

Anhang.

Wir wollen noch eine Übersicht geben über die verschiedenen Fälle, in denen die Oktaedergleichung reducibel wird.

Ist $Z = 1 + \frac{a^2}{3}$, so erhalten wir 2 Faktoren,
angegeben p. 17.

ist weiter $a = \frac{-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2}{3(b^2 - b)}$, so erhalten wir 6 Faktoren,
angegeben p. 16.

„ „ $b = \frac{(c-1)^2}{-4c}$, so erhalten wir 12 Faktoren,
angegeben p. 19.

ist schliesslich $c = z_0^2$, so erhalten wir 24 Linearfaktoren.

Ist $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$, so erhalten wir 3 Faktoren,
angegeben p. 22.

ist ferner $R = r_2^2$, so erhalten wir 6 Faktoren,
angegeben p. 22.

„ „ $r_2 = 4i \frac{d}{(d-1)^2}$, so erhalten wir 12 Faktoren,
angegeben p. 26f.

„ „ $d = \frac{z_0^2 + (1+i)z_0 + i}{z_0^2 - (1+i)z_0 + i}$, so erhalten wir 24 Linearfaktoren.

Ist $Z = \frac{(r_1^2 + 14r_1 + 1)^3}{108r_1(r_1 - 1)^4}$, so erhalten wir 6 Faktoren,¹⁾
angegeben p. 21.

¹⁾ b, r_1, r_2 gehören bzw. zu $\mathfrak{G}_4$ (p. 12), $\mathfrak{G}_4^I$ (p. 20), $\mathfrak{G}_4^{II}$ (p. 21); da dies Untergruppen von $\mathfrak{G}_8$ sind, so könnten wir auch R , das zu $\mathfrak{G}_8$ (p. 22) gehört, als rationale Funktion von b und r_1 darstellen. Man erhält auch

durch das gewöhnliche Verfahren $R = \begin{cases} -1 + (1-2b)^2; \\ -\frac{1}{2} + \frac{r_1^2 + 1}{4r_1}; \end{cases}$ d. h. auch dann,

wenn R einen dieser Werte annimmt, zerfällt jeder der 3 Faktoren in 2 Faktoren vom Grade 4. Wir hätten also auch auf diese Weise die Zerlegung in 6 Faktoren vom Grade 4 erhalten können.

Ist $Z = 1 - \frac{8}{27} (2c'^2 - 4c' + 3)(c' + 1)^2$, so erhalten wir 4 Faktoren, angegeben p. 33.

ist ferner $c' = 1 + \frac{1}{2} (C - \frac{1}{2C})$, so erhalten wir 8 Faktoren, angegeben p. 32.

„ „ $C = \frac{i}{1-i} \cdot \frac{z_0^3 + (1+i)z_0^2 + iz_0}{z_0^2 - (1+i)z_0 + i}$, so erhalten wir 24 Linearfaktoren.

Für diese und nur für diese Werte von Z wird die Oktaedergleichung reducibel und zerfällt eindeutig in der angegebenen Weise. Dabei müssen immer die betreffenden Grössen ($a, b, c \dots$) rational bekannt sein, d. h. dem Rationalitätsbereich (P_0, i, Z) angehören. Je nachdem Z angenommen wird, wird sich (P_0, i, Z) ändern. Es ist darum noch einiges zu bemerken über die

Wahl des Rationalitätsbereiches.

In jedem Falle gilt, dass der Rationalitätsbereich i enthalten muss; denn dies war die Grundvoraussetzung, von der wir ausgingen.

Der einfachste Fall ist gegeben, wenn der Rationalitätsbereich (P_0, i) ist; dann muss sein $Z = s_0 + s_1 i$, wo s_0 und s_1 zu P_0 gehören. Wenn wir wollen, können wir statt jeder der obigen Beziehungen 2 Beziehungen zwischen reellen Grössen anschreiben. Aus

$$Z = 1 + \frac{1}{3} a^2 \text{ wird z. B. } s_0 + s_1 i = 1 + \frac{1}{3} (a_0 + a_1 i)^2$$

$$\text{oder } s_0 = 1 + \frac{1}{3} (a_0^2 - a_1^2); s_1 = \frac{2}{3} a_0 a_1;$$

nun gehören s_0, s_1, a_0, a_1 zu P_0 .

Der allgemeinere Fall ist jedoch: Z enthält die Irrationalität γ , die einer in Bezug auf (P_0, i) irreduciblen Gleichung vom Grade m genügt. Diese irreducible Gleichung für γ sei

$$c_0 + c_1 \gamma + \dots + c_{m-1} \gamma^{m-1} + \gamma^m = 0;$$

[$c_0, c_1 \dots c_{m-1}$ Grössen von (P_0, i)]. γ und die irreducible Gleichung für γ werden natürlich als bekannt vorausgesetzt. Der Rationalitätsbereich ist jetzt (P_0, i, γ) . Die Antwort auf die Frage: Für welche Werte von Z wird die Oktaedergleichung zerlegbar, z. B. in 3 Faktoren vom Grade 8, lautet zunächst

wie früher. Es muss sein $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$, wo R Grösse des Rationalitätsbereiches (P_0, i, γ) ist. Wenn aber R zu (P_0, i, γ) gehören soll, dann muss es sich schreiben lassen

$$R = a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_{m-1} \gamma^{m-1};$$

dabei $a_0, a_1 \dots$ Grössen von (P_0, i) . Z enthält die Irrationalität γ , hat sonach ebenfalls die Form

$$Z = b_0 + b_1 \gamma + \dots + b_{m-1} \gamma^{m-1};$$

Die Frage: Für welche Werte Z des Bereiches (P_0, i, γ) tritt die Zerlegung ein, ist jetzt genauer folgende: Welchen Bedingungen unterliegen $b_0, b_1 \dots b_{m-1}$, damit eine Zerlegung möglich ist?

Aus $Z = \frac{(R+4)^3}{27R^2}$ wird jetzt

$$b_0 + b_1 \gamma + \dots + b_{m-1} \gamma^{m-1} = \frac{(4 + a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_{m-1} \gamma^{m-1})^3}{27(a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_{m-1} \gamma^{m-1})^2};$$

Durch Benützung der irreduciblen Gleichung für γ kann ich die rechte Seite zuerst als ganze rationale Funktion von γ schreiben und dann diese noch umformen in eine rationale Funktion von γ , deren Grad $\leq m-1$. Die rechte Seite erscheint dann in der Form

$$A_0 + A_1 \gamma + \dots + A_{m-1} \gamma^{m-1}.$$

Dabei sind die A_ν rationale Funktionen der a_λ [die ganz beliebige Grössen von (P_0, i) sind] und der c_λ (Koeffizienten der irreduciblen Gleichung für γ). Die Bedingungen ergeben sich schliesslich in der Form

$$b_\gamma = A_\nu = \text{Rationale Funktion}(a_\lambda, c_\lambda);$$

Für jede einzelne Bedingung im Rationalitätsbereich (P_0, i, γ) erhalte ich m Bedingungen im Rationalitätsbereich (P_0, i) wenn m der Grad der irreduciblen Gleichung von γ im Rationalitätsbereich (P_0, i) ist.

