$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$

$x \pm y = \frac{s}{d}$

D. $y_2^{\frac{3}{x_1^2}} = b_1^{\frac{1}{a_1^2}}$ oder $y_2^{x_1^3} = b^{a_2^3}$.

$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$.

E. $x^{x^3} = b^{a^3}$ oder $x^{\frac{1}{x^2}} = b^{\frac{1}{a^2}}$; F. $x^{\frac{1}{x^2}} = b_1^{\frac{1}{a_1^2}}$; $x^{x^3} = b_1^{a_2^3}$.

22. Das Paar Q'Q. $f(x) = \frac{\lambda}{2} \lg x$; $g(y) = \frac{\lambda}{2} \lg y$. Die Gleichungen werden dieselben wie in 18.

23. Das Paar Q'K. $f(x) = \frac{\lambda}{2} \lg x$; $g(y) = \frac{\lambda}{3} \lg y$.

A. $\frac{x_2}{x_1} = \sqrt[3]{\frac{b_2^2}{b_1^2}}$ oder $= \sqrt[3]{\frac{b_1^2}{b_2^2}}$; B. $\frac{y_2}{y_1} = \sqrt[3]{\frac{a_2^3}{a_1^3}}$ oder $= \sqrt[3]{\frac{a_1^3}{a_2^3}}$; C. $\frac{x^3}{y^2} = \frac{a^3}{b^2}$ oder $x^3 \cdot y^2 = a^3 b^2$;

$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$

$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$

$x \pm y = \frac{s}{d}$

D. $x_1^3 y_2^2 = a_2^3 b_1^2$ oder $\frac{x_1^3}{y^2} = \frac{a_2^3}{b_1^2}$.

$x_1 \pm y_2 = \frac{s}{d}$.

E. $x^5 = a^3 b^2$; F. $x^5 = a_2^3 b_1^2$.

24. Das Paar QZ. $f(x) = \frac{\lambda}{2} \lg x$; $g(y) = \vartheta + \frac{\lambda}{3} \lg \lg y$.

A. $\frac{x_2}{x_1} = \sqrt[3]{\left(\frac{\lg b_2}{\lg b_1}\right)^2}$ oder $= \sqrt[3]{\left(\frac{\lg b_1}{\lg b_2}\right)^2}$; B. $y_2^{a_1^{3/2}} = y_1^{a_2^{3/2}}$ oder $y_2^{a_2^{3/2}} = y_1^{a_1^{3/2}}$;

$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$

$y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d}$

C. $y^{x^{3/2}} = b^{a^{3/2}}$ oder $y^{x^{-3/2}} = b^{a^{-3/2}}$; D. $y_2^{x_1^{-3/2}} = b_1^{a_2^{-3/2}}$ oder $y_2^{x_1^{3/2}} = b_1^{a_2^{3/2}}$.

$y \pm x = \frac{s}{d}$

$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$.

E. $x^{x^{3/2}} = b^{a^{3/2}}$ oder $x^{x^{-3/2}} = b^{a^{-3/2}}$; F. $x^{x^{-3/2}} = b_1^{a_2^{-3/2}}$ oder $x^{x^{3/2}} = b_1^{a_2^{3/2}}$.

25. Das Paar KZ. $f(x) = \frac{\lambda}{3} \lg x$; $g(y) = \vartheta + \frac{\lambda}{3} \lg \lg y$.

$$\text{A. } \frac{x_2}{x_1} = \frac{\lg b_2}{\lg b_1} \text{ oder } = \frac{\lg b_1}{\lg b_2}; \quad \text{B. } y_2^{a_1} = y_1^{a_2} \text{ oder } y_2^{a_2} = y_1^{a_1}; \quad \text{C. } y^x = b^a \text{ oder } y^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{a}};$$

$$x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d} \qquad y_2 \pm y_1 = \frac{s}{d} \qquad x \pm y = \frac{s}{d}$$

$$\text{D. } y_2^{\frac{1}{x_1}} = b_1^{\frac{1}{a_2}} \text{ oder } y_2^{x_1} = b_1^{a_2}.$$

$$y_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}.$$

$$\text{E. } x^x = b^a \text{ oder } x^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{a}}; \quad \text{F. } x^{\frac{1}{x}} = b_1^{\frac{1}{a_2}} \text{ oder } x^x = b_1^{a_2}.$$

Bei den additiven Skalen wird man zweckmäfsig einer von den beiden Konstanten a, b den Wert 0 oder 100, bei den logarithmischen Skalen den Wert 1,10 oder 100, bei den doppeltlogarithmischen den Wert 10 beilegen. Öfter empfiehlt es sich auch, beide konstanten Gröfsen einander gleich zu setzen. Die Ausdrücke auf den rechten Seiten der ersten Gleichung jedes Systems vereinfachen sich dadurch meist ganz wesentlich.

Von diesen Gleichungssystemen führen auf lineare Gleichungen: die Systeme 1A bis 7A und 18A bis 25A, ferner 1B, 2B, 4B, 5B, 6B, 10B, 11B, 12B, 14B, 15B, 16B, 18B, 19B, 20B, 22B, 23B, 1C, 1D, 8C und 8D.

Auf quadratische Gleichungen führen die Systeme 8A bis 13A, 2C, D, E, F; 8B, C, D, E, F; 18C, D, E, F.

Auf kubische Gleichungen kommt man durch die Systeme 14A bis 17A, 3, B C, D, E, F; 9B, C, D, E, F; 19C, D, E, F.

Auf biquadratische Gleichungen führen: 20C, D, E, F.

Gleichungen 5. Grades entstehen aus 23C, D, E, F.

Die Lösung der allgemeinen trinomischen Gleichung geht aus 25B hervor: denn sei zu lösen $px^m \pm qx^n = r$, so folgt durch die Substitution $x = y^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ die Gleichung $y \pm y^{\frac{n}{m}} = r \left(\frac{q^m}{p^n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$, das ist aber die Form, welche aus 25B sich ergibt, wenn man y_1 oder y_2 eliminiert, und die man mit Hilfe des Stabes lösen kann.

Transscendente Gleichungen, deren Lösung mit dem Rechenstabe möglich ist, liefern die Systeme 4C, D, E, F bis 7C, D, E, F; 10C, D, E, F bis 17C, D, E, F; 21 und 22C, D, E, F; 24 und 25C, D, E, F.

Hervorgehoben werden mag, dafs bei sämtlichen Gleichungen E und F die Wurzel der Gleichung ohne die Nebenrechnung direkt vom Stabe abgelesen werden kann.

Alle diese verschiedenen algebraischen und transscendenten Gleichungssysteme im einzelnen durchzugehen, insbesondere die Bedingungen zu erörtern, unter denen die Gleichungen auch dann noch mit dem Stabe auflösbar sind, wenn die Konstanten der Gleichungen nicht mehr innerhalb der Grenzen der Zahlen liegen, welche der Stab enthält, würde den Rahmen dieser Programmabhandlung überschreiten. Eine Behandlung dieser Aufgabe mufs für eine besondere Arbeit aufgespart bleiben.

A. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\lg b_2}{\lg b_1}$ oder $= \frac{\lg b_2}{\lg b_1}$
 $x_2 \pm x_1 = \frac{s}{d}$

E. $x^x =$

Bei den additiven Konstanten a, b den Wert 0 bis 100, bei den doppeltlogarithmischen, beide konstanten auf der rechten Seiten der ersten Gleichung ganz wesentlich.

Von diesen Gleichungen bis 7A und 18A bis 25B, 16B, 18B, 19B, 20B, 22B.

Auf quadratische Gleichungen C, D, E, F; 18C, D, E, F.

Auf kubische Gleichungen D, E, F; 9B, C, D, E, F.

Auf biquadratische Gleichungen 5. C.

Die Lösung der

sei zu lösen $px^m \pm qx^n =$

$y \pm y^{\frac{n}{m}} = r \left(\frac{q^m}{p^n} \right)^{\frac{1}{n-m}}$, das

oder y_2 eliminiert, und d

Transscendente Gleichungen liefern die Systeme 4C, 21 und 22C, D, E, F; 5.

Hervorgehoben werden die Gleichung ohne die

Alle diese verschiedenen einzelnen durchzugehen, Gleichungen auch dann Gleichungen nicht mehr enthält, würde den Rahmen dieser Aufgabe muß für

C. $y^x = b^a$ oder $y^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{a}}$;

$x \pm y = \frac{s}{d}$

$x^x = b_1^{a_2}$.

einer von den beiden Konstanten den Wert 1,10 oder

Öfter empfiehlt es sich

Die Ausdrücke auf den Gleichungen machen sich dadurch meist

Gleichungen: die Systeme 1A bis 10B, 11B, 12B, 14B, 15B,

bis 13A, 2C, D, E, F; 8B,

Systeme 14A bis 17A, 3, B C,

F.

geht aus 25B hervor: denn

$y^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{n-m}}$ die Gleichung

sich ergibt, wenn man y_1

tann.

in Rechenstabe möglich ist,

, E, F bis 17C, D, E, F;

Gleichungen E und F die Wurzel gezogen werden kann.

identen Gleichungssysteme im

erörtern, unter denen die

, wenn die Konstanten der

egen, welche der Stab ent-

heiten. Eine Behandlung

geben.

B.I.G.

M

Y

C

Grauskala #13

19

18

17

16

15

14

13

12

11

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

A

B